

ΘΕΜΑ 1 [0,5/10+0,5/10=1/10]

Έστω S είναι ένα κυλινδρικό (ορθό και κυκλικό) κουτί ύψους $h > 0$ με ακτίνα βάσης $r > 0$. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Ο όγκος που περικλείει το S είναι $\pi r^2 h$.
- (ii) Το εμβαδό της επιφάνειας του S είναι ίσο με $2\pi r(r + h)$.

ΘΕΜΑ 2 [0,5/10+0,5/10=1/10]

Αν D είναι ο μοναδιαίος δίσκος κέντρου $0_{\mathbb{R}^2}$ και B η μοναδιαία μπάλα κέντρου $0_{\mathbb{R}^3}$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

- (i) $I = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$,
- (ii) $J = \iiint_B (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz$.

ΘΕΜΑ 5 [1,5/10]

Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

- (i) $\int_C f$, όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 2, 0)$ στο $(-2, -1, 0)$, και $f(x, y, z) = 4x^3$.
- (ii) $\int_C \vec{F}$, όπου C είναι η καμπύλη $\{y = x^2, x \in [0, 1], z = 3\}$, και $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$, με $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, είναι συντηρητικό. Στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου C είναι μια απλή καμπύλη που ξεκινά από το σημείο $(1, 1, 0)$ και τελειώνει στο $(1, 1, 1)$.

ΘΕΜΑ 3 [1/10+1/10=2/10]

Χρησιμοποιώντας το Θ . Gauss, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

- (i) $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}$,
όπου $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$,
και $\vec{F}(x, y, z) := (1 - (x^2 + y^2)^3, 1 - (x^2 + y^2)^3, x^2 z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (ii) $\int_{\partial\Omega} f$,
όπου $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
και $f(x, y, z) := 3x + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 6 [1,5/10]

Χρησιμοποιήστε το Θ . Stokes για να υπολογίστε το $\int_C \vec{F}$, όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ και C είναι η τομή του κυλίνδρου $\{x^2 + y^2 = 3, z \in \mathbb{R}\}$ με το επίπεδο $x + y + z = 1$.

ΘΕΜΑ 7 [2/10]

Επαληθεύστε το Θ . Gauss για τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, x^2 + y^2)$, στο χωρίο

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια**Παραμετρικοποίηση κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :**

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια**Παραμετρικοποίηση της σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :**

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι τότε

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$