



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

Μαθηματική Ανάλυση II

Ενότητα 4: Μερικές παράγωγοι

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: tzygiridis@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα

- Μερικές παράγωγοι, παράγωγοι ανώτερης τάξης, μεικτές παράγωγοι.
- Γεωμετρική ερμηνεία.
- Ιδιότητες.
- Ιακωβιανή ορίζουσα.
- Συναρτησιακή εξάρτηση.



Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητας, οι φοιτητές:

- Θα έχουν κατανοήσει τη έννοια της μερικής παραγώγου,
- Θα μπορούν να υπολογίζουν μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης,
- Θα είναι σε θέση να διαπιστώνουν συναρτησιακή εξάρτηση.



Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται σε μια περιοχή ενός σημείου (x, y) .

- Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

τότε αυτό ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x, y)** .

- Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

τότε αυτό ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο (x, y)** .



Μερικές παράγωγοι 1^{ης} τάξης

- Συμβολισμός: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ή f_x, f_y .

Αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f ως προς x (y) σε κάθε σημείο (x, y) του πεδίου ορισμού A , τότε καλείται **παραγωγίσιμη ως προς x (ως προς y) στο A** .

- Ο υπολογισμός της μερικής παραγώγου της f ως προς x πρακτικά αντιμετωπίζει τη μεταβλητή y ως σταθερά και αντιστρόφως.



Ιδιότητες

- Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή u των συναρτήσεων f, g , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \pm \frac{\partial g}{\partial u}$$

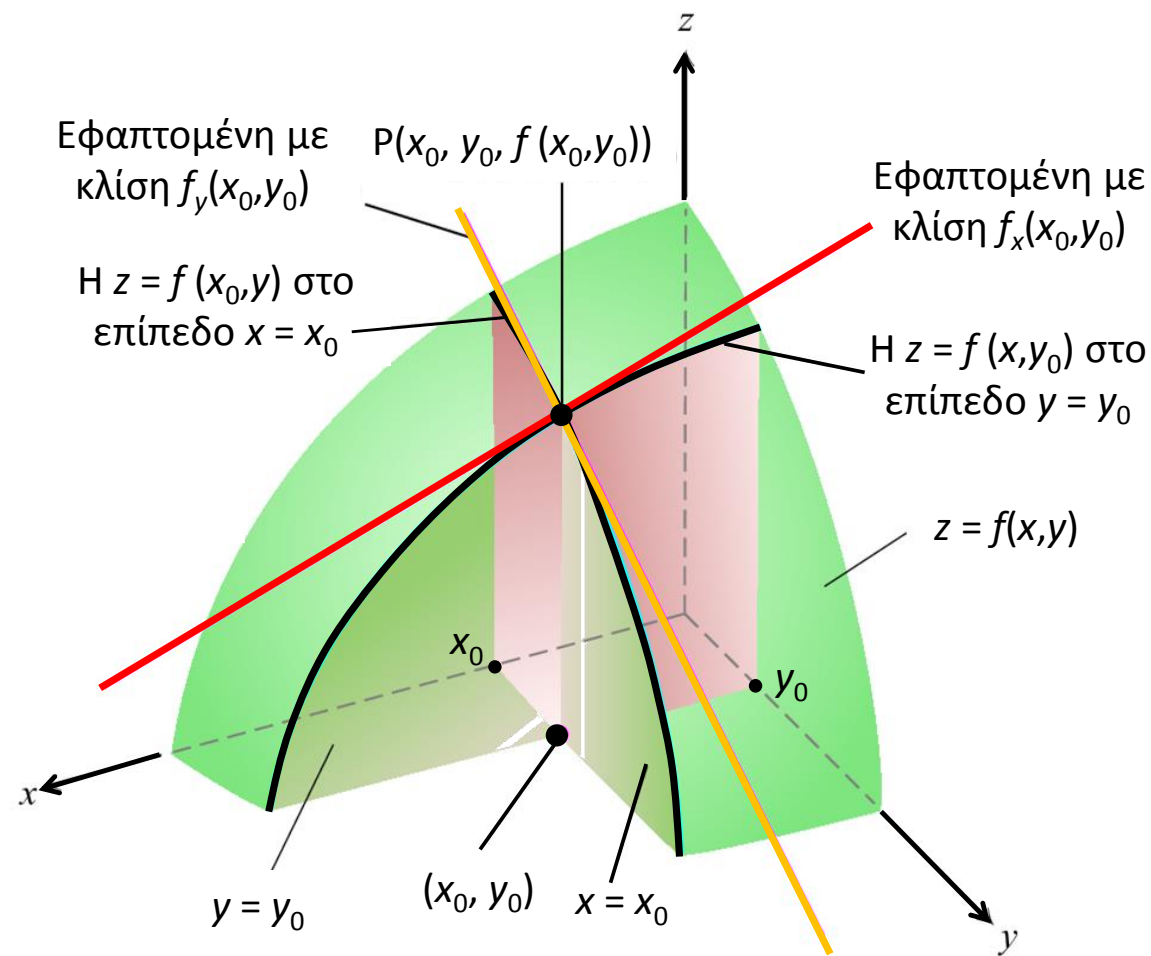
$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial u} = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial u} = g \frac{\partial f}{\partial u} + f \frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial u} = \frac{g \frac{\partial f}{\partial u} - f \frac{\partial g}{\partial u}}{g^2}$$



Γεωμετρική ερμηνεία



Μερικές παράγωγοι 2^{ης} τάξης

- Μερικές παράγωγοι 2^{ης} τάξης μιας συνάρτησης $f(x,y)$ είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

**Μεικτές
παράγωγοι**



Ισότητα μεικτών παραγώγων

- Δύο μεικτές παράγωγοι τάξης k ($k > 2$) μιας συνάρτησης $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού το ανοιχτό σύνολο A είναι ίσες, αν:
- όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι k τάξης είναι συνεχείς,
- αν ο συνολικός αριθμός παραγωγίσεων ως προς κάθε μεταβλητή είναι ο ίδιος και στις δύο μεικτές παραγώγους.



Ιακωβιανή ορίζουσα (1/3)

- Έστω οι συναρτήσεις:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

...

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Ορισμένες στο ανοιχτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και οι μερικές παράγωγοί τους.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$



Ιακωβιανή ορίζουσα (2/3)

- Ορίζεται ο ακόλουθος συναρτησιακός πίνακας:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα ονομάζεται **Ιακωβιανή ορίζουσα** και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$



Ιακωβιανή ορίζουσα (3/3)

- Έστω οι συναρτήσεις

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_1 = f_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = f_2(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

...

...

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_n = f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

ορίζονται στο ανοιχτό A

ορίζονται στο ανοιχτό B

- συνεχώς παραγωγίσιμες στα A, B, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}$$



Συναρτησιακή εξάρτηση

- Αν υπάρχει συνάρτηση F , τέτοια ώστε για κάθε σημείο του συνόλου A όπου ορίζονται οι y_1, y_2, \dots, y_m να ισχύει

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

τότε οι συναρτήσεις y_i χαρακτηρίζονται **εξαρτημένες** στο A .

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι εξαρτημένες οι συναρτήσεις y_1, y_2, \dots, y_n , είναι η **ιακωβιανή ορίζουσα τους να είναι ίση με μηδέν**, δηλ.

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$$



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση II». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους
υπερσυνδέσμους.

