Μαθηματικά 5

Ο γενικός τύπος ενός ορίου είναι

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Το όριο της συνάρτησης f όταν το x προσεγγίζει τον αριθμό α
Έστω η συνάρτηση που θέλουμε να μελετήσουμε είναι
$f(x) = x^2$
και ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το όριο της όταν το x προσεγγίζει το 2 $\lim_{x \to 2} x^2$

Προσέγγιση σημαίνει ότι επιλέγουμε διαρκώς τιμές που να πλησιάζουν το 2 είτε ελάχιστα πάνω από το 2 είτε ελάχιστα κάτω από το 2.

x	**2,3**	**2,2**	**2,08**	**2,04**	**2,01**
x^2	5,29	4,84	4,3264	4,1616	4,0401

X	**1,75**	**1,88**	**1,91**	**1,96**	**1,99**
x^2	3,0625	3,5344	3,6481	3,8416	3,9601

- Παρατηρούμε ότι όσο το x πλησιάζει το 2 το f(x) πλησιάζει το 4,
  - **ανεξαρτήτως με το αν η προσέγγιση γίνεται πάνω ή κάτω από το 2.**
- Συνεπώς, αισθανόμαστε σχετικά ασφαλής στο συμπέρασμα ότι το όριο της παραπάνω συνάρτησης είναι 4, καθώς το x προσεγγίζει το 2.

- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$
- Θα μπορούσαμε βέβαια να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα αν απλώς αντικαθιστούσαμε το 2 στη συνάρτηση x^2 , αυτό όμως δεν ισχύει με όλα τα όρια.

Η έκφραση $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ μπορεί να είναι σωστή ακόμη και αν $f(x) \neq l$.

Επιπλέον, το σημείο x_0 ενδέχεται να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της f,

δηλαδή το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ μπορεί να έχει νόημα ακόμα και για σημεία

x_0 στα οποία η f δεν ορίζεται.

- Έστω $f(x) = x^2 \frac{(x-2)}{(x-2)}$
- Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την παρακάτω
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \gamma\iota\alpha\ x \neq 2 \\ \delta\varepsilon\nu\ o\rho\iota\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \gamma\iota\alpha\ \chi = 2 \end{cases}$
- Οι δυο παραπάνω εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες
- Παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται για x=2 το όριο υπάρχει και προσεγγίζει το 4

Εάν έχουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα δεν συγκλίνει σε ένα αριθμό

x με τιμές δεξιά του 0	$1/x$	x με τιμές αριστερά του 0	$1/x$
1	1	-1	-1
0,9	1,11	-0,9	-1,11
0,8	1,25	-0,8	-1,25
0,7	1,42	-0,7	-1,42
0,5	2	-0,5	-2
0,3	3,33	-0,3	-3,33
0,2	5	-0,2	-5
0,1	10	-0,1	-10
0,01	100	-0,01	-100
0,001	1.000	-0,001	-1.000
0,0001	10.000	-0,0001	-10.000

Στην περίπτωση, βέβαια, της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$ το όριο στο 0 δεν

υπάρχει, καθώς $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Δεξιά του μηδενός οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ βαίνουν αυξανόμενες καθώς το x τείνει στο 0, αριστερά του μηδενός οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές και συνεχώς μειούμενες καθώς το x πλησιάζει το μηδέν,

Όριο Συνάρτησης

- *Όριο* είναι η προσέγγιση ενός πραγματικού αριθμού σε επίπεδο που δεν ξεπερνά έναν πολύ μικρό πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 100 είναι η προσέγγιση της μεταβλητής y όταν υπάρχει πραγματικός μικρός αριθμός $\varepsilon > 0$, ας πούμε ο αριθμός 1, για τον οποίο να ισχύει $|y - 100| < 1$, γεγονός που σημαίνει ότι

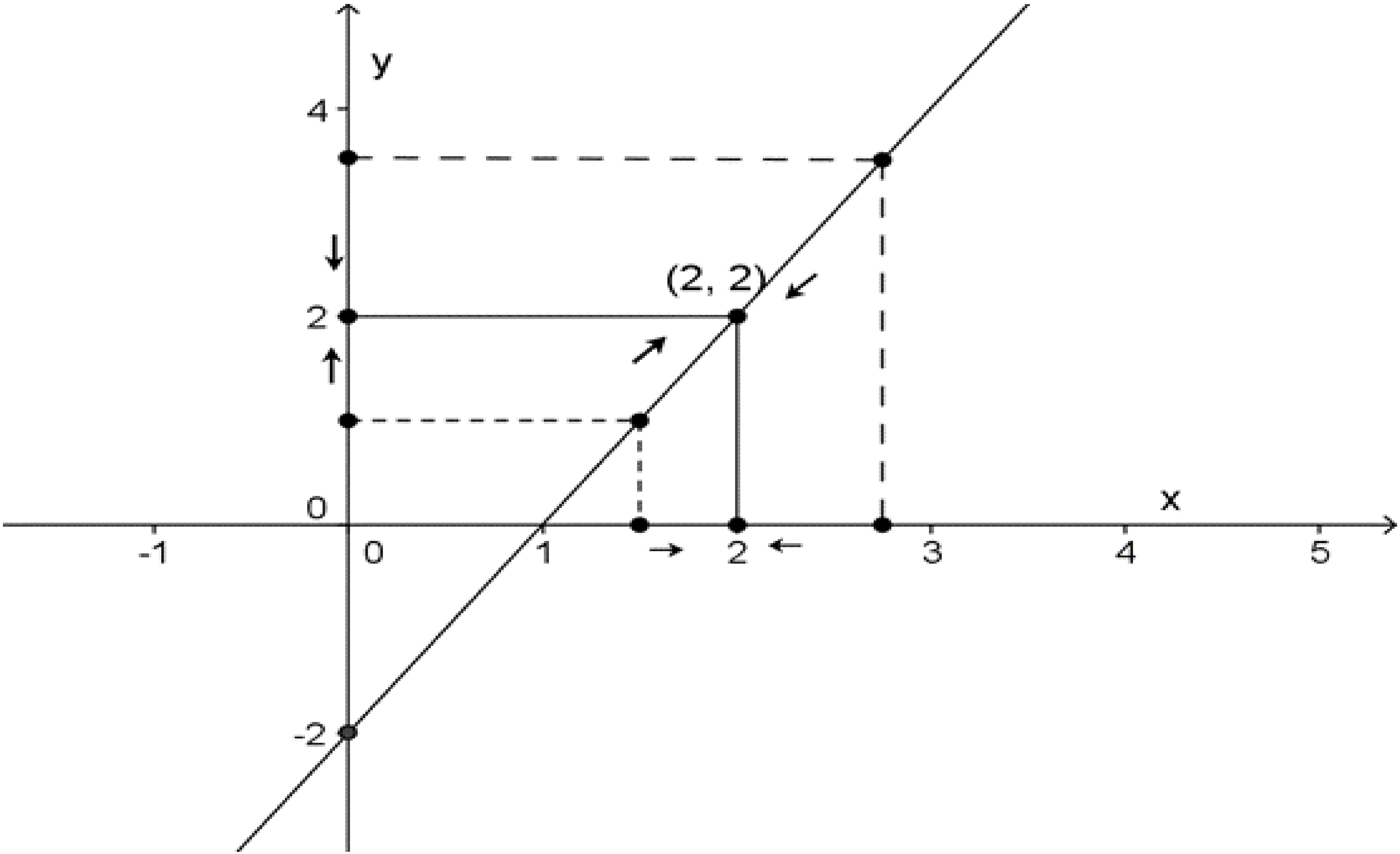
$$-1 < y - 100 < 1 \Leftrightarrow 100 - 1 < y < 100 + 1$$

Γενικά, όταν η μεταβλητή x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 και όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίσουν έναν πραγματικό αριθμό l, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

δηλαδή, το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι l.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 2$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$$

π. χ. $\lim_{x \to 7}(f(x) - 15) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 7} f(x) = 15$

- Εάν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό και παριστάνεται με

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

- Το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

για κάθε $x_0 \in \mathcal{R}$. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 7} x = 7$$

- Το όριο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c, c \in \mathcal{R}$ είναι

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

για κάθε $x_0 \in \mathcal{R}$. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 4} 8 = 8$$

Πλευρικά όρια

Πολλές φορές είναι απαραίτητο να διερευνήσουμε το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ καθώς το x τείνει (πλησιάζει) στο x_0 μόνο από δεξιά ή μόνο από αριστερά. Αν καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά, δηλαδή ορίζεται από αριστερά του x_0 στο διάστημα (α, x_0), το $f(x)$ τείνει σε κάποιο αριθμό l, τότε λέμε ότι **το $\boldsymbol{l}$ είναι το αριστερό πλευρικό όριο της f στο $\mathbf{x_0}$** και συμβολίζουμε $\lim_{x \to \chi_0^-} f(x) = l_1$.Αντίστοιχα ορίζουμε και το δεξιό πλευρικό όριο της f στο x_0 και το συμβολίζουμε με $\lim_{x \to \chi_0^+} f(x) = l_2$

(Προσέξτε τα πρόσημα πάνω από το x_0, γράφουμε $x \to x_0^-$ και $x \to x_0^+$).

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ έχει στο x_0 όριο $l \in \mathcal{R}$, αν και μόνο αν τα πλευρικά της όρια υπάρχουν και είναι ίσα με l, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to \chi_0^-} f(x) = \lim_{x \to \chi_0^+} f(x) = l$$

Παράδειγμα : Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

$$\text{και} \quad \lim_{x \to \chi_0^-} f(x) = \frac{\beta}{2}, \qquad \lim_{x \to \chi_0^+} f(x) = -\beta^2$$

Να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές του $\beta \in \mathcal{R}$ για τις οποίες υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Απάντηση:

$$\lim_{x\to\chi_0^-} f(x) = \lim_{x\to\chi_0^+} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = -\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{2} + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\frac{1}{2} + \beta\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

για τις δυο αυτές ρίζες υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0, συγκεκριμένα:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \text{για} \ \beta = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\frac{1}{4} \ \text{για} \ \beta = -\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα: Έστω μια συνάρτηση $f(\chi)$ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο της μορφής $(1,3)\ \cup\ (3,5)$. Να προσδιορίσετε (ναι – όχι) σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι πιθανό να υφίσταται όριο της συνάρτησης f.

ερώτημα	**απάντηση**
για $x_0 = 2$	Ναι
για $x_0 = 7$	Όχι
για $x_0 = 5$	Ναι
για $x_0 = 12$	Όχι
για $x_0 = -2$	Όχι
για $x_0 = 3$	Ναι

Παράδειγμα: Έστω

$$\lim_{x \to 7} f(x) = l \quad \text{και} \quad l \in \mathcal{R}.$$

Να βρεθεί το $\beta \in \mathcal{R}$ στην περίπτωση που τα πλευρικά όρια είναι:

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = 2\beta^4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 7^+} f(x) = 32$$

Παράδειγμα: Έστω

$$\lim_{x \to 7} f(x) = l \quad \text{και} \quad l \in \mathcal{R}.$$

Να βρεθεί το $\beta \in \mathcal{R}$ στην περίπτωση που τα πλευρικά όρια είναι:

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = 2\beta^4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 7^+} f(x) = 32$$

Απάντηση: Εφόσον υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 7} f(x) = l$$

θα πρέπει τα πλευρικά όρια να οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^+} f(x) \Leftrightarrow 2\beta^4 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 = 16 \Leftrightarrow \beta = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = |2| \Leftrightarrow \beta = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Παράδειγμα : Υποθέτοντας ότι υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to 7} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 5} f(x)$$

να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ στην περίπτωση που τα πλευρικά όρια είναι:

$$\lim_{x\to 7^-} f(x) = 3\alpha - \beta$$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 2\beta$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 9\alpha + 4\beta$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 3\alpha + 2$$

Απάντηση: Εφόσον υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to 7} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 5} f(x)$$

τα πλευρικά όρια θα εξισωθούν και συνεπώς θα έχουμε:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) \\ \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) \\ \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 2\beta \\ 9\alpha + 4\beta = 3\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 3\beta = 0 \\ 6\alpha + 4\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 6\alpha + 4\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 6\alpha + 4\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \dfrac{2}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{5} \\ \alpha = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Ιδιότητες των ορίων

1	Εάν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $g(x) \leq f(x)$ στην περιοχή του x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x)$
2	Εάν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$
3	Έστω ότι ισχύει η σχέση $\lvert g(x) \rvert \leq \lvert f(x) \rvert$ μεταξύ των συναρτήσεων f και g. Εάν η f έχει όριο 0 στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

4	$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
5	$\lim_{x \to x_0} \left(af(x) \right) = a \lim_{x \to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερό $a \in \mathcal{R}$
6	$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$
7	$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ με τη συνθήκη $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

8	$\lim_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert = \left\lvert \lim_{x \to x_0} f(x) \right\rvert$
9	$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, με τη συνθήκη $f(x) \geq 0$
10	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f(x)}$ με τη συνθήκη $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$
11	$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$
12	$\lim_{x \to x_0} x_0^n = x_0^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$

: Με την εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων να βρεθούν τα όρια των

συναρτήσεων:

1	$\lim_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $A = \mathcal{R}$, ενώ το όριο της $f(x)$ είναι

$$\lim_{x \to 0}(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

2	$\lim_{x \to 2} f(x)$	$f(x) = 2x^8 + x^4 - 2x$

Λύση

2	$\lim_{x \to 2} f(x)$	$f(x) = 2x^8 + x^4 - 2x$

Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $A = \mathcal{R}$, ενώ το όριο της $f(x)$ είναι

$$\lim_{x \to 2}(2x^8 + x^4 - 2x) = 2 \cdot 2^8 + 2^4 - 2 \cdot 2 = 512 + 16 - 4 = 524$$

3	$\lim_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - 3x + 1}$

Να βρεθεί το όριο

3	$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - 3x + 1}$

Συνθήκη για την ύπαρξη του ορίου είναι ο ορισμός ενός τέτοιου πεδίου ορισμού για την x ώστε να ισχύει ότι $2x^2 - 3x + 2 \neq 0$, δηλαδή ο παρονομαστής της συνάρτησης να είναι διαφορετικός του μηδενός έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει νόημα. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $2x^2 - 3x + 1 = 0$ είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \\ x_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + 1}{4} \\ x_2 = \dfrac{3 - 1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0{,}5 \end{cases}$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathcal{R} - \{1, 0{,}5\}$.

Το όριο της f στο 0 είναι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2x^2-3x+1}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-3x+1)}=\frac{2}{2\cdot 0^2-3\cdot 0+2}=\frac{2}{2}=1$$

4	$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\ln(x^3 - 1)}{2x^2 - 3x + 2}$

Για την ύπαρξη του ορίου θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση f σε ένα πεδίο ορισμού όπου θα έχει νόημα.

Επομένως, θα πρέπει $(x^3 - 1) > 0$ (θα γίνει εξίσωση για να βρούμε τις ρίζες) και $2x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Άρα:

$$\begin{cases} x^3 - 1 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \textbf{αφού } \Delta = -7 \ \eta \ 2x^2 - 3x + 2 \neq 0 \textbf{ για κάθε } x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι

(x>1) A=(1, +∞)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^3-1)}{2x^2-3x+2} = \frac{\ln(2^3-1)}{2\cdot 2^2-3\cdot 2+2} = \frac{\ln(7)}{4} = \frac{1{,}95}{4} = 0{,}487$$

5	$\lim_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\lvert(-3x^2 + 9)\rvert}{e^{x+1} - 1}$

5	$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\lvert(-3x^2 + 9)\rvert}{e^{x+1} - 1}$

Για να αποφύγουμε την απροσδιοριστία στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f θα πρέπει

$$e^{x+1} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{x+1} \neq 1 \Rightarrow e^{x+1} \neq e^0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathcal{R} - \{1\}$. Το όριο της f στο 0 θα είναι:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\lvert(-3x^2 + 9)\rvert}{e^{x+1} - 2} \right) = \frac{\left| \lim\limits_{x \to 0} (-3x^2 + 9) \right|}{\lim\limits_{x \to 0} (e^{x+1} - 1)} =$$

$$= \frac{\lvert(-3 \cdot 0^2 + 9)\rvert}{e^{0+1} - 2} = \frac{\lvert 9 \rvert}{e^1 - 1} = \frac{9}{e - 1} \approx \frac{9}{2{,}8 - 1} = 5$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{lnx + 1}$

6	$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{lnx + 1}$

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} (x^2 - 9) \geq 0 \\ x > 0 \\ lnx + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 3) \geq 0 \\ x > 0 \\ lnx \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

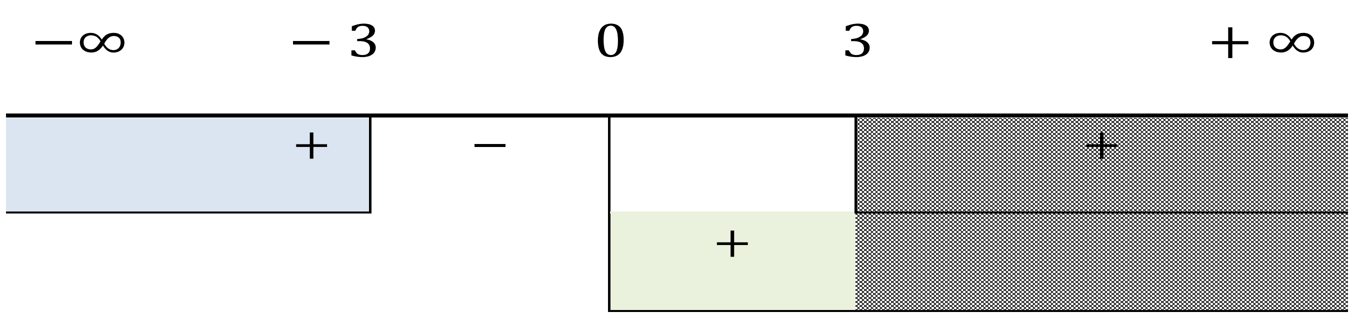
- Το πρόσημο τριωνύμου $αχ^2+βχ+γ$
- Όταν Δ>0 τότε εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α και εκτός των ριζών ομόσημο του α
-
- Τα διώνυμα της μορφή αχ+β είναι ομόσημα του α δεξιά της ρίζας τους

$$\begin{cases} x \geq 3 \text{ ή } x \leq -3 : \text{βλέπε } \textbf{\textit{Πίνακα 10.2}} \\ x > 0 \\ e^{lnx} \neq e^{-1} \leftrightarrow x \neq e^{-1} \leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

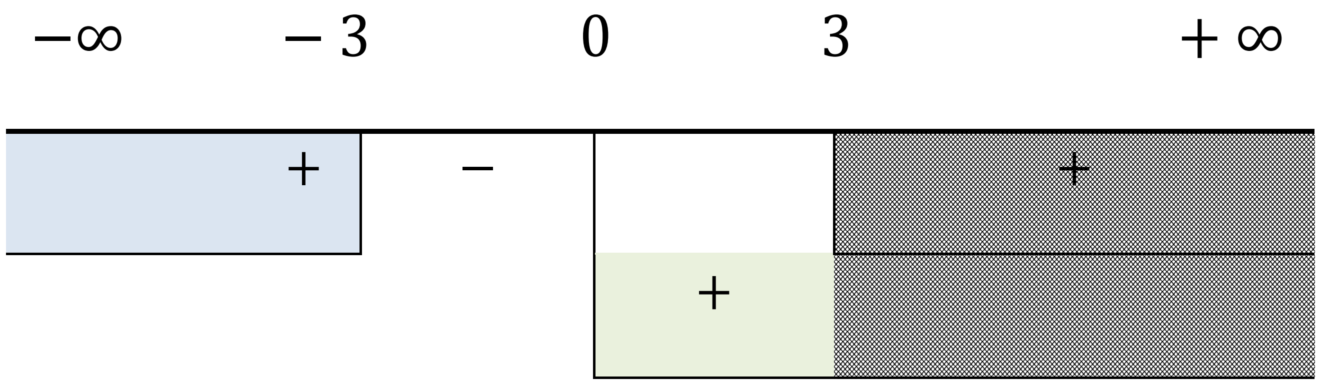
Πίνακας 10.2.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x^2 - 9$	$+$	$-$	$+$	

Το τριώνυμο διατηρεί το πρόσημο του υψηλότερου σε βαθμό όρου (x^2) εκτός των ριζών.



Το τριώνυμο διατηρεί το πρόσημο του υψηλότερου σε βαθμό όρου (x^2) εκτός των ριζών.



Οι σκιασμένες δικτυακές κουκίδες ($x \geq 3$) είναι η περιοχή του $\mathcal{R}$ στην οποία η συνάρτηση f έχει νόημα. Σημειώνεται ότι το πεδίο ορισμού $A = [3, +\infty)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $x \neq (1/e)$, καθώς το $e \approx 2{,}71$ είναι μεγαλύτερο από ένα και επομένως το αποτέλεσμα $(1/e) < 1$. Επομένως, η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης f στο 0 δεν έχει νόημα.

- **Να βρεθεί το όριο**

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$
-
- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{0}$
- Απροσδιοριστία

- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$
-
- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{0}$
- Απροσδιοριστία

- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$
- *Παρονομαστής*
- $x^2 - 9 \neq 0$
- $(x^2-9) = (x^2-3^2) = (x-3)(x+3) = 0$
- $x \neq 3 \; και \; x \neq 3$

- *Αντικατάσταση*
- $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{(3+3)} = \frac{1}{6}$

- **Να βρεθεί το όριο**

- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30}$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}$
- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30} = \frac{5^2-25}{5^2+5-30} = \frac{0}{0}$
- Απροσδιοριστία

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}$

- *Παρονομαστής*
- $x^2 + x - 30 \neq 0$
- *Δ=1-4*(-30)=121*
- $x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2*(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+11}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-1-11}{2} = -6 \end{cases}$
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = (x - 5)(x + 6)$
- $x \neq 5 \; \kappa\alpha\iota \; x \neq 6$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}$

- *Αριθμητής*
- $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$
- *Αντικατάσταση*
- $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+6)} =$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x+5)}{(x+6)} = \frac{5+5}{5+6} = \frac{10}{11}$$

- **Να βρεθεί το όριο**

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|} = \frac{1^2+2*1-3}{|1-1|} = \frac{0}{0}$

- Υπολογίζουμε χωριστά τα όρια αριθμητή και παρονομαστή.
- Αντικαθιστούμε όπου x το x_0
- Κάνουμε τις πράξεις και αν καταλήξουμε σε απροσδιοριστία της μορφής **0/0**
  - τότε κάνουμε παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$

- *Παρονομαστής*
- $x \neq 1$
- $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{για } x > 1 \\ -(x-1) & \text{για } x < 1 \end{cases}$
- $x \to 1^-$ *που σημαίνει* $x < 1$ *και επομένως* $|x-1| = -(x-1)$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$
- *Αριθμητής*
- x^2+2x-3
- *Δ=4-4*(-3)=16*
- $x_{12} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2*(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$
- $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x + 3)}$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$
- Αντικατάσταση
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)} =$
- $\lim_{x \to 1^-} -(x+3) = -(1+3) = -4$

- **Να βρεθεί το όριο**
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{|x-2|}$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x-12}{|x-2|} = \frac{1^2+2*2-12}{|2-2|} = \frac{0}{0}$

- Να βρεθεί το όριο
- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{|x-2|} = \frac{1^2+2*2-12}{|2-2|} = \frac{0}{0}$
- **Απροσδιοριστία**
- *Αριθμητής*
- $x^2 + 4x - 12$
- *Δ=16-4*(-12)=64*
- $x_{12} = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2*(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+8}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-4-8}{2} = -6 \end{cases}$
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x + 6)$

- *Παρονομαστής*
- $x \neq 2$
- $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{για } x > 2 \\ -(x-2) & \text{για } x < 2 \end{cases}$
- Εάν $x \to 2^-$ *δηλαδή* $x < 2$ *και επομένως* $|x-2| = -(x-2)$
- Εάν $x \to 2^+$ *δηλαδή* $x > 2$ *και επομένως* $|x-2| = (x-2)$
- *Αντικατάσταση*

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+4x-12}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+6)}{-(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} -(x+6)$$

$$= -(2+6) = -8$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+4x-12}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} (x+6)$$

$$= (2+6) = 8$$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+2x-2}{|x|}$

- *Να βρεθεί το όριο*
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-2}{|x|}$
-
- *Παρονομαστής*
- $x \neq 0$
- $|x| = \begin{cases} x & για\ x > 0 \\ -x & για\ x < 0 \end{cases}$
- Για $x \to 1^-$ *σημαίνει* $x > 0$ *(και* $x < 1$*, το οποίο όμως δεν παίζει ρόλο στον προσδιορισμό της απολύτου τιμής), επομένως* $|x| = x$
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-2}{|x|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-2}{x} = \frac{1^2+2*1-2}{1} = 1$