Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

# Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

## **Ενότητα 6:** Παράγωγος κατά κατεύθυνση, κλίση, εφαπτόμενα επίπεδα


Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: [tzygiridis@uowm.gr](mailto:tzygiridis@uowm.gr)


**Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών**

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα

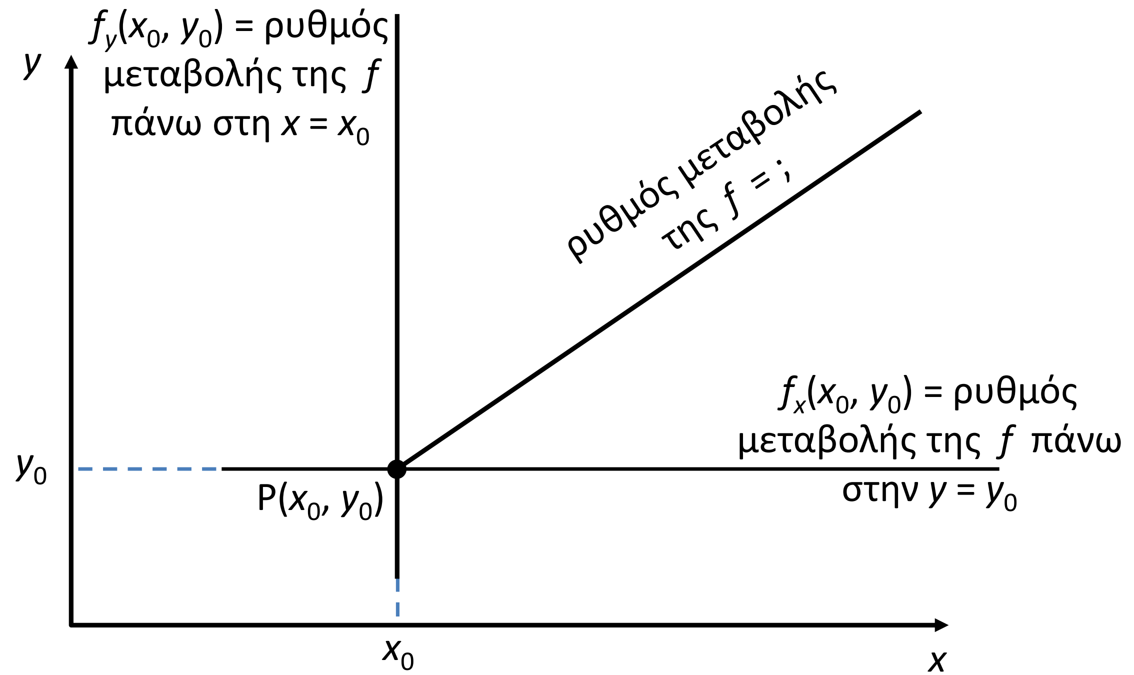
- Παράγωγος κατά κατεύθυνση.
- Υπολογισμός, γεωμετρική ερμηνεία, ιδιότητες.
- Κλίση συνάρτησης.
- Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης.
- Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου.

# Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

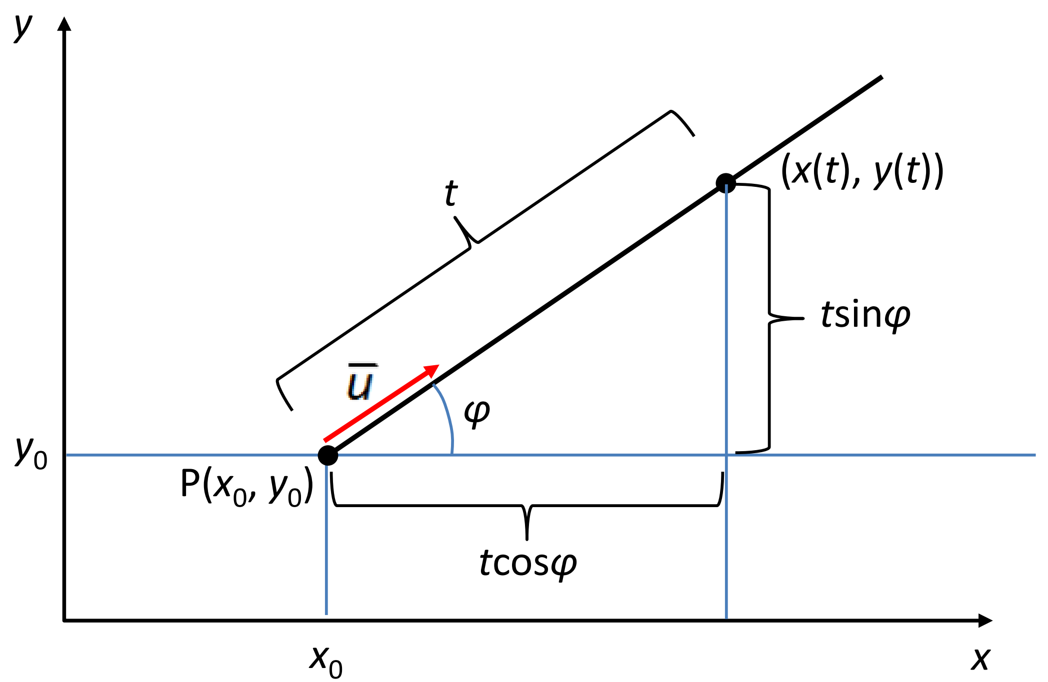
- θα έχουν κατανοήσει την έννοια και τη σημασία της παραγώγου κατά κατεύθυνση μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών,
- θα είναι σε θέση να υπολογίζουν παραγώγους κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση,
- θα μπορούν να προσδιορίζουν την κλίση μιας συνάρτησης και να την αξιοποιούν κατάλληλα,
- θα μπορούν να προσδιορίσουν εφαπτόμενα επίπεδα.

# Ορισμός (1/3)




Η ανάγκη υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης $f(x,y)$ πάνω σε *οποιαδήποτε* από τις άπειρες ευθείες που διέρχονται από το σημείο P οδηγεί στην έννοια της **παραγώγου κατά κατεύθυνση**.

# Ορισμός (2/3)




$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$
$$= \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$$

**Μοναδιαίο** διάνυσμα που προσδιορίζει την επιθυμητή κατεύθυνση

# Ορισμός (3/3)

Αν $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, η **παράγωγος** μιας συνάρτησης $f$ στο σημείο P($x_0$,$y_0$) **κατά τη διεύθυνση** του $\mathbf{u}$ ορίζεται ως

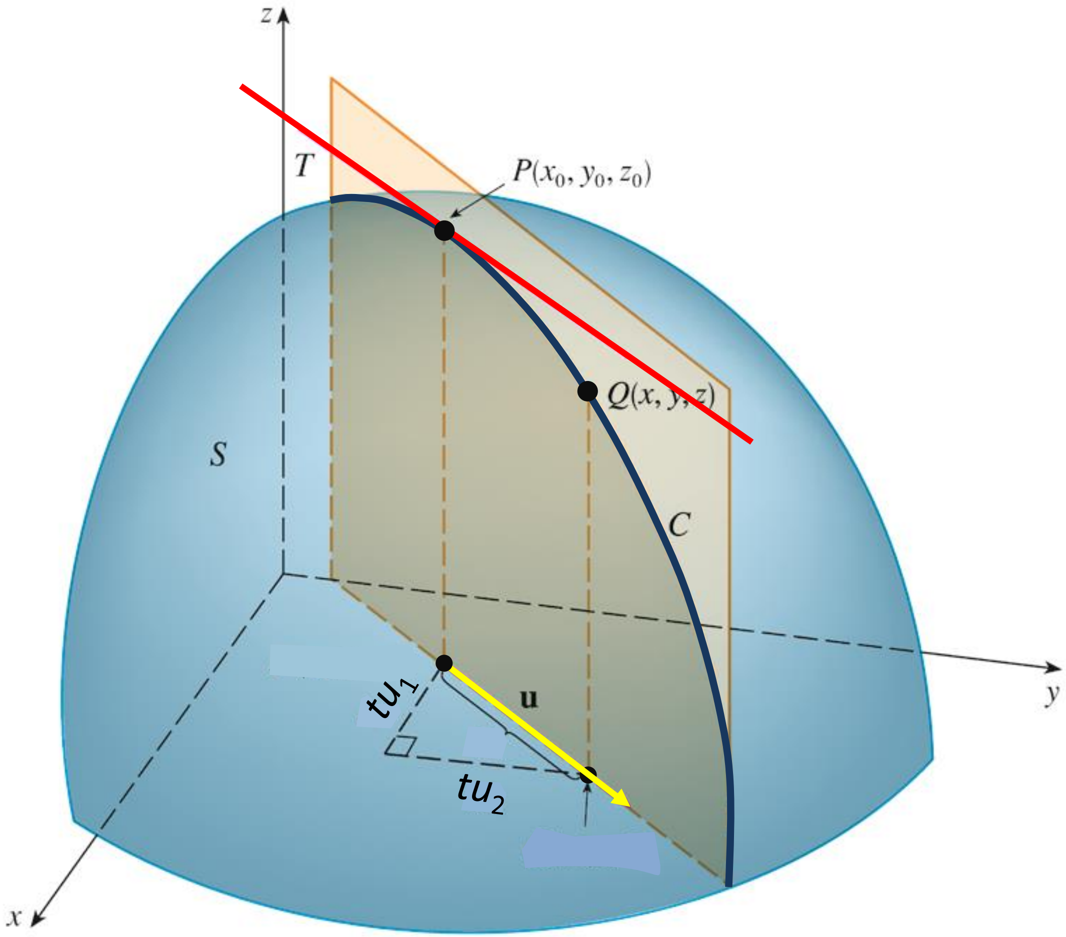
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

αν υπάρχει αυτό το όριο.

**Συμβολισμός:**

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial u}, D_u f(x_0, y_0)$$

# Γεωμετρική ερμηνεία



# Υπολογισμός (1/2)

- Αν μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ έχει συνεχείς παραγώγους $f_x$, $f_y$, στο σημείο $P(x_0,y_0)$ του πεδίου ορισμού της, τότε η παράγωγος της $f$ κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ ισούται με

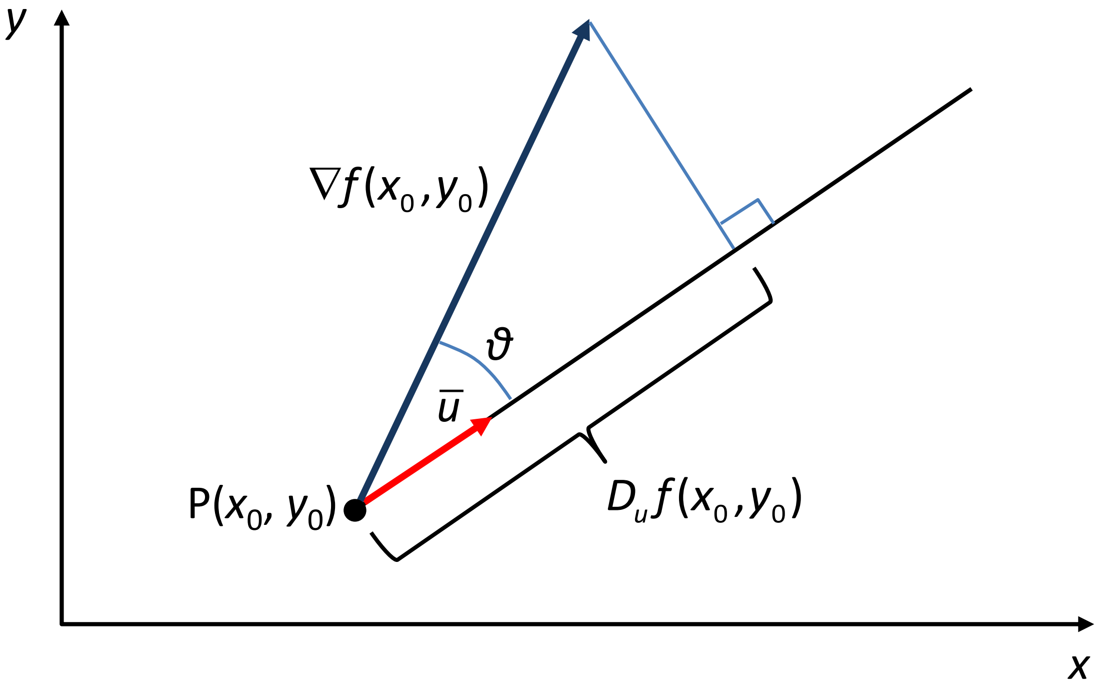
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u} = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u} = \underbrace{\left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right)}_{\nabla f(x_0,y_0)} \cdot \underbrace{(u_1,u_2)}_{\bar{u}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u} = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \mathbf{u}}$$

**Κλίση** της $f$ στο $(x_0, y_0)$

# Υπολογισμός (2/2)

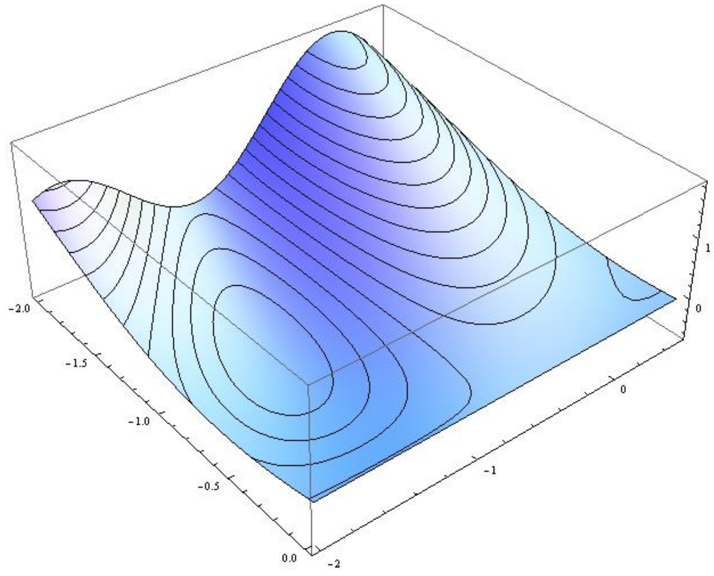


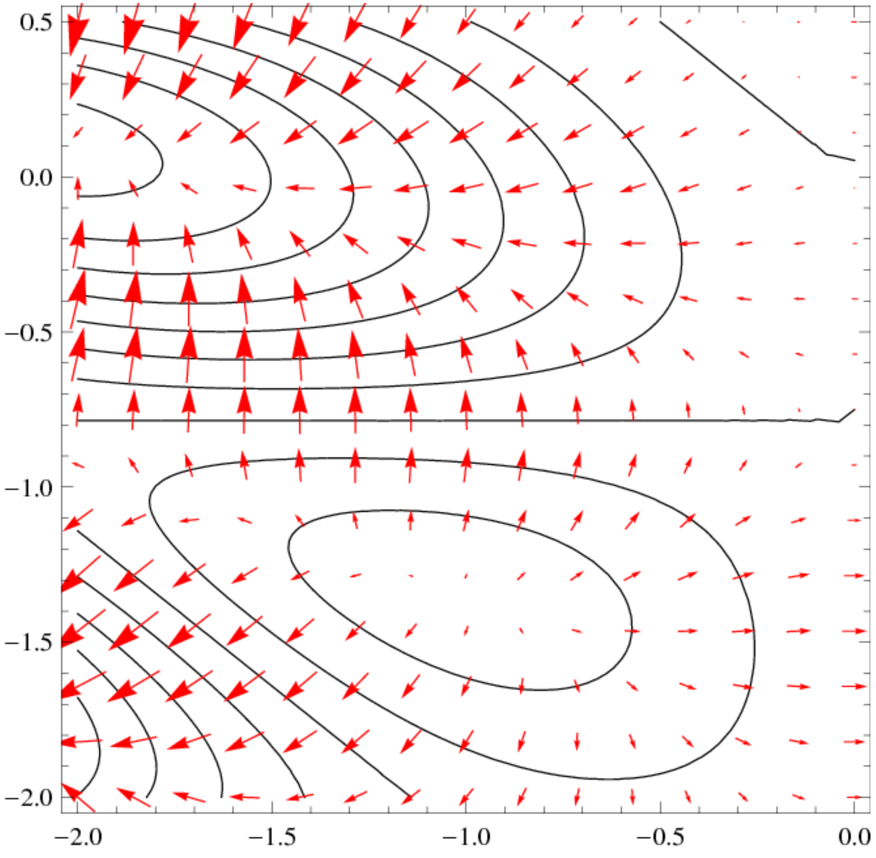

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \mathbf{u} = \left|\nabla f(x_0,y_0)\right|\cos\vartheta$$

# Ιδιότητες (1/3)

- Η **μέγιστη τιμή** της $f_u(x_0,y_0)$ είναι $\left|\nabla f(x_0,y_0)\right|$ και λαμβάνεται όταν $\vartheta = 0$, δηλ. όταν τα διανύσματα $\nabla f(x_0,y_0)$ και **u** έχουν την ίδια κατεύθυνση.
- Η **ελάχιστη τιμή** της $f_u(x_0,y_0)$ είναι $-\left|\nabla f(x_0,y_0)\right|$ και λαμβάνεται όταν $\vartheta = \pi$, δηλ. όταν τα διανύσματα $\nabla f(x_0,y_0)$ και **u** έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
- Είναι $f_u(x_0,y_0) = 0$ όταν $\vartheta = \pi/2$, δηλ. όταν τα διανύσματα, **u** είναι κάθετα μεταξύ τους. **Άρα σε διευθύνσεις κάθετες στο διάνυσμα κλίσης, η τιμή μιας συνάρτησης δε μεταβάλλεται**.

# Ιδιότητες (2/3)




- Σε κάθε σημείο, το διάνυσμα της κλίσης υποδεικνύει την κατεύθυνση του **μέγιστου ρυθμού μεταβολής** της συνάρτησης.

# Γενίκευση

**Συναρτήσεις 3 μεταβλητών ( $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ )**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial u} &= f_x(x_0,y_0,z_0)u_1+f_y(x_0,y_0,z_0)u_2+f_z(x_0,y_0,z_0)u_3\\ &=\Big(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0)\Big)\cdot(u_1,u_2,u_3)\\ &=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

**Συναρτήσεις *n* μεταβλητών ( $\mathbf{u}=\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ )**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial u} &= f_{x_1}(\mathrm{P})u_1+f_{x_2}(\mathrm{P})u_2+\ldots+f_{x_n}(\mathrm{P})u_n\\ &=\Big(f_{x_1}(\mathrm{P}),f_{x_2}(\mathrm{P}),\ldots,f_{x_n}(\mathrm{P})\Big)\cdot(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\ &=\nabla f(\mathrm{P})\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

# Ιδιότητες (3/3)

Αν υπάρχει η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\overline{u}$ για τις συναρτήσεις $f$, $g$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$D_u\left(f+g\right)=D_u f+D_u g$$

$$D_u\left(\lambda f\right)=\lambda D_u f$$

$$D_u\left(fg\right)=fD_u g+gD_u f$$

$$D_u\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gD_u f-fD_u g}{g^2},\quad g\neq 0$$

Ορίζεται και η παράγωγος 2ης τάξης κατά κατεύθυνση ως

$$D_{uu}f=\frac{\partial}{\partial u}\left(f_x u_1+f_y u_2\right)=\ldots$$

$$=u_1^2 f_{xx}+u_2^2 f_{yy}+2u_1u_2 f_{xy}$$

όταν οι εμπλεκόμενες παράγωγοι είναι συνεχείς.

# Παρατηρήσεις

- Αν για μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ υπάρχει η παράγωγος κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση, τότε υπάρχουν και οι $f_x$, $f_y$ (δεν ισχύει το αντίστροφο).
- Μια συνάρτηση μπορεί να έχει παράγωγο προς οποιαδήποτε κατεύθυνση σε ένα σημείο, χωρίς να είναι συνεχής σε αυτό.
- Το διάνυσμα της κλίσης μιας συνάρτησης τέμνει πάντα κάθετα τις ισοσταθμικές καμπύλες της (δηλ. είναι κάθετο με τα εφαπτομενικά στις ισοσταθμικές καμπύλες διανύσματα).

# Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης

- Έστω συνάρτηση $f(x,y)$ και μια καμπύλη C που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$, της μορφής

$$C: x = x(s),\ y = y(s)$$

- Η παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ σε ένα σημείο της καμπύλης ισούται με την παράγωγο της $f$ **κατά την κατεύθυνση του εφαπτομενικού διανύσματος** στο σημείο αυτό.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

# Εφαπτόμενα επίπεδα (1/4)

Έστω η επιφάνεια S που περιγράφεται ως $F(x,y,z) = 0$ (πεπλεγμένη μορφή). Η παραμετρική καμπύλη

C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ θα βρίσκεται πάνω στην S, αν ισχύει

$F(x(t),y(t),z(t)) = 0$.

Παραγωγίζοντας, έχουμε:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(F_x, F_y, F_z)}_{\nabla F} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t), z'(t))}_{\textbf{Διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη C}} = 0$$

# Εφαπτόμενα επίπεδα (2/4)

Στο σημείο P($x(t_0)$,$y(t_0)$,$z(t_0)$) είναι

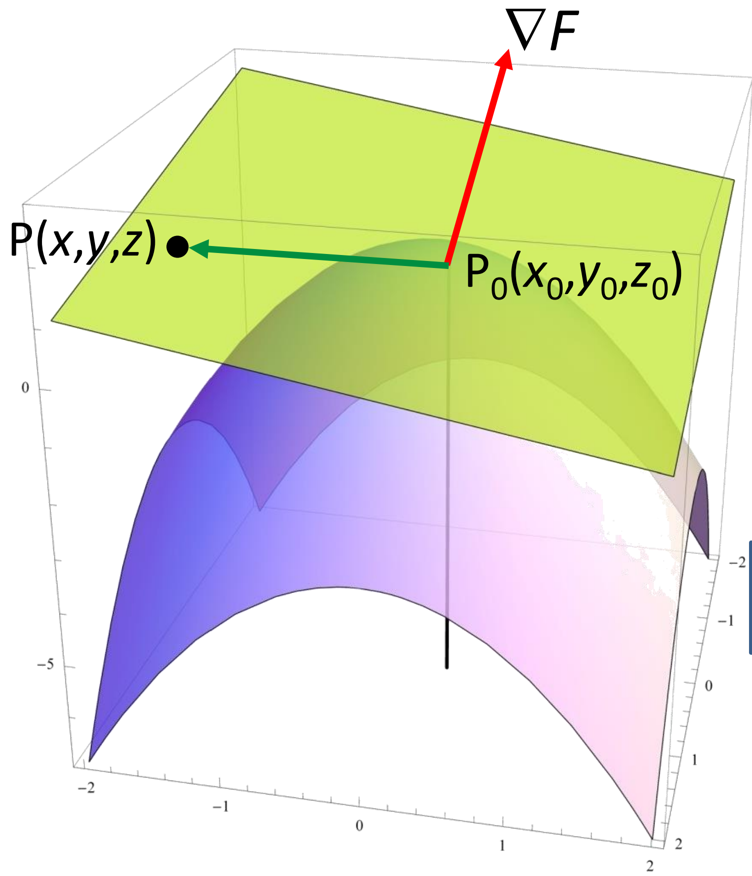
$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)\cdot(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$$

δηλ. τα δύο διανύσματα είναι κάθετα.

- Το **εφαπτόμενο επίπεδο** στο σημείο P($x_0$,$y_0$,$z_0$) είναι εκείνο που διέρχεται από το σημείο P και στο οποίο βρίσκονται όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας στο P.
- Το **εφαπτόμενο επίπεδο** στο σημείο P($x_0$,$y_0$,$z_0$) είναι εκείνο που διέρχεται από το σημείο P και είναι κάθετο στο διάνυσμα

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$$

# Εφαπτόμενα επίπεδα (3/4)




Τα διανύσματα

$$\nabla F\big|_{P_0} = \left( F_x\big|_{P_0}, F_y\big|_{P_0}, F_z\big|_{P_0} \right)$$

$$\overline{P_0 P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

είναι κάθετα, οπότε:

$$\nabla F\big|_{P_0} \cdot \overline{P_0 P} = 0$$

$$\boxed{F_x\big|_{P_0}(x - x_0) + F_y\big|_{P_0}(y - y_0) + F_z\big|_{P_0}(z - z_0) = 0}$$

# Εφαπτόμενα επίπεδα (4/4)

Αν η επιφάνεια περιγράφεται ως $z = f(x,y)$, τότε ορίζουμε

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

οπότε η επιφάνεια περιγράφεται ως

$$F(x,y,z) = 0$$

με

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1$$

και η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο P παίρνει τη μορφή

$$\boxed{z - z_0 = f_x\big|_{P_0}(x - x_0) + f_y\big|_{P_0}(y - y_0)}$$

# Τέλος Ενότητας

# Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.