Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Ενότητα 8: Διπλά ολοκληρώματα

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Τόποι.
- Ορισμός διπλού ολοκληρώματος.
- Γεωμετρική ερμηνεία.
- Ιδιότητες και υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων.
- Εφαρμογές διπλών ολοκληρωμάτων.
- Αλλαγή μεταβλητών.
- Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες.

Στόχοι

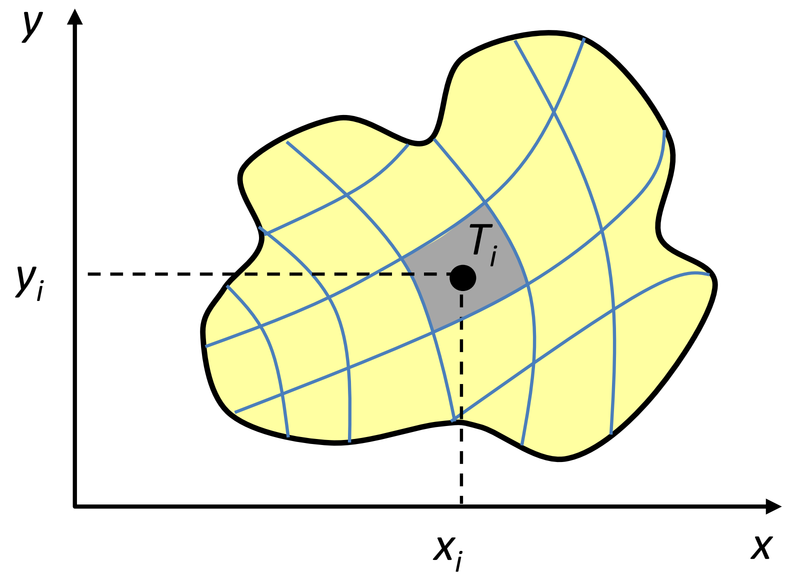
Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

- θα μπορούν να υπολογίζουν διπλά ολοκληρώματα για διαφορετικές μορφές τόπων ολοκλήρωσης,
- θα είναι σε θέση να αξιοποιούν τη διπλή ολοκλήρωση σε διάφορες εφαρμογές και γεωμετρικά προβλήματα,
- θα μπορούν να προχωρήσουν, όταν είναι αναγκαίο, σε αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης,
- θα είναι σε θέση να πραγματοποιούν αλλαγή μεταβλητών,
- θα γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού σε πολικές συντεταγμένες.

Τόποι

- **Τόπος** ονομάζεται ένα σύνολο που είναι **κλειστό** και **φραγμένο**.

Θεωρούμε ένα τόπο T και μια **διαμέριση** του $P = \{T_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, δηλ. $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$, με $(\mathrm{int}T_i) \cap (\mathrm{int}T_j) = \emptyset$.



Άθροισμα Riemann

- **Άθροισμα Riemann** μιας συνάρτησης $f(x,y)$ για τη διαμέριση P καλείται κάθε άθροισμα της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

όπου $(x_i,y_i) \in T_i$ και ΔA_i είναι το εμβαδόν του T_i.

- Η τιμή ενός αθροίσματος Riemann μιας συνάρτησης $f(x,y)$ εξαρτάται από τη διαμέριση, όπως και από την επιλογή των σημείων (x_i,y_i).

Λεπτότητα διαμέρισης

- **Διάμετρος** ενός συνόλου A καλείται η μέγιστη από τις αποστάσεις δύο τυχαίων σημείων του συνόλου:

$$\operatorname{diam}(A) = \max\{d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) : \mathrm{P},\mathrm{Q} \in A\}$$

- **Λεπτότητα** της διαμέρισης P ονομάζεται η μέγιστη τιμή των διαμέτρων $\operatorname{diam}(T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\|P\| = \max\left\{\operatorname{diam}(T_i)\right\}_{i=1,\ldots,n}$$

Διπλό ολοκλήρωμα

Αν το άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x,y)$ έχει όριο τον L $\in \mathbb{R}$, καθώς $\|P\| \to 0$, δηλ. αν

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

τότε το όριο αυτό ονομάζεται **διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στον τόπο T** και παριστάνεται με

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = L$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

- Μια συνάρτηση $f(x,y)$ που ορίζεται στον τόπο T λέγεται **ολοκληρώσιμη** σ’ αυτόν, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P = \{T_i\}$ του T, τέτοια ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\max\left\{f(x,y)\right\}\Big|_{T_i}\Delta A_i - \sum_{i=1}^{n}\min\left\{f(x,y)\right\}\Big|_{T_i}\Delta A_i\right| < \varepsilon$$

Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι **συνεχής** στον τόπο T, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** σ’ αυτόν.

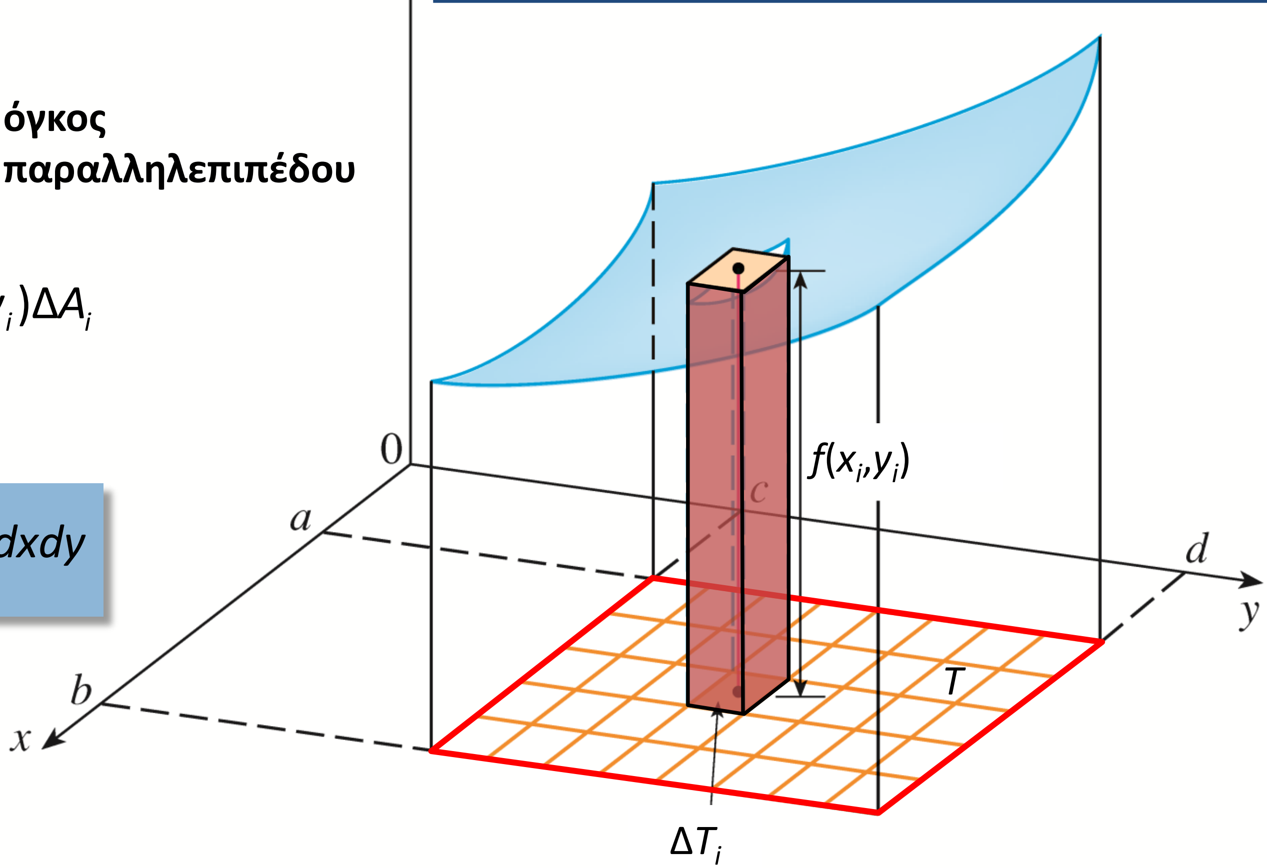
Γεωμετρική ερμηνεία (όγκος) (1/2)

Στερεό $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y), (x,y) \in T\}$

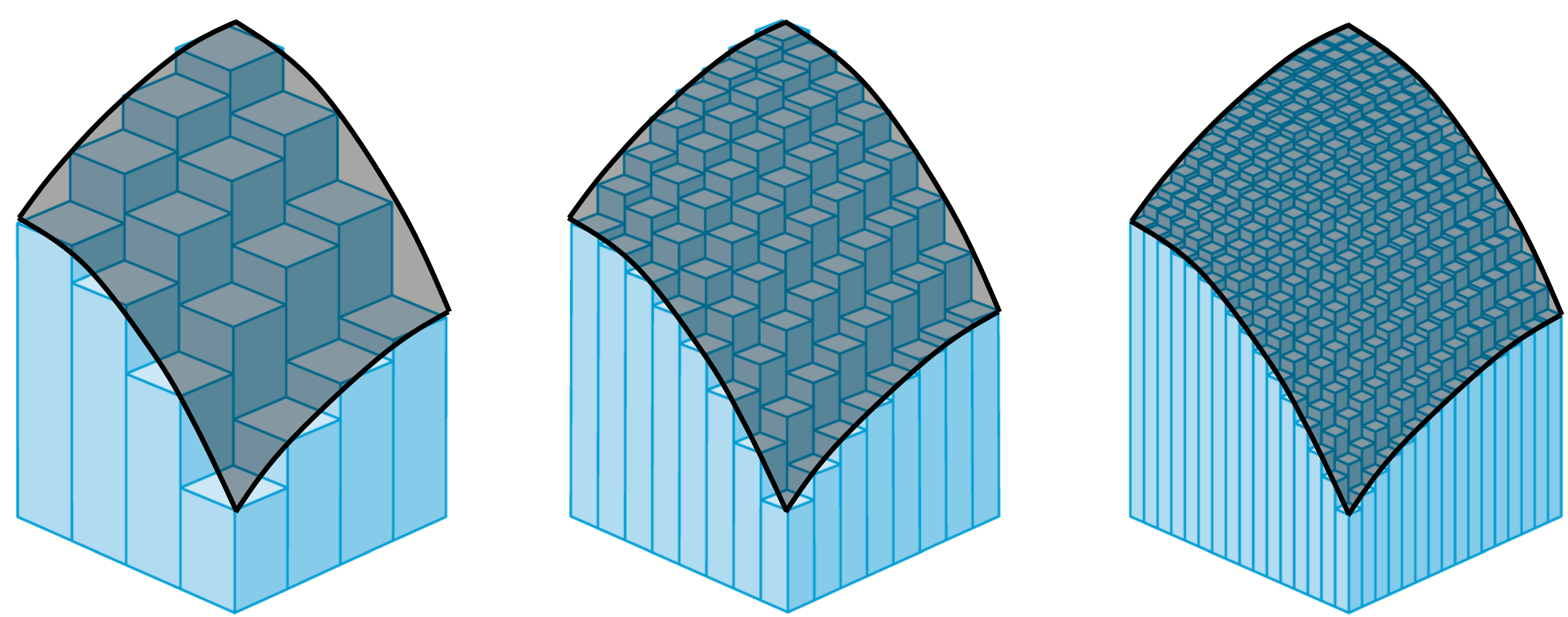
$f(x_i, y_i)\Delta A_i =$ **όγκος παραλληλεπιπέδου**

$$V_\Omega \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

$$V_\Omega = \iint_T f(x,y)dxdy$$



Γεωμετρική ερμηνεία (όγκος) (2/2)

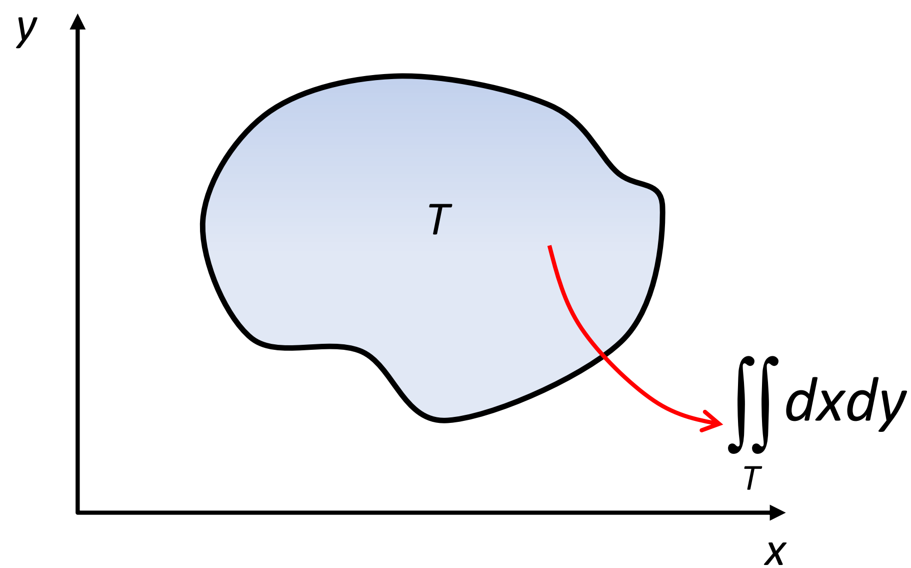


- Η προσέγγιση της τιμής του όγκου θα είναι τόσο καλύτερη, όσο "πυκνότερη" είναι η διαμέριση *P* του τόπου *T*.

Γεωμετρική ερμηνεία (εμβαδόν)

- Αν θεωρηθεί η συνάρτηση $f(x,y) = 1$, τότε:

$$\iint_T 1 \cdot dxdy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta A_i = A_T = \text{εμβαδόν του } T$$



Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Έστω $f(x,y)$, $g(x,y)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον τόπο T.

- Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\iint_T \left[\kappa f(x,y) \pm \lambda g(x,y)\right] dxdy = \kappa \iint_T f(x,y)dxdy + \lambda \iint_T g(x,y)dxdy$$

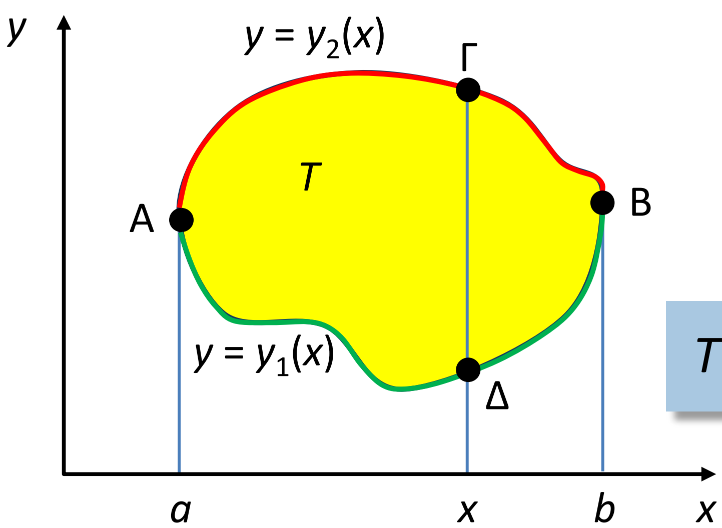
- Αν $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ είναι μια διαμέριση του T, τότε

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{T_n} f(x,y)dxdy$$

- Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$, τότε $$\iint_T f(x,y)dxdy \geq \iint_T g(x,y)dxdy$$

Κανονικός τόπος

Ένας τόπος χαρακτηρίζεται **κανονικός ως προς *y***, αν κάθε ευθεία που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του τόπου και είναι παράλληλη προς τον άξονα O*y*, τέμνει το σύνορο του τόπου σε δύο το πολύ σημεία.

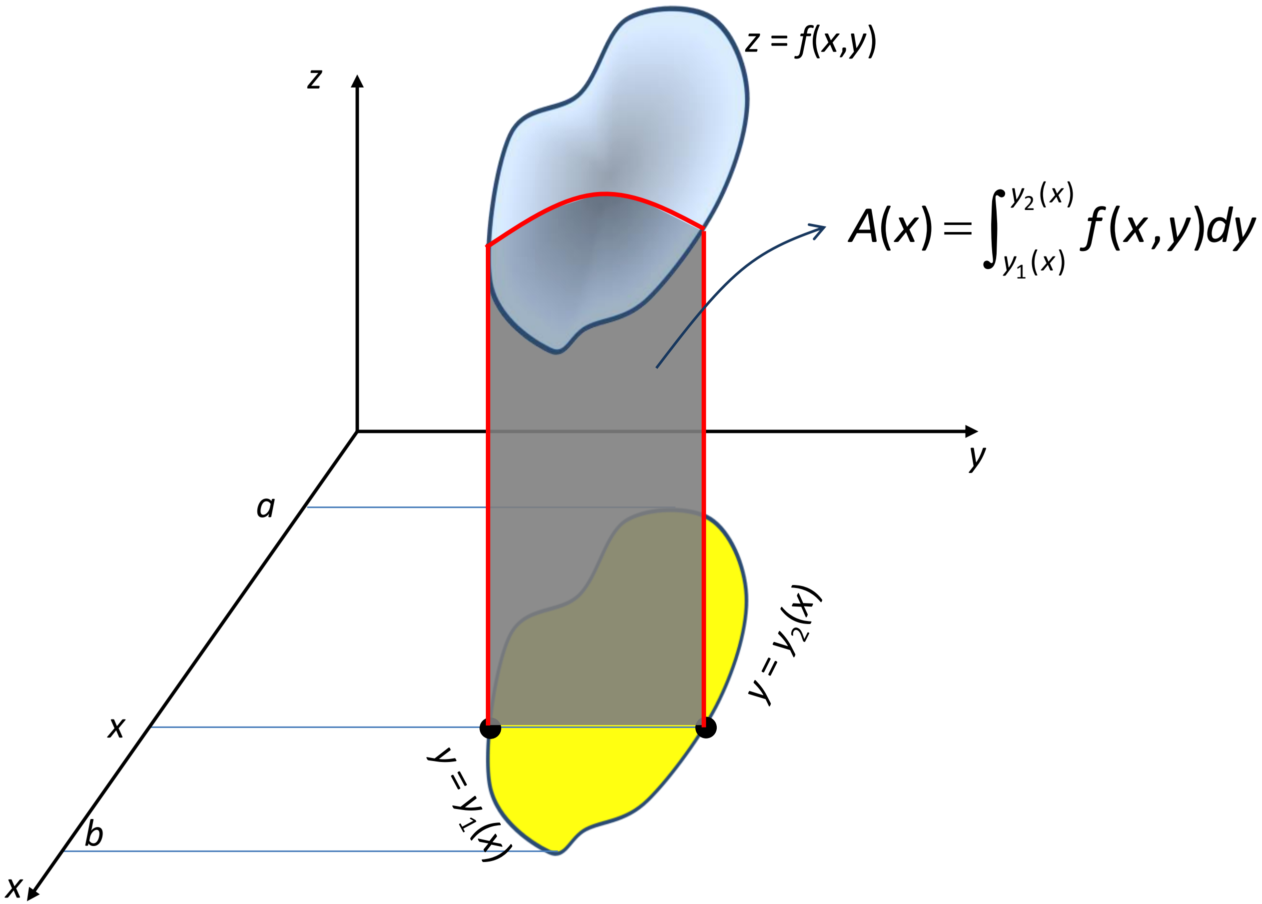


$\overset{\frown}{\text{ΑΓΒ}}: \; y = y_2(x)$

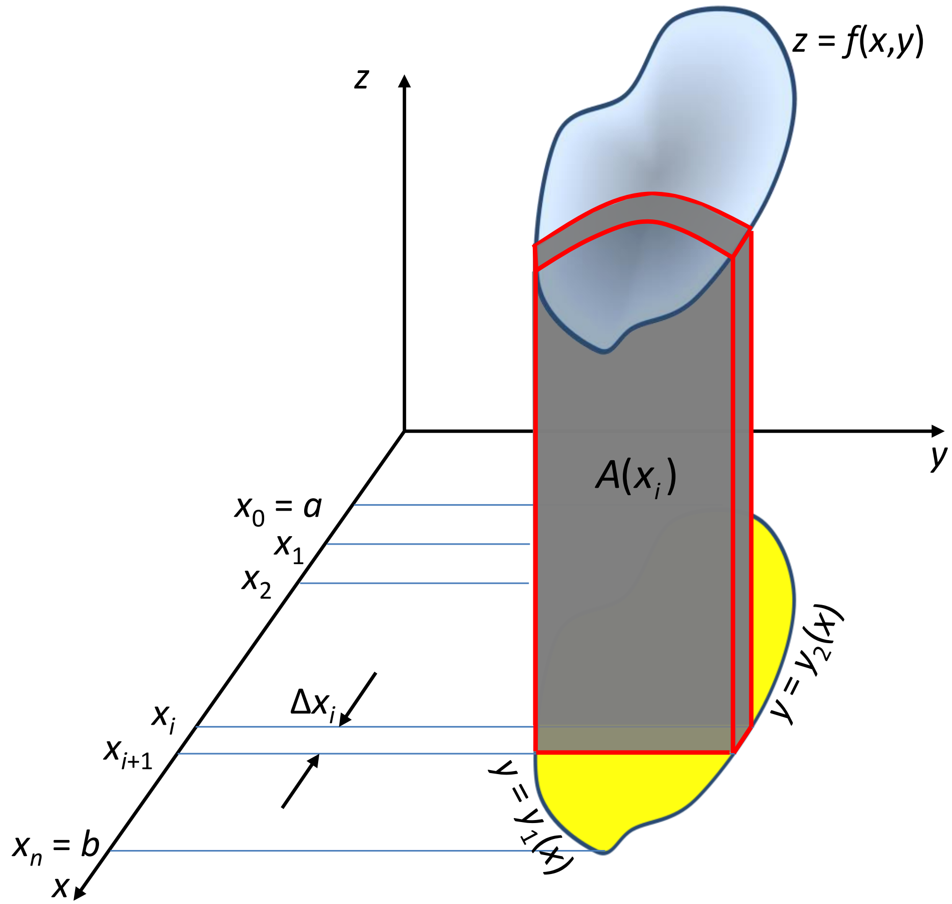
$\overset{\frown}{\text{ΑΔΒ}}: \; y = y_1(x)$

$T = \{(x,y)\text{: } a \le x \le b,\; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

Διαδοχικές ολοκληρώσεις (1/3)



Διαδοχικές ολοκληρώσεις (2/3)



$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} A(x_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b A(x)dx$$

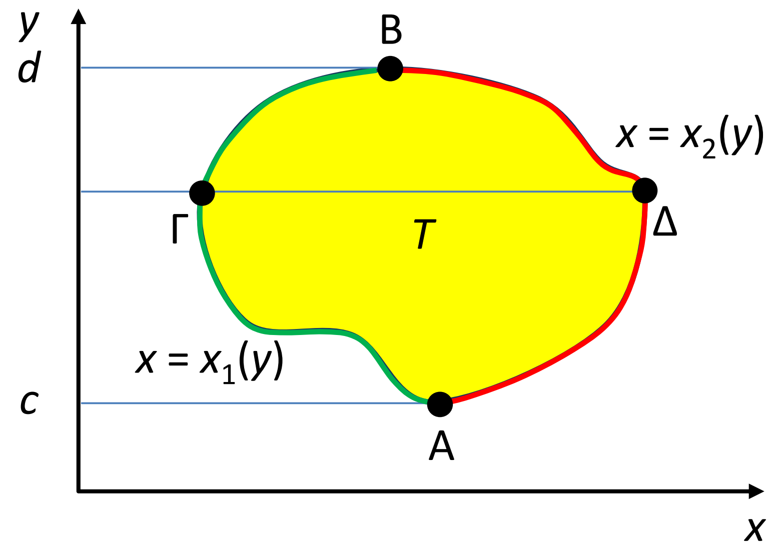
$$= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$= \underbrace{\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}_{\text{επαναληπτικά ολοκληρώματα}}$$

Διαδοχικές ολοκληρώσεις (3/3)

- Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που ο τόπος T είναι **κανονικός ως προς x**.

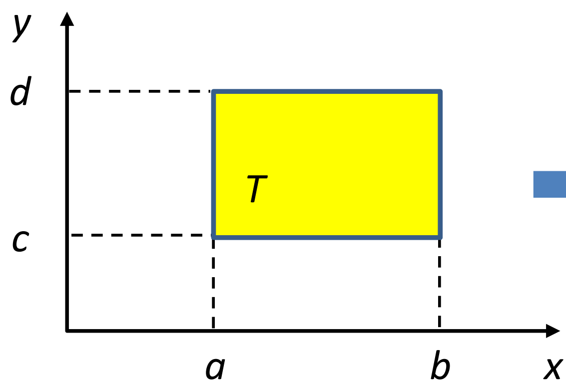


$$\iint_T f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

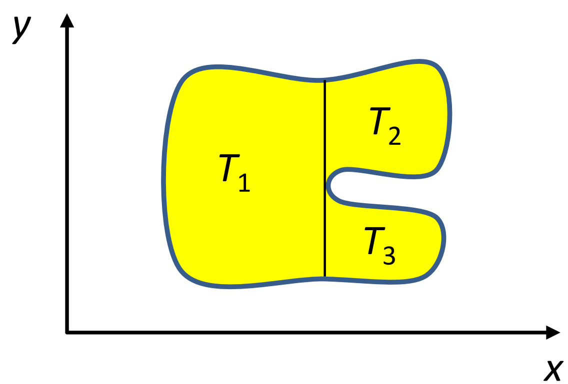
$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy$$

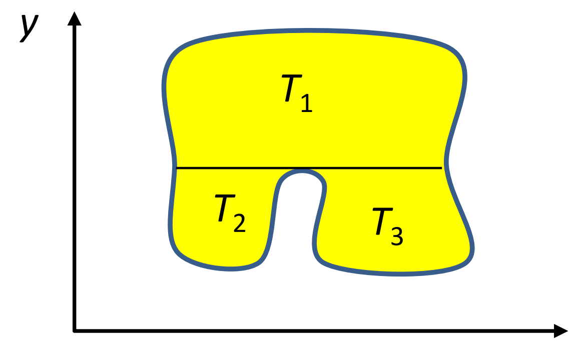
$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Ειδικές περιπτώσεις



$$\iint_T f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$
$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$





$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)dxdy + \iint_{T_3} f(x,y)dxdy$$

Εφαρμογές διπλών ολοκληρωμάτων (1/2)

Μέση τιμή μιας συνάρτησης *f* (*x*,*y*) στον τόπο *T*: ➡ $$\frac{1}{|T|}\iint_T f dxdy = \frac{\iint_T f dxdy}{\iint_T dxdy}$$

Μάζα λεπτού επίπεδου υλικού τόπου *T* με πυκνότητα *δ*(*x*,*y*): ➡ $$M = \iint_T \delta(x,y)dxdy$$

Πρώτη ροπή ως προς τον άξονα *x*: ➡ $$M_x = \iint_T y\delta(x,y)dxdy$$

Πρώτη ροπή ως προς τον άξονα *y*: ➡ $$M_y = \iint_T x\delta(x,y)dxdy$$

Εφαρμογές διπλών ολοκληρωμάτων (2/2)

Κέντρο μάζας λεπτού επίπεδου υλικού τόπου *T* με πυκνότητα $\delta(x,y)$:

$$x_0 = \frac{M_y}{M}, \; y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα *x*:

$$I_x = \iint_T y^2 \delta(x,y)\,dxdy$$

Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα *y*:

$$I_y = \iint_T x^2 \delta(x,y)\,dxdy$$

Αλλαγή μεταβλητών (1/4)

- Έστω οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις

$$x = x(u,v) \text{ και } y = y(u,v)$$

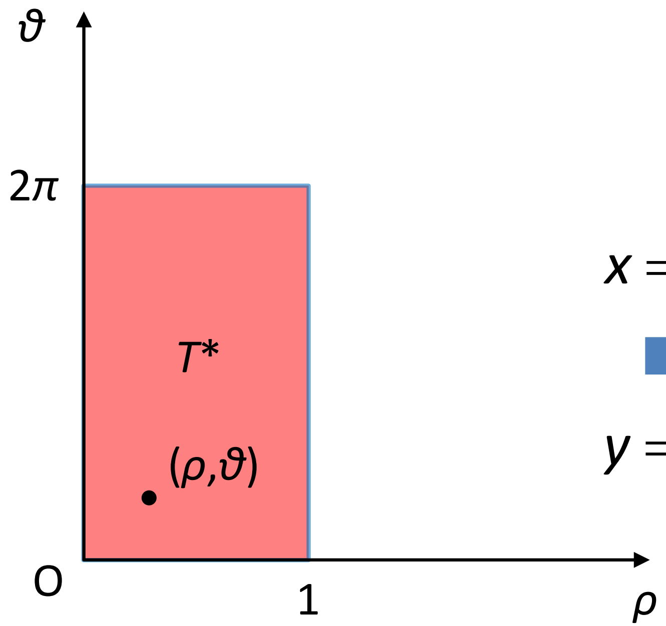
  όπου τα σημεία (u,v) ανήκουν στον τόπο T^*.

- Οι παραπάνω κατάλληλες συναρτήσεις ορίζουν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του τόπου T^* του επιπέδου Ouv στον τόπο T του επιπέδου Oxy.
- **Παράδειγμα:**

Ο τόπος $T^* = \{(\rho,\vartheta): 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ μετασχηματίζεται στον κυκλικό δίσκο T με ακτίνα 1 και κέντρο το (0,0), όταν εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός που περιγράφεται από τις εξισώσεις

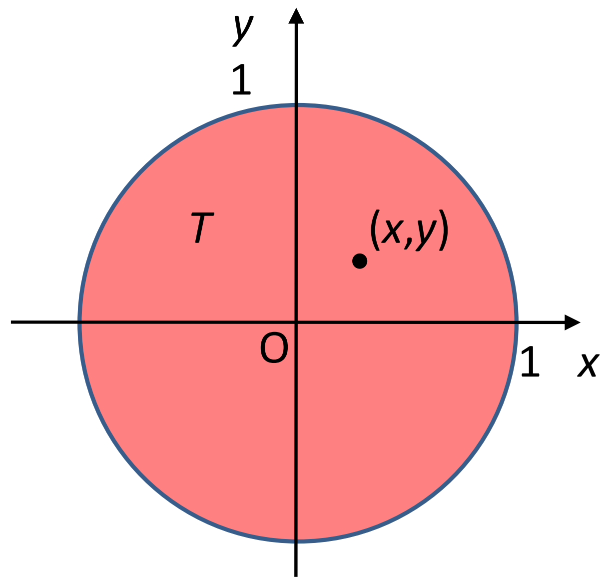
$$x = \rho\cos\vartheta \text{ και } y = \rho\sin\vartheta.$$

Αλλαγή μεταβλητών (2/4)



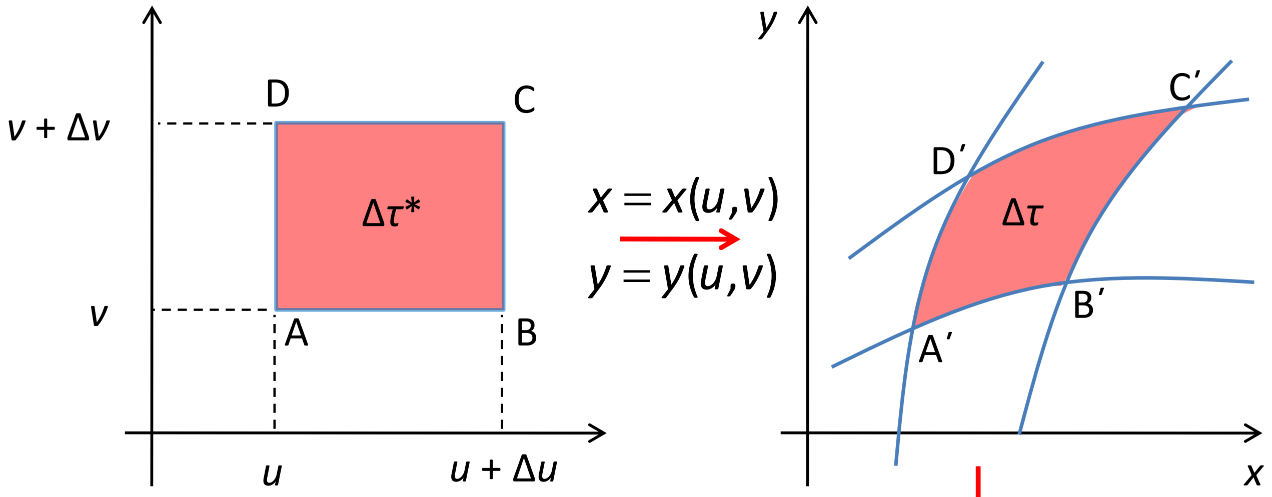
$$x = \rho\cos\vartheta$$

$$y = \rho\sin\vartheta$$



$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta = \rho^2 \\ 0 \le \rho \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1$$

Αλλαγή μεταβλητών (3/4)



- Το εμβαδόν Δτ μπορεί να **προσεγγιστεί** με το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει για κορυφές τα σημεία:

$A_1(x,y) = A'$

$B_1(x + x_u\Delta u, y + y_u\Delta u)$

$D_1(x + x_v\Delta v, y + y_v\Delta v)$

$C_1(x + x_u\Delta u + x_v\Delta v, y + y_u\Delta u + y_v\Delta v)$

Αλλαγή μεταβλητών (4/4)

- Συνεπώς, το εμβαδόν Δτ προσεγγίζεται ως

$$\Delta\tau \simeq \left|\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}\right| = \left|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & 0 \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & 0 \end{vmatrix}\right|$$

≈εμβαδόν $A_1B_1C_1D_1$

$$= \left|\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\left|\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta\tau^*$$

Δηλ. μετά το μετασχηματισμό, το εμβαδό δεν παραμένει απαραίτητα το ίδιο.

$$\boxed{\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv}$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta \\ y &= \rho\sin\vartheta \end{aligned}\right\}$$ Μετατροπή από **καρτεσιανές** σε **πολικές** συντεταγμένες

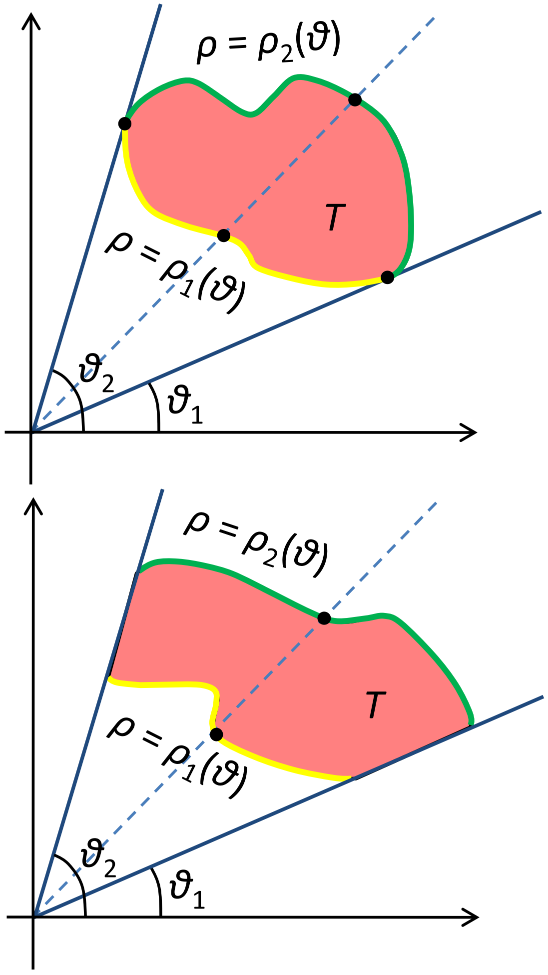
$$x_\rho = \cos\vartheta, x_\vartheta = -\rho\sin\vartheta$$
$$y_\rho = \sin\vartheta, y_\vartheta = \rho\cos\vartheta$$

$$\longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\iint_T f(x,y)\underline{dxdy} = \iint_{T^*} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\underline{\rho d\rho d\vartheta}}$$

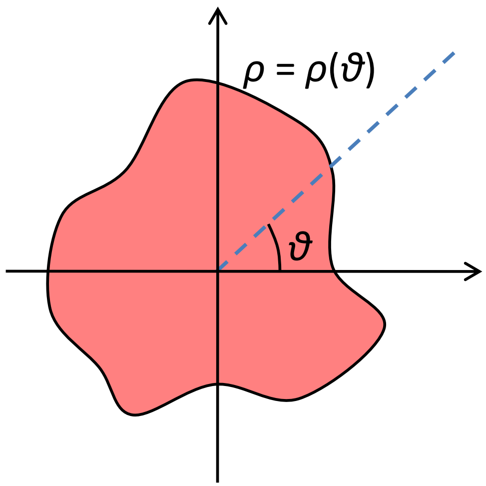
Προσδιορισμός τόπου ολοκλήρωσης (1/2)



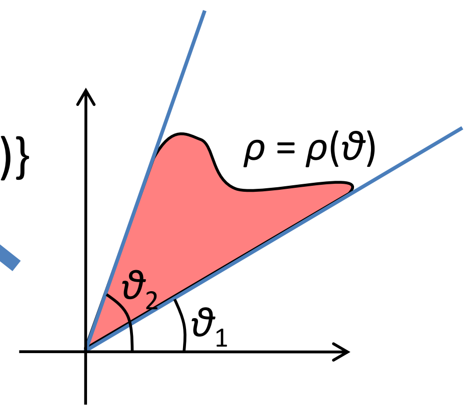
$$T = \{(\rho,\vartheta) : \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2, \rho_1(\vartheta) \le \rho \le \rho_2(\vartheta)\}$$

$$I = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{\rho_1(\vartheta)}^{\rho_2(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho d\rho$$

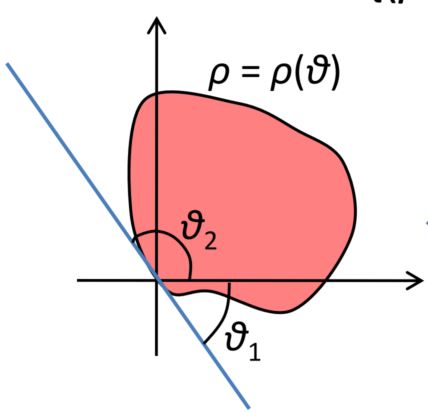
Προσδιορισμός τόπου ολοκλήρωσης (2/2)



$$T = \{(\rho,\vartheta) : 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le \rho \le \rho(\vartheta)\}$$



$$T = \{(\rho,\vartheta) : \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2, 0 \le \rho \le \rho(\vartheta)\}$$



$$T = \{(\rho,\vartheta) : \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2, 0 \le \rho \le \rho(\vartheta)\}$$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.