

Θέμα 1

Δίνετε ο πίνακας Butcher της κλασικής μεθόδου Runge-Kutta 4 σταδίων και 4ης τάξης

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Να εφαρμόσετε στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y' = -2y + x + 1$ με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ και να βρείτε την εκτίμηση y_1 του $y(x_1)$ με βήμα $h = 0.1$.

Να βρείτε την αναλυτική λύση.

Ποιο είναι το σφάλμα στην παραπάνω εκτίμηση ; ($e^{-0.2} = 0.8187$).

Θέμα 2

- Να γράψετε τη γενική μορφή της άμεσης μεθόδου Runge-Kutta με 4 στάδια.
- Να γράψετε τα δέντρα έως και τέταρτης τάξης και τις αντίστοιχες συνθήκες τάξης.
- Να επαληθεύσετε ότι η μέθοδος του θέματος 1 είναι τέταρτης τάξης.

Θέμα 3

- Θεωρήστε μέθοδο Runge-Kutta με 2 στάδια να βρείτε τις συνθήκες δεύτερης τάξης από τα αναπτύγματα Taylor της αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης.
- Από τις εξισώσεις τάξης κατασκευάστε μια άμεση και μια έμμεση μέθοδο και δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των μεθόδων αυτών καθώς και της μεθόδου Euler .

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή επιτυχία.