\documentclass{article}

\usepackage[english,greek]{babel}

\usepackage[iso-8859-7]{inputenc}

\usepackage{color}

\usepackage{amsmath}

\usepackage{amssymb}

\newcommand{\sg}{\selectlanguage{greek}}

\newcommand{\se}{\selectlanguage{english}}

\newcommand{\no}{\noindent}

%% Temporary solution for toc underfull vbox warning

%\renewcommand{\tableofcontents}{\tocfile{\contentsname\vspace{0.25\baselineskip}}{toc}}

% Language Selection

\selectlanguage{greek}

\title{Εργασία στο μάθημα\\

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων Ι\\

Μέρος 1ο}

\author{}

\date{Υποβολή έως 18 - 5 - 2025}

\begin{document}

\maketitle

\selectlanguage{greek}

Μια μέθοδος \se Runge-Kutta \sg τεσσάρων σταδίων έχει τη μορφή:

\begin{eqnarray\*}

k\_1 &=& f\left( x\_n , y\_n \right)\\

k\_2 &=& f\left( x\_n + c\_2 h, y\_n + h a\_{21} k\_1 \right)\\

k\_3 &=& f\left( x\_n + c\_3 h, y\_n + h\left( a\_{31} k\_1 + a\_{32} k\_2 \right) \right)\\

k\_4 &=& f\left( x\_n + c\_4 h, y\_n + h\left( a\_{41} k\_1 + a\_{42} k\_2 + a\_{43} k\_{3} \right) \right)\\

y\_{n + 1} & = & y\_n + h\left( b\_1 k\_1 + b\_2 k\_2 + b\_3 k\_3 + b\_4 k\_4 \right)

\end{eqnarray\*}

οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές $a\_{ij}$, $c\_i$, $b\_i$ ώστε η μέθοδος να είναι τέταρτης τάξης είναι:

\begin{eqnarray}

& & b\_1 + b\_2 + b\_3 + b\_4 = 1 \\

& & b\_2 c\_2 + b\_3 c\_3 + b\_4 c\_4 = \dfrac{1}{2} \\

& & b\_2 c\_2^2 + b\_3 c\_3^2 + b\_4 c\_4^2 = \dfrac{1}{3} \\

& & b\_3 a \_{32} c\_2 + b\_4 (a \_{42} c\_2 + a \_{43} c\_3) = \dfrac{1}{6}\\

& & b\_2 c\_2^3 + b\_3 c\_3^3 + b\_4 c\_4^3 = \dfrac{1}{4} \\

& & b\_3 c\_3 a \_{32} c\_2 + b\_4 c\_4 (a \_{42} c\_2 + a\_{43} c\_3 ) = \dfrac{1}{8}\\

& & b\_3 a \_{32} c\_2^2 + b\_4 (a\_{42} c\_2^2 + a \_{43} c\_3^2) = \dfrac{1}{12} \\

& & b\_4 a\_{43} a\_{32} c\_2 = \dfrac{1}{24}

\end{eqnarray}

Οι συνθήκες (1), (2) αντιστοιχούν στην 1η και 2η τάξη.\\

Οι συνθήκες (3) και (4) αντιστοιχούν στην 3η τάξη.\\

Οι συνθήκες (5 - 8) αντιστοιχούν στην 4η τάξη.\\

Επιπλέον έχουμε τις συνθήκες γραμμής:

\begin{eqnarray}

c\_2 & = & a\_{21}\\

c\_3 & = & a\_{31} + a\_{32}\\

c\_4 & = & a\_{41} + a\_{42} + a\_{43}

\end{eqnarray}

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των συνθηκών τάξης μαζί με τις συνθήκες γραμμής θεωρώντας τα $c\_2$, $c\_3$ ελεύθερες παραμέτρους και θέτοντας $c\_4=1$.\\

Παρατηρήστε ότι το σύστημα των εξισώσεων (1-3) και (5) είναι γραμμικό. Λύστε το σύστημα και βρείτε τα $b\_i$.\\

Το σύστημα των εξισώσεων (4), (6), (7) είναι γραμμικό ως προς τα $a\_{32}$, $a\_{42}$, $a\_{43}$.\\

Τι παρατηρείται για την εξίσωση (8)\se ; \sg\\

Λύστε το σύστημα των συνθηκών τάξης για τα $c\_i$ των δύο πρώτων μεθόδων της σελίδας 46.\\

Λύστε το σύστημα των συνθηκών τάξης ως προς $c\_2$ και $c\_3$.\\

Πως θα λύσετε το σύστημα συνθηκών τάξης για τα $c\_i$ της 3ης μεθόδου\se ; \sg

\noindent

Δημιουργήστε \se MATLAB function \sg η οποία να υλοποιεί όλες τις παραπάνω μεθόδους.

\end{document}