



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

---

# Μαθηματική Ανάλυση I

Ενότητα 1: Σύνολα, Πραγματικοί αριθμοί

Επικ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: [tzygiridis@uowm.gr](mailto:tzygiridis@uowm.gr)

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

---



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Περιεχόμενα

---

- Σύνολα.
- Πράξεις συνόλων.
- Σχέσεις συνόλων.
- Φράγματα.
- Αξιοματική θεμελίωση του  $\mathbb{R}$ .
- Διαστήματα.
- Αρχή της επαγωγής.



# Σύνολα (1/5)

---

- Ως σύνολο χαρακτηρίζεται κάθε συλλογή από αντικείμενα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια ενιαία οντότητα. Τα επιμέρους αντικείμενα αποτελούν τα **στοιχεία** του συνόλου.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ : το σύνολο των **φυσικών αριθμών**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ : το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**.
- $\mathbb{Q} = \{p/q: p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ : το σύνολο των **ρητών αριθμών**.
- $\mathbb{R}$ : το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**.



# Σύνολα (2/5)

---

Περιγραφή συνόλων:

- **Αναγραφή** των στοιχείων του συνόλου:

$$\text{π.χ. } A = \{2, 4, 6, 7\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

- **Περιγραφή** της κοινής ιδιότητας των στοιχείων του συνόλου:

$$\text{π.χ. } B = \{x: x \text{ φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του } 4\}, \text{ ή}$$

$$B = \{x \mid x \text{ φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του } 4\}$$



# Σύνολα (3/5)

---

- Αν το  $x$  είναι στοιχείο του συνόλου  $A$ :

π.χ.  $5 \in \{2, a, 5, b, 6\}$

- Αν το  $x$  δεν είναι στοιχείο του συνόλου  $A$ :

π.χ.  $3 \notin \{2, a, 5, b, 6\}$

Ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται **κενό** ( $\emptyset$  ή  $\{ \}$ ).



# Σύνολα (4/5)

Δύο σύνολα  $A, B$  είναι **ίσα** ( $A = B$ ), όταν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία ( $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ ).

- π.χ.  $\{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x: x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ .
- Αν τα σύνολα  $A$  και  $B$  δεν είναι ίσα:  $A \neq B$ .

Το σύνολο  $B$  αποτελεί **υποσύνολο** του  $A$  ( $B \subseteq A$ ), αν και μόνο αν

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

- π.χ.  $\{2, 4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$ .





# Σύνολα (5/5)

---

Το σύνολο  $B$  αποτελεί **γνήσιο υποσύνολο** του  $A$  ( $B \subset A$ ), αν και μόνο αν  $B \subseteq A$  και  $A \neq B$ .

- π.χ.  $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$ .

**Δυναμοσύνολο**  $\mathcal{P}(A)$  ενός συνόλου  $A$  είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα υποσύνολα του  $A$ .

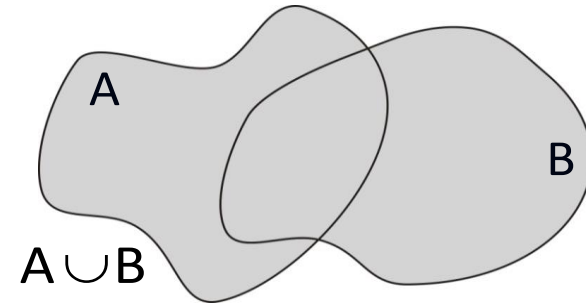
- π.χ. αν  $A = \{x_1, x_2\}$ , τότε  $\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$ .



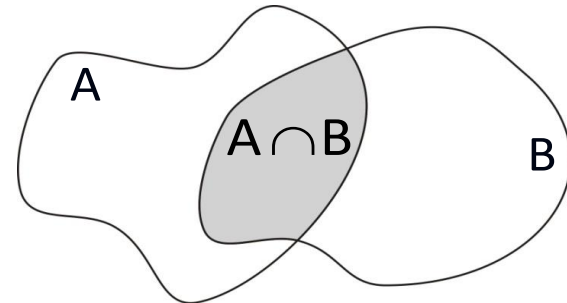
# Πράξεις συνόλων (1/2)

- Ένωση:

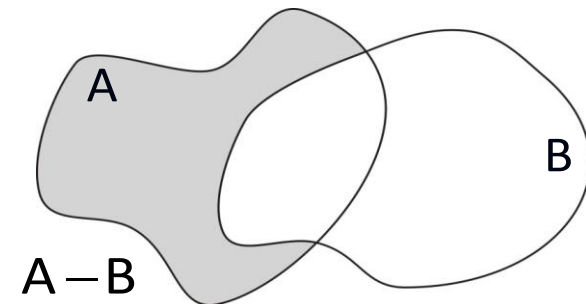
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



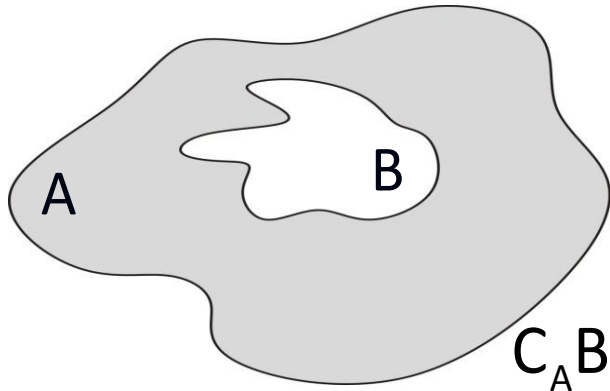
- Τομή:  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$
- (Αν  $A \cap B = \emptyset$ , τα A, B ονομάζονται **ξένα**).



- Διαφορά:  $A - B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$



# Πράξεις συνόλων (2/2)



- Συμπλήρωμα του B ως προς το A, όταν  $B \subseteq A$ :

$$C_A B = B^c = A - B$$

- Διαζευκτικό άθροισμα:

$$\begin{aligned} A \dot{+} B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$



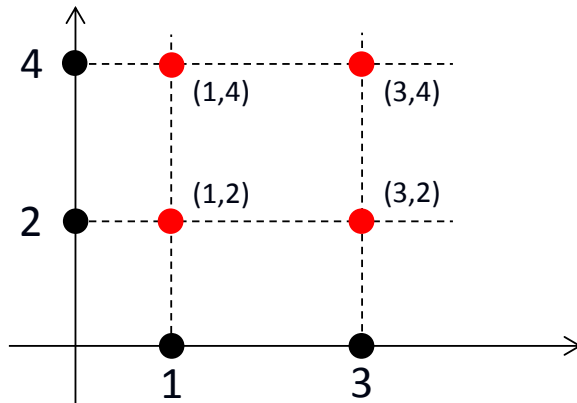
# Καρτεσιανό γινόμενο

- Καρτεσιανό γινόμενο 2 μη κενών συνόλων A, B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Διατεταγμένο ζεύγος:  
γενικά  $(a, b) \neq (b, a)$

π.χ. αν  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ , τότε  $A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)\}$



$$\square^2 = \square \times \square$$

$$\square^3 = \square \times \square \times \square$$

το σύνολο των  
σημείων του επιπέδου

το σύνολο των  
σημείων του  
τριδιάστατου χώρου



# Σχέσεις συνόλων (1/2)

Σχέση  $\Sigma$  από το σύνολο  $A$  στο  $B$  ονομάζεται κάθε υποσύνολο του  $A \times B$  (το  $(x, y) \in \Sigma$  γράφεται και  $x \Sigma y$ ).

Μια σχέση  $\Sigma$  στο σύνολο  $A$  καλείται **σχέση διάταξης**, αν για κάθε  $x, y \in A$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- $x \Sigma x$  για κάθε  $x \in A$  (αυτοπαθής).
- αν  $x \Sigma y$  και  $y \Sigma x$ , τότε  $x = y$  (αντισυμμετρική).
- αν  $x \Sigma y$  και  $y \Sigma z$ , τότε  $x \Sigma z$  (μεταβατική).

Ένα σύνολο  $A$  εφοδιασμένο με μια διάταξη ονομάζεται **διατεταγμένο σύνολο**.



# Σχέσεις συνόλων (2/2)

---

Παράδειγμα:

Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  ορίζεται η σχέση διάταξης “ $\leq$ ”.

- **Ιδιότητες:**  $x \leq x$   
Αν  $x \leq y$  και  $y \leq x$ , τότε  $x = y$   
Αν  $x \leq y$  και  $y \leq z$ , τότε  $x \leq z$

Μια σχέση  $\Sigma$  στο σύνολο  $A$  καλείται **σχέση ισοδυναμίας**, αν για κάθε  $x, y \in A$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- $x \Sigma x$  για κάθε  $x \in A$  (αυτοπαθής).
- αν  $x \Sigma y$ , τότε και  $y \Sigma x$  (συμμετρική).
- αν  $x \Sigma y$  και  $y \Sigma z$ , τότε  $x \Sigma z$  (μεταβατική).



# Φραγμένα σύνολα

Ο  $a$  ονομάζεται **άνω φράγμα** ενός συνόλου  $A$ , όταν για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \leq a$  (τότε το σύνολο  $A$  λέγεται **άνω φραγμένο**).

Ο  $a$  ονομάζεται **κάτω φράγμα** ενός συνόλου  $A$ , όταν για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \geq a$  (τότε το σύνολο  $A$  λέγεται **κάτω φραγμένο**).

Ένα σύνολο λέγεται **φραγμένο**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

**Παραδείγματα:**

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$$



# Άνω και κάτω πέρας (1/3)

**Άνω πέρας** ( $\sup A$ ) ενός άνω φραγμένου συνόλου  $A$  ονομάζεται το μικρότερο από τα άνω φράγματα του.

**Κάτω πέρας** ( $\inf A$ ) ενός κάτω φραγμένου συνόλου  $A$  ονομάζεται το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του.

**Παράδειγμα:**

Αν  $A = \{ x \in \mathbb{R} : x > -1 \text{ και } x \leq 1 \}$ , τότε  $\inf A = -1$ ,  $\sup A = 1$ .





# Άνω και κάτω πέρας (2/3)

---

Αν δοθεί ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  οσοδήποτε μικρός, θα υπάρχει στοιχείο του άνω φραγμένου συνόλου  $A$  μεγαλύτερο του  $\sup A - \varepsilon$ .

Αν δοθεί ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  οσοδήποτε μικρός, θα υπάρχει στοιχείο του κάτω φραγμένου συνόλου  $A$  μικρότερο του  $\inf A + \varepsilon$ .



# Άνω και κάτω πέρας (3/3)

---

Δεν είναι απαραίτητο τα  $\sup A$  και  $\inf A$  ενός συνόλου  $A$  (όταν υπάρχουν) να αποτελούν και στοιχεία του  $A$ .

Αν  $\sup A \in A$ , τότε  $\sup A = \max A$  (= το **μέγιστο** στοιχείο του  $A$ ).

Αν  $\inf A \in A$ , τότε  $\inf A = \min A$  (= το **ελάχιστο** στοιχείο του  $A$ ).



# Απεικονίσεις (1/2)

---

- Συνάρτηση  $f$  από το σύνολο  $A$  στο  $B$  (ή απεικόνιση του  $A$  στο  $B$ ) ονομάζεται ένας κανόνας με τον οποίο αντιστοιχίζεται σε κάθε στοιχείο του  $A$  ένα μόνο στοιχείο του  $B$ :

$$f : A \rightarrow B$$

$A$ : πεδίο ορισμού.

**Εικόνα** του συνόλου  $A$  μέσω της  $f$  ονομάζεται το σύνολο των τιμών  $f(x)$  με  $x \in A$ :

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$



# Απεικονίσεις (2/2)

Αν  $f(A) = B$ , η  $f$  ονομάζεται απεικόνιση του  $A$  επί του  $B$ .

Η  $f: A \rightarrow B$  είναι **1-1 (ένα προς ένα)**, αν και μόνο αν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$ , είναι  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Δύο σύνολα  $X$  και  $Y$  ονομάζονται **ισοδύναμα**, αν υπάρχει μια **1-1** απεικόνιση του  $X$  επί του  $Y$ :  
 $X \sim Y$

## Ιδιότητες ισοδυναμίας:

- $X \sim X$  (ανακλαστική).
- αν  $X \sim Y$ , τότε  $Y \sim X$  (συμμετρική).
- αν  $X \sim Y$  και  $Y \sim Z$ , τότε  $X \sim Z$  (μεταβατική).



# Αριθμήσιμα σύνολα

---

Ένα σύνολο  $X$  ονομάζεται **πεπερασμένο**, αν είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο της μορφής  $\{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Ένα μη πεπερασμένο σύνολο  $X$  ονομάζεται **άπειρο**.

Ένα σύνολο  $X$  ονομάζεται **αριθμήσιμο**, αν είναι ισοδύναμο με το σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών.

**Παράδειγμα:**

Το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.



# Αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$ (1/2)

(I – Αξίωμα σώματος) Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών ορίζονται δύο πράξεις:

- (πρόσθεση)  $+$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $+(x, y) = x + y$
- (πολλαπλασιασμός)  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\cdot(x, y) = x \cdot y$

**Ιδιότητες:**

- μεταθετική:  $x + y = y + x$
- προσεταιριστική:  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: υπάρχει  $0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$
- αντίθετο στοιχείο: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $-x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$
- μεταθετική:  $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική:  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: υπάρχει  $1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$
- αντίστροφο στοιχείο: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  υπάρχει  $x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot (x^{-1}) = 1$
- επιμεριστική:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$



# Αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$ (2/2)

(II – Αξίωμα διάταξης) Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  ορίζεται η σχέση διάταξης “ $\leq$ ”.

Ιδιότητες:

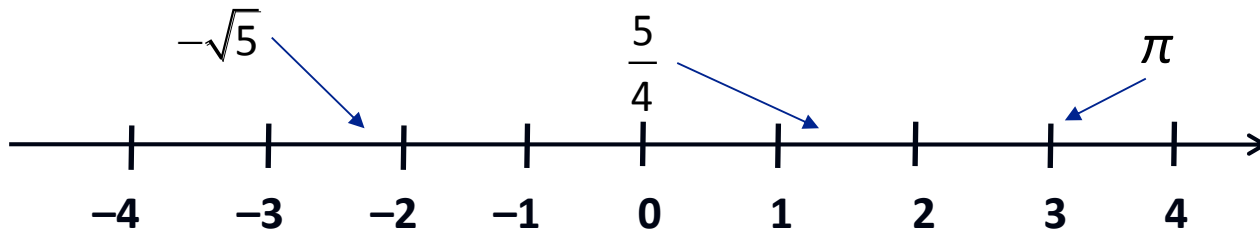
- αυτοπαθής:  $x \leq x$
- αντισυμμετρική: αν  $x \leq y$  και  $y \leq x$ , τότε  $x = y$
- μεταβατική: αν  $x \leq y$  και  $y \leq z$ , τότε  $x \leq z$
- για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει  $x \leq y$  ή  $y \leq x$
- αν  $x \leq y$ , τότε  $x + z \leq y + z$
- αν  $x \leq y$  και  $0 \leq z$ , τότε  $x \cdot z \leq y \cdot z$
- $x < y \iff x \leq y$  και  $x \neq y$

(III – Αξίωμα ελάχιστου άνω φράγματος) Αν το μη-κενό σύνολο  $A$  είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και είναι άνω φραγμένο, τότε το  $A$  έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα  $a$ , δηλ.  $a = \sup A$ .



# Ο άξονας των πραγματικών αριθμών (1/2)

Έστω μια ευθεία γραμμή στην οποία έχει καθοριστεί η θετική φορά (προσανατολισμένη ευθεία). Αντιστοιχίζουμε κάθε πραγματικό αριθμό σε ένα μοναδικό σημείο του άξονα (ισχύει και το αντίστροφο).



Μια ευθεία γραμμή είναι **άξονας**, όταν πάνω σε αυτήν έχουν οριστεί:

- Η αρχή.
- Η θετική φορά (προσανατολισμός).
- Η μονάδα μέτρησης μήκους.





# Ο άξονας των πραγματικών αριθμών (2/2)

---

Για τον ορισμό της μονάδας μέτρησης:

- επιλέγεται το σημείο  $O$ , όπου αντιστοιχείται ο αριθμός  $0$ .
- επιλέγεται το σημείο  $P$ , όπου αντιστοιχείται ο αριθμός  $1$ .

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $OP$  αποτελεί τη **μονάδα μήκους**.

Αν  $P_x$  είναι το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός  $x$ , τότε λέμε ότι “ $x$  είναι η τετμημένη του σημείου  $P_x$ ”.



# Διαστήματα

- **Ανοιχτό** διάστημα:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ .
- **Κλειστό** διάστημα:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ .
- **Ημιανοιχτό** από αριστερά διάστημα:  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ .
- **Ημιανοιχτό** από δεξιά διάστημα:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ .
  
- **Ανοιχτά** απειροδιαστήματα:  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$   
 $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$
- **Κλειστά** απειροδιαστήματα:  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$   
 $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$



# Επαγωγικά σύνολα

---

Ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται **επαγωγικό**, αν

- $1 \in A$
- $x \in A \implies (x + 1) \in A$

Το σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών είναι **επαγωγικό**.

Το σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών είναι το **ελάχιστο επαγωγικό** υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .



# Αρχή της επαγωγής

---

Έστω ένα σύνολο  $S$  φυσικών αριθμών. Αν

- I. το 1 ανήκει στο  $S$ ,
- II. όταν ο  $k$  ανήκει στον  $S$ , τότε και ο  $k + 1$  ανήκει στο  $S$ , τότε το  $S$  είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ( $S = \mathbb{N}$ ).

Για να αποδειχτεί μια πρόταση  $P(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

- I. ελέγχεται αν ισχύει η  $P(1)$ ,
- II. υποθέτοντας ότι ισχύει η  $P(k)$ , αποδεικνύεται ότι ισχύει η  $P(k + 1)$ .



# Παραγοντικό

---

Το **παραγοντικό**  $n!$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ορίζεται ως εξής:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$



# Διωνυμικό ανάπτυγμα

---

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

όπου:  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  οι διωνυμικοί συντελεστές.

Ισχύει  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$



---

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



# Σημείωμα Αναφοράς

---

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/>





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό



# Διατήρηση Σημειωμάτων

---

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

