Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Ενότητα 7: Ακρότατα, τύπος Taylor

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Ολικά και τοπικά ακρότατα, σαγματικά σημεία.
- Κρίσιμα σημεία.
- Προσδιορισμός ακροτάτων.
- Κριτήριο β΄ παραγώγων.
- Δεσμευμένα ακρότατα, πολλαπλασιαστές Lagrange.
- Τύπος Taylor.

Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

- θα μπορούν να εντοπίζουν και να χαρακτηρίζουν τοπικά και ολικά ακρότατα, καθώς και σαγματικά σημεία,
- θα είναι σε θέση να εφαρμόζουν το κριτήριο των β΄ παραγώγων,
- θα έχουν κατανοήσει την έννοια των δεσμευμένων ακροτάτων,
- θα μπορούν να προσδιορίζουν δεσμευμένα ακρότατα,
- θα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τον τύπο του Taylor.

Ακρότατα συνάρτησης 2 μεταβλητών (1/3)

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο $P(x_0,y_0) \in A$. Η τιμή $f(x_0,y_0)$ καλείται

(α) **ολικό** (ή **απόλυτο**) **μέγιστο** στο A, αν και μόνο αν ισχύει

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \text{ για κάθε } (x,y) \in A$$

(β) **ολικό** (ή **απόλυτο**) **ελάχιστο** στο A, αν και μόνο αν ισχύει

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \text{ για κάθε } (x,y) \in A$$

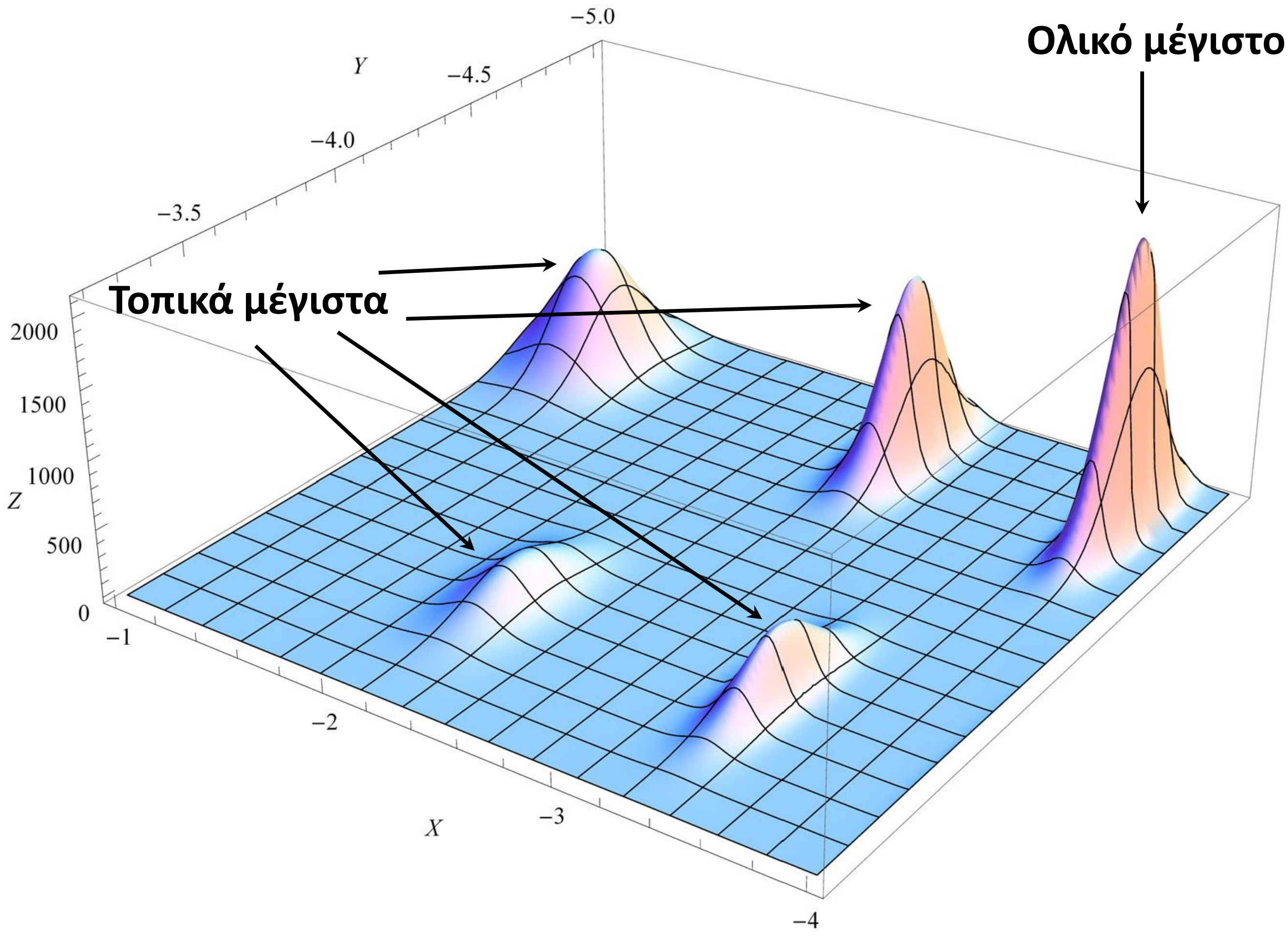
Και στις δύο περιπτώσεις, το σημείο (x_0,y_0) αποτελεί σημείο **ολικού** (ή **απόλυτου**) **ακροτάτου**.

Ακρότατα συνάρτησης 2 μεταβλητών (2/3)

Εάν η συνθήκη της περίπτωσης (α) ((β)) ισχύει μόνο για τα σημεία (x,y) που ανήκουν σε μια περιοχή $\varpi(x_0,y_0)\subseteq A$ του (x_0,y_0), τότε η τιμή $f(x_0,y_0)$ αποτελεί **τοπικό** ή **σχετικό μέγιστο** (**ελάχιστο**).

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, το σημείο (x_0,y_0) αποτελεί σημείο **τοπικού** (ή **σχετικού**) **ακροτάτου**.

Ακρότατα συνάρτησης 2 μεταβλητών (3/3)



Κριτήριο 1ης παραγώγου

Αν μια συνάρτηση $f\,(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο (x_0,y_0) και έχει τοπικό ακρότατο σ' αυτό, τότε ισχύει

$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

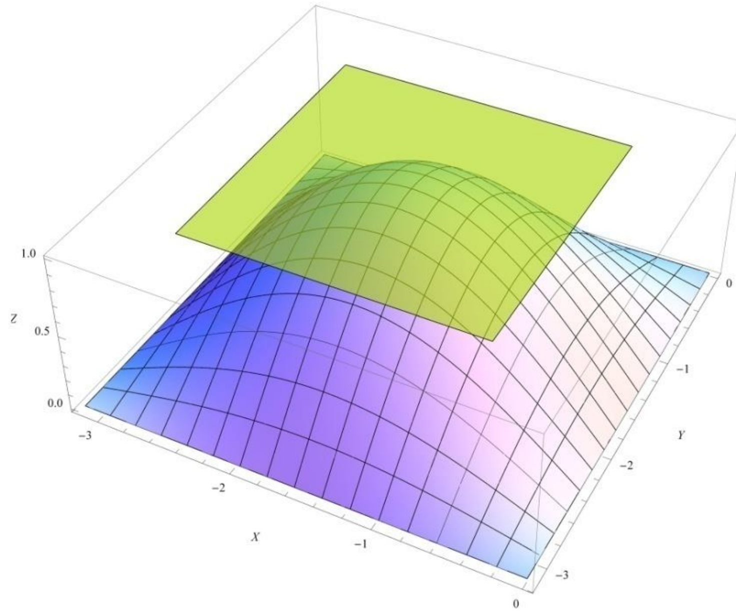
απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$\nabla f(x_0,y_0) = 0$$

Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η κλίση μιας συνάρτησης ή δεν υπάρχει τουλάχιστον μία από τις f_x, f_y, λέγονται **στάσιμα** ή **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης.

Παρατηρήσεις

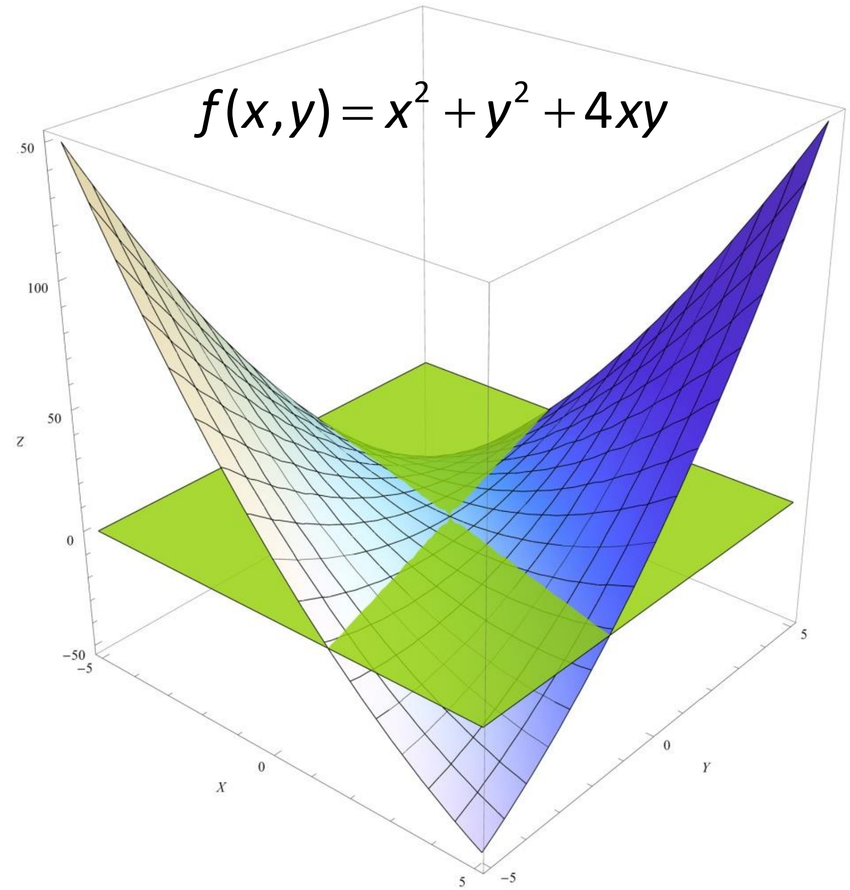
- Αν το (x_0,y_0) είναι στάσιμο σημείο μια παραγωγίσιμης συνάρτησης, τότε εκεί το **εφαπτόμενο επίπεδο** της επιφάνειας $z = f\,(x,y)$ είναι **παράλληλο προς το επίπεδο Ο*xy***, δηλ. της μορφής $z = z_0$ (χωρίς, ωστόσο, το σημείο να είναι απαραίτητα ακρότατο).



Σαγματικά σημεία

Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ σε ένα στάσιμο σημείο (x_0,y_0) δεν έχει τοπικό ακρότατο, τότε το σημείο $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ ονομάζεται **σαγματικό**.

Σε κάθε περιοχή ενός σημείου (x_0,y_0) όπου αντιστοιχεί ένα σαγματικό σημείο μια συνάρτησης f, υπάρχουν σημεία κοντά στο (x_0,y_0) όπου $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$, αλλά και σημεία όπου $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.



Κριτήριο β΄ παραγώγων

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με συνεχείς παραγώγους μέχρι και 2ης τάξης σε μια περιοχή του εσωτερικού σημείο $(x_0,y_0) \in A$, όπου $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

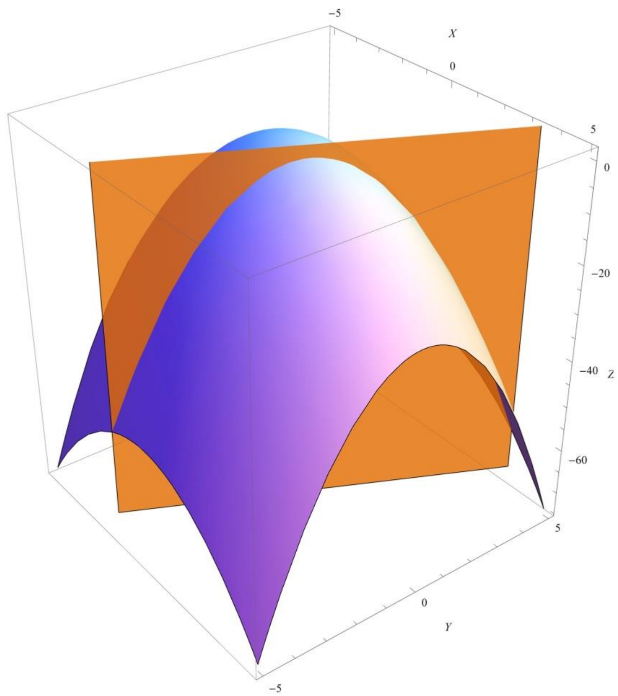
Θέτουμε $D = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0)$.

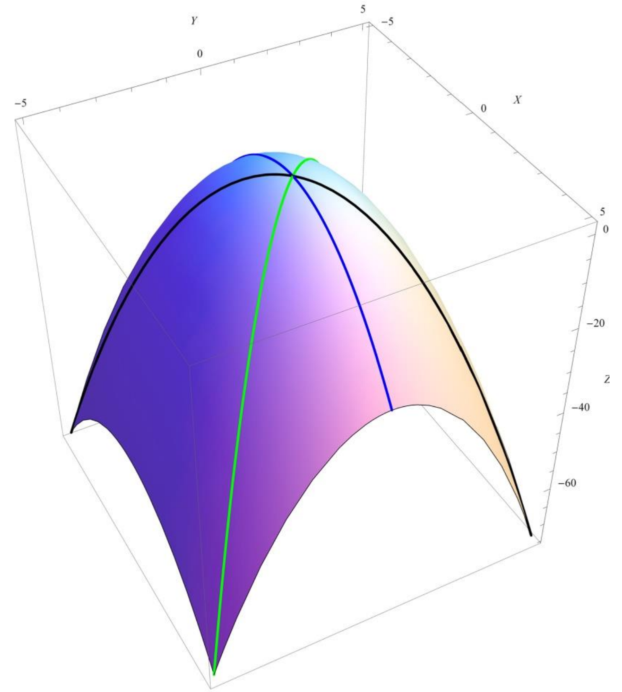
- Αν $D > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο (x_0,y_0).
- Αν $D > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο (x_0,y_0).
- Αν $D < 0$, το σημείο είναι **σαγματικό**.
- Αν $D = 0$, μπορεί να συμβαίνει οποιαδήποτε περίπτωση.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Ορίζουσα του πίνακα του Hess

Γεωμετρική ερμηνεία





Η συνθήκη $D > 0$ σημαίνει πώς όλες οι παραπάνω καμπύλες στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω, ή όλες προς τα κάτω (ανάλογα με το πρόσημο της f_{xx}).

Συναρτήσεις 3 μεταβλητών (1/2)

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, με συνεχείς παραγώγους μέχρις και δεύτερης τάξης σε μια περιοχή του εσωτερικού σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ικανές συνθήκες για να έχει η f **τοπικό ελάχιστο** στο P είναι:

$$f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0$$

$$D_1 = f_{xx}(P) > 0,\ D_2 = \left.\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}\right|_P > 0,\ D_3 = \left.\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}\right|_P > 0$$

Συναρτήσεις 3 μεταβλητών (2/2)

Έστω συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, με συνεχείς παραγώγους μέχρις και δεύτερης τάξης σε μια περιοχή του εσωτερικού σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ικανές συνθήκες για να έχει η f **τοπικό μέγιστο** στο P είναι:

$$f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0$$

$$D_1 = f_{xx}(P) < 0,\; D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_P > 0,\; D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_P < 0$$

Αναζήτηση ολικών ακροτάτων

- Εντοπίζονται τα **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού.
- Υπολογίζονται οι τιμές τις συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία.
- Εντοπίζονται (αν υπάρχουν) τα κρίσιμα σημεία στο **σύνορο** του πεδίου ορισμού της και υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές.
- Συγκρίνονται οι υπολογισμένες τιμές και εντοπίζονται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή.

Δεσμευμένα ακρότατα (1/2)

Ως **δεσμευμένα** χαρακτηρίζονται τα ακρότατα μιας συνάρτησης, της οποίας οι μεταβλητές πληρούν κάποιες δεσμεύσεις/περιορισμούς.

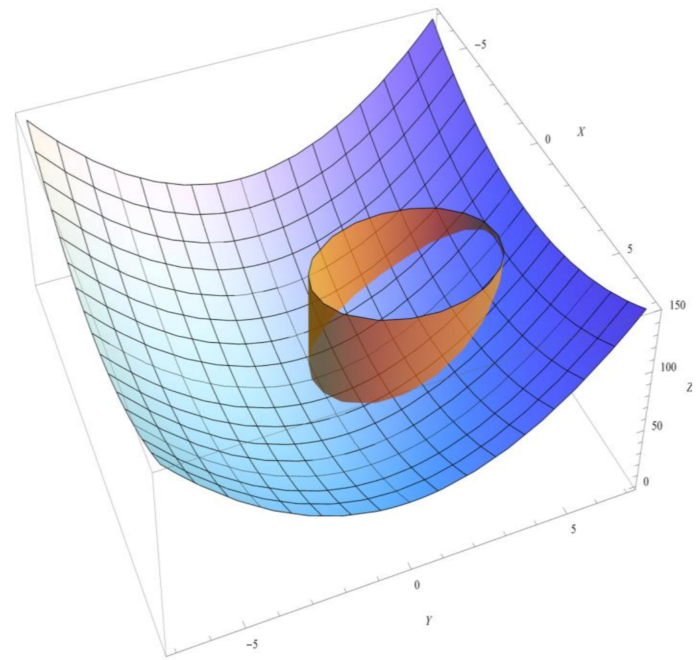
- Παράδειγμα

Να βρεθεί το ολικό μέγιστο της

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

για τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 + (y-3)^2 = 10$$



Δεσμευμένα ακρότατα (2/2)

Διατύπωση προβλήματος;

Αναζητούμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, με την προϋπόθεση ότι τα σημεία αυτά αποτελούν ταυτόχρονα σημεία μιας καμπύλης C: $g(x,y) = 0$ του επιπέδου Oxy.

Αναγκαίες συνθήκες (1/2)

Αν η καμπύλη C περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, τότε είναι $f(x,y) = f(x(t),y(t)) = h(t)$, οπότε

εφαπτομενικό διάνυσμα

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$$

Αν το σημείο P είναι ακρότατο υπό συνθήκη της f, τότε

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\mathrm{P}} = 0 \Rightarrow \nabla f\big|_{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{r}'\big|_{\mathrm{P}} = 0$$

δηλ. σε αυτήν την περίπτωση **το διάνυσμα** $\nabla f\big|_{\mathrm{P}}$ **είναι κάθετο στην καμπύλη C στο σημείο P**.

Αναγκαίες συνθήκες (2/2)

Επιπλέον, **το διάνυσμα** $\nabla g\big|_P$ **είναι κάθετο στην καμπύλη C στο σημείο P**.

Συνεπώς τα διανύσματα $\nabla f\big|_P, \nabla g\big|_P$ είναι παράλληλα μεταξύ τους, δηλ. υπάρχει $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\nabla f\big|_P = \lambda_1 \nabla g\big|_P \Leftrightarrow \nabla\left(f\big|_P + \lambda g\big|_P\right) = 0$$

Πολλαπλασιαστής Lagrange

Ορίζοντας τη συνάρτηση $\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, τα υποψήφια σημεία δεσμευμένων ακροτάτων προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\Phi_x(x,y) = \Phi_y(x,y) = \Phi_\lambda(x,y) = 0$$

Κριτήριο 2^{ης} παραγώγου

Περίπτωση $z = f(x,y)$, με περιορισμό $g(x,y) = 0$.

Ικανή συνθήκη για να αποτελεί **τοπικό μέγιστο** το σημείο (x_0,y_0), όπου x_0, y_0, λ_0 μια λύση του συστήματος $\Phi_x = \Phi_y = \Phi_\lambda = 0$ (όπου $\Phi = f + \lambda g$), είναι

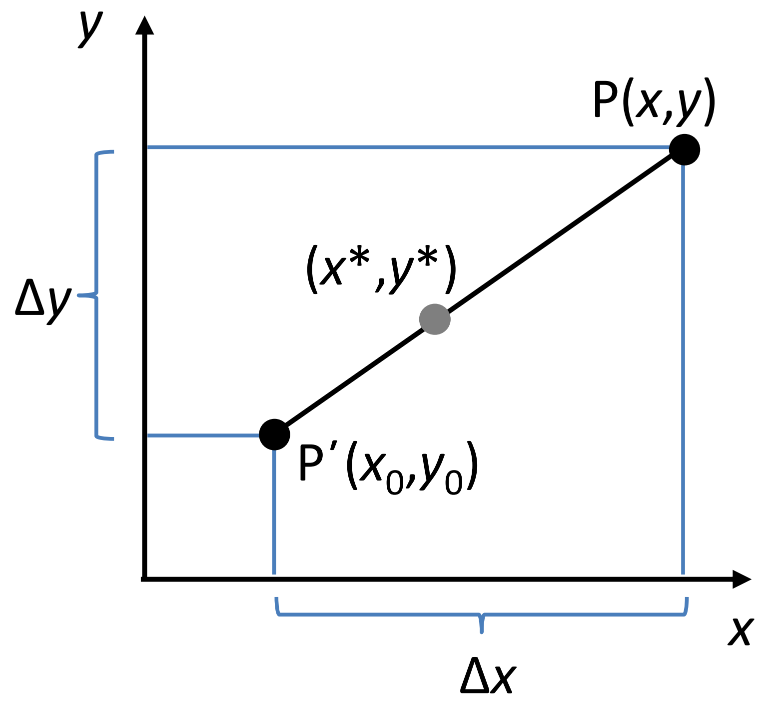
$$D(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$$

όπου

$$D(x_0,y_0,\lambda_0) = \left.\begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & g_x \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0,\lambda_0)}$$

Τύπος Taylor (1/3)

- Ο τύπος του Taylor μπορεί να αξιοποιηθεί για την εύρεση **πολυωνυμικών προσεγγίσεων** για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.



Τύπος Taylor (2/3)

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{\Delta y}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{\Delta y^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{2\Delta x \Delta y}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$+\ldots + R_{n+1}$$

υπόλοιπο

$$\text{όρος 1ης τάξης} = \frac{1}{1!}\left(\Delta x f_x + \Delta y f_y\right)^{(1)}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$\text{όρος 2ης τάξης} = \frac{1}{2!}\left(\Delta x f_x + \Delta y f_y\right)^{(2)}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$\text{όρος } n-\text{στης τάξης} = \frac{1}{n!}\left(\Delta x f_x + \Delta y f_y\right)^{(n)}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

Τύπος Taylor (3/3)

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{x-x_0}{1!}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+\frac{y-y_0}{1!}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$
$$+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}+\frac{(y-y_0)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}+\frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$
$$+\ldots+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!}(x-x_0)^{n+1-l}(y-y_0)^{l}\left.\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^{l}}\right|_{(x^*,y^*)}$$

$$x^*=x_0+\vartheta\Delta x$$
$$y^*=y_0+\vartheta\Delta y$$

Τύπος MacLaurin

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{x}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{y}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$+\frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{y^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{2xy}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$+\mathrm{K} + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\mathrm{l}=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{\mathrm{l}\,!(n+1-\mathrm{l}\,)!}x^{n+1-\mathrm{l}}y^{\mathrm{l}}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-\mathrm{l}}\partial y^{\mathrm{l}}}\bigg|_{(x^*,y^*)}$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.