Μαθηματικά 6

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$	$f(x) = \dfrac{(\lvert x \rvert + 2)(x + 2)}{x(x^2 - 4)}$

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα πρέπει $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq \pm 2$ και $x \neq 0$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f θα είναι $A = \mathcal{R} - \{0, \pm 2\}$ ή αλλιώς $A = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Όταν, λοιπόν, το x τείνει στο -2, που είναι και το ζητούμενο της άσκησης, είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στην περιοχή του $x < 0$ και άρα $|x| = -x$.

Το όριο της f στο -2 θα είναι

$$\lim_{x \to -2} \frac{(|x| + 2)(x + 2)}{x(x^2 - 4)} = \frac{(--2+ 2)(-2 + 2)}{-2 \cdot ((-2)^2 - 4)} = \frac{0}{0}$$

για να άρουμε την απροσδιοριστία $^0/_0$ μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση ως εξής:

Όταν, λοιπόν, το x τείνει στο – 2, που είναι και το ζητούμενο της άσκησης, είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στην περιοχή του $x < 0$ και άρα $|x| = -x$.

$$\frac{(-x+2)(x+2)}{x(x^2-4)} =$$

$$= \frac{-(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{x}$$

το όριο, πλέον, της f όταν x τείνει στο -2 θα είναι:

$$\lim_{x \to -2} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x^2 + \lvert x + 1\rvert - 1}{x^2 - 1}$

Εφόσον πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$,η συνάρτηση θα έχει νόημα για πεδίο ορισμού $A = \mathcal{R} - \{-1,1)$ ή $A = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

Διακρίνονται δυο περιπτώσεις καθώς η ποσότητα $|x+1|$ λαμβάνει αρνητικό πρόσημο όταν ληφθεί τιμή για το x αριστερά του -1 (διότι $x+1<0$, π.χ. για $x=-1{,}05$, τότε $-1{,}05+1=-0{,}5<0$), ενώ αντίθετα λαμβάνει θετικό πρόσημο όταν ληφθεί δεξιά του -1 (διότι $x+1>0$ π.χ. για $x=0{,}98$ τότε $-0{,}98+1=0{,}02>0$).

i). Αν $x \in (-\infty, -1)$, τότε $x + 1 < 0$ και η συνάρτηση f γίνεται

$$f(x) = \frac{x^2 + |x+1| - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - (x+1) - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$$

Επειδή, όμως, το όριο του παρονομαστή με $x \to -1$ ισούται με μηδέν, δεδομένου ότι $\lim_{x \to -1}(x^2 - 1) = (-1^2 - 1) = 0$ (γεγονός που οδηγεί σε απροσδιοριστία), θα υπολογίσουμε τις ρίζες της έκφρασης $x^2 - x - 2$ με σκοπό την απαλοιφή παραγόντων και τον ορισμό του ορίου. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - x - 2$ είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2 \cdot 1} \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2 \cdot 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί και ως εξής:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-2)}{(x-1)}$$

Επομένως, το πλευρικό όριο της f θα είναι

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{(x-2)}{(x-1)} = \frac{(-1-2)}{(-1-1)} = \frac{(-3)}{(-2)} = \frac{3}{2}$$

ii).Αν $x \in (-1, 1)$, τότε $x + 1 > 0$ και η συνάρτηση f γίνεται

$$f(x) = \frac{x^2 + |x+1| - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + (x+1) - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Επειδή, όπως και παραπάνω, το όριο του παρονομαστή με $x \to -1$ ισούται με μηδέν θα γίνει παραγοντοποίηση του αριθμητή με σκοπό την απαλοιφή των παραγόντων που δημιουργούν την απροσδιοριστία και στη συνέχεια θα ορίσουμε το όριο. Συνεπώς,

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x-1)}$$

Επομένως, το πλευρικό όριο της f θα είναι

$$\lim_{x\to -1^{+}} \frac{x}{(x-1)} = \frac{-1}{(-1-1)} = \frac{-1}{(-2)} = \frac{1}{2}$$

Επειδή, λοιπόν, όπως είδαμε στις παραπάνω περιπτώσεις $i)$ και $ii)$ έχουμε $\lim_{x\to -1^{-}} f(x) \neq \lim_{x\to -1^{+}} f(x)$, συνεπάγεται ότι το όριο της f στο -1 δεν υπάρχει.

$\lim_{x \to 1} f(x)$	$f(x) = \sqrt[4]{(4x^2 - x)}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα περιλαμβάνει τις τιμές x για τις οποίες η παράσταση $(4x^2 - x) \geq 0$, συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(4x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = {}^1\!/_4 \end{cases}$$

Στον Πίνακα η παράσταση διατηρεί το πρόσημο του υψηλότερου σε βαθμό όρου (x^2) εκτός των ριζών.

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$\quad$ ${}^1\!/_4$	$+\infty$
$4x^2 - x$	$+$	$-$	$+$

$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

Επομένως, το πεδίο ορισμού της $f(x)$ θα είναι $A = (-\infty, 0] \cup [1/4, +\infty)$. Τα διαστήματα στις τιμές 0 και $1/4$ είναι κλειστά, καθώς στη συνθήκη $(4x^2 - x) \geq 0$ ζητούμενο είναι η ικανοποίηση της ανισότητας $\geq$. Το όριο της συνάρτησης f όταν το x τείνει στο 1 θα είναι

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[4]{(4x^2 - \chi)} = \sqrt[4]{(4 \cdot 1^2 - 1)} = \sqrt[4]{3}$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{6x-5} - \sqrt{4x-1}}{x-2}$

	$\lim_{x\to 2} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{6x-5}-\sqrt{4x-1}}{x-2}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\begin{cases} 6x-5 \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{6} \\ x \geq \dfrac{1}{4} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Συνεπώς $A = [\frac{5}{6}, 2) \cup (2, +\infty)$.

Τα όρια του αριθμητή και παρονομαστή με $x \to 2$ ισούνται με μηδέν καθώς

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6\chi-5}-\sqrt{4\chi-1}}{x-2}=\frac{\sqrt{6\cdot 2-5}-\sqrt{4\cdot 2-1}}{2-2}=\frac{0}{0}$$

γεγονός που οδηγεί σε απροσδιοριστία. Η αλλαγή της μορφής της εξίσωσης μπορεί να επιτευχθεί, στην περίπτωση των ριζικών, με πολλαπλασιασμό της συζυγούς παράστασης

Έστω η παράσταση $\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}$ τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με την παράσταση $\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}$, δηλαδή $\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}=$

$$\frac{\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\lambda}\right)\left(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}\right)}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}}=\frac{(\sqrt{\kappa})^2-(\sqrt{\lambda})^2}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}}=\frac{|\kappa|-|\lambda|}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}}\xrightarrow{\gamma\iota\alpha\ \ \kappa,\lambda>0}\frac{\kappa-\lambda}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή της f με την παράσταση $\sqrt{6x-5}-\sqrt{4x-1}$ και την μετατρέπουμε ως εξής:

$$\frac{\sqrt{6x-5}-\sqrt{4x-1}}{x-2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{6x-5}-\sqrt{4x-1}\right)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{6x-5}\right)^2-\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)}=$$

$$\frac{(6x-5)-(4x-1)}{(x-2)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)}=$$

$$= \frac{2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)} =$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1}\right)} =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4x-1})}$$

Το όριο, λοιπόν, της συνάρτησης f για x τείνοντας στο 2 είναι:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2}{\left(\sqrt{6x-5}+\sqrt{4\chi-1}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{6 \cdot 2-5}+\sqrt{4 \cdot 2-1}\right)} == \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{7}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$
- Πεδίο ορισμού
- $x \geq 0$
- $4 - x \neq 0 \Longrightarrow x \neq 4$
- A=[0, 4)U(4, +∞)

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$
- **Λύση**
- $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$
- *Απροσδιοριστία*
- $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} * \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{2^2-(\sqrt{x})^2}{(4-x)(2+\sqrt{x})}$
-
- $= \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{(4-x)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(2+\sqrt{x})} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{5 - \sqrt{x^2 + 9}}$$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim_{x \to 4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$
- Πεδίο ορισμού
- $x^2 + 9 > 0$ για κάθε x$\in R$
- $5 - \sqrt{x^2+9} \neq 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+9} = 5$
- $(\sqrt{x^2+9})^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 9 = 25 \Rightarrow$
- $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$

- A=R-{-4, 4}

$$\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{\underbrace{(5-\sqrt{x^2+9})(5+\sqrt{x^2+9})}_{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{25-(x^2+9)} = \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{4-x^2} =$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(5+\sqrt{x^2+9})}{(4-x)(4+x)} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(5 + \sqrt{x^2 + 9})}{(4 + x)} = \frac{(5 + \sqrt{16 + 9})}{(4 + 4)}$$

$$\frac{(5 + \sqrt{25})}{8} = \frac{5}{4}$$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \frac{0}{0}$
- *Απροσδιοριστία*
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} * \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2-4^2}{x^2 * \sqrt{x^2+16}+4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+16-4^2}{x^2 * \sqrt{x^2+16}+4} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$

$\lim_{x \to 3} f(x)$	$f(x) = 5xln10x$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, καθώς για να έχει νόημα ο λογάριθμος lnx θα πρέπει να ισχύει ότι $x > 0$. Το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο 3 είναι:

$$\lim_{x \to 3} 5xln10x = \lim_{x \to 3} 5x \lim_{x \to 3} ln10x = 5 \cdot 3 \cdot ln30 = 5 \cdot 3 \cdot 3{,}4 = 51$$