Μαθηματικά 10

Παράγωγοι

Παράγωγος

- Η παράγωγος εκφράζει τη μεταβολή της τιμής μιας συνάρτησης σε σχέση με μια άλλη μεταβλητή.
- Η παράγωγος της θέσης ενός αυτοκινήτου (εξαρτημένη μεταβλητή – συνάρτηση – $y=f(x)$ σε σχέση με το χρόνο (ανεξάρτητη μεταβλητή – x) είναι η ταχύτητα του αντικειμένου.
- Δεύτερη Παράγωγος είναι η μεταβολή της μεταβολής
  - Στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι η επιτάχυνση

Συμβολισμοί και ορισμοί των παραγώγων σε σημείο

Ορισμός 1

συνάρτηση $y = f(x)$ σε ένα πεδίο ορισμού A με $x_0 \in A$

η παράγωγος της $f(x)$ στο x_0 δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Επίσης, η παράγωγος της f συμβολίζεται και ως εξής:

$$f'(x_0) = y'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'$$

Ορισμός 2: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- το x_0 βρίσκεται μέσα στο διάστημα Α
- υπάρχει το όριο $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- το όριο είναι πραγματικός αριθμός

Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup [x_0, b)$ ή $(a, x_0] \cup (x_0, b)$, δηλαδή διαστήματα με άκρα το x_0 όπου το ένα από αυτά είναι κλειστό, τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με συνθήκη

- $f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, δηλαδή οι πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες
- το όριο είναι πραγματικός αριθμός

Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι σύνολο της μορφής $[x_0, b)$,

δηλαδή κλειστό διάστημα από αριστερά με άκρο το x_0, τότε η συνάρτηση

f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν

- $f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- το όριο είναι πραγματικός αριθμός

Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι σύνολο της μορφής $(a, x_0]$, δηλαδή κλειστό διάστημα από δεξιά με άκρο το x_0, τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με συνθήκη

- $f^{'}(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- το όριο είναι πραγματικός αριθμός

Σημειώνεται ότι αν το όριο τείνει στο $\pm\infty$, τότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση τον 1^{o} ορισμό της παραγώγου,

$$f(x) = ax + b \quad \text{(συνάρτηση της ευθείας γραμμής)}$$

Λύση:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\alpha(x_0 + \Delta x) + b}^{ax+b} - \alpha \cdot x_0 - b}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x_0 + \alpha \Delta x - \alpha \cdot x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \alpha$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση τον 1^{o} ορισμό της παραγώγου,

$$f(x) = x^3$$

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{(x_0 + \Delta x)}^{x^3} - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3)}^{\tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha} - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$

$$= \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x}}^{\substack{\textit{Σπάμε το κλάσμα και χρησιμοποιούμε παράλληλα} \\ \textit{την ιδιότητα του αθροίσματος των ορίων}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0 \Delta x)}^{\textit{Κοινός παράγοντας το } \Delta x}}{\Delta x} + 0 =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x) = 3x_0^2$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση τον 1^{ο} ορισμό της παραγώγου,

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ ή αλλιώς } f(x) = \sqrt{x}$$

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{(x_0+\Delta x)^{1/2}}^{x^{1/2}} - x_0^{1/2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\frac{(x_0+\Delta x)^{1/2} - x_0^{1/2}}{\Delta x} \cdot \frac{(x_0+\Delta x)^{1/2} + x_0^{1/2}}{(x_0+\Delta x)^{1/2} + x_0^{1/2}}}^{\substack{\textit{πολλαπλασι άζουμε και διαιρο ύμε με τη συζυγ ή} \\ \textit{παρ άσταση } (x_0+\Delta x)^{1/2}+x_0^{1/2}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\left((x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (x_0^{\frac{1}{2}})^2}^{Ταυτότητα\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}}{\Delta x[(x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{(x_0 + \Delta x)^1 - x_0^1}^{Ταυτότητα\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}}{\Delta x[(x_0 + \Delta x)^{1/2} + x_0^{1/2}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left[(x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}}\right]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left[(x_0 + \Delta x)^{1/2} + x_0^{1/2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[(x_0 + 0)^{1/2} + x_0^{1/2}\right]} = \frac{1}{x_0^{1/2} + x_0^{1/2}} = \frac{1}{2x_0^{1/2}} = \frac{1}{2} x_0^{-1/2}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση τον 1^o ορισμό της παραγώγου, στο σημείο $x_0 = 2$.

$$f(x) = 4x^2 + 3$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{4(x_0 + \Delta x)^2 + 3}^{4\mathrm{x}^2 + 3} - (4x_0^2 + 3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 3 - 4x_0^2 - 3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4\Delta x^2 + 3 - 4x_0^2 - 3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x_0\Delta x + 4\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x_0 + 4\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 8x_0 + 4\Delta x = 8x_0$$

για $x_0 = 2$ έχουμε $f(2) = 8 \cdot 2 = 16.$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση το $2^{ο}$ ορισμό της παραγώγου, στο σημείο $x_0 = 2$.

$$f(x) = x^2 + 3$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathcal{R}$. Για $x_0 \in \mathcal{R}$ και $x \neq x_0$ ή $x \neq 2$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3 - (2^2 + 3)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση το 2^o ορισμό της παραγώγου, στο σημείο $x_0 = 2$.

$$f(x) = \sqrt{x} + 5$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $[0, +\infty)$, καθώς το υπόριζο πρέπει να είναι θετικό, δηλαδή $x \geq 0$. Για $x_0 \in [0, +\infty)$ και $x \neq x_0$ ή $x \neq 2$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} + 5 - (\sqrt{2} + 5)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}+5-\sqrt{2}-5\ )}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} =$$

$$= \overbrace{\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}^{\substack{\text{Για να αποφ ύγουμε την} \\ \text{απροσδιοριστ ία πολλαπλασι άζουμε} \\ \text{και διαιρο ύμε με τη συζυγ ή παρ άσταση}}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}^{\text{Ταυτότητα } (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση το 2^{o} ορισμό της παραγώγου, στο σημείο $x_0 = 0$.

$$f(x) = |x|$$

Λύση: Το πεδίου ορισμού της f είναι όλο το $\mathcal{R}$. Για $x_0 \in \mathcal{R}$ και $x \neq x_0$ ή $x \neq 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x > 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

παίρνουμε τις πλευρικές παραγώγους της f:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -1 = -1$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

συμπεραίνουμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

: Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης, με βάση το 2^{o} ορισμό της παραγώγου, στο σημείο $x_0 = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $A = \mathcal{R} - \{2\}$. Για $x_0 \in A$ και

$x \neq x_0$ ή $x \neq 2$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{\frac{4}{8x^2} - \frac{x^2}{8x^2}}^{\substack{\text{Ομώνυμα} \\ \text{κλάσματα}}}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{4-x^2}{8x^2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{4-x^2}{8x^2}}{\frac{x-2}{1}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \overbrace{\frac{4-x^2}{8x^2(x-2)}}^{\substack{\text{Πολλαπλασιάζουμε τους} \\ \text{άκρους όρους μεταξύ τους} \\ \text{για να βρούμε τον αριθμητή} \\ \text{και τους μέσους για να} \\ \text{βρούμε τον παρονομαστή}}} \quad = \lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{-(x-2)(x+2)}^{\substack{\text{Ταυτότητα } 4-x^2= \\ -(x-4)=-\left(x^2-2^2\right)}}}{8x^2(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-(x+2)}{8x^2} = -\frac{4}{8 \cdot 2^2} = -\frac{4}{8 \cdot 2^2} = -\frac{1}{8}$$

Κανόνες παραγώγισης

	συνάρτηση	παράγωγος
1	$f(x)$	$f'(x)$
2	c	0
3	x	1
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

	συνάρτηση	παράγωγος
5	x^n	nx^{n-1}
6	e^x	e^x
7	lnx	$\frac{1}{x}$
8	a^x	$a^x ln\alpha$

Κανόνες παραγώγισης

1	$(f+g)' = f' + g'$
2	$(f-g)' = f' - g'$
3	$(cf(x))' = cf'(x)$
4	$(fg)' = f'g + fg'$

5	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$
6	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
7	$\left(\frac{c}{g}\right)' = -\frac{c g'}{g^2}$
8	για $F(x) = (f \circ g)(x)$ ισχύει $F'(x) = f'\big(g(x)\big) g'(x)$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 3x - 2$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$.

$$f^{'}(x) = (3x - 2)^{'} = (3x)^{'} - (2)^{'} = 3 - 0 = 3$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = -2x^3 + x^2 + 2.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$.

$$y' = (-2x^3 + x^2 + 2)' =$$

$$= \overbrace{(-2x^3)' + (x^2)' + (2)'}^{(f+g)'=f'+g'} =$$

$$= \overbrace{-6x^2 + 2x + 0}^{-2x^3=-2\cdot 3x^2} = -6x^2 + 2x$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = (x-2)(x-5)$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$.

$$f'(x) = \left((x-2)(x-5)\right)' =$$

$$= \overbrace{(x-2)'(x-5) + (x-2)(x-5)'}^{(fg)' = f'g + fg'} =$$

$$= (x' - 2')(x-5) + (x-2)(x' - 5') =$$

- ***Να βρεθεί η παράγωγος***
- $f(x) = xlnx - x$

- *Να βρεθεί η παράγωγος*
- $f(x) = xlnx - x$
- *Λύση*
- $f'(x) = (xlnx - x)' = (xlnx)' - (x)' =$

$$= xlnx' + x'lnx - 1 = x\frac{1}{x} + lnx - 1 = lnx$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$F(x) = (x^2 - 2x)^5$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$. Η συνάρτηση F είναι σύνθετη συνάρτηση και συνεπώς η παράγωγός της θα στηριχθεί στον κανόνα: $F(x) = (fog)(x)$ και $F^{'}(x) = f^{'}\left(g(x)\right)g^{'}(x)$

1ος τρόπος:

Έστω $F(x) = (fog)(x) = (x^2 - 2x)^5$

Θέτουμε όπου $u = g(x) = x^2 - 2x$ και $f(u) = u^5$ συνεπώς $F(x) = f(g(x))$. Από τον κανόνα παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων έχουμε:

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) = f'(u)g'(x) = (u^5)'(x^2 - 2x)' =$$

$$= \cancel{4}u^{\cancel{5}}(2x - 2) = \overbrace{5(x^2 - 2x)^4(2x - 2)}^{\text{όπου } u=x^2-2x}$$

2^{ος} τρόπος:

Χρησιμοποιούμε κατευθείαν τον κανόνα παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων, δηλαδή:

$$\left(\left(x^2-2x\right)^5\right)' = \overbrace{5\left(x^2-2x\right)^4\left(x^2-2x\right)'}^{\begin{array}{c}\text{Έστω } u^n \text{ η σύνθετη συνάρτηση ,}\\ \text{τότε η παραγωγός της είναι ίση με:}\\ \text{την παράγωγος της } u^n \text{ δηλαδή}\\ \text{μείωση της δύναμης } nu^{n-1}\\ \text{επί την παράγωγο της βάσης } u'\end{array}} =$$

$$= 5\left(x^2-2x\right)^4(2x-2)$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = (3x^2 + 1)^3$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = (3x^2 + 1)^3$$

$$g = 3x^2 + 1$$

$$y' = {g^3}' = 3g^2 g' \Leftrightarrow 3(3x^2 + 1)^2(3x^2 + 1)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(3x^2 + 1)^2 * 6 * x$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$F(x) = \frac{5}{4 + x^2}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$, καθώς για κάθε $x \in \mathcal{R}$ η ποσότητα $4 + x^2 \neq 0$.

Η συνάρτηση F είναι σύνθετη συνάρτηση και συνεπώς η παράγωγός της θα στηριχθεί στον κανόνα: $F(x) = (fog)(x)$ και $F^{'}(x) = f^{'}\left(g(x)\right)g^{'}(x)$

1ος τρόπος:

Έστω

$$F(x) = (fog)(x) = \frac{5}{4+x^2} = 5(4+x^2)^{-1}$$

Θέτουμε όπου $u = g(x) = 4 + x^2$ και $f(u) = 5u^{-1}$

Συνεπώς $F(x) = f(g(x))$

Από τον κανόνα παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων έχουμε:

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) = f'(u)g'(x) =$$

$$= \overbrace{(5u^{-1})'}^{\substack{(x^n)'=nx^{n-1} \\ \text{ή} \\ (-1)5u^{-1-1}}} \ (4+x^2)' = -5u^{-2}(2x)$$

$$= \overbrace{-5(4+x^2)^{-2}(2x)}^{\text{όπου } u=4+x^2} = -5\frac{1}{(4+x^2)^2}2x =$$

$$= -\frac{10\chi}{(4+x^2)^2}$$

2^{ος} τρόπος:

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης $\left(\frac{c}{g}\right)' = -\frac{cg'}{g^2}$ όπου $c = 5$ και $g = 4 + x^2$

$$\left(\frac{5}{4+x^2}\right)' = -\frac{5(4+x^2)'}{(4+x^2)^2} = -\frac{5 \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = -\frac{10x}{(4+x^2)^2}$$

$3^{ος}$ τρόπος:

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$ όπου $f = 5$ και

$g = 4 + x^2$

$$\left(\frac{5}{4+x^2}\right)' = \frac{5'(4+x^2) - 5(4+x^2)'}{(4+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{0 \cdot (4+x^2)}^{\substack{Η\ παράγωγος \\ σταθεράς\ είναι \\ ίση\ με\ μηδέν}} - 5 \cdot (2x)}{(4+x^2)^2} = -\frac{10x}{(4+x^2)^2}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \frac{x^2 + 1}{5x - 3}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \frac{x^2+1}{5x-3}$$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{5x-3}\right)'$$

$$= \frac{(x^2+1)' * (5x-3) - (x^2+1) * (5x-3)'}{(5x-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x * (5x-3) - (x^2+1) * 5}{(5x-3)^2}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + 1}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + 1}$$

$$y = \sqrt{g}$$

$$y' = \sqrt{g}' = \frac{1}{2\sqrt{g}} g'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x + 1}} (x^3 + 2x + 1)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x + 1}} (3x^2 + 2)$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$F(x) = e^{x^2-2x}.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$. Η συνάρτηση F είναι σύνθετη συνάρτηση και συνεπώς η παράγωγός της θα στηριχθεί στον κανόνα: $F(x) = (fog)(x)$ και $F^{'}(x) = f^{'}\big(g(x)\big)g^{'}(x)$

1^{ος} τρόπος:

Έστω $F(x) = (fog)(x) = e^{x^2-2x}$

Θέτουμε όπου $u = g(x) = x^2 - 2x$ και $f(u) = e^u$

Συνεπώς, $F(x) = f(g(x))$

Από τον κανόνα παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων έχουμε:

$$F'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x) = f'(u)g'(x) = (e^u)'(x^2 - 2x)' =$$

$$= e^u(2x-2) = \overbrace{e^{x^2-2x}(2x-2)}^{\acute{o}\pi o \upsilon \;\; u = x^2-2x}$$

$2^{ος}$ τρόπος:

Χρησιμοποιούμε κατευθείαν τον κανόνα παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων, δηλαδή:

$$\left(e^{x^2-2x}\right)' = \overbrace{\left(e^{x^2-2x}\right)\left(x^2-2x\right)'}^{\begin{array}{c}\text{Έστω } e^{u} \text{ η σύνθετη συνάρτηση,}\\ \text{τότε η παράγωγός της είναι ίση με:}\\ \text{την παράγωγος της } e^{u},\\ \text{γνωρίζουμε ότι } (e^{u})' = e^{u}\\ \text{επί την παράγωγο της δύναμης } u'\end{array}} = \left(e^{x^2-2x}\right)(2x-2)$$

- ***Να βρεθεί η παράγωγος***
- $f(x) = \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

- *Να βρεθεί η παράγωγος*
- $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- *Λύση*
- $f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - (e^x)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} =$

$$= \frac{(e^x)(e^x - 1) - e^x * e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x * e^x - e^x - e^x * e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = (2x^2 - 4x + \sqrt{5})^3$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$.

$$\left((2x^2-4x+\sqrt{5})^3\right)' = \overbrace{3\left(2x^2-4x+\sqrt{5}\right)^2(2x^2-4x+\sqrt{5})'}^{\substack{\text{Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης:} \\ \text{για } u=2x^2-4x+\sqrt{5} \text{ έχουμε } u^3 \text{ και} \\ (u^3)'=3u^{3-1}\cdot u'}} =$$

$$= 3\left(2x^2-4x+\sqrt{5}\right)^2 \overbrace{\left(2x^2-4x+\sqrt{5}\right)'}^{\substack{\text{Παράγωγος αθροίσματος =} \\ \text{άθροισμα παραγώγων}}} =$$

$$= 3\left(2x^2-4x+\sqrt{5}\right)^2(4x-4)$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 2}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$, καθώς για κάθε $x \in \mathcal{R}$ η ποσότητα $x^2 + 2 \neq 0$.

$$\left(\frac{5x^2}{x^2+2}\right)' = \overbrace{\frac{(5x^2)'(x^2+2) - (5x^2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}}^{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} =$$

$$= \frac{(10x)(x^2+2) - (5x^2)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{(10x^3+20x) - (10x^3)}{(x^2+2)^2}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$, καθώς το υπόριζο είναι στην τρίτη ρίζα και συνεπώς μπορεί να λάβει αρνητικές και θετικές τιμές, βέβαια η έκφραση $x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ είναι $x^2 + 2 > 0$.

$$\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)' = \left((x^2+2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \overbrace{\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+2)'}^{\substack{\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma\ \ \sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\tau\eta\varsigma \\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ :\gamma\iota\alpha\ \ u=x^2+2 \\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \ u^{\frac{1}{3}}\ \kappa\alpha\iota \\ (u^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}\cdot u'}} =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2x)}^{(x^2+2)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}=(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = 2ln^3x$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0,+\infty)$, καθώς στη λογαριθμική συνάρτηση lnx, το $x>0$.

$$(2ln^3x)' = \overbrace{2\cdot 3ln^2x\cdot(lnx)'}^{\substack{\textit{Παράγωγος σύνθετης} \\ \textit{συνάρτησης}: 2u^3 \textit{ για} \\ u=lnx,\ \textit{συνεπώς} \\ (2u^3)'=6u^2\cdot u'}} = \frac{6ln^2x}{x}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \geq 2 \\ 2x^2+2 & \text{αν} < 2 \end{cases}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$.

- Για $x > 2$ $\quad (x+1)' = 1$
- Για $x < 2$ $\quad (2x^2+2)' = 4x$
- Για $x = 2$, η $x+1$ είναι συνεχής για να είναι όμως και παραγωγίσιμη στο εν λόγω σημείο θα πρέπει και οι πλευρικοί παράγωγοι

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

να είναι ίσοι.

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1-(2+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+2-(2\cdot 2^2+2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+2-10}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x^2-4)}{x-2}=$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{2(x^2 \ - 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} 2(x+2) = 8$$

Συνεπώς, $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ γεγονός που σημαίνει ότι

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 2 \\ 4x & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^4$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$(2x^4)' = 2 \cdot 4x^{4-1} = 8x^3$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι η παράγωγος της παραγώγου, δηλαδή,

$$f''(x) = (f'(x))' = (8x^3)' = 24x^2$$