Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 3: Σειρές Πραγματικών Αριθμών

Επίκ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Το σύμβολο του αθροίσματος.
- Ορισμός σειράς, μερικά αθροίσματα.
- Σύγκλιση σειρών.
- Γεωμετρικές και τηλεσκοπικές σειρές.
- Κριτήρια σύγκλισης σειρών μη αρνητικών όρων.
- Εναλλασσόμενες σειρές.
- Απολύτως συγκλίνουσες σειρές.

Το σύμβολο $\sum$ του αθροίσματος

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{n=1}^{4} a_n = \sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{i=1}^{4} a_i$$

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{k-1} + a_k = \sum_{n=m}^{k} a_n \quad (k > m)$$

- $\sum_{n=1}^{m} a_n + a_{m+1} = \sum_{n=1}^{m+1} a_n$
- $\sum_{n=1}^{m} a_n \pm \sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{m} (a_n \pm b_n)$
- $\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad (k > m)$
- $\sum_{n=1}^{m} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{m} a_n$

Σειρές (1/2)

Έστω η ακολουθία (a_n). Μια έκφραση της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \left(= \sum a_n\right)$$

ονομάζεται **άπειρη σειρά** (ή απλώς **σειρά**).
Ο a_n αποτελεί το ***n*-οστό όρο** της σειράς.

Από την ακολουθία (a_n) ορίζεται μια νέα ακολουθία (s_n), με βάση τις σχέσεις

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, …, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, …

Καθένας από τους όρους αποτελεί **μερικό άθροισμα** της σειράς

$$\sum a_n$$

Σειρές (2/2)

Παράδειγμα:

Αν $a_n = n$, τότε:

$$s_1 = a_1 = 1$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$$
$$s_4 = s_3 + a_4 = 6 + 4 = 10$$
$$s_5 = s_4 + a_5 = 10 + 5 = 15$$
$$s_6 = s_5 + a_6 = 15 + 6 = 21$$

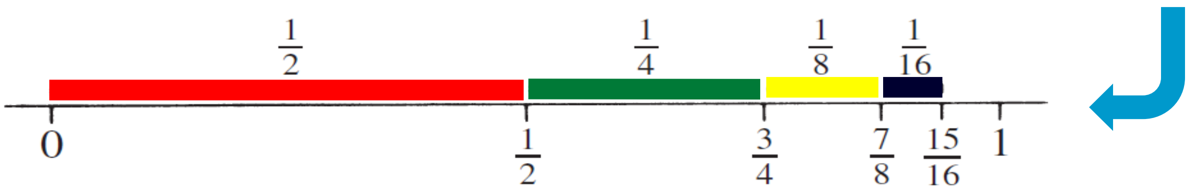
...

Παράδειγμα:

Αν $a_n = \frac{1}{2^n}$,τότε

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75$$
$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875$$
$$s_4 = 0.9375$$
$$s_5 = 0.96875$$
$$s_6 = 0.984375$$

...



Σύγκλιση σειρών (1/4)

Μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στον αριθμό $s \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στον s.

Τότε γράφουμε
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Ο πραγματικός αριθμός s στον οποίο συγκλίνει μια σειρά ονομάζεται **άθροισμα** ή **όριο** της σειράς.

Μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στο $+\infty$ (στο $-\infty$), αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$):
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ \left(-\infty\right)$$

Σύγκλιση σειρών (2/4)

Παράδειγμα:

Έστω η σειρά 1 + 1 + 1 + …

Ο *n*-οστός όρος της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων είναι

$$s_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ όροι}} = n$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

τελικά

$$1+1+1+\ldots = +\infty$$

και η σειρά απειρίζεται θετικά.

Σύγκλιση σειρών (3/4)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, η σειρά $\sum a_n$ δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, αν και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Σύγκλιση σειρών (4/4)

Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ή αν το όριο της ($a_n$) δεν υπάρχει, τότε η σειρά $\sum a_n$ **δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$** (κριτήριο μη-σύγκλισης).

Παράδειγμα:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-3}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-3} = \frac{3}{4} \neq 0$

Παράδειγμα:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, διότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(-1\right)^{n+1}$$

Πράξεις/σχέσεις μεταξύ σειρών (1/2)

- Αν οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ είναι **συγκλίνουσες**, τότε και η $\sum\left(\kappa \cdot a_n + \lambda \cdot b_n\right)$ είναι **συγκλίνουσα** ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$) και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\kappa \cdot a_n \pm \lambda \cdot b_n\right) = \kappa \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Αν η $\sum a_n$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε και η $\sum\left(\kappa \cdot a_n\right)$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$ ($\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$).
- Αν για δύο **συγκλίνουσες** σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ ισχύει $a_n \le b_n$ για κάθε n, τότε θα είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Πράξεις/σχέσεις μεταξύ σειρών (2/2)

- Αν η σειρά $\sum a_n$ **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, ενώ η σειρά $\sum b_n$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά $\sum (a_n + b_n)$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$.

- Αν οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ **δε συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$**, τότε η σειρά $\sum (a_n + b_n)$ μπορεί είτε να είναι, είτε να μην είναι **συγκλίνουσα**.

Γεωμετρικές σειρές (1/2)

Μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda^{n-1}$$

ονομάζεται **γεωμετρική**, με **λόγο** λ.

- Η παραπάνω σειρά **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$ μόνο όταν $|\lambda| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-\lambda}, & |\lambda| < 1 \\ a \cdot (+\infty), & \lambda \geq 1 \; (a \neq 0) \\ \text{κυμαίνεται}, & \lambda \leq -1 \; (a \neq 0) \end{cases}$$

Γεωμετρικές σειρές (2/2)

Το *n*-οστό μερικό άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς με $\lambda \neq 1$ είναι:

$$s_n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^{n-1} = a\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$$

- Οι **ρητοί αριθμοί** μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια συγκλινουσών γεωμετρικών σειρών, π.χ.

$$\begin{aligned} 2.272727\ldots &= 2.\overline{27} \\ &= 2 + 0.27 + 0.0027 + \ldots \\ &= 2 + \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \ldots \\ &= 2 + \frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{27}{100}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \\ &= 2 + \frac{27}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\ &= 2 + \frac{27}{99} = \frac{225}{99} = \frac{25}{11} \end{aligned}$$

Τηλεσκοπικές σειρές (1/2)

Μια σειρά ονομάζεται **τηλεσκοπική**, αν είναι της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{n+1} - b_n \right)$$

Αν η ακολουθία (b_n) είναι **συγκλίνουσα**, τότε και η αντίστοιχη τηλεσκοπική σειρά θα είναι **συγκλίνουσα**.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(b_{i+1} - b_i \right) = \left(\cancel{b_2} - b_1 \right) + \left(\cancel{b_3} - \cancel{b_2} \right) + \ldots + \left(b_{n+1} - \cancel{b_n} \right)$$

$$= b_{n+1} - b_1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(b_{n+1} - b_1 \right)$$

Τηλεσκοπικές σειρές (2/2)

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)} \rightarrow A = 1, B = -1$$

***n*-οστό μερικό άθροισμα** ➡ $s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Αρμονικές σειρές

Μια σειρά ονομάζεται **αρμονική τάξης *p***, αν είναι της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

όπου p ρητός αριθμός.

Κριτήριο σύγκλισης

Μια αρμονική σειρά **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$p > 1$$

Σειρές μη αρνητικών όρων

Μια σειρά $\sum a_n$ είναι σειρά **μη αρνητικών όρων**, αν ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε όρο της σειράς.

- Για μια τέτοια σειρά, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι πάντα **αύξουσα**, αφού

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$$

Μια σειρά μη αρνητικών όρων **συγκλίνει στο $\mathbb{R}$**, αν και μόνο αν η αντίστοιχη ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι **άνω φραγμένη**.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. σύγκρισης) (1/2)

Κριτήριο σύγκρισης:

Έστω $\sum a_n$ μια σειρά μη αρνητικών αριθμών.

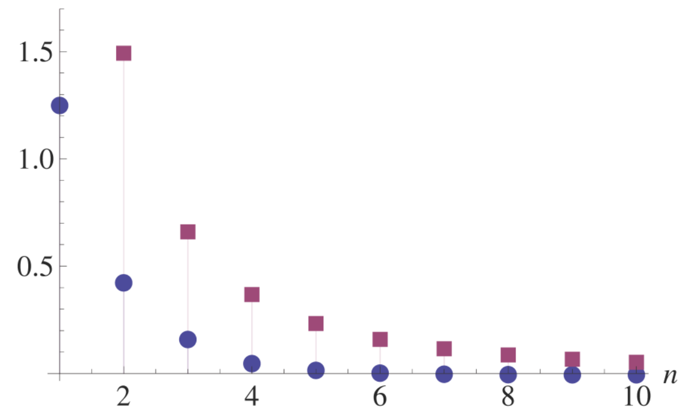
- Αν υπάρχει συγκλίνουσα σειρά $\sum b_n$ μη αρνητικών όρων για την οποία ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε και η θα **συγκλίνει στο $\mathbb{R}$**.
- Αν υπάρχει σειρά $\sum b_n$ μη αρνητικών όρων που **απειρίζεται θετικά** και για την οποία ισχύει $a_n \geq b_n$ για κάθε $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε και η $\sum a_n$ θα **απειρίζεται θετικά**.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. σύγκρισης) (2/2)

Παράδειγμα:

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\sin^2(n+2)}{n^2+3^n}$

$$\frac{5+\sin^2(n+2)}{n^2+3^n} < \frac{6}{n^2+3^n} < \frac{6}{n^2}$$



Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$ είναι **συγκλίνουσα**,

το ίδιο θα συμβαίνει και με την αρχική.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. ορ. σύγκρισης) (1/2)

Κριτήριο οριακής σύγκρισης:

Έστω $\sum a_n$ μια σειρά μη αρνητικών αριθμών.

Αν υπάρχει συγκλίνουσα σειρά $\sum b_n$ με $b_n > 0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} < +\infty$$

τότε και η $\sum a_n$ θα **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. ορ. σύγκρισης) (2/2)

Παράδειγμα:

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^n - 1} \\ b_n &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι **συγκλίνουσα**, το ίδιο θα συμβαίνει και με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. λόγου) (1/2)

Κριτήριο λόγου:

Έστω $\sum a_n$ μια σειρά μη αρνητικών όρων και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

- Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\rho > 1$, η σειρά απειρίζεται θετικά.
- Αν $\rho = 1$, το κριτήριο αυτό δε μπορεί να επιβεβαιώσει τη σύγκλιση (ή μη) της σειράς.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. λόγου) (2/2)

Παράδειγμα:

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n}$, με $a > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n a^n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = a$$

Άρα η συγκεκριμένη σειρά είναι **συγκλίνουσα** όταν $0 < a < 1$.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. ρίζας) (1/2)

Κριτήριο *n*-στης ρίζας:

Έστω $\sum a_n$ μια σειρά μη αρνητικών αριθμών και

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

- Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\rho > 1$, η σειρά απειρίζεται θετικά.
- Αν $\rho = 1$, το κριτήριο αυτό δε μπορεί να επιβεβαιώσει τη σύγκλιση (ή μη) της σειράς.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. ρίζας) (2/2)

Παράδειγμα:

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Άρα η συγκεκριμένη σειρά είναι **συγκλίνουσα.**

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. συμπύκνωσης) (1/2)

Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy:

Έστω $\sum a_n$ μια σειρά μη αρνητικών αριθμών, όπου η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα. Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ $(+\infty)$, αν και μόνο αν η σειρά $\sum 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ $(+\infty)$.

Σειρές μη αρνητικών όρων (κρ. συμπύκνωσης) (2/2)

Παράδειγμα:

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

που είναι συγκλίνουσα, ως γεωμετρική.

Άρα η συγκεκριμένη σειρά **απειρίζεται θετικά**.

Εναλλασσόμενες σειρές (1/2)

Από μια ακολουθία (a_n) που αποτελείται από μη αρνητικούς όρους ($a_n \geq 0$), μπορούν να κατασκευαστούν οι ακόλουθες σειρές:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + \left(-1\right)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} a_n$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + \left(-1\right)^{n} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n} a_n$$

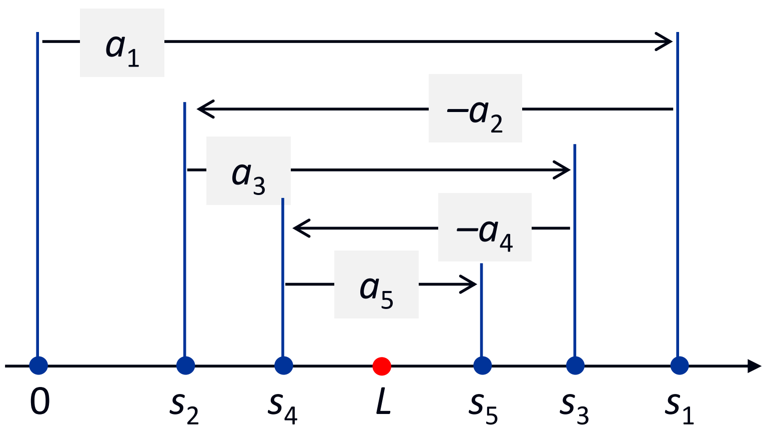
Οι σειρές στις οποίες το πρόσημο διαδοχικών όρων γίνεται εναλλάξ θετικό και αρνητικό ονομάζονται **εναλλασσόμενες**.

Εναλλασσόμενες σειρές (2/2)

Κριτήριο Leibniz:

Η εναλλασσόμενη σειρά $\sum(-1)^{n+1}a_n$ θα **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, αν η ακολουθία (a_n) είναι **φθίνουσα** και **μηδενική**, δηλ.:

- αν $a_{n+1} \leq a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
- αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.



- **Παράδειγμα:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$$

Απόλυτη σύγκλιση

Μια σειρά $\sum a_n$ χαρακτηρίζεται ως **απολύτως συγκλίνουσα**, αν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ η σειρά $\sum |a_n|$.

Αν μια σειρά $\sum a_n$ είναι **απολύτως συγκλίνουσα**, τότε θα είναι και **συγκλίνουσα** και θα ισχύει

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

- Το αντίστροφο **δεν ισχύει**: αν η $\sum a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, δε σημαίνει ότι και η $\sum |a_n|$ θα συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Έλεγχος σύγκλισης

- Έλεγχος αν $\lim a_n \neq 0$.
- Έλεγχος αν πρόκειται για γεωμετρική σειρά.
- Έλεγχος αν πρόκειται για αρμονική σειρά.
- Έλεγχος αν πρόκειται για σειρά με μη αρνητικούς όρους, οπότε δοκιμάζονται τα διάφορα κριτήρια.
- Έλεγχος αν πρόκειται για σειρά με θετικούς και αρνητικούς όρους, οπότε εξετάζεται η απόλυτη σύγκλιση.
- Έλεγχος αν πρόκειται για σειρά με εναλλασσόμενους όρους.

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.