Μαθηματικά 3

Εξίσωση 1ου βαθμού

Ορισμός: Εξίσωση πρώτου βαθμού ονομάζεται μια εξίσωση με μεταβλητές που ο υψηλότερος βαθμός τους δεν ξεπερνά μονάδα.

- Όλες οι γραμμικές εξισώσεις είναι εξισώσεις πρώτου βαθμού. Για παράδειγμα, η εξίσωση της ευθείας είναι εξίσωση πρώτου βαθμού.

Να διακρίνεται τις εξισώσεις πρώτου βαθμού

a) $2x + 3y^2 = 1$
b) $6x^2 + 2x + 3 = 1$
c) $4x + y = 2^3$
d) $\mathrm{x} + 2y = 1$

e) $x^3 + 8x^2 + 2y - 3 = 0$

Πολύ συνοπτικά, χωρίς να αποτελεί θέσφατο η διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- $1^{ο}$ Βήμα: Απαλοίφουμε τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο).

$$\overbrace{\frac{\mathrm{x}}{3}+\frac{1+3x}{6}-\frac{2+x}{9}}^{\text{Το ΕΚΠ είναι ο αριθμ ός 18}}=1 \Rightarrow 18*\frac{\mathrm{x}}{3}+18*\frac{1+3x}{6}+18*\frac{2+x}{9}=18*1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\mathrm{x}+3(1+3x)-2(2+x)=18$$

- 2^{o} Βήμα: Διώχνουμε τις παρενθέσεις εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\Rightarrow 6x + 3 + 9x - 4 - 2x = 18$$

- 3^{o} Βήμα: Χωρίζουμε του γνωστούς από τους άγνωστους όρους "μεταφέροντας" τους άγνωστους στο πρώτο μέλος και τους γνωστούς στο δεύτερο.

$$\Rightarrow 6x + 9x - 2x = 18 + 4 - 3$$

- 4^{o} Βήμα: Κάνουμε τις πράξεις σε κάθε μέλος.

$$\Rightarrow 13x = 19$$

- 5^{o} Βήμα: Διαιρούμε και τα δυο μέλη με το πρόσημο και το συντελεστή της άγνωστης μεταβλητής.

$$\Rightarrow \frac{13}{13}x = \frac{19}{13} \Rightarrow x = \frac{19}{13}$$

- Να σημειωθούν τα εξής:
  - εάν η λύση είναι της μορφής $0x = c$ και $c \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
  - εάν η λύση είναι της μορφής $0x = 0$, τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα.
  - εάν η λύση είναι της μορφής $\alpha x = c$ και $\alpha, c \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μόνο μια λύση $x = \frac{c}{\alpha}$.

- ***Εξίσωση 1ου βαθμού***, ονομάζεται μια ***ισότητα*** που περιέχει **μια μεταβλητή**, δηλαδή έχει ***έναν άγνωστο όρο***.
- Όταν αντικατασταθεί ο άγνωστος όρος της εξίσωσης από έναν **αριθμό** που **επαληθεύει** τη δοσμένη **ισότητα**,
  – τότε έχει βρεθεί η ***ρίζα*** (δηλαδή η λύση) της εξίσωσης.

Μια εξίσωση ονομάζεται ***ταυτότητα ή αόριστη*** όταν όλοι οι αριθμοί είναι ρίζες (λύσεις) της. Για παράδειγμα, $0x = 0, \quad x + 8 = x + 8$.

Μια εξίσωση ονομάζεται *αδύνατη*, όταν δεν υπάρχει αριθμός που να την επαληθεύει. Για παράδειγμα, $0x = 5, \quad x + 7 = 3 + x$.

Παράδειγμα : Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$x + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right)2 = \frac{39}{12} - 2x$$

Λύση:

Παράδειγμα : Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$x+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)2=\frac{39}{12}-2x$$

Λύση:

$$x+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)2=\frac{39}{12}-2x \Leftrightarrow 3x+\left(\frac{9+10}{12}\right)2=\frac{39}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{38}{12}=\frac{39}{12} \Leftrightarrow 3x=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{36}}$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{15}{7}x - \frac{3}{5} = 2x$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{15}{7}x - \frac{3}{5} = 2x$$

Λύση:

$$\frac{15}{7}x - \frac{3}{5} = 2x \Leftrightarrow \frac{15}{7}x - 2x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{7}x - \frac{14}{7}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{7}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{21}{5}$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x-0,5}{3}-\frac{0,8x-2}{15}-\frac{0,3-0,4x}{5}=\frac{0,2x}{3}+\frac{3}{15}$$

Λύση: Καθένας από τους όρους της εξίσωσης θα πολλαπλασιαστεί με το $ΕΚΠ(3,5,15) = 15$. Άρα

$$\frac{x-0{,}5}{3} - \frac{0{,}8x-2}{15} - \frac{0{,}3-0{,}4x}{5} = \frac{0{,}2x}{3} + \frac{3}{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-0{,}5}{3}\right)15 - \left(\frac{0{,}8x-2}{15}\right)15 - \left(\frac{0{,}3-0{,}4x}{5}\right)15 =$$

$$= \left(\frac{0{,}2x}{3}\right)15 + \left(\frac{3}{15}\right)15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-0{,}5)5 - (0{,}8x-2) - (0{,}3-0{,}4x)3 = x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2{,}5 - 0{,}8x + 2 - 0{,}9 + 1{,}2x = x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5{,}4x - 1{,}4 = x + 3 \Leftrightarrow 4{,}4x - 4{,}4 \Leftrightarrow x = 1$$

Ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού

- *Ανίσωση $1^{ου}$ βαθμού* ονομάζεται μια *αλγεβρική παράσταση* που περιέχει
  - κάποιο από τα *ανισοτικά σύμβολα* καθώς και
  - μεταβλητές και αριθμούς
  - μαζί με τις γνωστές πράξεις που εκτελούνται μεταξύ τους.
- **Λύσεις της ανίσωσης καλούνται οι τιμές της μεταβλητής που επαληθεύουν την ανίσωση.**

Ιδιότητες ανισοτήτων

- Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$
- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
- Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

- ***Κλειστό διάστημα*** **από το** α **μέχρι το** β**, ονομάζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **με** $\alpha \leq x \leq \beta$ **και συμβολίζεται με** $[\alpha,\beta]$**. Δηλαδή στο διάστημα αυτό υπάρχουν οι αριθμοί** α **και** β **και όλοι οι ενδιάμεσοί τους. Επομένως ισχύει η ισοδυναμία** $x \in [\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta$**.**

- *Ανοιχτό διάστημα* από το α μέχρι το β, ονομάζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ και συμβολίζεται με (α, β). Δηλαδή στο διάστημα αυτό δεν υπάρχουν οι αριθμοί α και β αλλά μόνο οι ενδιάμεσοί τους. Επομένως ισχύει η ισοδυναμία $x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$.

Οι αριθμοί α και β λέγονται άκρα των διαστημάτων και κάθε αριθμός x που είναι μεταξύ των α και β λέγεται εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

- Το *ανοιχτό δεξιά διάστημα* $[\alpha, \beta)$, αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x < \beta$. Δηλαδή, $x \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \leq x < \beta$

- **Το *ανοιχτό αριστερά διάστημα* $(\alpha, \beta]$ αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \leq \beta$. Δηλαδή,** $x \in (\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha < x \leq \beta$

Το σύνολο των αριθμών x με $a \leq x$ συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$. Δηλαδή,

$x \in [\alpha, +\infty) \Leftrightarrow a \leq x$

Το σύνολο των αριθμών x με $x \leq a$ συμβολίζεται με $(-\infty, a]$. Δηλαδή,

$x \in (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a.$

Το σύνολο των αριθμών x με $a < x$ συμβολίζεται με $(a, +\infty)$. Δηλαδή,

$x \in (a, +\infty) \Leftrightarrow a < x$

Το σύνολο των αριθμών x με $x < a$ συμβολίζεται με $(-\infty, a)$. Δηλαδή,

$x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$.

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το σύνολο $\mathcal{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι

το διάστημα $(-\infty, +\infty)$

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $5x - 3 < 5x + 8 \Leftrightarrow 0x < 11$

Δηλαδή, $0 < 11$. Άρα η ανίσωση είναι αόριστη.

β) $$-y-\frac{1}{3}\cdot\frac{3y}{2}-(2y+3)\cdot 5\leq-\frac{y+2}{6}$$

$$\beta) \qquad -y-\frac{1}{3}\cdot\frac{3y}{2}-(2y+3)\cdot 5\leq -\frac{y+2}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y-\frac{y}{2}\cdot 6-(2y+3)\cdot 5\cdot 6\leq -(y+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y-3y-(2y+3)\cdot 30\leq -y-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9y-60y-90\leq -y-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -88\leq 68y\Leftrightarrow y\geq -\frac{88}{68}\Leftrightarrow y\geq -1{,}294\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\in[-1{,}294,+\infty)$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν (εφόσον υπάρχουν) οι κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

α) $x > -4$ και $x \geq 0$

β) $x \leq -4{,}5$ και $x > \frac{3}{2}$

α) Οι κοινές λύσεις είναι για $x \geq 0$.

β) Δεν υπάρχουν κοινές λύσεις.

γ) $x \geq 5$ και $0x > -7$

δ) $x > 9$ και $0x > 9$

γ) $x \geq 5$ και $0x > -7$

δ) $x > 9$ και $0x > 9$

Λύση:

γ) Η ανίσωση $0x > -7$ είναι αόριστη και αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του x. Άρα οι κοινές λύσεις είναι για $x \geq 5$.

δ) Η ανίσωση 0*x>9 είναι αδύνατη και επομένως δεν αληθεύει για καμία τιμή του x ε) $0x < 3{,}5$ και $0x > -3{,}5$

ε) $0x < 3{,}5$ και $0x > -3{,}5$

ε) Οι ανισώσεις είναι αόριστες οπότε αληθεύουν για οποιαδήποτε τιμή του x. Επομένως οι κοινές λύσεις είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

Να βρεθεί η τιμή του x ώστε να ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $$\sqrt{-\frac{x}{2}+\frac{2-x}{4}+x}=\sqrt{\frac{-2x+2-x+4x}{4}}=\sqrt{\frac{x+2}{4}}=\frac{\sqrt{x+2}}{2}$$

Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική. Δηλαδή, πρέπει $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

β) $$\sqrt{\frac{x}{3}-\frac{5x-1}{12}+\frac{\sqrt{64}x}{\sqrt{144}}}+\sqrt{-\frac{7x}{9}}$$

β) $$\sqrt{\frac{x}{3}-\frac{5x-1}{12}+\frac{\sqrt{64x}}{\sqrt{144}}}+\sqrt{-\frac{7x}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4x-5x+1+8x}{12}}+\sqrt{-\frac{7x}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{7x+1}{12}}+\sqrt{-\frac{7x}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{7x+1}{12}} + \sqrt{-\frac{7x}{9}}$$

Επομένως, για να ορίζεται η παράσταση, αρκεί να ισχύει

$$7x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{7}$$

καθώς και $$-\frac{7x}{9} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Δηλαδή το διάστημα που συναληθεύουν οι δύο παραπάνω ανισώσεις

είναι το $$-\frac{1}{7} \leq x \leq 0$$

γ) $\sqrt[4]{\alpha^2 + 8}$

δ) $\sqrt[n]{2 - 5x}$

γ) Για να ορίζεται αρκεί $\alpha^2 + 8 > 0$, ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathcal{R}$

δ) Για να ορίζεται αρκεί ο n να είναι θετικός ακέραιος αριθμός και

αν το n είναι άρτιος, τότε

$$2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{5}$$

Με άλλα λόγια

$$x \in (-\infty, \frac{2}{5}]$$

Παράδειγμα : Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{1-x}{4} - \dfrac{2x-1}{2} > \dfrac{3x-1}{4} \Leftrightarrow$

Παράδειγμα : Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $$\frac{1-x}{4}-\frac{2x-1}{2}>\frac{3x-1}{4}\Leftrightarrow 1-x-2(2x-1)>3x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x-4x+2>3x-1\Leftrightarrow -x-4x-3x>-1-2-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x>-4\Leftrightarrow x<\frac{4}{8}\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Άρα

$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$$

$\beta)\quad \frac{x}{3}-\frac{x-4}{2}\geq\frac{5-x}{6}+1$

$\beta)$

$$\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} \geq \frac{5-x}{6} + 1 \Leftrightarrow 2x - 3(x-4) \geq 5 - x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3x + 12 \geq 11 - x \Leftrightarrow 2x - 3x + x \geq 11 - 12 \Leftrightarrow 0x \geq -1$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{2-x}{3} - \dfrac{x+1}{4} > \dfrac{x-1}{6}$ και β) $\dfrac{x-4}{5} + \dfrac{x-5}{4} \leq \dfrac{x}{20}$

Λύση: Επιλύουμε αρχικά κάθε ανίσωση ξεχωριστά

α) $\dfrac{2-x}{3}-\dfrac{x+1}{4}>\dfrac{x-1}{6} \Leftrightarrow 4(x+2)-3(x+1)>2(x-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8-4x-3x>2x-2 \Leftrightarrow 5-7x>2x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x-2x>-5-2 \Leftrightarrow -9x>-7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{9}$$

β) $$\frac{x-4}{5}+\frac{x-5}{4}\le\frac{x}{20}\Leftrightarrow 4(x-4)+5(x-5)\le x\Leftrightarrow$$

$$4x-16+5x-25\le x\Leftrightarrow 9x-41\le x\Leftrightarrow 9x-x\le 41\Leftrightarrow x\le\frac{41}{8}$$

Οπότε έχουμε: $x<\frac{7}{9}$ και $x\le\frac{41}{8}$

Άρα $x<\frac{7}{9}$ δηλαδή $x\in\left(-\infty,\ \frac{7}{9}\right)$

Άσκηση Αξιολόγησης

Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x}{5} - \frac{3x}{2} + 1 \geq \mathrm{x} - \frac{4}{3}x - 2$$

Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x}{5} - \frac{3x}{2} + 1 \geq \mathrm{x} - \frac{4}{3}x - 2 \Leftrightarrow$$

$$30*\frac{x}{5} - 30 * \frac{3x}{2} + 30 * 1 \geq 30 * \mathrm{x} - 30 * \frac{4}{3}x - 30 * 2 \Leftrightarrow$$

$$6\mathrm{x} - 15 * 3x + 30 \geq 30\mathrm{x} - 10 * 4x - 60 \Leftrightarrow$$

$$6\mathrm{x} - 45x + 30 - 30\mathrm{x} + 40x + 60 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$46x - 75x + 90 \geq 0 \Leftrightarrow -34\mathrm{x} + 90 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -34\mathrm{x} \geq -90 \quad \Leftrightarrow 34\mathrm{x} \leq 90$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x} \leq \frac{90}{34}$$