Μαθηματική Ανάλυση II

Ενότητα 1: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$.

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης
e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Η δομή του $\mathbb{R}^n$.
- Διανύσματα.
- Απόσταση σημείων.
- Χαρακτηρισμός σημείων.
- Χαρακτηρισμός συνόλων.

Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της ενότητα, οι φοιτητές:

- θα έχουν κατανοήσει τη δομή του $\mathbb{R}^n$,
- θα γνωρίζουν τις ιδιότητες των στοιχείων του,
- θα μπορούν να χειρίζονται διανύσματα,
- θα είναι σε θέση να χαρακτηρίζουν σημεία και σύνολα.

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των n-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$, αναπαράσταση με σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου.
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$, αναπαράσταση με σημεία στο τρισδιάστατο χώρο.

Διανύσματα (1/2)

Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ δύο στοιχεία (διανύσματα) του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις:

Πρόσθεση:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό:

$$c \cdot \mathbf{x} = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

Ιδιότητες

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \qquad c\left(\mathbf{x} + \mathbf{y}\right) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \qquad (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$$

Διανύσματα (2/2)

Ισότητα:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, i = 1, \ldots, n$$

Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού:

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

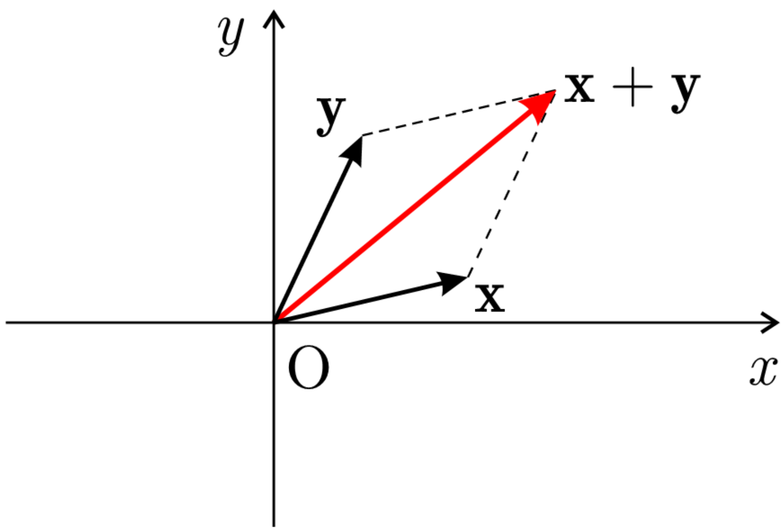
Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:

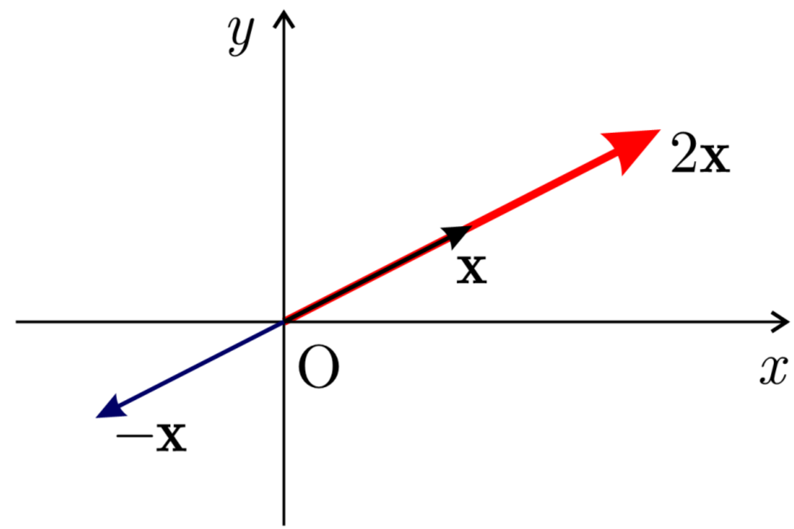
$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Αντίθετο στοιχείο:

$$-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Γεωμετρική ερμηνεία





Εσωτερικό γινόμενο

$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

Ιδιότητες

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0$, με $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$ όταν **x = 0**.

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$

$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$

$c\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = c\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right) = \mathbf{x}\cdot c\mathbf{y}$

Κάθετα διανύσματα

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0 \qquad \left(\mathbf{x},\mathbf{y} \neq \mathbf{0}\right)$

Αναπαράσταση διανυσμάτων

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$$
$$= x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,\ldots,1)$$
$$= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

Για τον $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ (διανύσματα **βάσης**), με $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = 1$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για $i \neq j$.

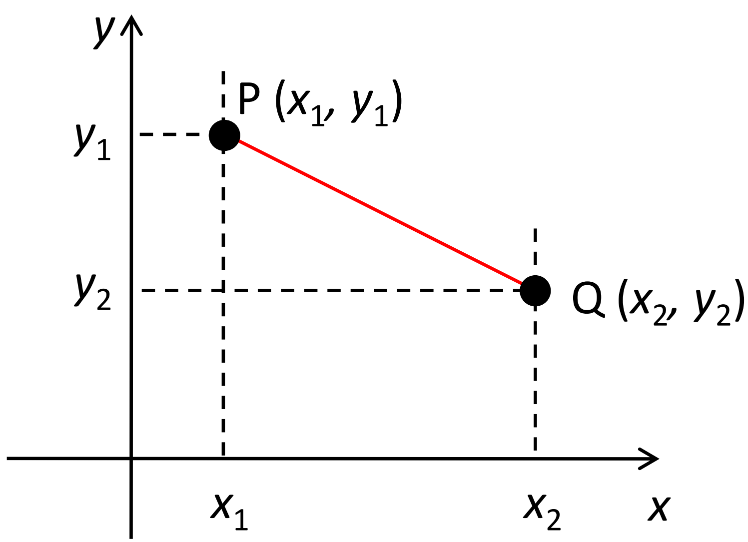
- *Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα*

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

Απόσταση

- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με την **απόσταση** μεταξύ των $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και υ = $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, η οποία ορίζεται ως

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$



$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$
- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ με $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$

Μέτρο διανυσμάτων

Ορισμός

$$\boxed{|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$$

Ιδιότητες

$$|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

$$|\mathbf{x}| = 1 \longrightarrow \textit{μοναδιαίο διάνυσμα}$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$

Περιοχή σημείου (1/4)

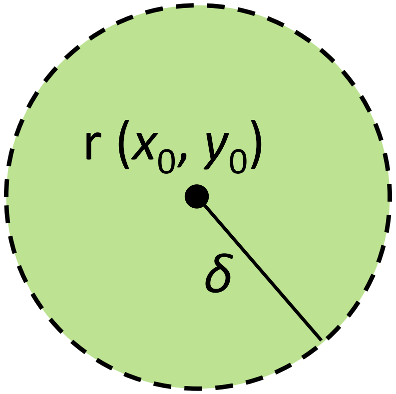
- **Σφαιρική περιοχή** ενός σημείου X_0 με ακτίνα $\delta > 0$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων X με την ιδιότητα:

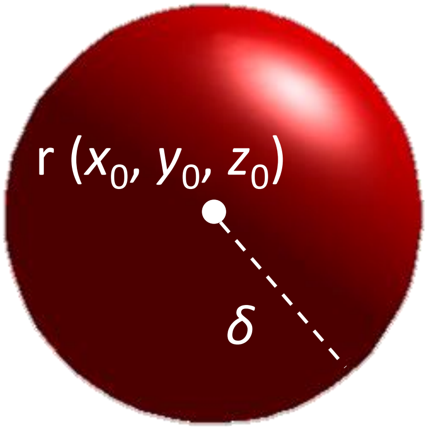
$$|X - X_0| < \delta$$

- Στο χώρο $\mathbb{R}^2$, ορίζεται η **κυκλική περιοχή** ενός σημείου (x_0, y_0) με ακτίνα $\delta > 0$ ως το σύνολο των σημείων (x, y) με την ιδιότητα:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Περιοχή σημείου (2/4)





- Όταν ***n* = 2**, η κυκλική περιοχή αποτελείται από τα σημεία ενός κυκλικού δίσκου.

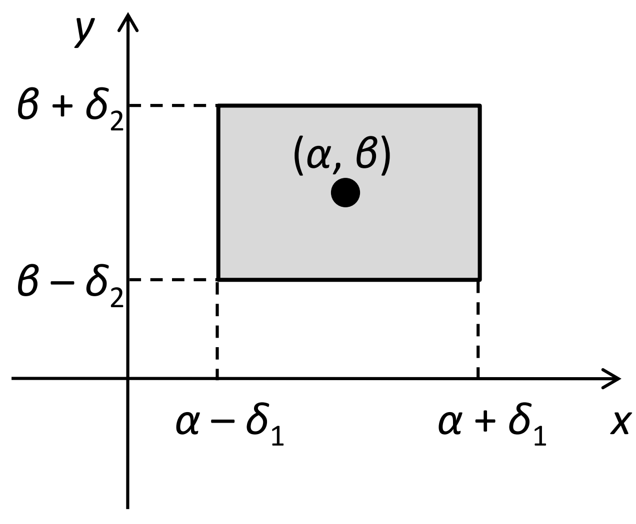
- Όταν ***n* = 3**, η σφαιρική περιοχή αποτελείται από τα εσωτερικά σημεία μιας σφαίρας.

Περιοχή σημείου (3/4)

Ορθογωνιακή περιοχή ενός σημείου $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ με τις ιδιότητες

$$|x_1 - \alpha_1| < \delta_1,\ |x_2 - \alpha_2| < \delta_2,\ \ldots,\ |x_n - \alpha_n| < \delta_n$$

$n = 2$



Περιοχή σημείου (4/4)

- Στην περίπτωση που είναι $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n$, η ορθογωνιακή περιοχή χαρακτηρίζεται ως **τετραγωνική**.
- **Περιοχή** ενός σημείου P ονομάζεται οποιοδήποτε σύνολο έχει ως υποσύνολο κάποια από τις προαναφερθείσες περιοχές.
- Συμβολισμός περιοχής σημείου P: ϖ(P).

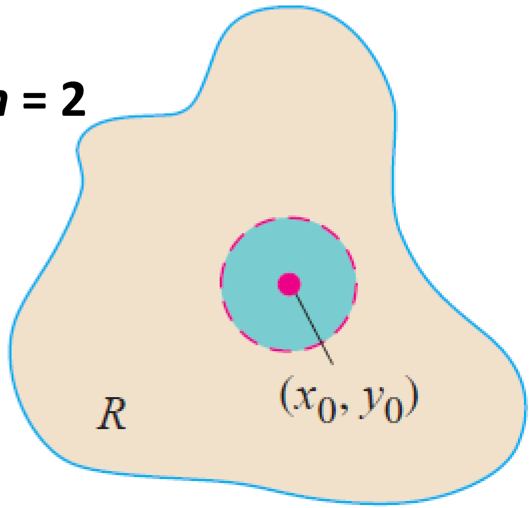
Εσωτερικά/εξωτερικά σημεία

Ένα σημείο P χαρακτηρίζεται ως **εσωτερικό** ενός συνόλου R, αν υπάρχει περιοχή ϖ(P) υποσύνολο του R.

Ένα σημείο P χαρακτηρίζεται ως **εξωτερικό** ενός συνόλου R, αν υπάρχει περιοχή ϖ(P) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ – R.

Το σύνολο των εσωτερικών (εξωτερικών) σημείων του R ονομάζεται **εσωτερικό - intR (εξωτερικό - extR)** του R.

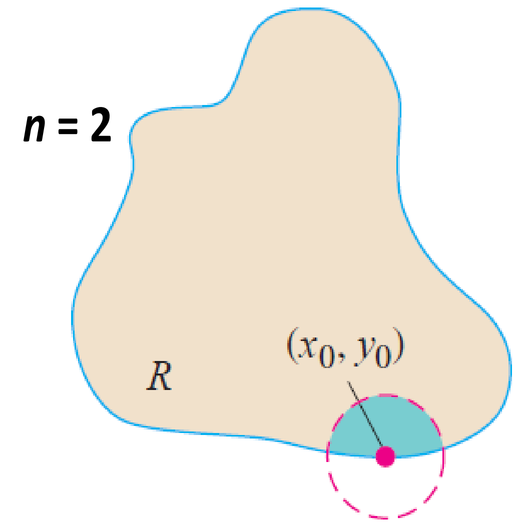
***n* = 2**



Συνοριακά σημεία

Ένα σημείο P ονομάζεται **συνοριακό** του συνόλου R, αν σε κάθε περιοχή ϖ(P) υπάρχουν σημεία που ανήκουν στο R και σημεία που ανήκουν στο $R^c = \mathbb{R}^n - R$ (δηλ. στο συμπλήρωμα του R).

Το σύνολο των συνοριακών σημείων του R αποτελεί το **σύνορο** του R (∂R).



Παρατηρήσεις

- Τα **εσωτερικά** σημεία ενός συνόλου ανήκουν στο σύνολο.
- Τα **εξωτερικά** σημεία ενός συνόλου ανήκουν στο συμπληρωματικό του.
- Τα **συνοριακά** σημεία ενός συνόλου ανήκουν στο σύνολο ή στο συμπληρωματικό του.
- $(\mathrm{int}A)\cap(\mathrm{ext}A) = (\mathrm{int}A)\cap(\partial A) = (\partial A)\cap(\mathrm{ext}A) = \emptyset$

Μεμονωμένα και σημεία συσσώρευσης

- Ένα σημείο P του συνόλου R ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** (ή **οριακό**), αν σε κάθε περιοχή ϖ(P) υπάρχουν σημεία του R διάφορα του P.
- Ένα σημείο P του συνόλου R ονομάζεται **μεμονωμένο**, αν υπάρχει περιοχή ϖ(P) όπου δεν υπάρχουν άλλα σημεία του R, εκτός του P (δηλ. $R \cap \varpi(P) = \{P\}$).

Ανοιχτά/κλειστά σύνολα

- Ένα σύνολο R ονομάζεται **ανοιχτό**, αν όλα του τα σημεία είναι εσωτερικά.
- Π.χ. το σύνολο $A = \{(x,y): (x-1)^2 + y^2 < 1\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο.
- Σε ένα ανοιχτό σύνολο δεν ανήκει το σύνορό του.
- Ένα σύνολο R ονομάζεται **κλειστό**, όταν περιέχει το σύνορό του.

Φραγμένα και συμπαγή σύνολα

- Ένα σύνολο $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **φραγμένο**, αν η απόσταση κάθε σημείου του από συγκεκριμένο σημείο του χώρου είναι μικρότερη από κάποιο θετικό αριθμό.
- Ένα σύνολο που είναι κλειστό και φραγμένο ονομάζεται **συμπαγές**.

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης