

Εργασία στο μάθημα
Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων Ι
Μέρος 1ο

Υποβολή έως 18 - 5 - 2025

Μια μέθοδος Runge-Kutta τεσσάρων σταδίων έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)\end{aligned}$$

οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a_{ij} , c_i , b_i ώστε η μέθοδος να είναι τέταρτης τάξης είναι:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \quad (1)$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{6} \quad (4)$$

$$b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{8} \quad (6)$$

$$b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) = \frac{1}{12} \quad (7)$$

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24} \quad (8)$$

Οι συνθήκες (1), (2) αντιστοιχούν στην 1η και 2η τάξη.

Οι συνθήκες (3) και (4) αντιστοιχούν στην 3η τάξη.

Οι συνθήκες (5 - 8) αντιστοιχούν στην 4η τάξη.

Επιπλέον έχουμε τις συνθήκες γραμμής:

$$c_2 = a_{21} \quad (9)$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32} \quad (10)$$

$$c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} \quad (11)$$

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των συνθηκών τάξης μαζί με τις συνθήκες γραμμής θεωρώντας τα c_2, c_3 ελεύθερες παραμέτρους και θέτοντας $c_4 = 1$.

Παρατηρήστε ότι το σύστημα των εξισώσεων (1-3) και (5) είναι γραμμικό. Λύστε το σύστημα και βρείτε τα b_i .

Το σύστημα των εξισώσεων (4), (6), (7) είναι γραμμικό ως προς τα a_{32}, a_{42}, a_{43} .

Τι παρατηρείται για την εξίσωση (8);

Λύστε το σύστημα των συνθηκών τάξης για τα c_i των δύο πρώτων μεθόδων της σελίδας 46.

Λύστε το σύστημα των συνθηκών τάξης ως προς c_2 και c_3 .

Πως θα λύσετε το σύστημα συνθηκών τάξης για τα c_i της 3ης μεθόδου;

Δημιουργήστε MATLAB function η οποία να υλοποιεί όλες τις παραπάνω μεθόδους.