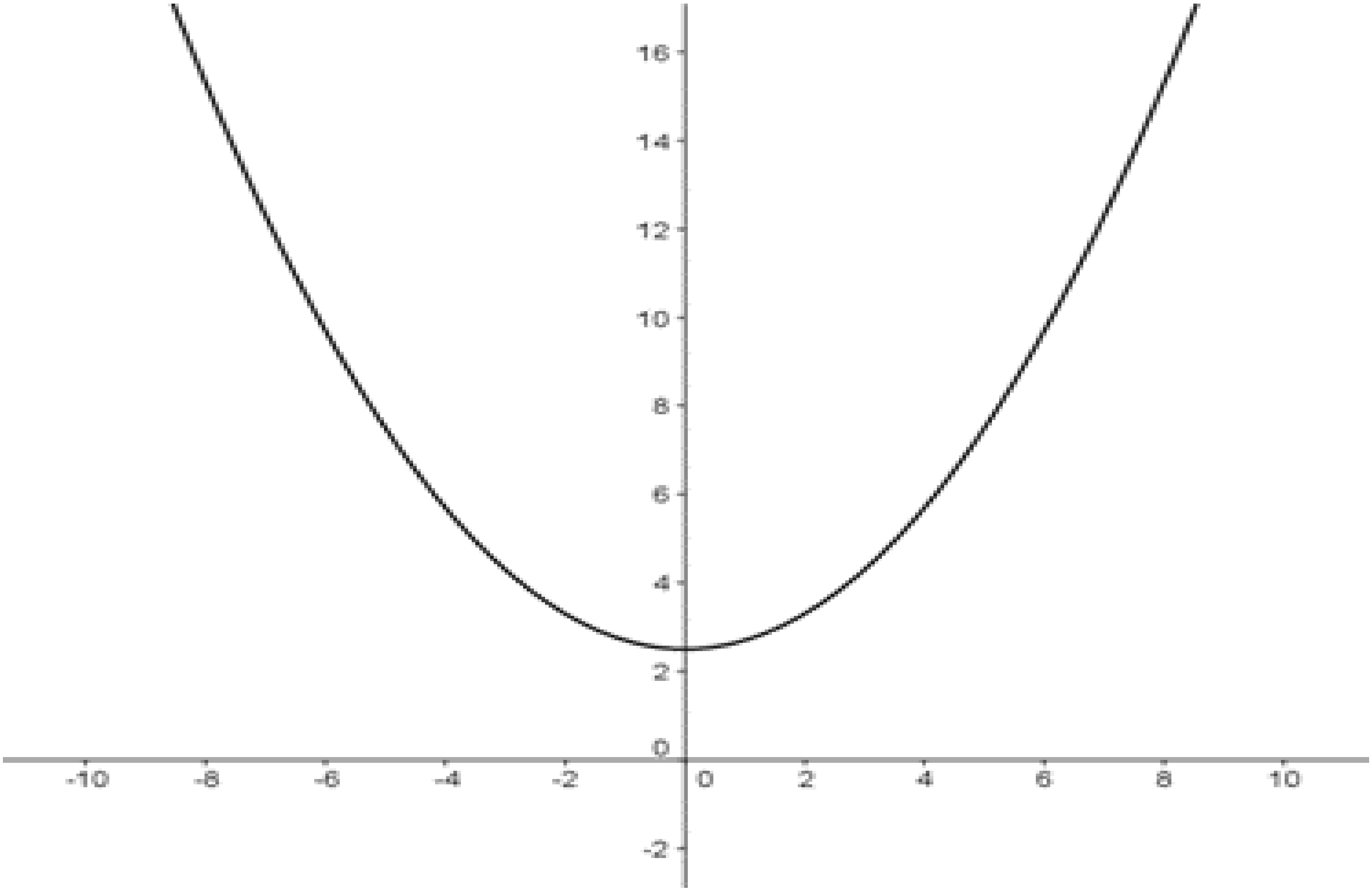
Μαθηματικά 8

Συνέχεια Συνάρτησης

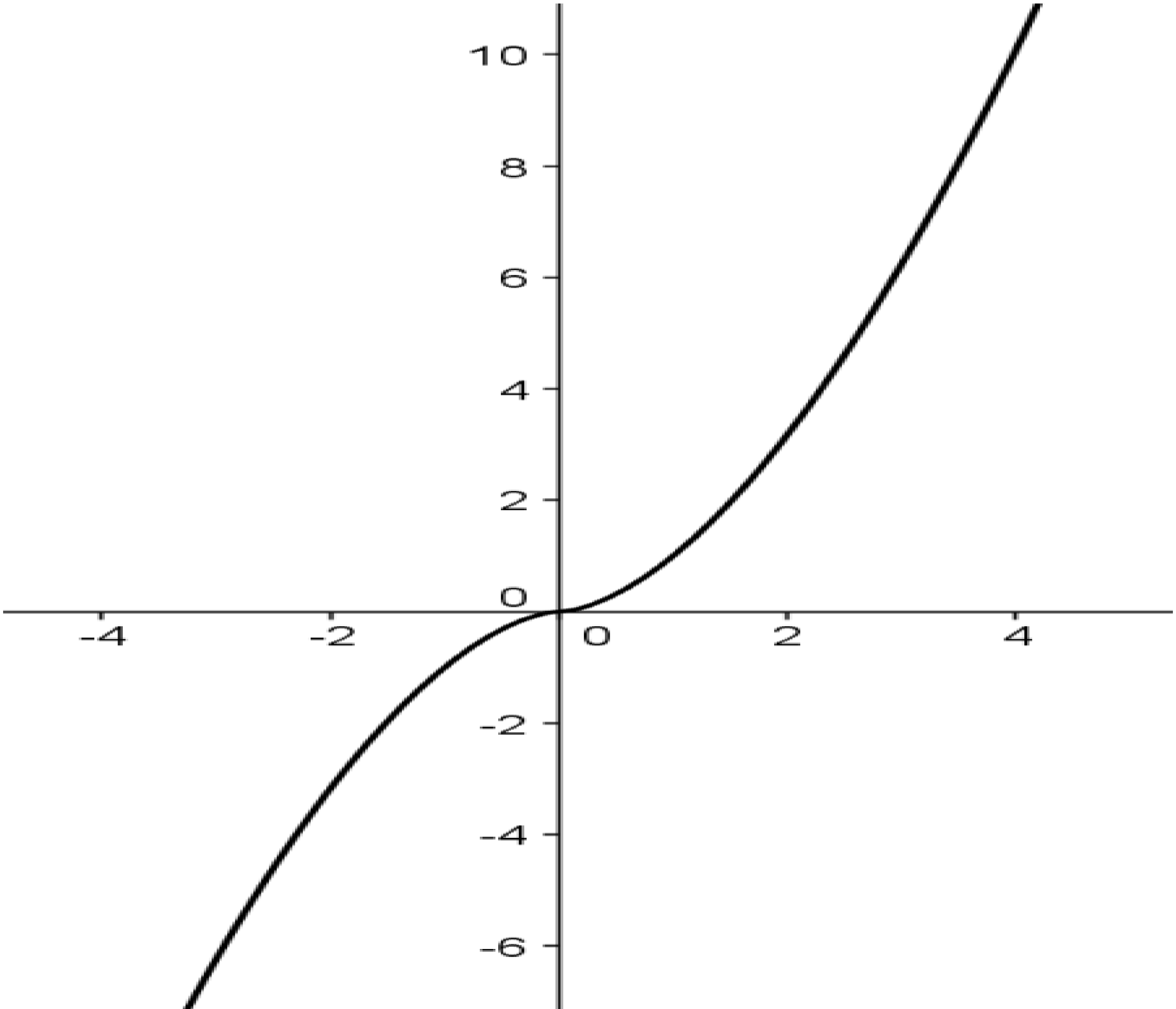
Η *συνέχεια* αναφέρεται στις περιπτώσεις των συναρτήσεων που γραφικά η γραμμή που αναπαριστά τη συνάρτηση δεν διακόπτεται (αν και αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό).

Γενικά, μια συνάρτηση f είναι *συνεχής* εάν οι όποιες μικρές μεταβολές στην τιμή της μεταβλητής x έχουν ως αποτέλεσμα μικρές μεταβολές στην τιμή της συνάρτησης f. Επειδή όμως ο ορισμός αυτός είναι σχετικά αόριστος, θα περιοριστούμε ορίζοντας τη συνέχεια σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

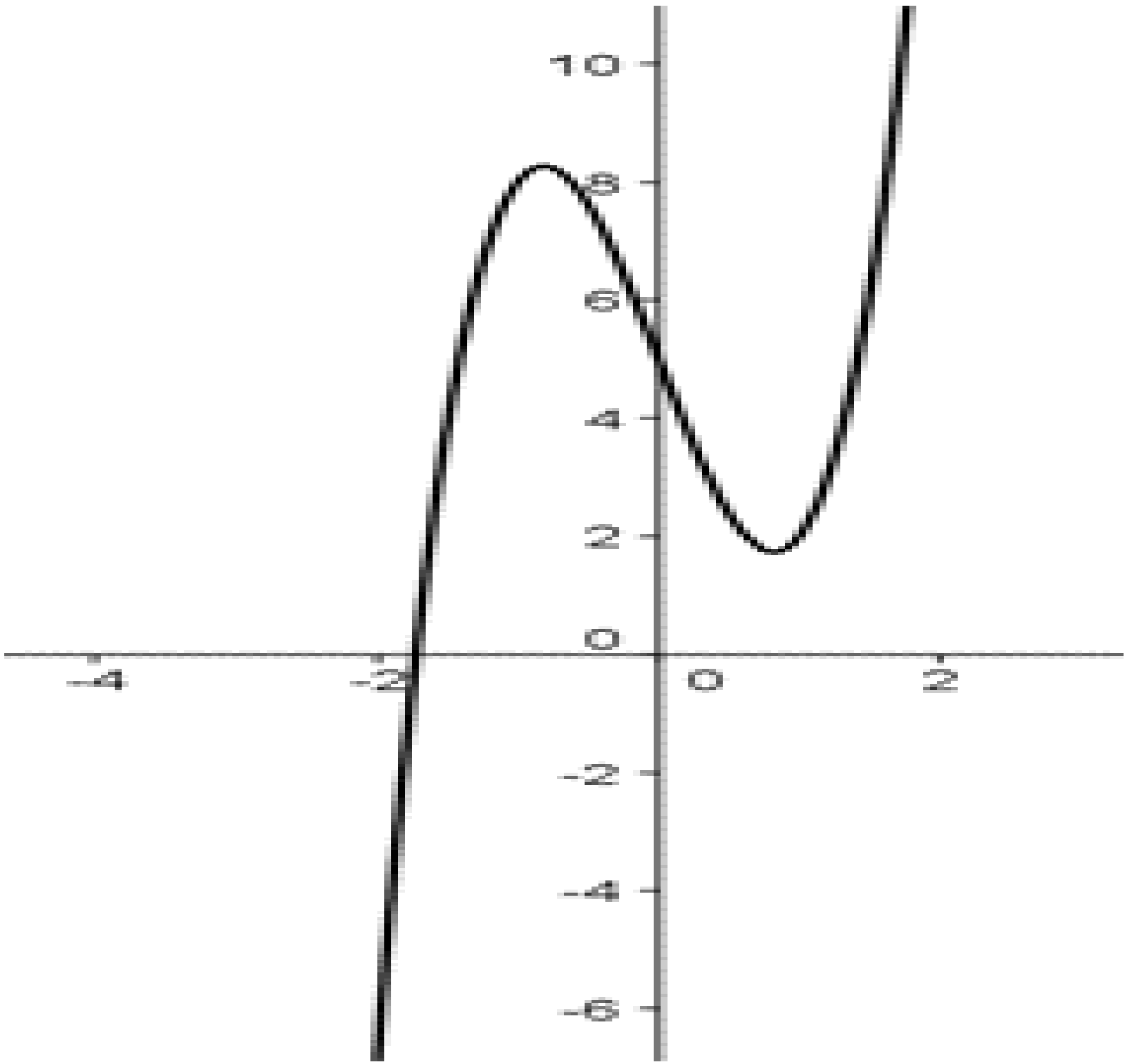
Συνεχείς συναρτήσεις



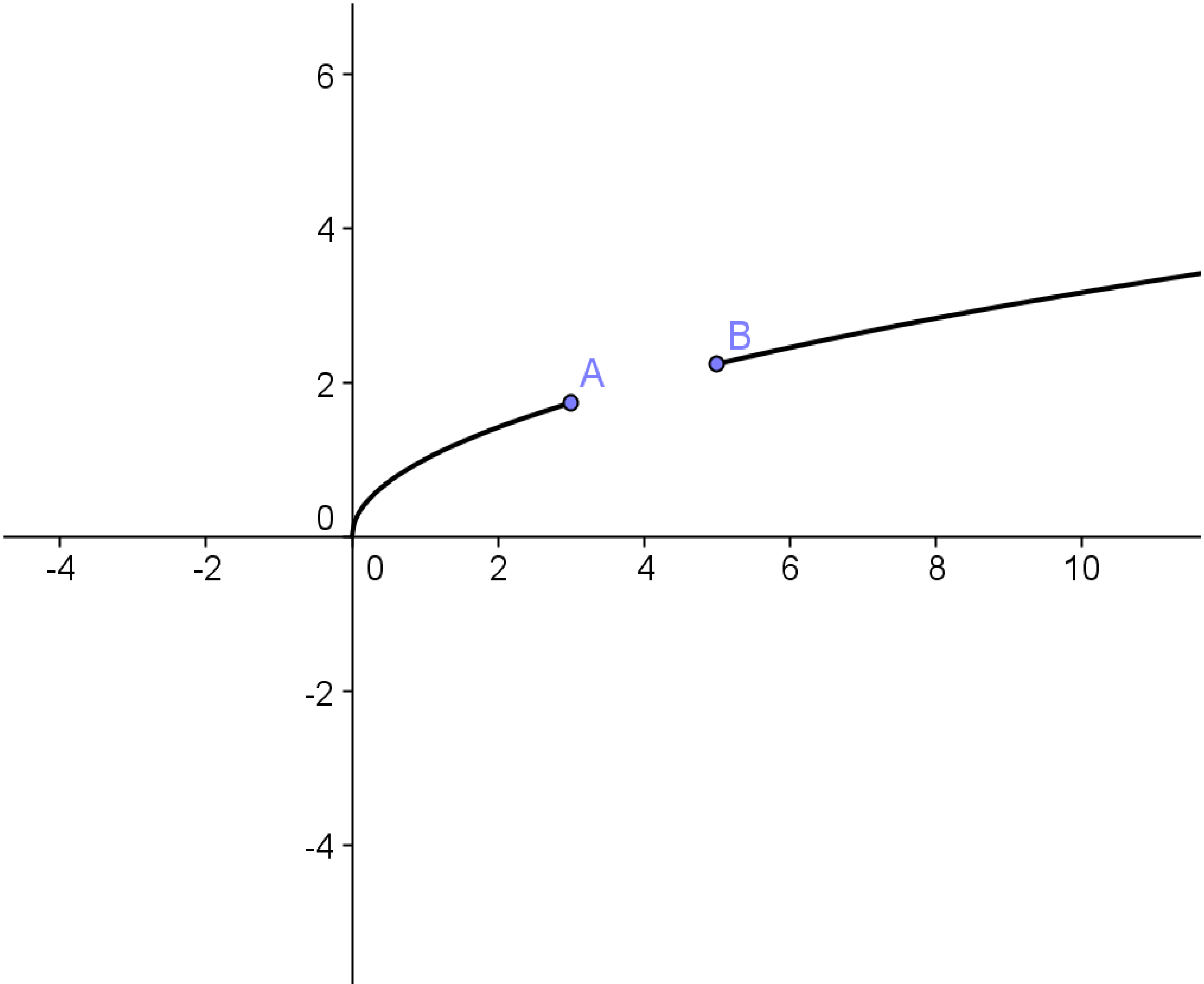
Συνεχείς συναρτήσεις



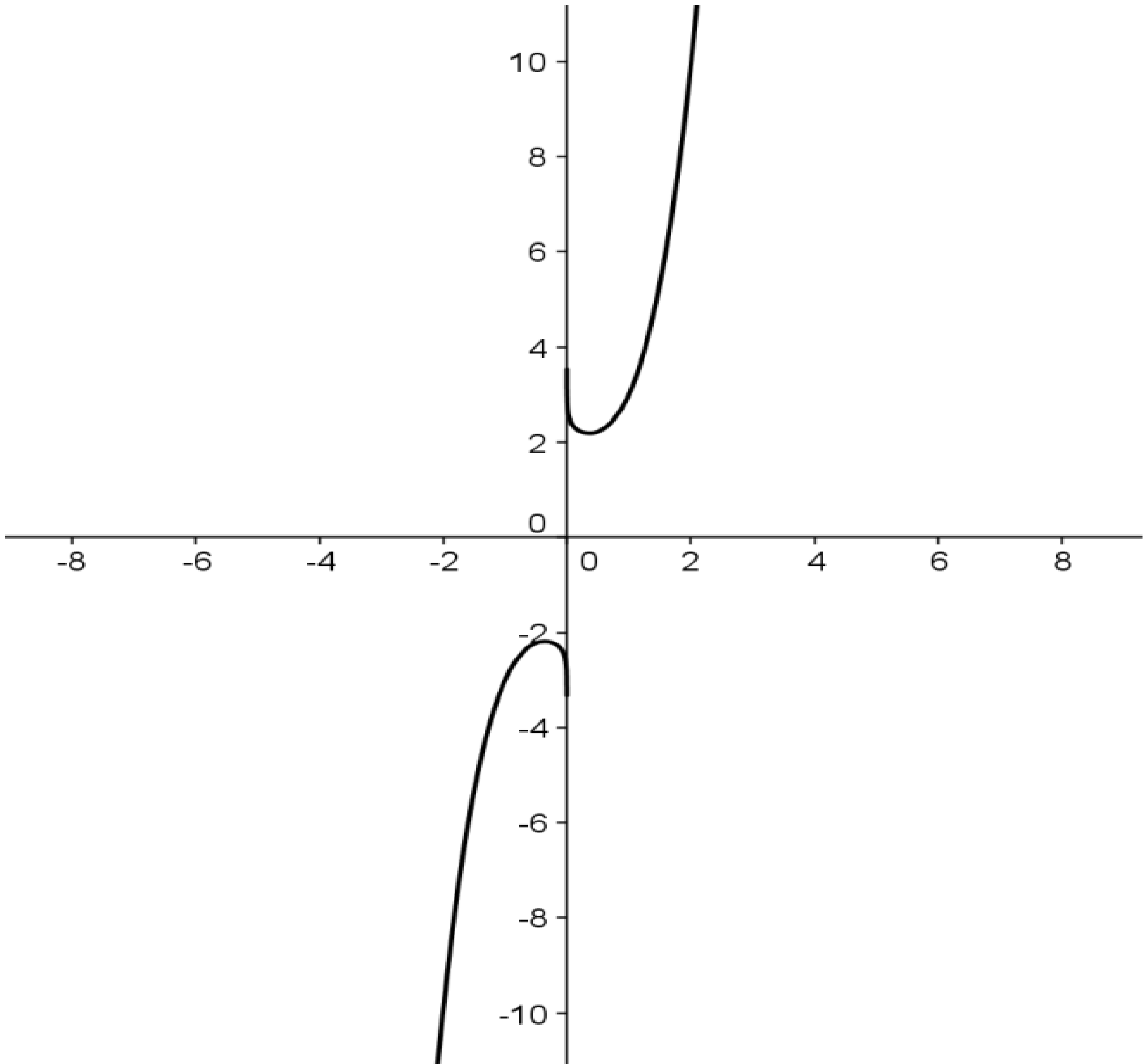
Συνεχείς συναρτήσεις



Ασυνεχείς συναρτήσεις



Ασυνεχείς συναρτήσεις



Αν $f: A \to \mathcal{R}$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A υποσύνολο του $\mathcal{R}$ $(A \subset \mathcal{R})$ και το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε η f ονομάζεται συνεχής στο x_0 αν

1. Υπάρχει το $f(x_0)$, δηλαδή το x_0ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
2. Το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ υπάρχει.
3. Ισχύει $f(x_0) = L$, δηλαδή η περίπτωση 1 να είναι ίση με την 2.

Οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να ενσωματωθούν στην πρόταση:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ όταν $x_0 = 1$

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής της $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x \neq 1$. Συνεπώς, η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ διότι δεν ορίζεται στο σημείο αυτό και επομένως δεν ισχύει η $1^η$ περίπτωση του παραπάνω ορισμού της συνέχειας. Σημειώνουμε ότι σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ονομάζονται σημεία *ασυνέχειας*.

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{x-1} & \alpha\nu\ x \neq 1 \\ 5 & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$ όταν $x_0 = 1$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathcal{R}$. Η 1η συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται, καθώς υπάρχει το $f(1) = 5$. Η 2η, όμως, συνθήκη, δεν ισχύει, διότι το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{7}{x-1}$ δεν υπάρχει. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τις περιπτώσεις III και IV του (βλέπε απόσπασμα παρακάτω) έχουμε:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{7}{x-1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{7}{x-1} = -\infty$

Πέραν του γεγονότος της διαφορετικότητας των πλευρικών ορίων, η όποια σύγκλιση γίνεται στο άπειρο.

Περίπτωση	III	IV
Όριο της συνάρτησης f	$c > 0$ ή $+\infty$	$c > 0$ ή $+\infty$
Όριο της συνάρτησης g	0 και $g > 0$	0 και $g < 0$
Όριο της συνάρτησης f/g	$+\infty$	$-\infty$

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{αν } x \neq 1 \\ 3 & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{όταν } x_0 = 1$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathcal{R}$. Η $1^{η}$ συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται, καθώς υπάρχει το $f(1) = 3$. Η $2^{η}$ συνθήκη επίσης ικανοποιείται διότι υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Η $3^{η}$ όμως, συνθήκη δεν ικανοποιείται διότι f(1)=3≠$f(1) = 3 \neq \lim_{x\to 1}\frac{\chi^2-1}{x-1} = 2$. Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής για $x_0 = 1$.

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{αν } x \neq 1 \\ \mathbf{2} & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{όταν} \quad x_0 = 1$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathcal{R}$. Η $1^{η}$ συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται, καθώς υπάρχει το $f(1)=2$. Η $2^{η}$ συνθήκη επίσης ικανοποιείται διότι υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\chi^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Τέλος, και η $3^{η}$ συνθήκη ικανοποιείται διότι

$$f(1)=2=\lim_{x\to 1}\frac{\chi^2-1}{x-1}=2$$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής για $x_0=1$.

*Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \varepsilon\alpha\nu\ x \neq 1 \\ 2 & \varepsilon\alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \varepsilon\alpha\nu\ x \neq 1 \\ 2 & \varepsilon\alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση f ορίζεται στο 1 καθώς f(1)=2

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3x - 5) = 3 * 1 - 5 = -2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq \lim_{x \to 1} f(1)$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση θα δύναται να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{αν } x \geq 2 \\ 3x + \lambda & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathcal{R}$. Θα υπολογίσουμε και θα εξισώσουμε τα πλευρικά όρια της f, διότι, όπως άλλωστε έχει ήδη αναφερθεί αρκετές φορές, η ύπαρξη ορίου σε ένα σημείο x_0 προϋποθέτει την εξίσωση των πλευρικών της ορίων.

$$\lim_{x \to 2^+} 2x^2 - 1 = \lim_{x \to 2^-} 3x + \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^2 - 1 = 3 \cdot 2 + \lambda \Leftrightarrow 7 = 6 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση θα δύναται να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 5\lambda & \text{αν } x \geq 1 \\ x + 4\lambda & \text{αν } x < \mathbf{1} \end{cases}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathcal{R}$. Θα υπολογίσουμε και εξισώσουμε τα πλευρικά όρια της f, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή

$$\lim_{x \to 1^+} 7x + 5\lambda = \lim_{x \to 1^-} x + 4\lambda \Rightarrow 7 \cdot 1 + 5\lambda = 1 + 4\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 - 1 = -5\lambda + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -6$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση θα δύναται να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} e^{4x+2\lambda} & \text{αν } x \geq 0 \\ 2x+4 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathcal{R}$. Θα υπολογίσουμε και θα εξισώσουμε τα πλευρικά όρια της f, δηλαδή

$$\lim_{x \to 0^+} e^{4x+2\lambda} = \lim_{x \to 0^-} 2x + 4 \Rightarrow e^{4 \cdot 0 + 2\lambda} = 2 \cdot 0 + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2\lambda} = 4 \xRightarrow[]{\substack{\text{Λογαριθμίζουμε} \\ \text{και τα δυο μέλη}}} ln e^{2\lambda} = ln4 \Rightarrow 2\lambda = ln4 \Rightarrow \lambda = \frac{ln4}{2}$$

*Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση δύναται να είναι συνεχής για x=1

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3\lambda & \varepsilon\alpha\nu\ x \neq 1 \\ 2\lambda - 1 & \varepsilon\alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

*Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση δύναται να είναι συνεχής

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3\lambda & \varepsilon\alpha\nu\ x \neq 1 \\ 2\lambda - 1 & \varepsilon\alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x + 3\lambda) = 2 * 1 + 3\lambda = 2\lambda - 1$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda - 2\lambda = -1 - 2 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η παρακάτω συνάρτηση δύναται να είναι συνεχής για χ=0

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \lambda^2 & \varepsilon\alpha\nu\ x \neq 0 \\ 2\lambda - 1 & \varepsilon\alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \lambda^2 & \varepsilon\alpha\nu \ x \neq 0 \\ 2\lambda - 1 & \varepsilon\alpha\nu \ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x + \lambda^2) = 2 * 0 + \lambda^2 = 2\lambda - 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Παράδειγμα : Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της παρακάτω συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Λύση: Η $f(x) = 2x - 1$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης, η $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Για να χαρακτηριστεί, γενικώς, συνεχής η f θα πρέπει να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή και στο σημείο $x = 1$. Διερευνούμε, λοιπόν, τη συνέχεια και στο σημείο αυτό:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1^2 = 1$$

Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση f σε ένα σημείο x_0 θα πρέπει να ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Πράγματι, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$και επομένως μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνεχής στο $\mathcal{R}$.

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x) = |x - 3|$$

Λύση: Η συνάρτηση βρίσκεται σε απόλυτη τιμή και διαφοροποιείται ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή x. Συγκεκριμένα,

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{αν } x>3 \\ -(x-3) & \text{αν } x<3 \\ 0 & \text{αν } x=3 \end{cases}$$

Η $f(x)$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στις περιπτώσεις $x-3$ και $-(x-3)$. Μένει, λοιπόν, να διερευνηθεί η περίπτωση του $x=3$. Για να διαπιστώσουμε την ύπαρξη ορίου για $x=3$ θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια του εν λόγω σημείου

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-3) = 0$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -(x-3) = 0$$

Συνεπώς, το όριο για $x = 3$ υπάρχει, αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$. Επίσης, η συνάρτηση είναι συνεχής, αφού $\lim_{x\to 3} f(x) = f(x_0) = 0$. Συμπεραίνουμε επομένως, ότι η συνάρτηση μπορεί να χαρακτηριστεί συνεχής σε όλο το $\mathcal{R}$.

Παράδειγμα: Να αποφανθείτε για τη συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x^2 - 4|}$$

Λύση: Για να έχει νόημα η συνάρτηση θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός. Συγκεκριμένα,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x^2 - 4|} = \frac{x^2 - 4}{|(x-2)(x+2)|}$$

που σημαίνει ότι η f δεν ορίζεται για $x = 2$ ή $x = -2$. Επιπλέον, ο παρονομαστής βρίσκεται σε απόλυτη τιμή και συνεπώς η συνάρτηση f διαφοροποιείται ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή x.

Ο παρονομαστής $|x^2 - 4|$ έχει δυο ρίζες $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και λαμβάνει θετικές τιμές όταν $x < -2$ και $x > 2$, ενώ αντίστοιχα λαμβάνει αρνητικές τιμές για $-2 < x < 2$

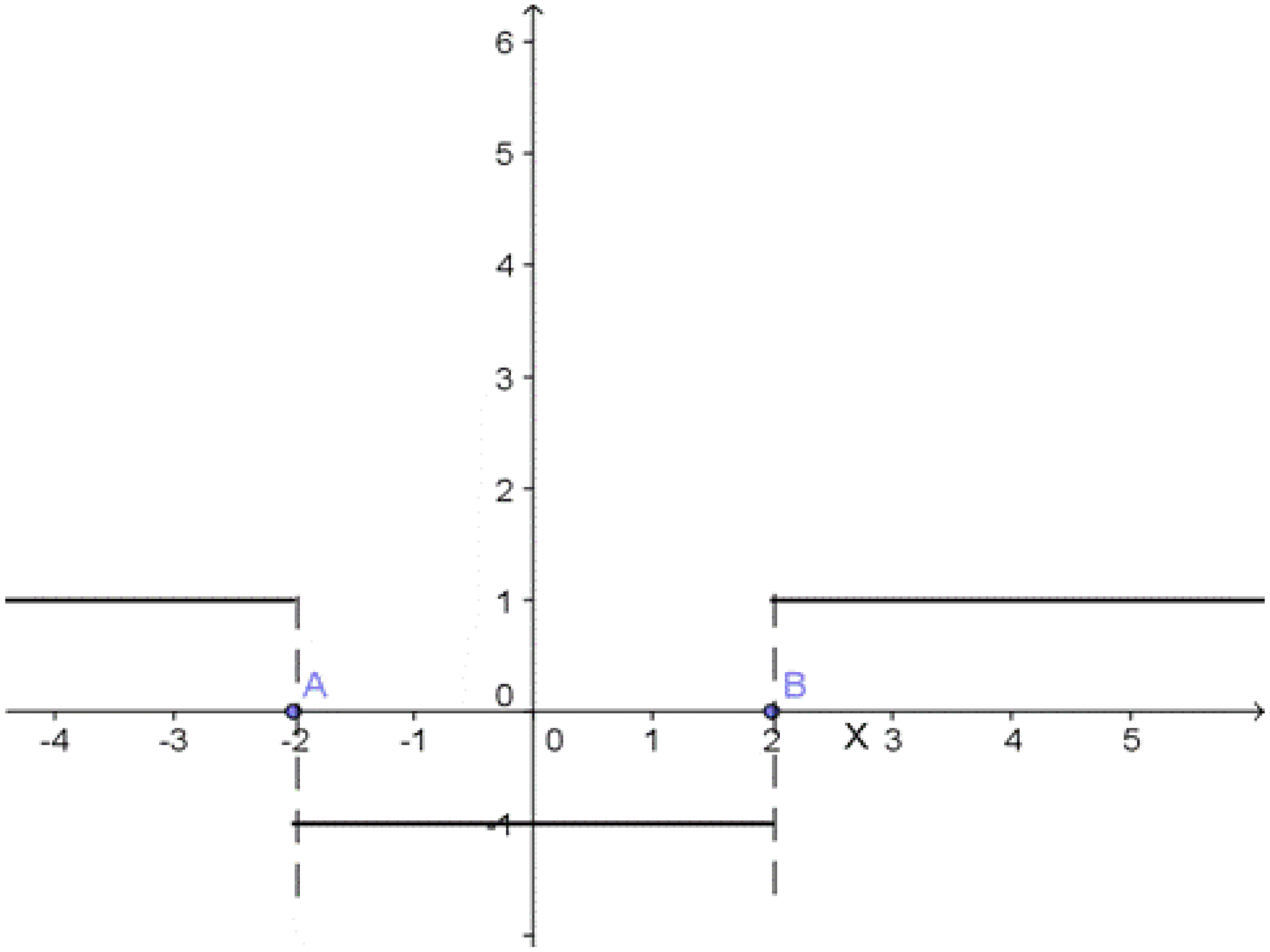
x	$-\infty \qquad -2$	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$+$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-4} & \text{αν } x > 2 \text{ ή } x < -2 \\ -\dfrac{x^2-4}{x^2-4} & \text{αν } -2 < x < 2 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{αν } x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 2 \text{ ή } x < -2 \\ -1 & \text{αν } -2 < x < 2 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{αν } x = \pm 2 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $\mathcal{R} - \{-1, 1\}$,

Όμως στα σημεία -1 και 1, η f δεν μπορεί να χαρακτηριστεί **συνεχής** καθώς δεν ορίζεται σε αυτά τα σημεία.



6
5
4
3
2
1
0
-1
A
B
-4
-3
-2
-1
0
1
2
X
3
4
5

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή του $c \in \mathcal{R}$, έτσι ώστε η παρακάτω συνάρτηση να χαρακτηρίζεται συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{αν } x > 2 \\ cx - 3 & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{R}$. Για να χαρακτηριστεί η συνάρτηση συνεχής θα πρέπει να είναι συνεχής σε όλο το $\mathcal{R}$. Για $x > 2$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση και για $x < 2$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Συνθήκη για να είναι συνεχής η συνάρτηση και στο σημείο $x = 2$, είναι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Συνεπώς, θα πρέπει κατ’ αρχήν να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$, επομένως θα διερευνηθεί η ισότητα των πλευρικών ορίων που αποτελεί συνθήκη για την ύπαρξη του ορίου.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} cx - 3 = 2c - 3$$

Θα πρέπει επίσης

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4 = 2c - 3 \Leftrightarrow 2c = 4 + 3 \Leftrightarrow c = \frac{7}{2}$$

Εάν, λοιπόν, $c = \frac{7}{2}$ τότε εξασφαλίζεται, όχι μόνο η ύπαρξη του ορίου, αλλά

και η ισότητα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, αφού για $x_0 = 2$ η $f(2)$ θα ισούται με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^2}{2-1} \\ \lambda 2 - 3 \end{cases} \overset{c=\frac{7}{2}}{\Longleftrightarrow} f(x) = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{7}{2} 2 - 3 \end{cases} \overset{c=\frac{7}{2}}{\Longleftrightarrow} f(x) = \begin{cases} 4 \\ 4 \end{cases}$$

Για $c \neq \frac{7}{2}$ τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και επομένως

χαρακτηρίζεται ασυνεχής στο $\mathcal{R}$.

Παράδειγμα: Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f.

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } x \leq 2 \; και \; c \in R \\ 4x + lnx & \text{αν } \; 2 < x \leq 3 \\ lnx^2 & \text{αν } \; x > 3 \end{cases}$$

Λύση: Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν τη συνέχεια στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

1. Στο διάστημα $(-\infty, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = cx$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

2. Στο διάστημα $(2, 3)$ η συνάρτηση $f(x) = 4x + lnx$ είναι συνεχής ως άθροισμα πολυωνυμικής και λογαριθμικής.

3. Στο διάστημα $(3, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) = lnx^2$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων. $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x) = lnx$, τότε σύνθεση των δυο συναρτήσεων δίνει $f_2 o\, f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2) = lnx^2$.

Η μελέτη της συνέχειας θα ολοκληρωθεί με τη διερεύνηση των σημείων 2 και 3.

Στο σημείο $x_0 = 2$ τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f θα ισούνται με:

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} cx = 2c$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4x + lnx = 2 \cdot 2 + \ln 2 = 4 + 0{,}693 = 4{,}693$
- Για να είναι συνεχής η f στο σημείο $x_0 = 2$ θα πρέπει $2c = 4{,}69 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c = \frac{4{,}693}{2} = 2{,}346$. Αν $c = 2{,}346$, τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to 2} f(x)$ όπως επίσης και η ισότητα $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Αν $c \neq 2{,}346$, τότε η f είναι ασυνεχής στο εν λόγω σημείο.

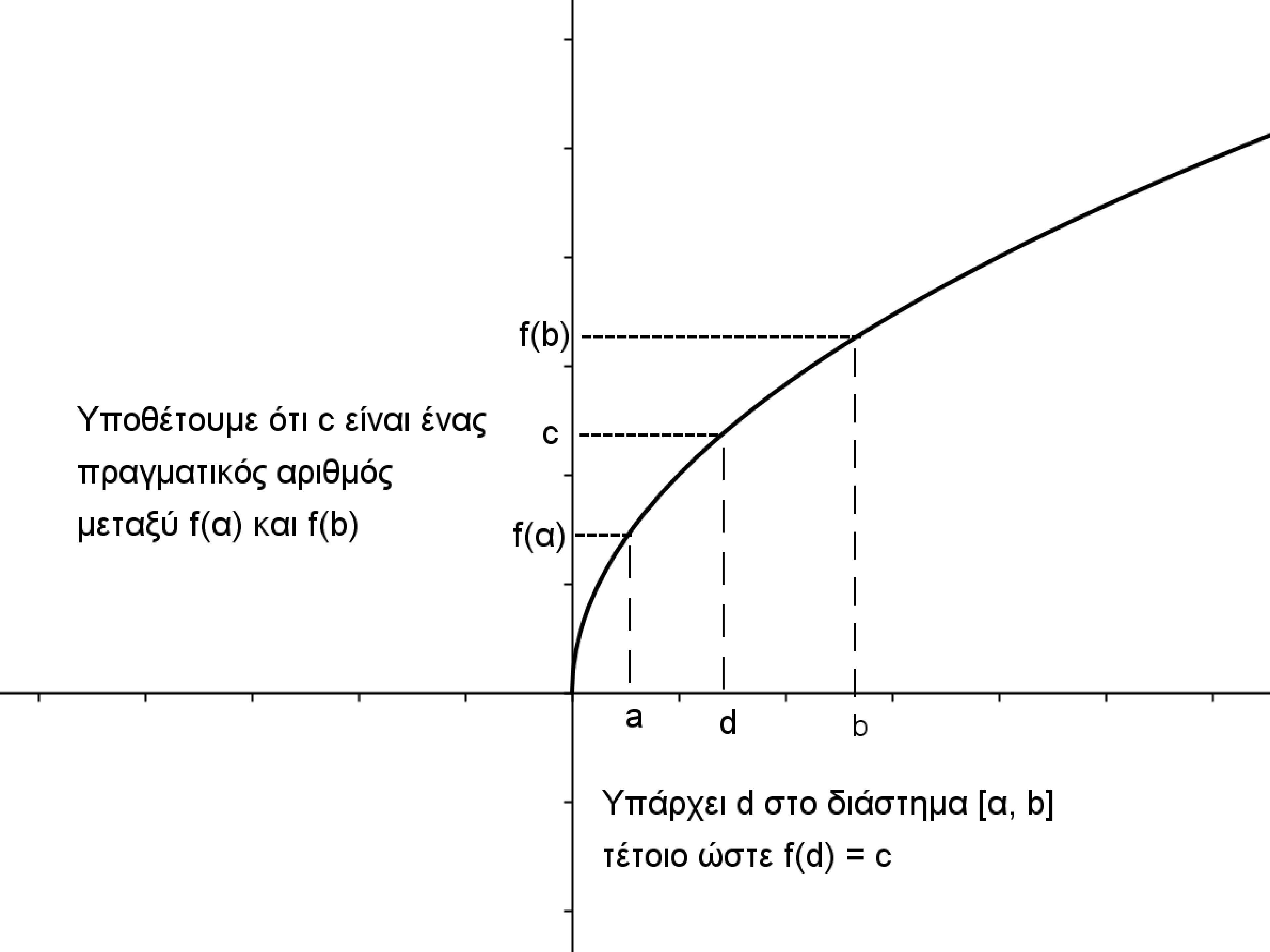
Στο σημείο $x_0 = 3$ τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f θα ισούνται με:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 4x + lnx = 2 \cdot 3 + ln3 = 6 + 1{,}098 = 7{,}098$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} lnx^2 = ln3^2 = 2{,}197$

- Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 3$, καθώς $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

(Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών): Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και υποθέτουμε ότι c είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει d στο διάστημα (a, b) τέτοιο ώστε $f(d) = c$.


Υποθέτουμε ότι c είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ f(α) και f(b)
f(b)
c
f(α)
a
d
b
Υπάρχει d στο διάστημα [α, b] τέτοιο ώστε f(d) = c

(Θεώρημα Bolzano): Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και το γινόμενο $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει c στο διάστημα (a, b) τέτοιο ώστε $f(c) = 0$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

Λύση: Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε για να λύσουμε την άσκηση βασίζεται στο θεώρημα Bolzano. Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f, συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, με γινόμενο $f(a) \cdot f(b) < 0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό διάστημα. Συνεπώς, στόχος για την εύρεση ρίζας είναι η επιλογή ενός τέτοιου διαστήματος $[a, b]$ που θα δώσει αρνητικό γινόμενο $f(a) \cdot f(b)$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

- αν επιλέξουμε ως αριστερό άκρο του διαστήματος το μηδέν η f θα ισούται με $f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$,

- αν επιλέξουμε ως δεξιό άκρο το 1 η f θα ισούται με $f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 4$,

Το γινόμενο $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 4 = -4$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως πολυωνυμική. Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα Bolzano η παραπάνω εξίσωση έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Πράγματι, η εξίσωση $x^2 + 4x - 1$ με διακρίνουσα $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20$, έχει ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{20}}{2 \cdot 1} \\ x_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{20}}{2 \cdot 1} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 + 4{,}47}{2} \\ x_2 = \dfrac{-4 - 0{,}447}{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}235 \\ x_2 = -2{,}236 \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι η ρίζα $x_1 = 0{,}235$ όντως βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

$$x^6 + 7x^3 - 3x - 10 = 0$$

$$f(x) = x^6 + 7x^3 - 3x - 10$$

τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι

- αν επιλέξουμε ως αριστερό άκρο του διαστήματος το μηδέν η f θα ισούται με $f(0) = 0^6 + 7 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 - 10 = -10$,
- αν επιλέξουμε ως δεξιό άκρο το 2 η f θα ισούται με $f(2) = 2^6 + 7 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 - 10 = 64 + 56 - 6 - 10 = 104$,

Το γινόμενο $f(0) \cdot f(2) = -10 \cdot 104 < 0$. Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ ως πολυωνυμική. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η παραπάνω εξίσωση έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

δύναται να λάβει την τιμή μηδέν όταν οριστεί στο διάστημα $(-2, 2)$.

Λύση: Και αυτή η άσκηση βασίζεται στο θεώρημα Bolzano. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική και συνεπώς είναι συνεχής στο διάστημα $[-2,\ 2]$. Επιπλέον, ισχύει

- $f(x) = x^5 + x + 1 \Leftrightarrow f(x) = (-2) \cdot 5 - 2 + 1 = -32 - 2 + 1 =$

  $= -33 < 0$

- $f(x) = x^5 + x + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot 5 + 2 + 1 = 32 + 2 + 1 = 35 > 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η παραπάνω συνάρτηση έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα c στο διάστημα $(-2, 2)$, για την οποία $f(c) = 0$

Παράδειγμα: Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 20x - 10$, να δείξετε ότι υπάρχει $d \in \mathcal{R}$ τέτοιο ώστε $f(d) = -12$.

Λύση: Όπως και παραπάνω, για να λύσουμε την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα κλειστό διάστημα που να δίνει τέτοιες τιμές στη συνεχή συνάρτηση f, ώστε η τιμή -12 να βρίσκεται μεταξύ αυτών. Πράγματι, το κλειστό διάστημα $[0,1]$ ικανοποιεί το ζητούμενο καθώς:

- $f(x) = x^2 - 20x - 10 \Leftrightarrow f(0) = 0^2 - 20 \cdot 0 - 10 = -10$

- $f(x) = x^2 - 20x - 10 \Leftrightarrow f(1) = 1 - 20 \cdot 1 - 10 = -29$

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, η συνάρτηση f μπορεί να λάβει όλες τις τιμές μεταξύ -29 και -10 αρκεί να είναι συνεχής. Με άλλα λόγια, υπάρχει d στο διάστημα $(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(d) = -12$, καθώς ικανοποιείται η σχέση $f(1) = -29 < -12 < 10 = f(0)$.