Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Ενότητα 9: Τριπλά ολοκληρώματα

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης
e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Ορισμός.
- Ιδιότητες.
- Τόποι ολοκλήρωσης.
- Τρόπος υπολογισμού.
- Εφαρμογές.
- Υπολογισμός σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

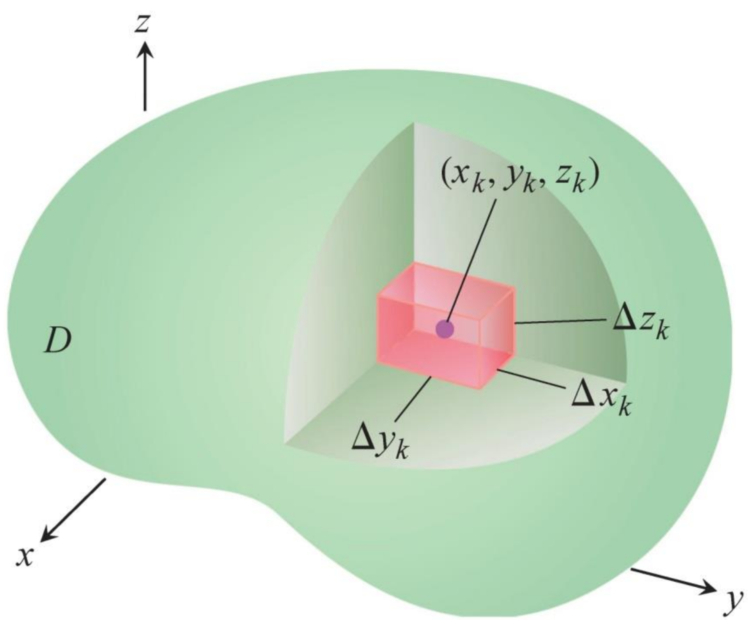
Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

- θα έχουν κατανοήσει την έννοια των τριπλών ολοκληρωμάτων,
- θα μπορούν να υπολογίζουν τριπλά ολοκληρώματα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες,
- θα γνωρίζουν βασικές εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων,
- θα είναι σε θέση να αξιοποιούν τα συστήματα των κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων.

Ορισμός (1/2)

- Έστω μια συνάρτηση $w = f(x,y,z)$, ορισμένη στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε μια διαμέριση $Q = \{\Omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ του Ω, δηλ. $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n = \Omega$, $(\mathrm{int}\Omega_i) \cap (\mathrm{int}\Omega_j) = \emptyset$.



- Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

όπου ΔV_k ο **όγκος** του Ω_k.

άθροισμα Riemann της *f*

Ορισμός (2/2)

- Αν το άθροισμα Riemann της f έχει όριο την τιμή K, όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο 0, δηλ. αν

$$\lim_{\|Q\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = K$$

- η τιμή αυτή αποτελεί το **τριπλό ολοκλήρωμα** της f στον τόπο Ω και συμβολίζεται με

$$K = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f\,(x,y,z)$ που ορίζεται στον τόπο Ω λέγεται **ολοκληρώσιμη** σ' αυτόν, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $Q = \{\Omega_i\}$ του Ω, τέτοια ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\max\left\{f(x,y,z)\right\}\Big|_{\Omega_i}\Delta V_i-\sum_{i=1}^{n}\min\left\{f(x,y,z)\right\}\Big|_{\Omega_i}\Delta V_i\right|<\varepsilon$$

Αν μια συνάρτηση $f\,(x,y,z)$ είναι **συνεχής** στον τόπο Ω, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** σ' αυτόν.

Το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega} dxdydz$ ισούται με τον όγκο του τόπου Ω.

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Έστω $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τον τόπο Ω.

- Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\iiint_{\Omega}\left[\kappa f(x,y,z) \pm \lambda g(x,y,z)\right]dxdydz = \kappa\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz + \lambda\iiint_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz$$

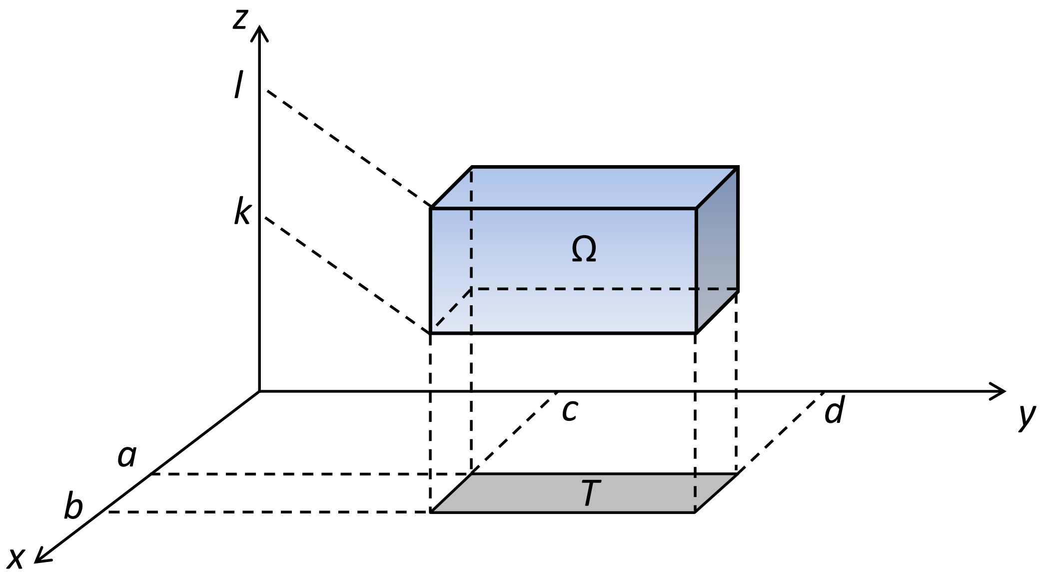
- Αν $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ είναι μια διαμέριση του Ω, τότε

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz + \ldots + \iiint_{\Omega_n} f(x,y,z)dxdydz$$

- Αν $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, τότε

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz$$

Ορθογώνιοι τόποι

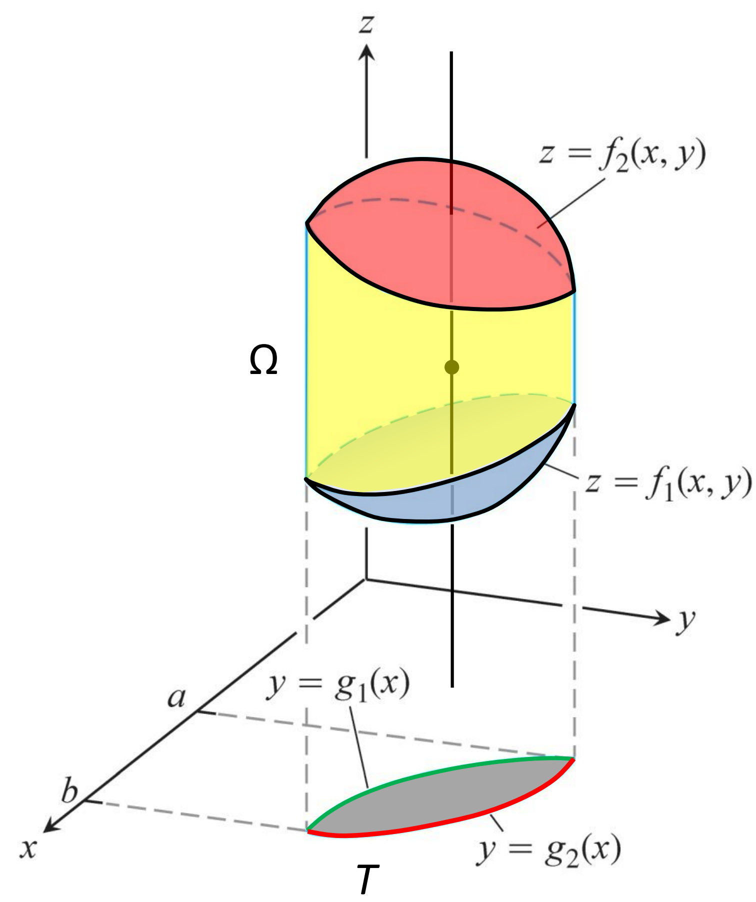


$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x,y,z)dzdydx$$
$$= \int_k^l \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)dydxdz$$
$$= \ldots$$

3 διαδοχικά απλά ολοκληρώματα

Κανονικός τόπος

- Έστω ο τόπος Ω που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = f_1(x,y)$ και $z = f_2(x,y)$.
- Ο τόπος Ω λέγεται **κανονικός ως προς *z***, αν κάθε ευθεία που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του Ω και είναι παράλληλη προς τον άξονα O*z*, τέμνει το σύνορο του Ω σε 2 το πολύ σημεία.



Υπολογισμός ολοκληρώματος (1/4)

- Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη στον τόπο Ω και υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\iint_T h(x,y)dxdy, \left(\text{όπου } h(x,y) = \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)$$

- για κάθε $(x,y) \in T$, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ και ισούται με

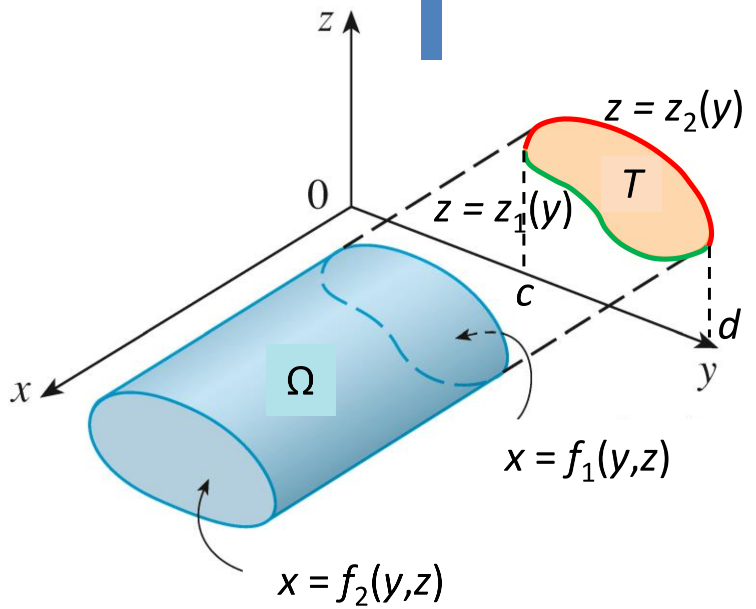
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_T dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

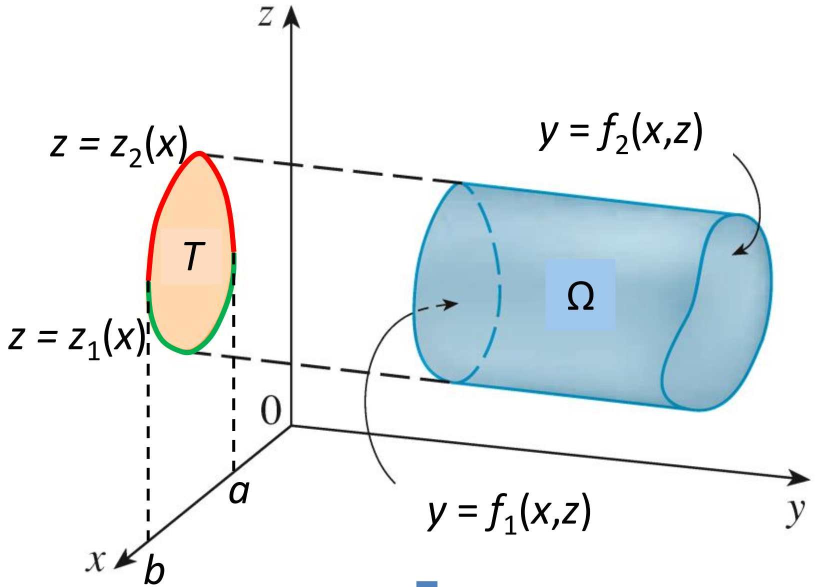
Από το προηγούμενο παράδειγμα:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \underbrace{\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz}_{\textbf{3 διαδοχικά απλά ολοκληρώματα}}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος (2/4)

$$\Omega=\{(x,y,z): c\le y\le d, z_1(y)\le z\le z_2(y), f_1(y,z)\le x\le f_2(y,z)\}$$





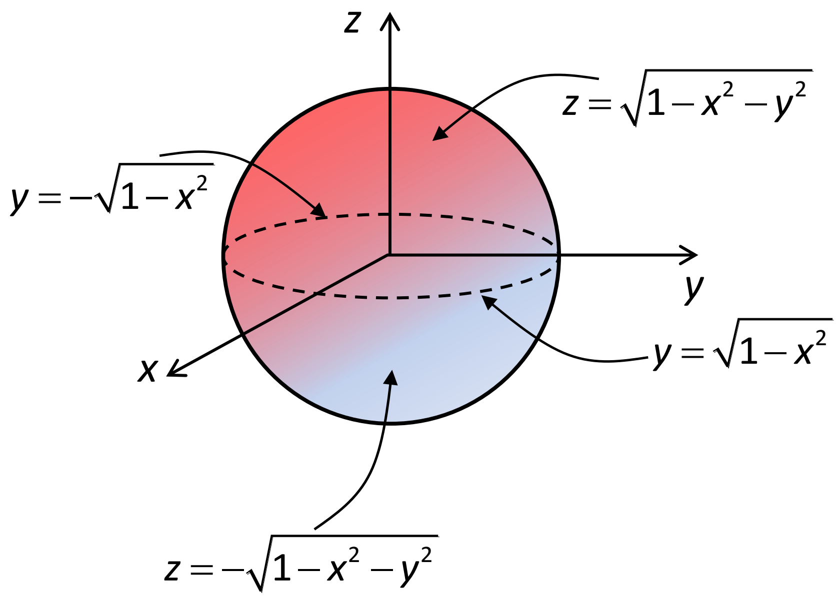
$$\Omega=\{(x,y,z): a\le x\le b, z_1(x)\le z\le z_2(x), f_1(x,z)\le y\le f_2(x,z)\}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος (3/4)

Παράδειγμα

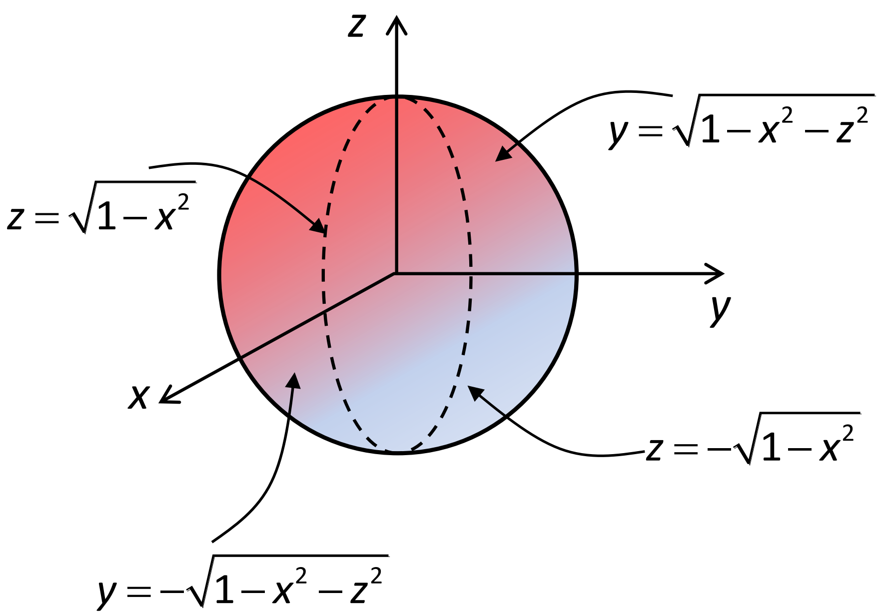
Να δοθούν περιγραφές του τόπου Ω, για τα σημεία του οποίου ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$



$$\begin{aligned}\Omega = \{(x, y, z) : -1 \le x \le 1,\\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2},\\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}\end{aligned}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος (4/4)



$$\Omega = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{1-x^2-z^2} \le y \le \sqrt{1-x^2-z^2}\}$$

Εφαρμογές (1/2)

Μέση τιμή μιας συνάρτησης *f* (*x*,*y*,*z*) στον τόπο Ω:

$$\frac{1}{|\Omega|}\iiint_{\Omega} f\,dxdydz = \frac{\iiint_{\Omega} f\,dxdydz}{\iiint_{\Omega} dxdydz}$$

Μάζα υλικού τόπου Ω με πυκνότητα $\delta(x,y,z)$:

$$M = \iiint_{\Omega} \delta(x,y,z)\,dxdydz$$

Πρώτη ροπή ως προς το επίπεδο *xy*:

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

Πρώτη ροπή ως προς το επίπεδο *yz*:

$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

Πρώτη ροπή ως προς το επίπεδο *xz*:

$$M_{xz} = \iiint_{\Omega} y\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

Εφαρμογές (2/2)

Κέντρο μάζας υλικού τόπου Ω
με πυκνότητα $\delta(x,y,z)$:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M},\; y_0 = \frac{M_{xz}}{M},\; z_0 = \frac{M_{xy}}{M}$$

Ροπή αδρανείας ως
προς τον άξονα x:

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

Ροπή αδρανείας ως
προς τον άξονα y:

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

Ροπή αδρανείας ως
προς τον άξονα z:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

Αλλαγή μεταβλητών (1/2)

- Έστω οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις

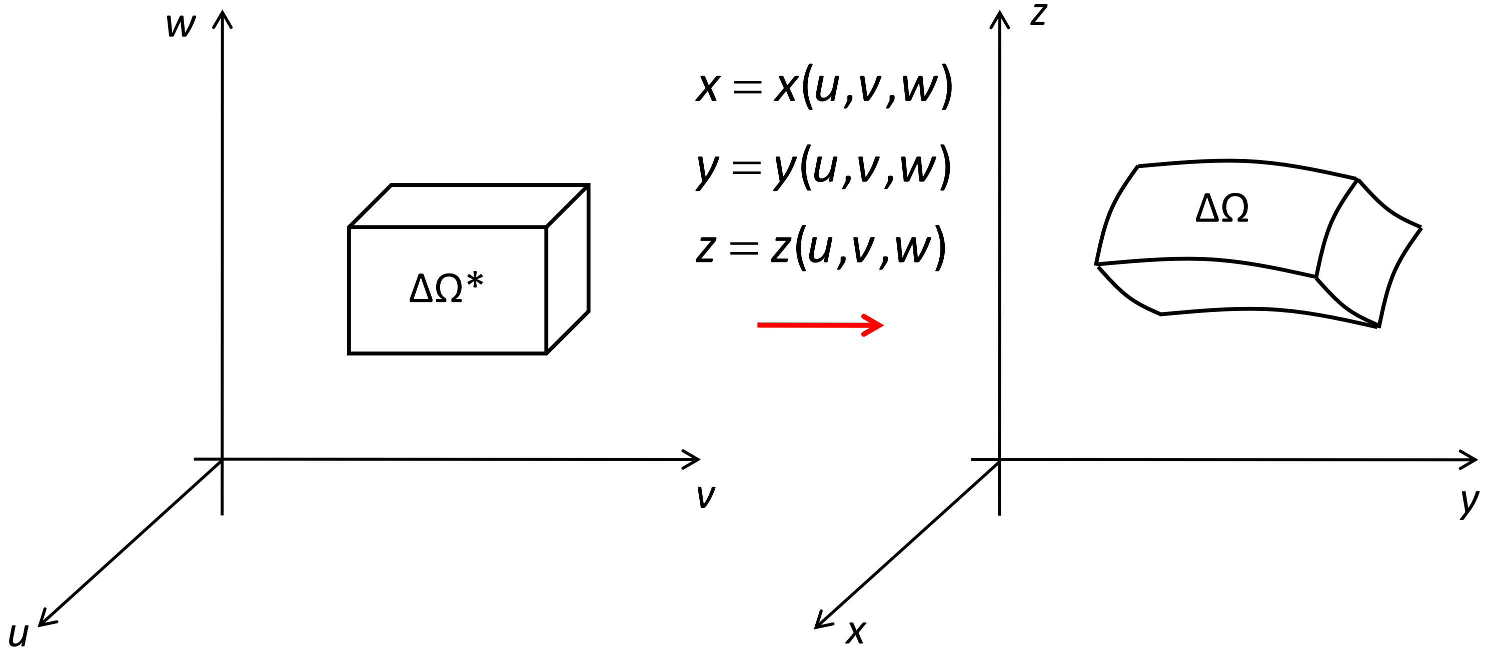
$$x = x(u,v,z),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

που ορίζουν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του τόπου Ω* του χώρου $Ouvw$ στον τόπο Ω του χώρου $Oxyz$.

- Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν μια **αλλαγή μεταβλητών** και μπορούν να λυθούν ως προς u, v, w:

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z).$$

Αλλαγή μεταβλητών (2/2)



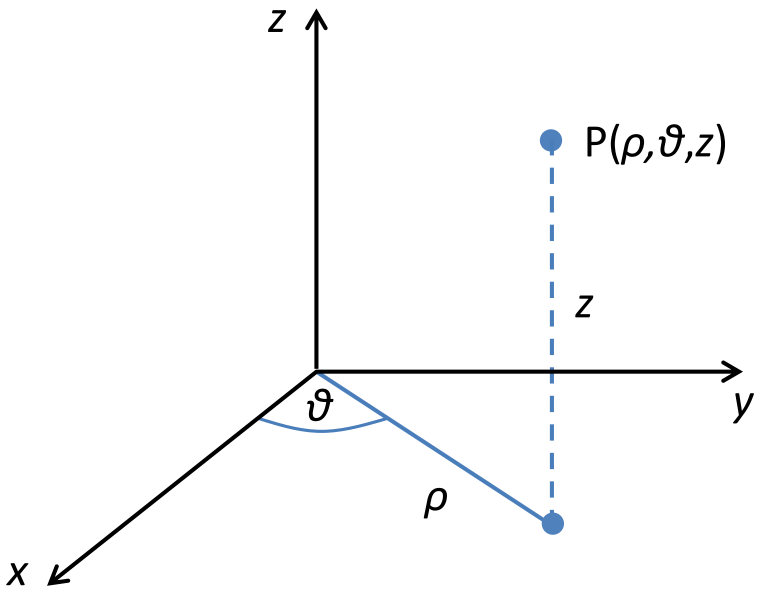
$x = x(u,v,w)$

$y = y(u,v,w)$

$z = z(u,v,w)$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες (1/3)



$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\Downarrow$$

$$\iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta,z)\,\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz$$

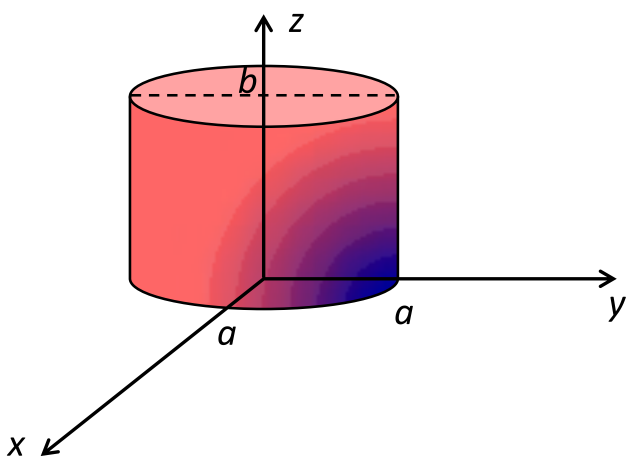
Αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες (2/3)

Παράδειγμα:

- Να περιγραφεί το στερεό που περικλείεται από τις επιφάνειες

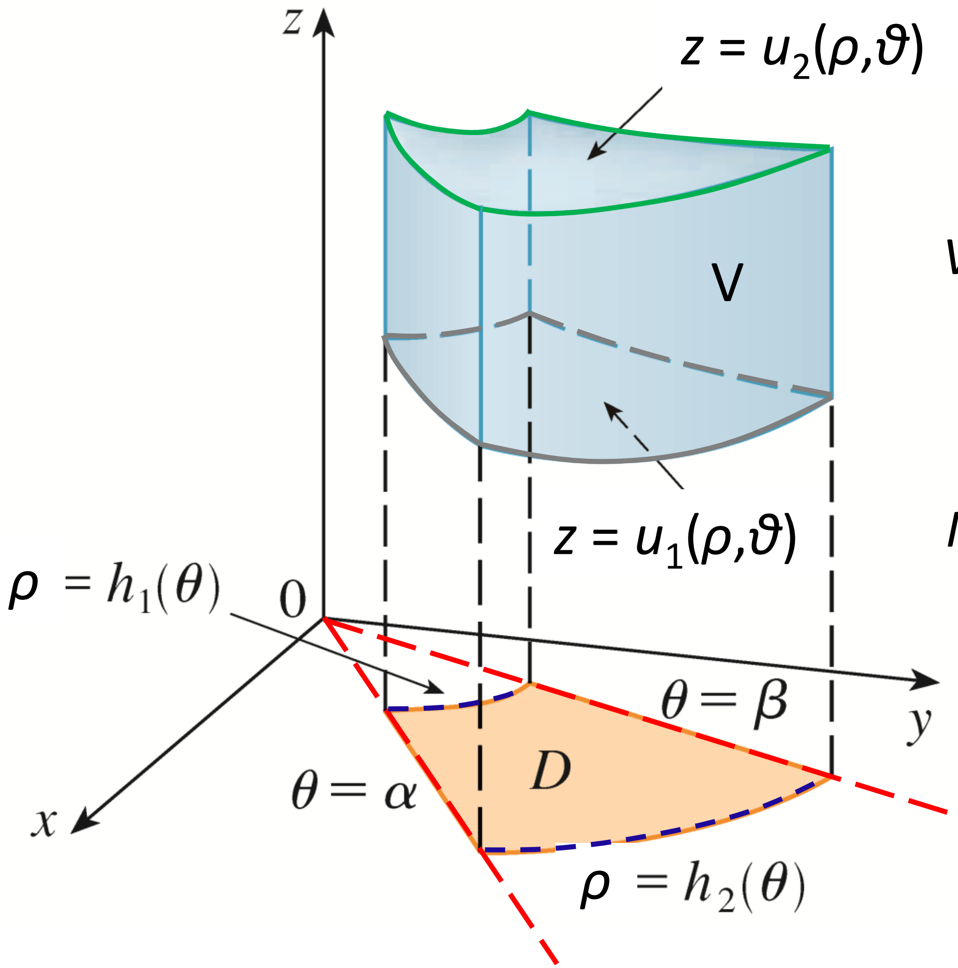
$$x2 + y2 = a2,\ z = 0,\ z = b,$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες.



$$\Omega = \{(\rho, \vartheta, z) : 0 \le \rho \le a,$$
$$0 \le \vartheta \le 2\pi,$$
$$0 \le z \le b\}$$

Αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες (3/3)



$$D = \{(\rho,\vartheta) : \alpha \le \vartheta \le \beta,\ h_1(\vartheta) \le \rho \le h_2(\vartheta)\}$$

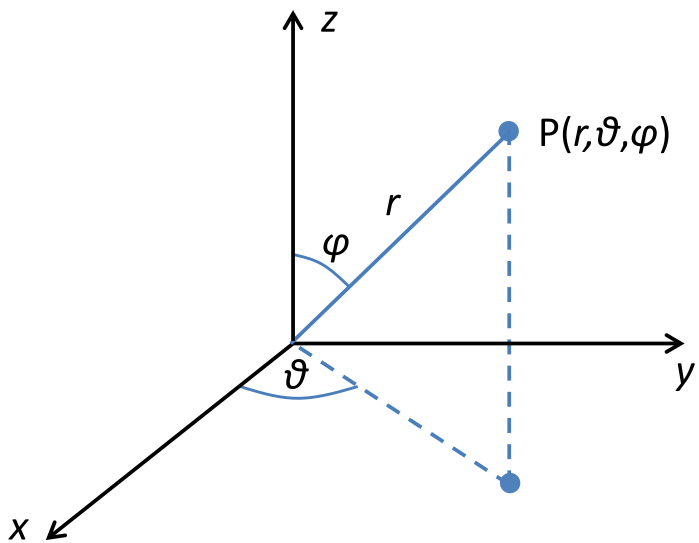
$$V = \{(\rho,\vartheta,z) : (\rho,\vartheta) \in D,\ u_1(\rho,\vartheta) \le z \le u_2(\rho,\vartheta)\}$$

$$I = \iiint_V f(\rho,\vartheta,z)dV$$

$$= \iint_D \left[\int_{u_1(\rho,\vartheta)}^{u_2(\rho,\vartheta)} f(\rho,\vartheta,z)dz \right]$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\vartheta)}^{h_2(\vartheta)} \int_{u_1(\rho,\vartheta)}^{u_2(\rho,\vartheta)} f(\rho,\vartheta,z)\rho dz d\rho d\vartheta$$

Αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες (1/2)



$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta\sin\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = r^2\sin\varphi}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\Downarrow$$

$$\iiint_{\Omega^*} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,drd\vartheta d\varphi$$

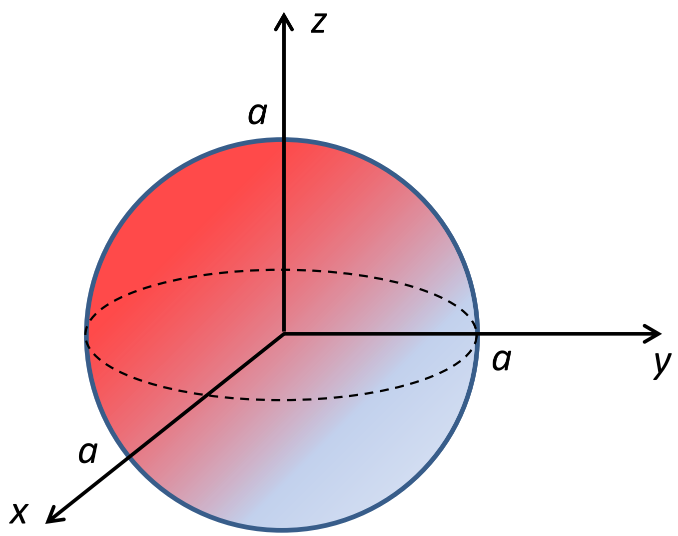
Αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες (2/2)

Παράδειγμα

Να περιγραφεί ο σφαιρικός τόπος

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες.



$$\Omega = \{(r,\vartheta,\varphi) : 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.