Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 8: Ολοκληρώματα

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Αντιπαράγωγος.
- Αόριστο ολοκλήρωμα.
- Τεχνικές ολοκλήρωσης.
- Διαμέριση διαστήματος, άθροισμα Riemann.
- Ορισμένο ολοκλήρωμα.
- Θεωρήματα.
- Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Στόχοι

Μέσα από αυτήν την ενότητα, οι φοιτητές:

- θα κατανοήσουν την έννοια της αντιπαραγώγου,
- θα είναι σε θέση να πραγματοποιούν αόριστη ολοκλήρωση σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις,
- θα κατανοήσουν την έννοια των αθροισμάτων Riemann και των ορισμένων ολοκληρωμάτων, καθώς και των ιδιοτήτων τους,
- θα μάθουν να αντιστοιχούν άπειρα αθροίσματα σε ορισμένα ολοκληρώματα,
- θα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αντιπαράγωγος συνάρτησης (1/2)

- Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. **Αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **αρχική** της f καλείται (αν υπάρχει) μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: A \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Παράδειγμα:

- η $y = x$ αποτελεί αντιπαράγωγο της $y = 1$ στο $\mathbb{R}$, διότι $(x)' = 1$.
- η $y = \sin x$ αποτελεί αντιπαράγωγο της $y = \cos x$ στο $\mathbb{R}$, διότι $(\sin x)' = \cos x$.

Αντιπαράγωγος συνάρτησης (2/2)

- Αν η συνάρτηση F είναι αντιπαράγωγος της f, δηλαδή αν

$$F'(x) = f(x)$$

τότε και κάθε συνάρτηση της μορφής

$G(x) = F(x) + c$ (όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά)

αποτελεί αντιπαράγωγο της f , αφού ισχύει

$$G'(x) = \left[F(x) + c\right]' = F'(x) + c' = f(x)$$

Αν δύο συναρτήσεις F, G: A → $\in \mathbb{R}$ διαφέρουν κατά μία σταθερά $c \in \mathbb{R}$ και η μία είναι αντιπαράγωγος της f στο A, τότε και η άλλη θα είναι αντιπαράγωγος της f στο A.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. **Αόριστο ολοκλήρωμα** της f ονομάζεται κάθε παράσταση της μορφής F(x) + c, όπου c σταθερά, με την F να αποτελεί μια αντιπαράγωγο της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f συμβολίζεται με

$$\int f(x)dx \text{ ή } \int f$$

Ιδιότητες:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx \quad (c \neq 0)$$

Αόριστα ολοκληρώματα

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+, a \neq -1 \\ x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases}$$ ($x \neq 0$ αν $a < 0$)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \ x > 0 \text{ ή } x < 0$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c, \ x \neq \kappa\pi$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$= -\arccos x + c'$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$= -\mathrm{arccot}\, x + c'$$

Τεχνικές ολοκλήρωσης

- **Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:** αν η $f \cdot g'$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int g df = fg - \int f dg$$

- **Ολοκλήρωση με αντικατάσταση:** αν η f : A → ℝ είναι ολοκληρώσιμη, η g: B → ℝ είναι παραγωγίσιμη με g(B) ⊆ A και η F είναι μια αντιπαράγωγος της f, τότε

$$\int_{x=g(t)} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + c = \int f(x)dx\Big|_{x=g(t)}$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων (1/2)

- Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

- ελέγχεται αν ισχύει

$$\text{Βαθμός}\{p(x)\} \geq \text{Βαθμός}\{q(x)\}$$

- Αν ναι, μετά τη διαίρεση θα πάρουμε

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int r(x) dx + \int \frac{\upsilon(x)}{q(x)} dx$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων (2/2)

- Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από του παρανομαστή, προχωρούμε σε ανάλυση της συνάρτησης σε **μερικά κλάσματα**.
- Για κάθε **πραγματική ρίζα** x_0 του παρανομαστή, πολλαπλότητας κ, προκύπτουν κ σε πλήθος όροι:

$$\frac{A_1}{(x-x_0)}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\ldots+\frac{A_\kappa}{(x-x_0)^\kappa}$$

- Στην περίπτωση **μιγαδικών ριζών** πολλαπλότητας λ, προκύπτουν αντίστοιχοι όροι με την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+\ldots+\frac{B_\lambda x+C_\lambda}{\left(x^2+bx+c\right)^\lambda}$$

Διαμέριση διαστήματος (1/3)

- **Διαμέριση** ενός διαστήματος [a, b] ονομάζεται ένα πεπερασμένο σύνολο

$$\Delta = \{x0, x1, x2, \ldots, xn\}$$

- για τα στοιχεία του οποίου ισχύει

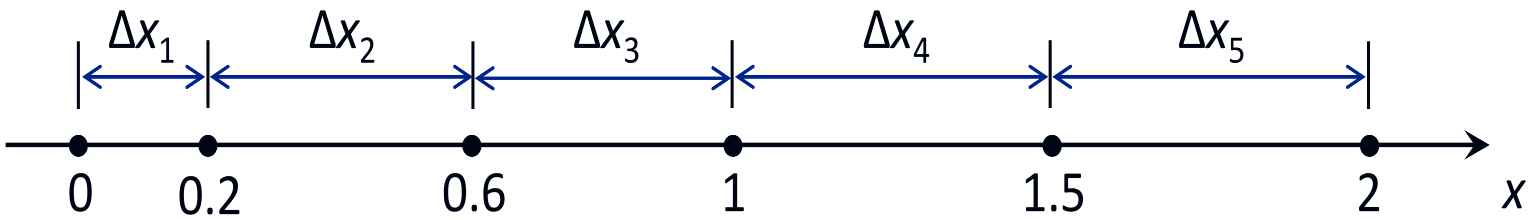
$$a = x0 < x1 < x2 < \ldots < xn = b$$

Λεπτότητα (ή πλάτος) $\|\Delta\|$ της διαμέρισης Δ ονομάζεται το **μεγαλύτερο** από τα μήκη

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

των επιμέρους υποδιαστημάτων $[x_{i-1}, x_i]$.

Διαμέριση διαστήματος (2/3)



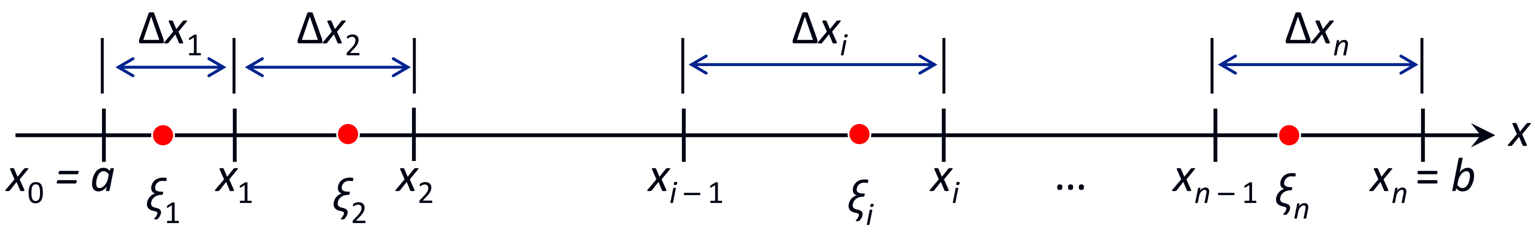
Παράδειγμα:

Μια διαμέριση του διαστήματος [0, 2] είναι η

Δ = {0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2}

με λεπτότητα $\|\Delta\| = 0.5$.

Διαμέριση διαστήματος (3/3)



- Τα επιμέρους υποδιαστήματα μπορούν να είναι άνισα μεταξύ τους.
- Για τον ορισμό του **αθροίσματος Riemann** μιας συνάρτησης στο διάστημα $[a, b]$ επιλέγεται ένας αριθμός ξ_i σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$.
- Το σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ αποτελεί ένα **σύνολο ενδιάμεσων σημείων** της διαμέρισης Δ.

Άθροισμα Riemann (1/4)

- Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Επιπλέον, έστω το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ της διαμέρισης Δ.

- **Άθροισμα Riemann** της συνάρτησης f ως προς τη διαμέριση Δ και το σύνολο ενδιάμεσων σημείων Ξ ονομάζεται το άθροισμα

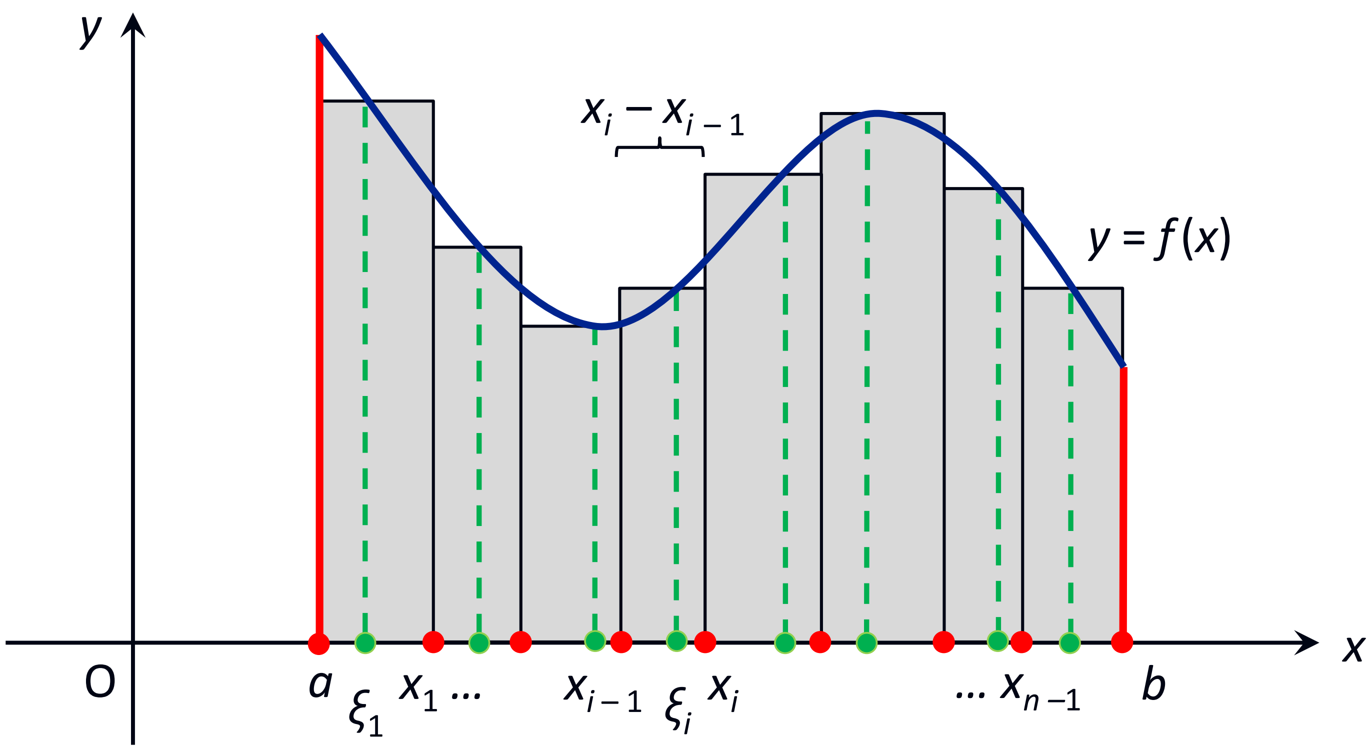
$$S\left(f,\Delta,\Xi\right)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

- Η τιμή του αθροίσματος $S(f, \Delta, \Xi)$ εξαρτάται από την επιλογή της διαμέρισης και των ενδιάμεσων σημείων.

Άθροισμα Riemann (2/4)

Γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann στην

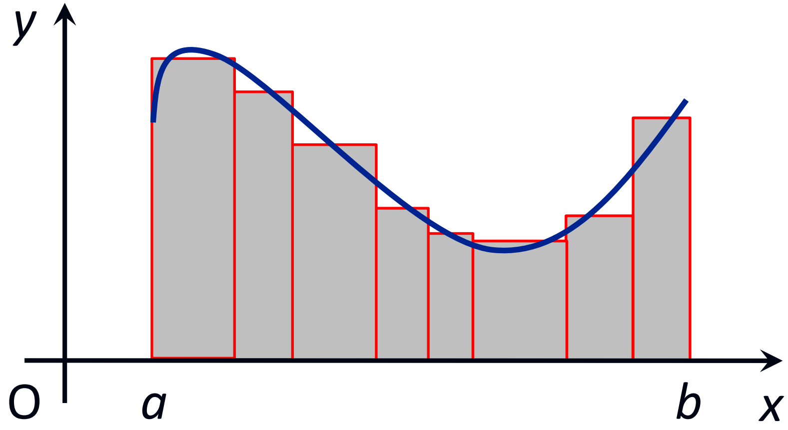
περίπτωση **μη αρνητικής** συνάρτησης

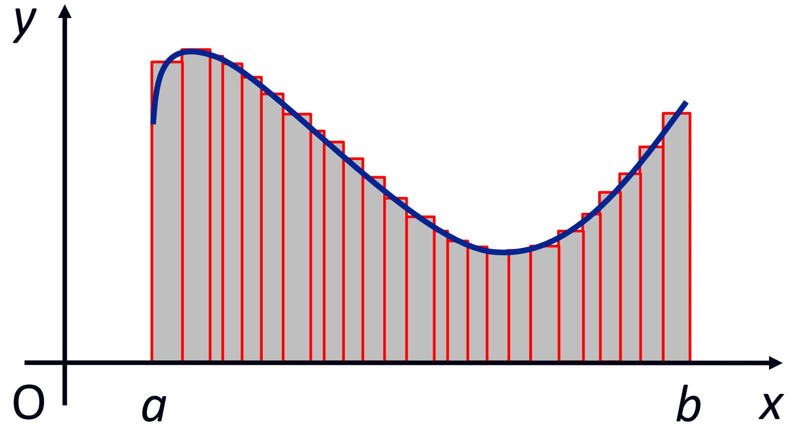


Άθροισμα Riemann (3/4)

- Στην περίπτωση μιας μη αρνητικής συνάρτησης, οποιοδήποτε άθροισμα Riemann προσεγγίζει το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$, $x = b$, χρησιμοποιώντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
- Καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης γίνεται όλο και μικρότερη, η προσέγγιση του εμβαδού γίνεται όλο και καλύτερη.

Άθροισμα Riemann (4/4)





Ορισμένο ολοκλήρωμα (1/2)

- Έστω συνάρτηση f : [a, b] → ℝ και ο αριθμός L που ορίζεται ως

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

- όταν υπάρχει το παραπάνω όριο. Τότε ο L ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο [a, b] και συμβολίζεται με

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

- Όταν υπάρχει το παραπάνω όριο, η συνάρτηση f λέγεται **ολοκληρώσιμη** στο [a, b].

Ορισμένο ολοκλήρωμα (2/2)

- Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $\|\Delta\| < \delta$ και για κάθε σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_i : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$ της Δ να ισχύει

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \varepsilon$$

- Ο αριθμός $L \in \mathbb{R}$ συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $[a, b]$, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **μονότονη** στο $[a, b]$, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$.

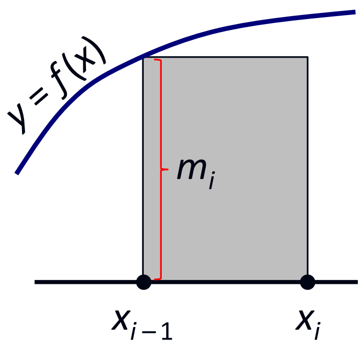
Άνω και κάτω αθροίσματα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια άνω και κάτω αθροισμάτων.

Αν $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και

$$m_i = \inf\left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$$

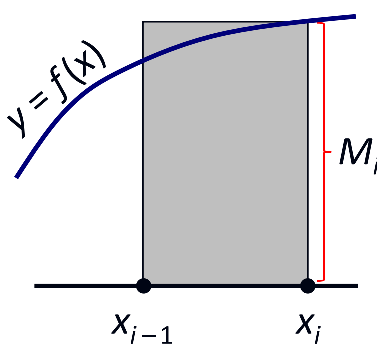
$$M_i = \sup\left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$$



τότε ορίζουμε:

Κάτω άθροισμα: $$L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Άνω άθροισμα: $$U(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$



Άνω και κάτω ολοκληρώματα

Για δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του [a, b] ισχύει
Ορίζουμε:

$$L(f,\Delta_1) \leq U(f,\Delta_2)$$

Κάτω ολοκλήρωμα:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,\Delta) : \Delta \in \mathrm{P}\}$$

Άνω ολοκλήρωμα:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,\Delta) : \Delta \in \mathrm{P}\}$$

όπου P το σύνολο όλων των διαμερίσεων του [a, b].

Μια φραγμένη συνάρτηση f: [a, b] → $\mathbb{R}$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο [a, b], αν το άνω και το κάτω ολοκλήρωμά της είναι ίσα:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων (1/2)

Ορίζουμε τα δύο ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \ (a > b)$$

Έστω δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Τότε:

- η $(f + g)$ είναι ολοκληρώσιμη, με $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- η $(c \cdot f)$ είναι ολοκληρώσιμη ($c \in \mathbb{R}$), με $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- η $(f \cdot g)$ είναι ολοκληρώσιμη,
- η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, με $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων (2/2)

f ολοκληρώσιμη στο $[a, b] \Leftrightarrow f$ ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$, $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Αν $f(x) \geq 0$ στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

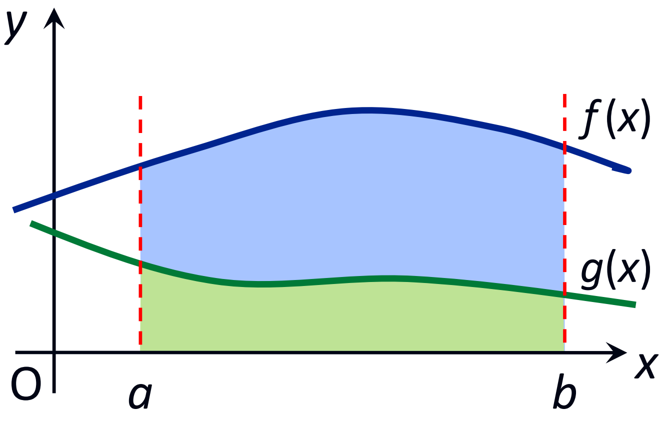
- Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

- Αν $m \leq f(x) \leq M$ στο $[a, b]$, τότε

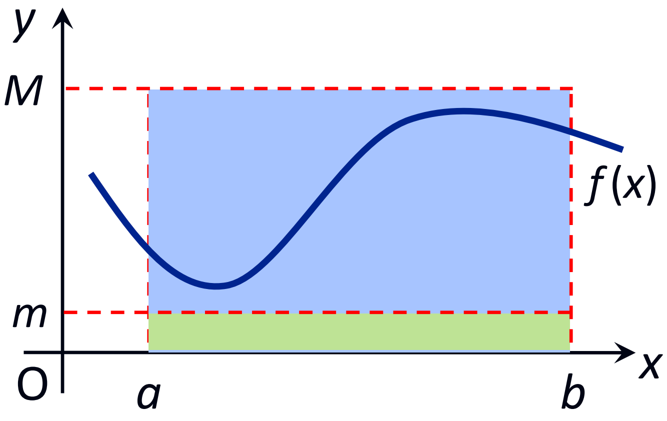
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ιδιότητες (ερμηνεία)

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f, g είναι **μη αρνητικές**, μπορούν να δοθούν γεωμετρικές ερμηνείες σε κάποιες από τις προηγούμενες ιδιότητες:



$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Θεώρημα μέσης τιμής (1/2)

- Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ και η ολοκληρώσιμη συνάρτηση g: $[a, b] \to \mathbb{R}$, με $g(x) \geq 0$ στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιος ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

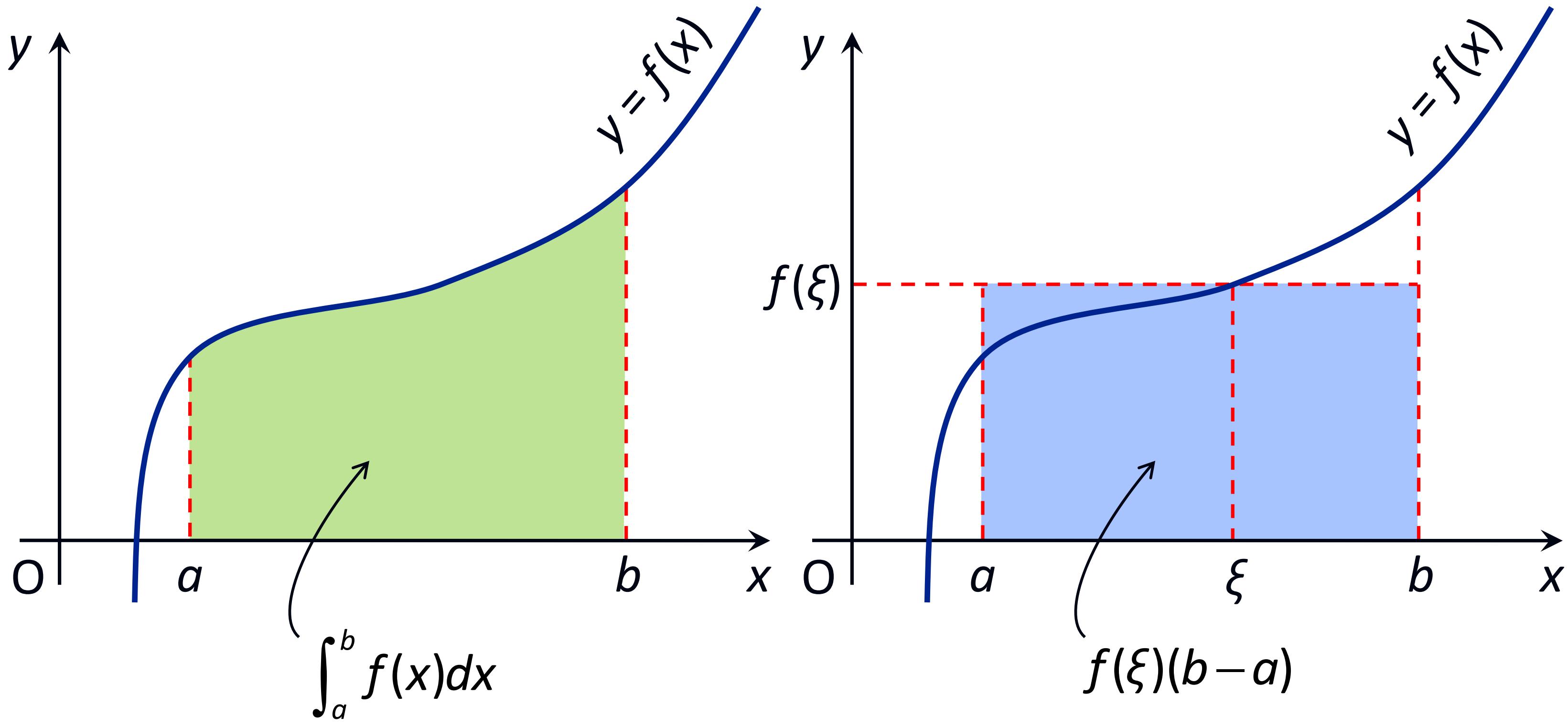
Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιος ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Μέση τιμή της f στο διάστημα $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Θεώρημα μέσης τιμής (ερμηνεία)

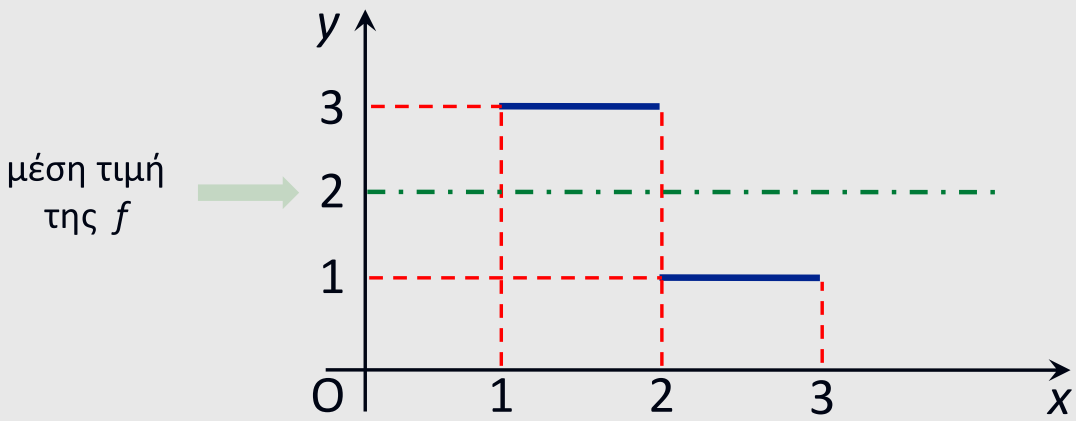


Θεώρημα μέσης τιμής (2/2)

Η διατύπωση του θεωρήματος μέσης τιμής,

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

δηλώνει πως στο διάστημα [*a*, *b*] η συνεχής συνάρτηση f εξισώνεται σε κάποιο σημείο ξ με τη μέση τιμή της. Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει απαραίτητα σε **μη συνεχείς** συναρτήσεις.



Θεμελιώδες θεώρημα

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

είναι παραγωγίσιμη και αποτελεί μια αντιπαράγωγο της f, δηλαδή

$$F'(x) = f(x)$$

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Για κάθε αντιπαράγωγο

$F: [a, b] \to \mathbb{R}$ της f ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ \left(= \left[F(x)\right]_a^b \right)$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα (1/2)

Επεκτείνουμε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε α) **μη φραγμένα διαστήματα** και β) **μη φραγμένες συναρτήσεις**.

Αν η συνάρτηση $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Α, τα **γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους** ορίζονται ως εξής:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx \quad \left(\mathrm{A}=[a,+\infty)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx \quad \left(\mathrm{A}=(-\infty,b]\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx + \int_k^{+\infty} f(x)dx \quad \left(\mathrm{A}=(-\infty,+\infty)\right)$$

Όταν υπάρχουν τα παραπάνω όρια, τότε λέμε πως τα αντίστοιχα ολοκληρώματα **συγκλίνουν**.

Γενικευμένα ολοκληρώματα (2/2)

Αν f: Α → $\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Α και Α είναι διάστημα με μία από τις μορφές [a, b), (a, b], (a, b), τα **γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους** ορίζονται ως εξής:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx \quad \left(\mathrm{A} = [a,b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx \quad \left(\mathrm{A} = (a,b]\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_k^b f(x)dx \quad \left(k \in (a,b),\, \mathrm{A} = (a,b)\right)$$

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.