Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 4: Συναρτήσεις

Επίκ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης
e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

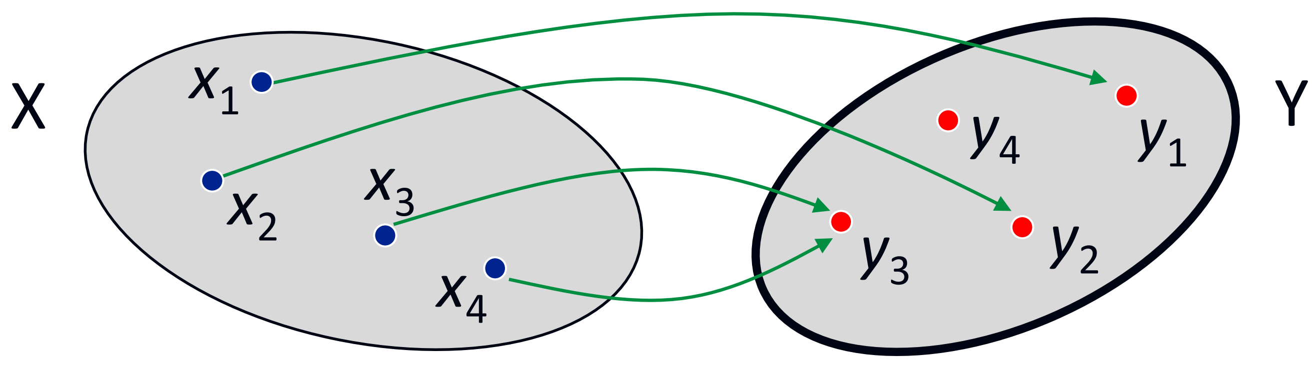
- Ορισμοί.
- Γράφημα συνάρτησης, μετατοπίσεις, μετασχηματισμοί.
- Πράξεις, σύνθεση και μονοτονία συναρτήσεων.
- Συμμετρίες, περιοδικότητα, αντίστροφη συνάρτηση.
- Βασικές συναρτήσεις.

Συναρτήσεις (1/2)

Πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής από ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ σε ένα σύνολο $Y \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται ένας κανόνας αντιστοίχισης, σύμφωνα με τον οποίο αντιστοιχίζεται κάθε στοιχείο του X σε ένα μόνο στοιχείο του Y:

$$f : X \to Y,\ x \longmapsto y = f(x)$$

- $X = D(f) = D_f$: πεδίο ορισμού της f.
- $f(X) = R(f) = R_f$: σύνολο τιμών της f.



Συναρτήσεις (2/2)

- x: ανεξάρτητη μεταβλητή.
- y: εξαρτημένη μεταβλητή.
- f: τύπος της συνάρτησης.

Παράδειγμα:

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{2-x^2}, \quad g(x)=\sqrt{\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}}$$

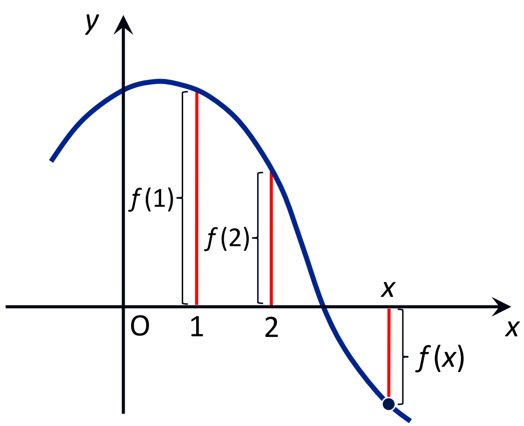
$$D_f=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

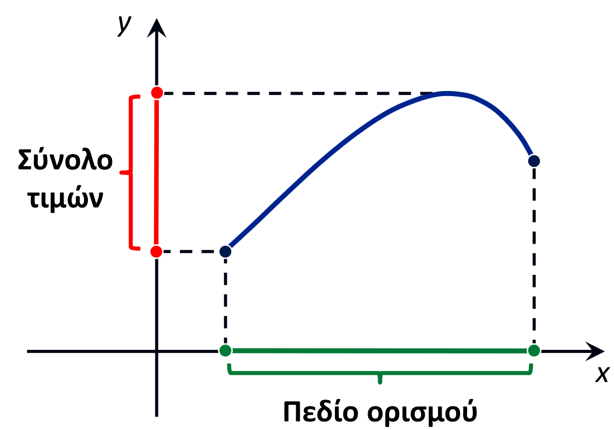
$$D_g=(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

Γράφημα συνάρτησης (1/2)

Γράφημα μιας συνάρτησης $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, στο οποίο αντιστοιχίζεται το σύνολο Α που αποτελείται από όλα τα δυνατά ζεύγη $(x, f(x))$ και το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathrm{P} \times \mathrm{P} = \mathrm{P}^2$:

$$\mathrm{A} = \mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{X}\} \subset \square^{2}$$





Γράφημα συνάρτησης (2/2)

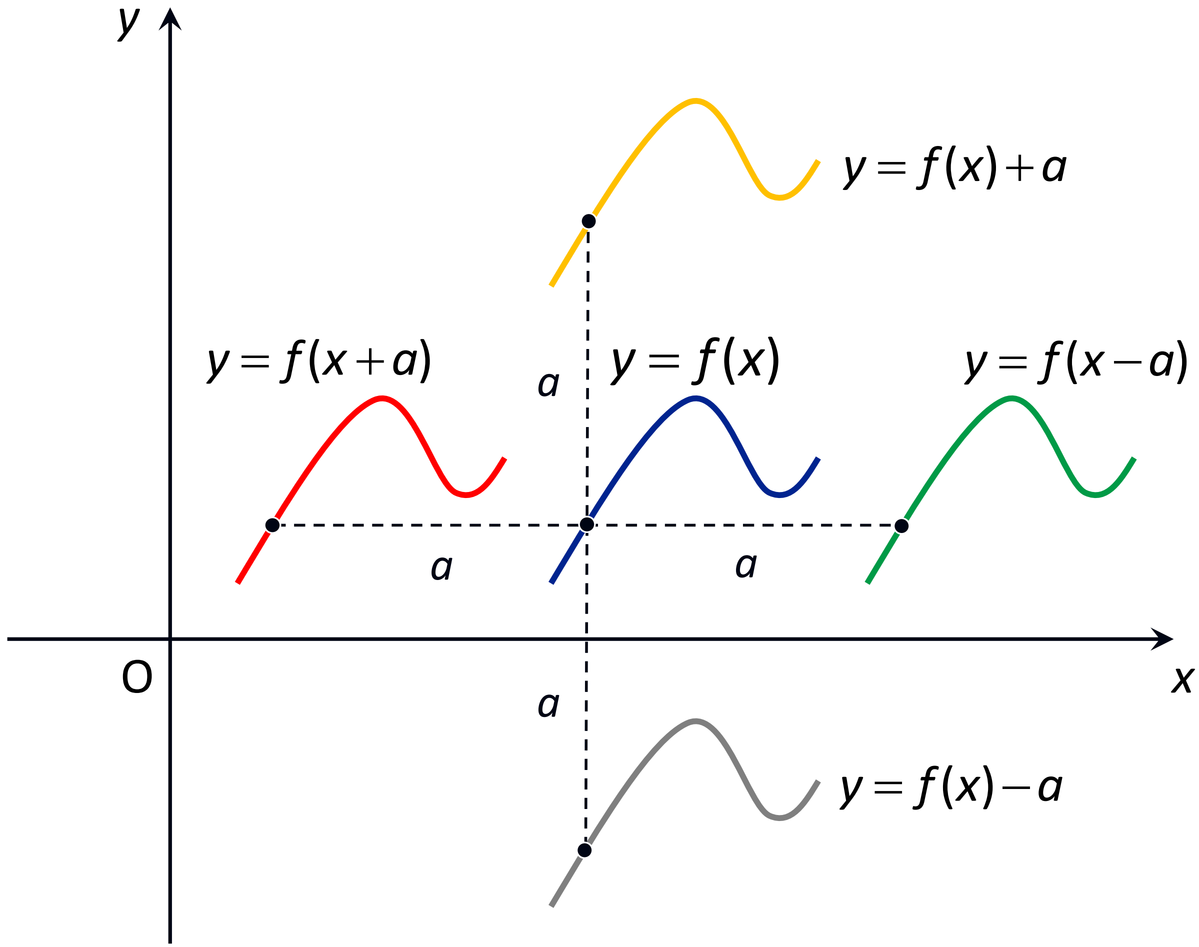
- Κάθε κατακόρυφη γραμμή (παράλληλη προς τον *y*-άξονα) τέμνει το γράφημα μιας συνάρτησης **το πολύ** σε ένα σημείο.
- Το **πεδίο ορισμού** ορίζεται από τα σημεία του άξονα της ανεξάρτητης μεταβλητής, από τα οποία αν φέρουμε γραμμή παράλληλη προς τον *y*-άξονα, αυτή θα τέμνει το γράφημα.
- Το **σύνολο τιμών** ορίζεται από τα σημεία του άξονα της εξαρτημένης μεταβλητής, από τα οποία αν φέρουμε γραμμή παράλληλη προς το *x*-άξονα, αυτή θα τέμνει το γράφημα.

Μετατόπιση γραφημάτων (1/2)

Έστω σταθερά $a > 0$.

- Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x) + a}$ προκύπτει από τη μετατόπιση του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά a, παράλληλα με τον y-άξονα και κατά τις αυξανόμενες τιμές του y.
- Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x) - a}$ προκύπτει από τη μετατόπιση του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά a, παράλληλα με τον y-άξονα και κατά τις μειούμενες τιμές του y.
- Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x - a)}$ προκύπτει από τη μετατόπιση του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά a, παράλληλα με το x-άξονα και κατά τις αυξανόμενες τιμές του x.
- Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x + a)}$ προκύπτει από τη μετατόπιση του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά a, παράλληλα με το x-άξονα και κατά τις μειούμενες τιμές του x.

Μετατόπιση γραφημάτων (2/2)

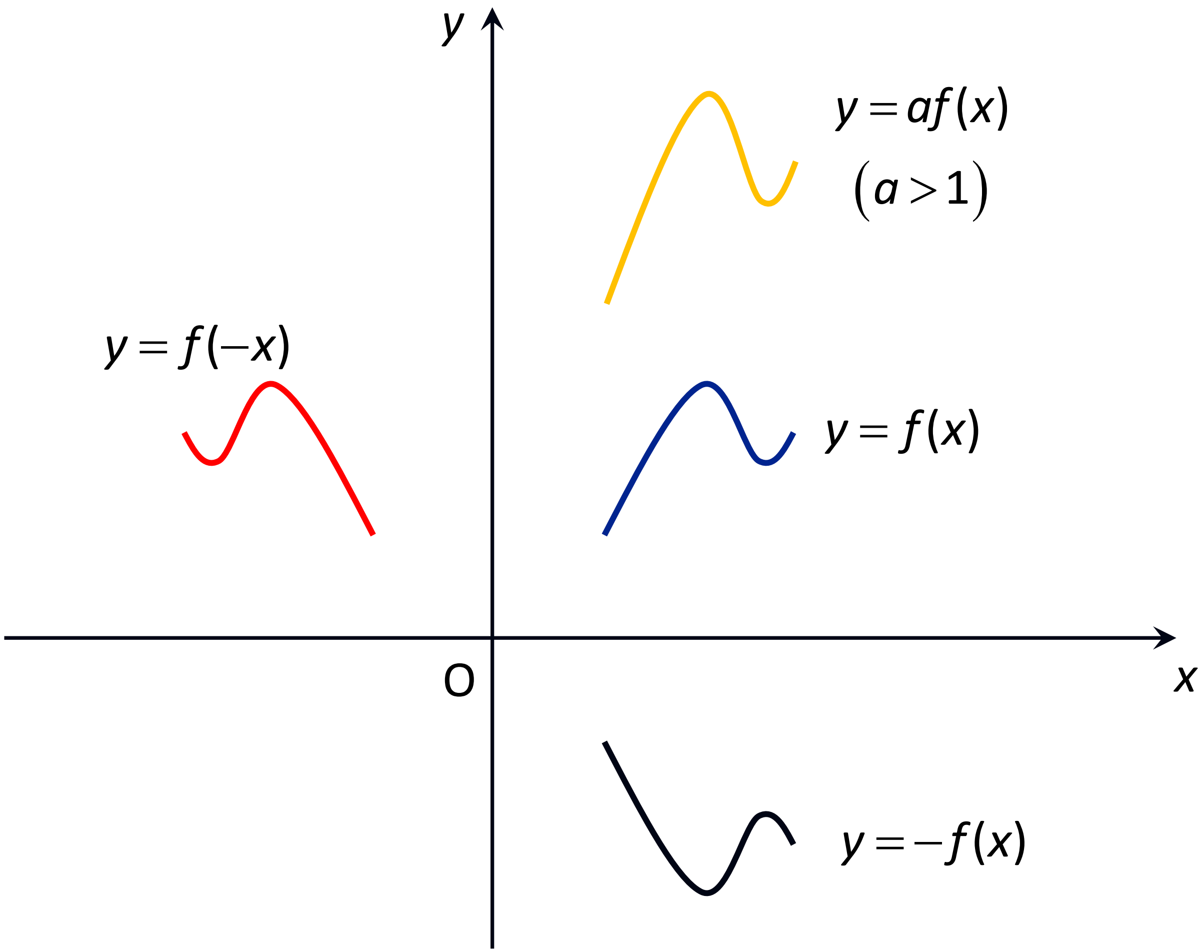


Απλοί μετασχηματισμοί γραφημάτων (1/2)

Έστω σταθερά *a* > 0.

- Το γράφημα της $y = a \cdot f(x)$ προκύπτει από την επιμήκυνση κατά y του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά έναν παράγοντα a.
- Το γράφημα της $y = f(ax)$ προκύπτει από τη συμπίεση κατά x του γραφήματος της $y = f(x)$ κατά έναν παράγοντα a.
- Το γράφημα της $y = -f(x)$ είναι συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς το x-άξονα.
- Το γράφημα της $y = f(-x)$ είναι συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς τον y-άξονα.

Απλοί μετασχηματισμοί γραφημάτων (2/2)



Ισότητα, περιορισμός

Δύο συναρτήσεις $f, g\colon \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι **ίσες**, αν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Έστω οι συναρτήσεις $f\colon \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g\colon \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ και για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε η f αποτελεί **περιορισμό** της g στο Α, ή η g αποτελεί **επέκταση** της f στο Β:

$$g\big|_{\mathrm{A}} = f$$

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

- Έστω δύο συναρτήσεις f, g. Μπορούν να οριστούν οι ακόλουθες συναρτήσεις:

Άθροισμα: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Διαφορά: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Γινόμενο: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Πηλίκο: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

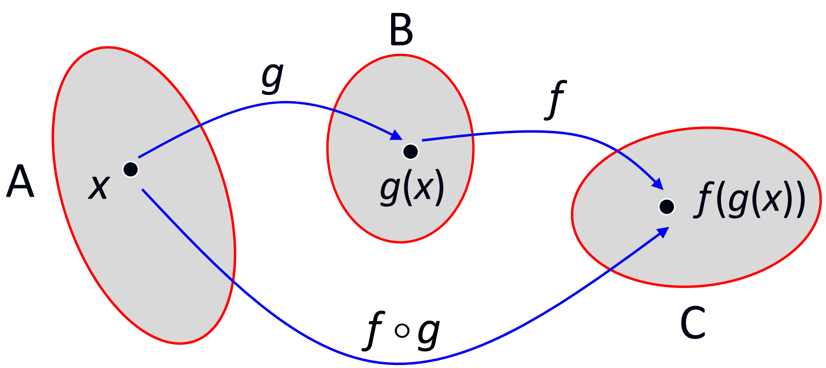
- Το **πεδίο ορισμού** των παραπάνω συναρτήσεων είναι η τομή των πεδίων ορισμού των f, g (στην περίπτωση του πηλίκου, πρέπει ταυτόχρονα να είναι και $g(x) \neq 0$).

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση g: A → P και συνάρτηση f: B = g(A) → C.

Ονομάζουμε **σύνθεση** των συναρτήσεων f, g ($f \circ g$) μια συνάρτηση που απεικονίζει το σύνολο A στο σύνολο C, η οποία ορίζεται για κάθε $x \in$ A από τη σχέση

$$\left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right)$$



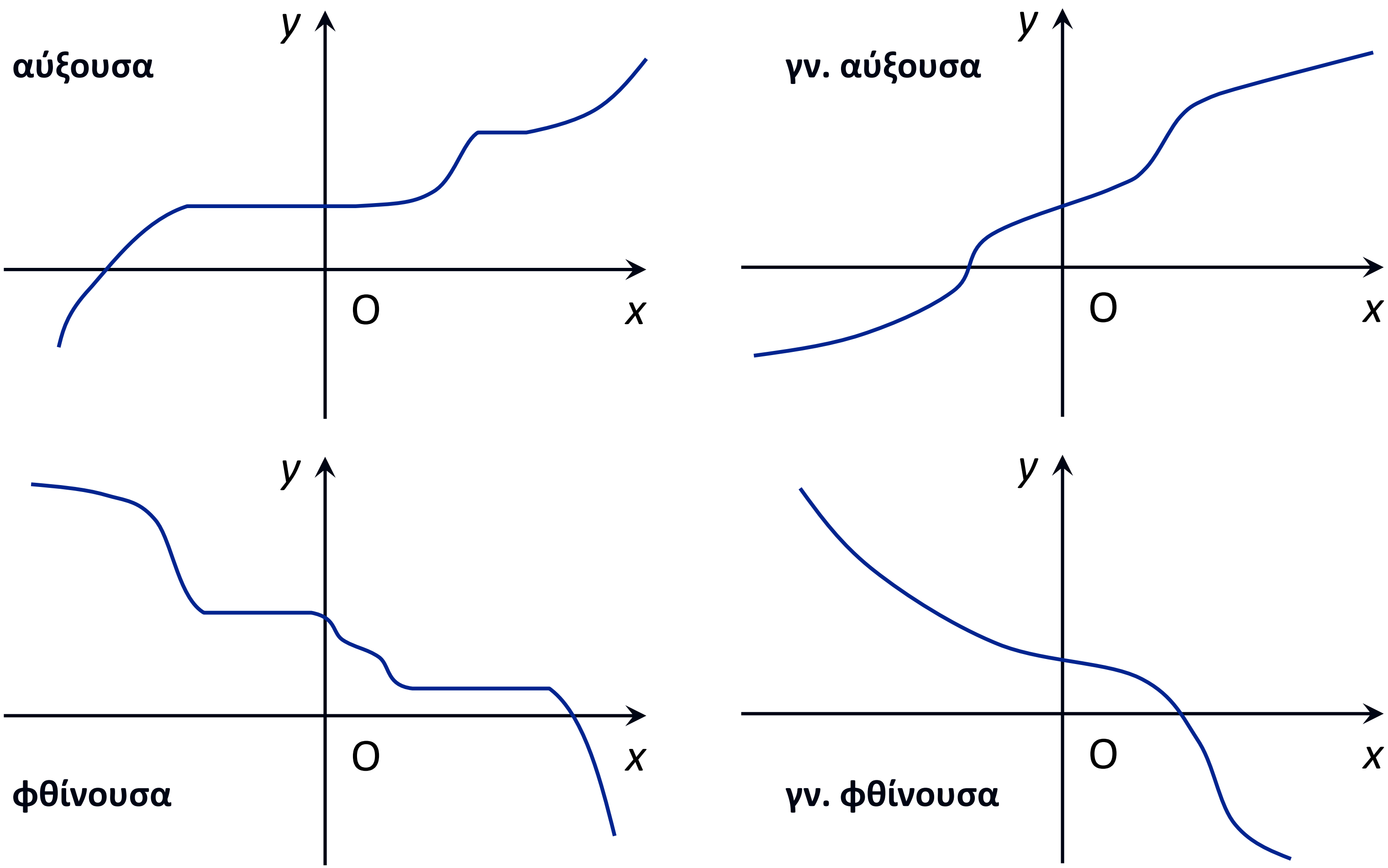
- Γενικά $f \circ g \neq g \circ f$
- $\left(f \circ g\right) \circ h = f \circ \left(g \circ h\right)$

Μονοτονία συναρτήσεων (1/2)

Έστω συνάρτηση $f: A \to B$ και ένα διάστημα C του πεδίου ορισμού. Η συνάρτηση f χαρακτηρίζεται:

- **αύξουσα** στο C, αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
- **γνησίως αύξουσα** στο C, αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) < f(x_2)$$
- **φθίνουσα** στο C, αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \geq f(x_2)$$
- **γνησίως φθίνουσα** στο C, αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) > f(x_2)$$

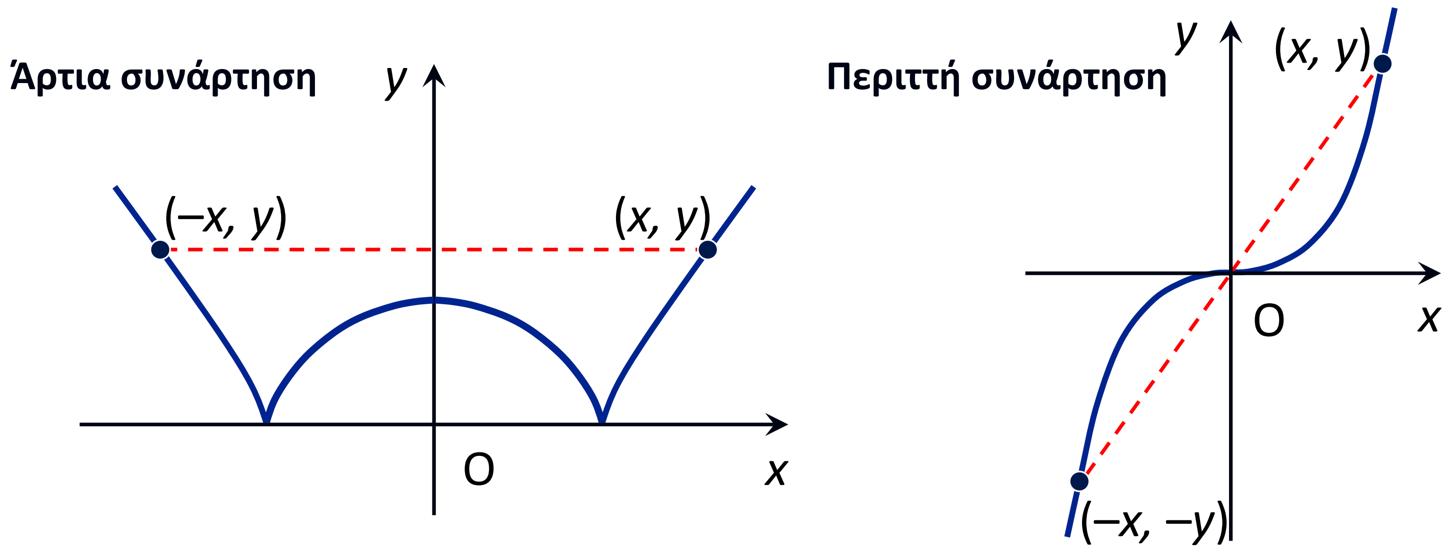
Μονοτονία συναρτήσεων (2/2)



Συμμετρία συναρτήσεων

Μια συνάρτηση f είναι **άρτια** (**περιττή**), αν για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, το $–x$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της και ισχύει

$$f(-x)=f(x) \quad \left(f(-x)=-f(x)\right)$$

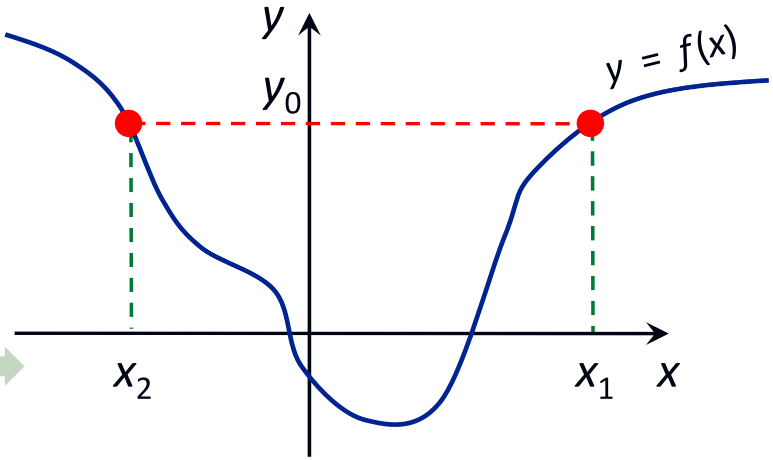


Συναρτήσεις ένα προς ένα

Μια συνάρτηση f είναι **ένα προς ένα** (ή **αμφιμονοσήμαντη**), αν η $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται ότι και $x_1 = x_2$.

- Το γράφημα μιας ένα προς ένα συνάρτησης τέμνεται το πολύ σε ένα σημείο από οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία γραμμή.

Το διπλανό γράφημα δε μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση που είναι ένα προς ένα, διότι η συνθήκη $f(x_1) = f(x_2)$ δε συνεπάγεται πάντα ότι $x_1 = x_2$.



Αντίστροφη συνάρτηση (1/2)

Έστω συνάρτηση f: Α → Β. Αν η f είναι ένα προς ένα, τότε είναι **αντιστρέψιμη**, δηλαδή υπάρχει η **αντίστροφη** συνάρτηση

$$f^{-1}: f(\text{A}) \to \text{A}$$

για την οποία ισχύουν:

- $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$,για κάθε $x \in$ Α,
- $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x \in f$(Α).

Παράδειγμα:

Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση της

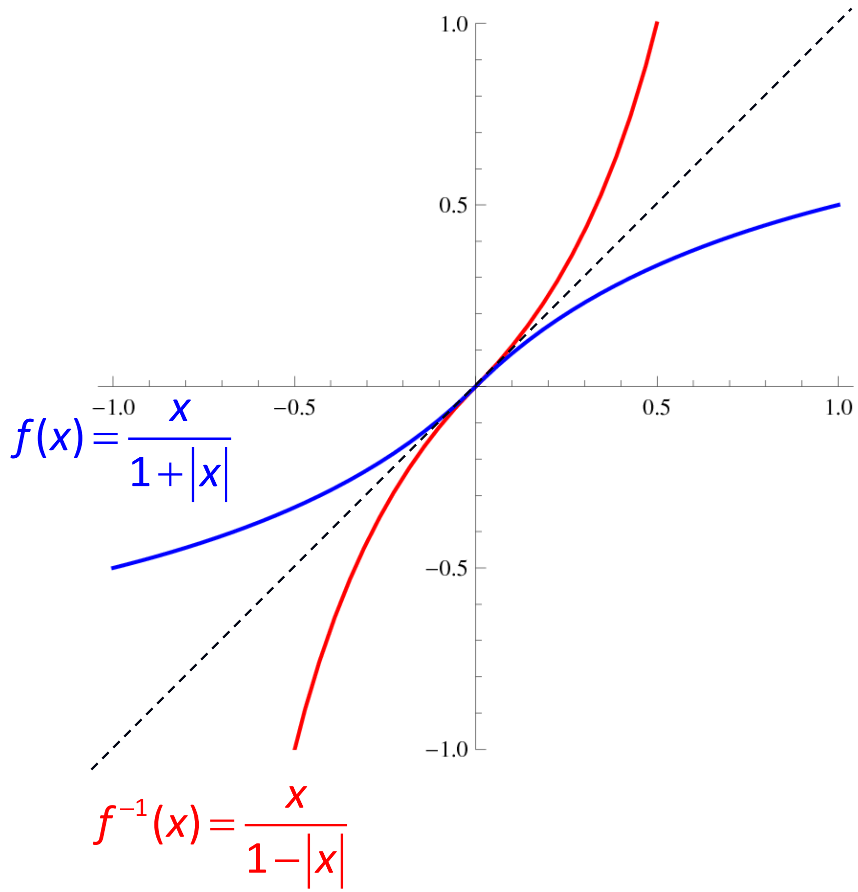
$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

με $\text{D}_f=(-1,1)$

Αντίστροφη συνάρτηση (2/2)

Τα γραφήματα μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία

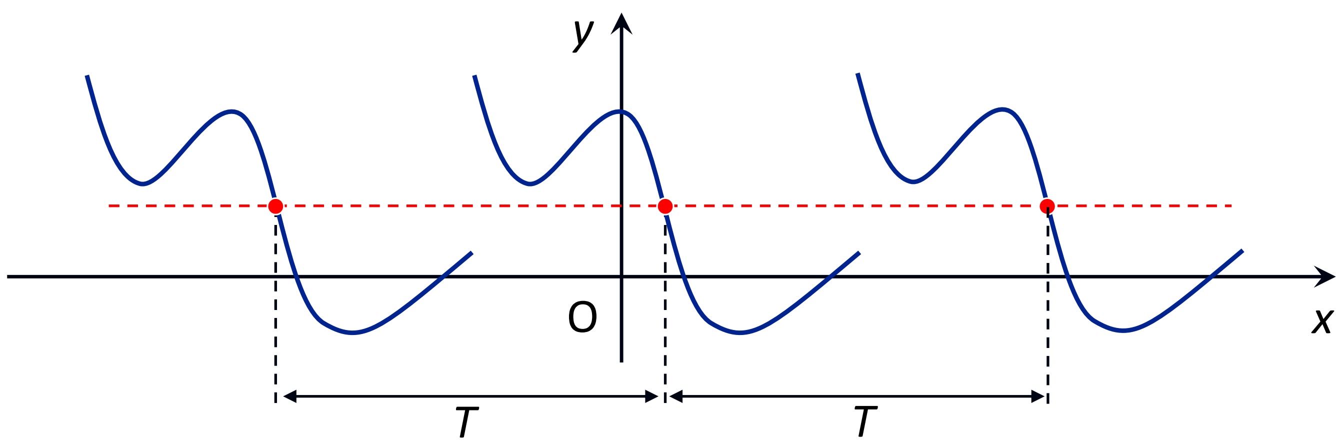
$$y = x.$$



Είδη συναρτήσεων (1/3)

Μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο *T*, αν υπάρχει αριθμός $T \in \mathrm{P}^*$, τέτοιος ώστε για κάθε *x* που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, το *x* + *T* ανήκει επίσης στο πεδίο ορισμού της και ισχύει

$$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$$



Είδη συναρτήσεων (2/3)

Μια συνάρτηση f είναι **πολυωνυμική**, αν είναι της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Μια συνάρτηση f είναι **ρητή**, αν είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,,\ q(x) \neq 0$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Μια συνάρτηση f είναι **αλγεβρική**, αν η παράσταση $y = f(x)$ μπορεί να πάρει τη μορφή $r(x, y) = 0$, όπου $r(x, y)$ πολυώνυμο ως προς x, y.

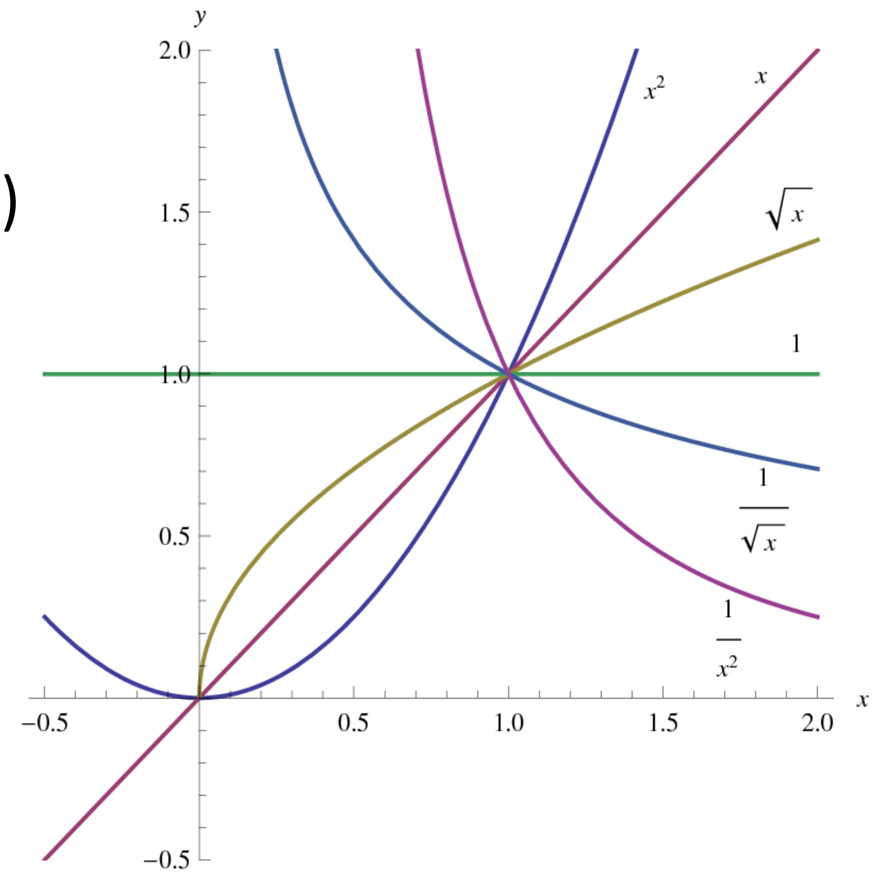
Είδη συναρτήσεων (3/3)

$f(x) = x^r$, με $r \in \mathbb{R}$

$$r = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{άρτιος: } D_f = [0, +\infty) \\ \text{περιττός: } D_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m$$

- Γν. αύξουσα, αν $r > 0$ ($x > 0$).
- Γν. φθίνουσα, αν $r < 0$ ($x > 0$).

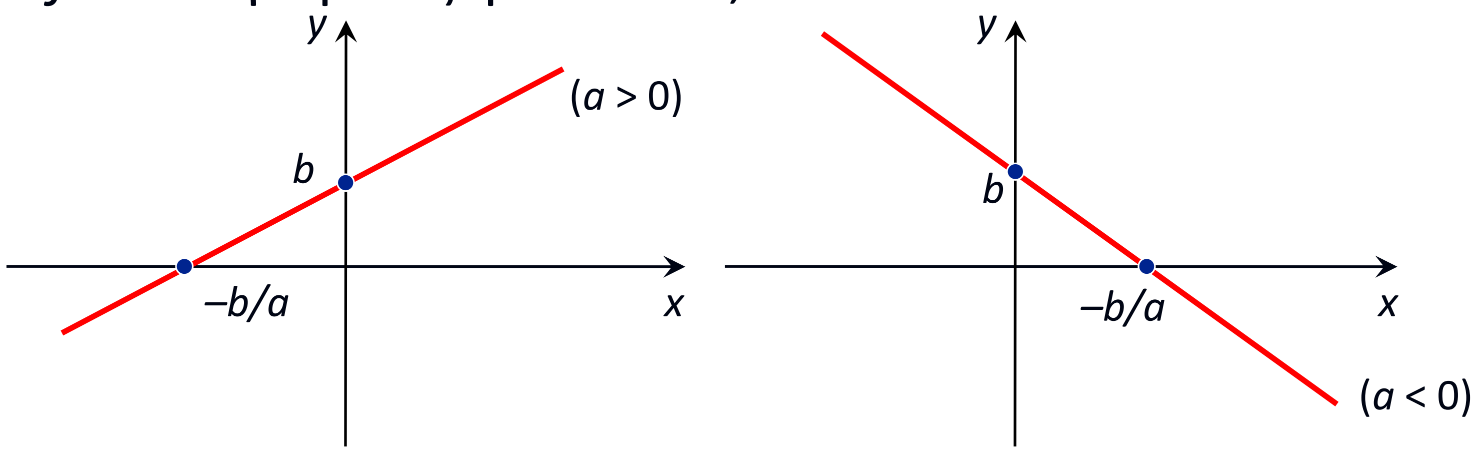


Γραμμική συνάρτηση

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=ax+b$, με a, $b \in \mathbb{R}$.

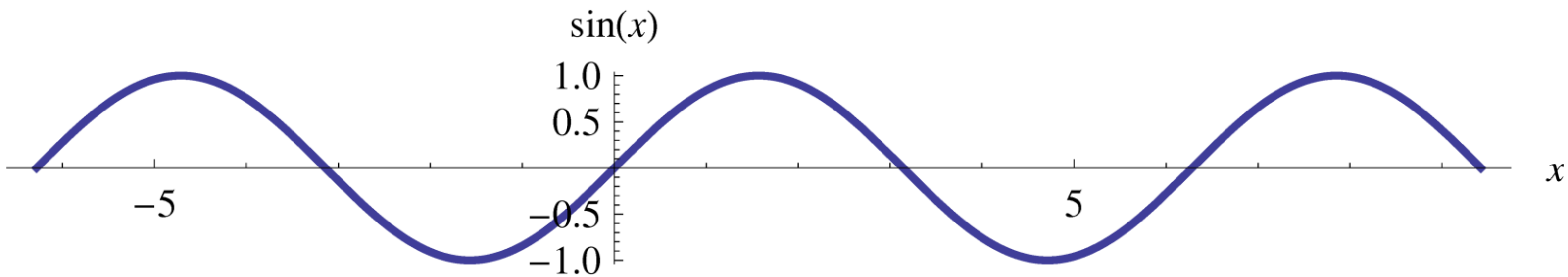
- Η f είναι γνησίως αύξουσα, αν $a > 0$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα, αν $a < 0$.



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (1/4)

$f(x) = \sin x$,περιοδική με περίοδο 2π

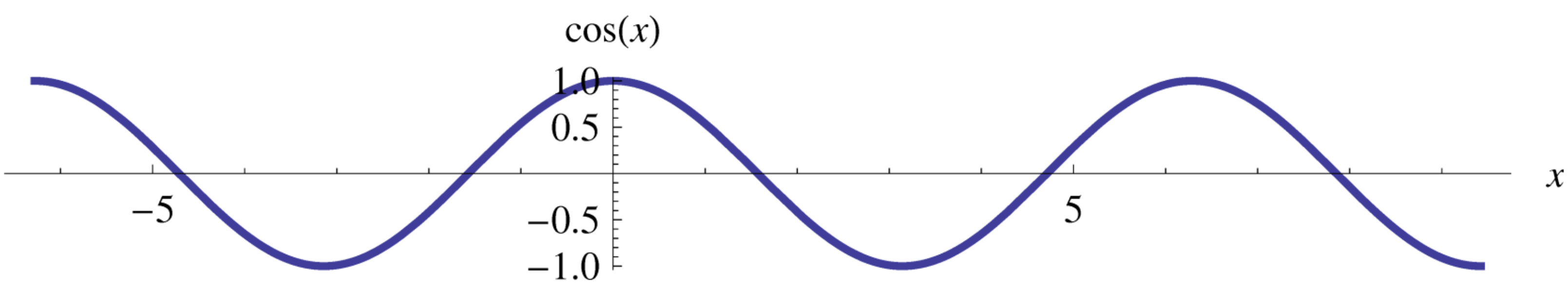
$D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1,1]$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (2/4)

$f(x) = \cos x$, περιοδική με περίοδο 2π

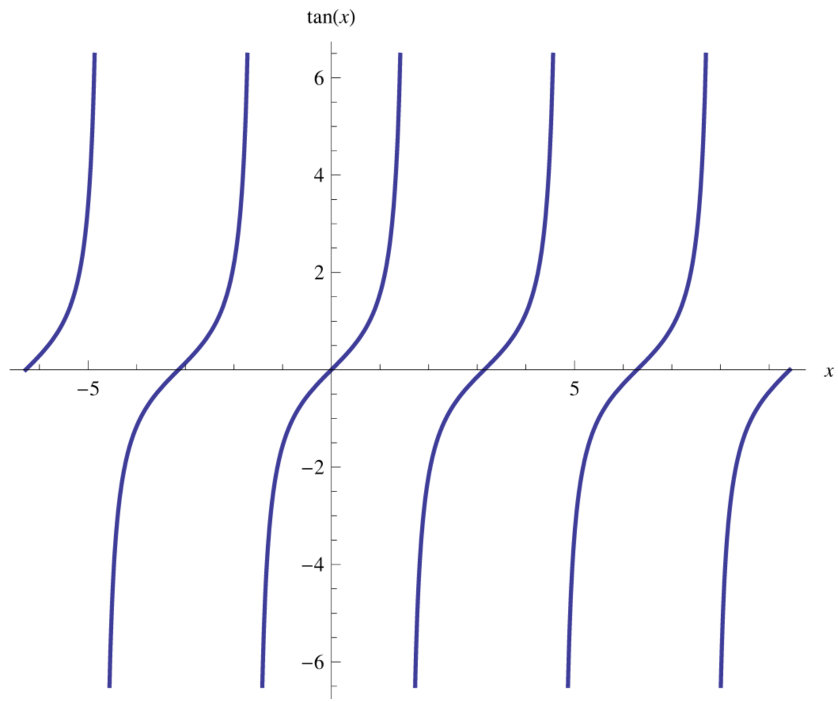
$$D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1,1]$$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (3/4)

$f(x) = \tan x$, περιοδική με περίοδο π

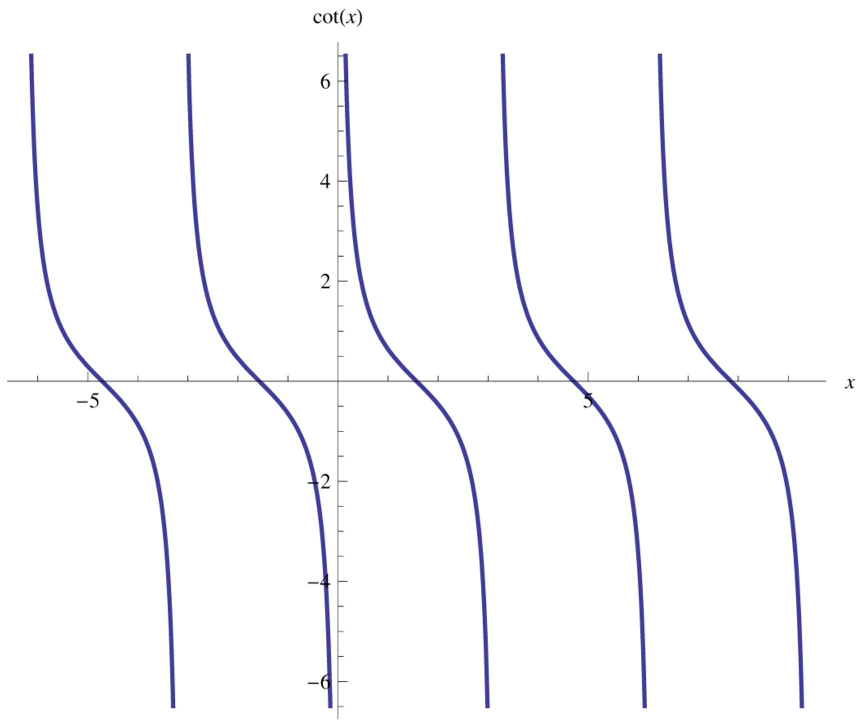
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, R_f = \mathbb{R}$$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (4/4)

$f(x) = \cot x$,περιοδική με περίοδο π

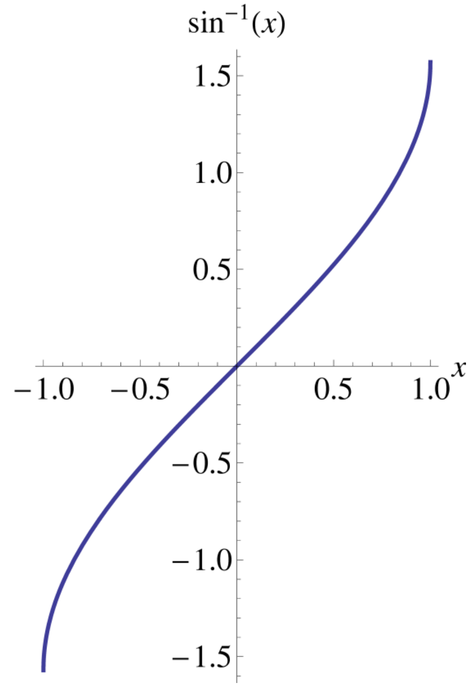
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, R_f = \mathbb{R}$



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (1/3)

$$f(x) = \arcsin x$$

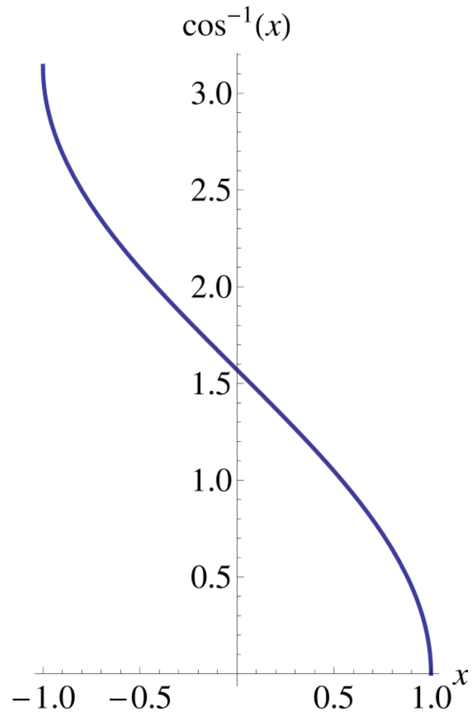
$$D_f = [-1,1], R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (2/3)

$$f(x) = \arccos x$$

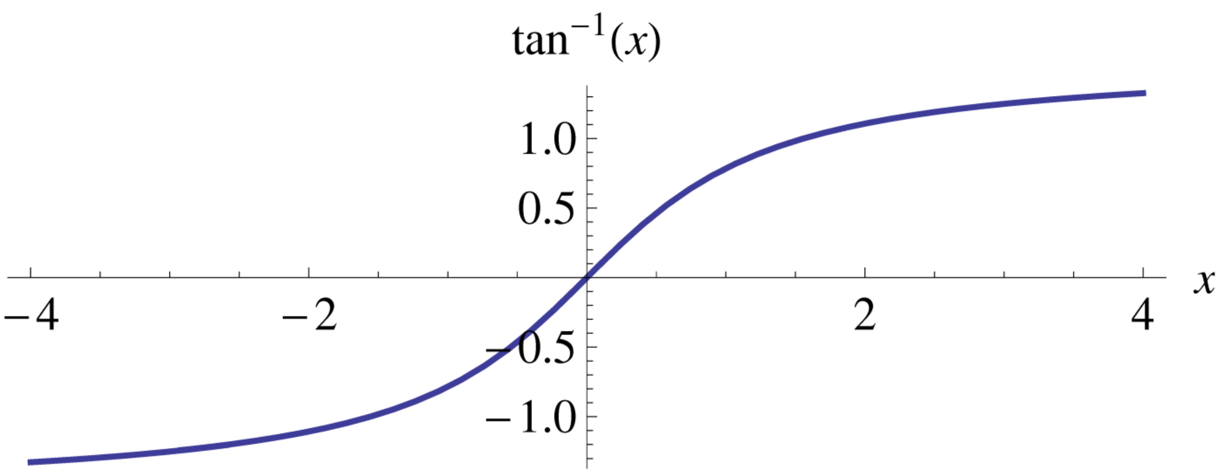
$$D_f = [-1,1], R_f = [0,\pi]$$



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (3/3)

$$f(x) = \arctan x$$

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

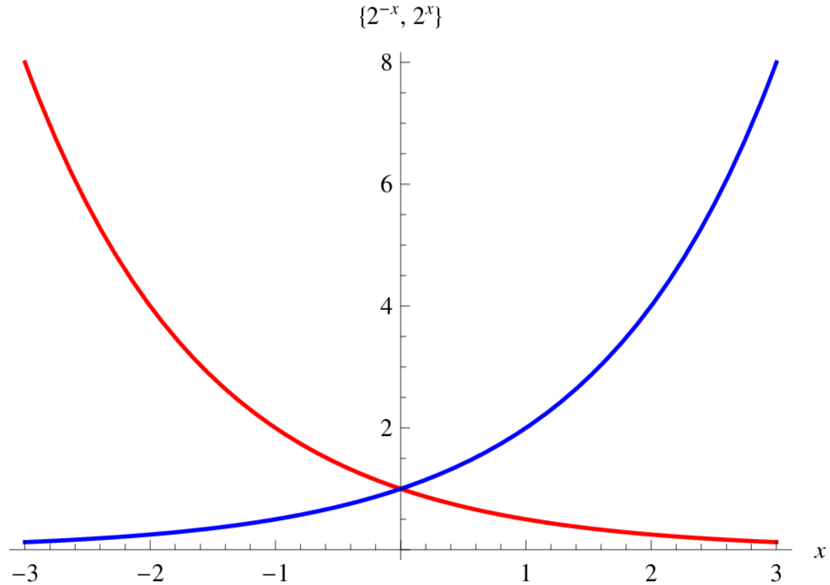


Εκθετική συνάρτηση

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=a^x$

$R_f=(0,+\infty)$



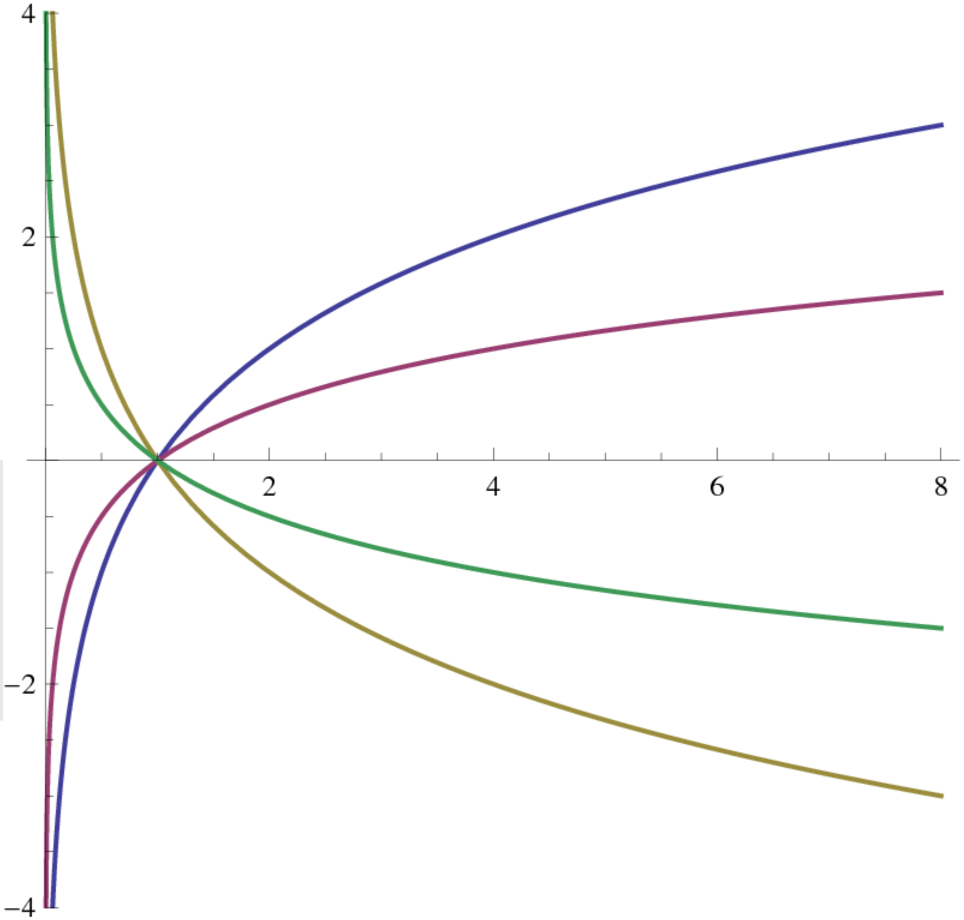
- Γνησίως αύξουσα, αν $a > 1$.
- Γνησίως φθίνουσα, αν $a < 1$.
- Σταθερή, αν $a = 1$.

Λογαριθμική συνάρτηση

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\log_a x$

- Γν. αύξουσα, αν $a > 1$.
- Γν. φθίνουσα, αν $0 < a < 1$.



Υπερβολικές συναρτήσεις (1/3)

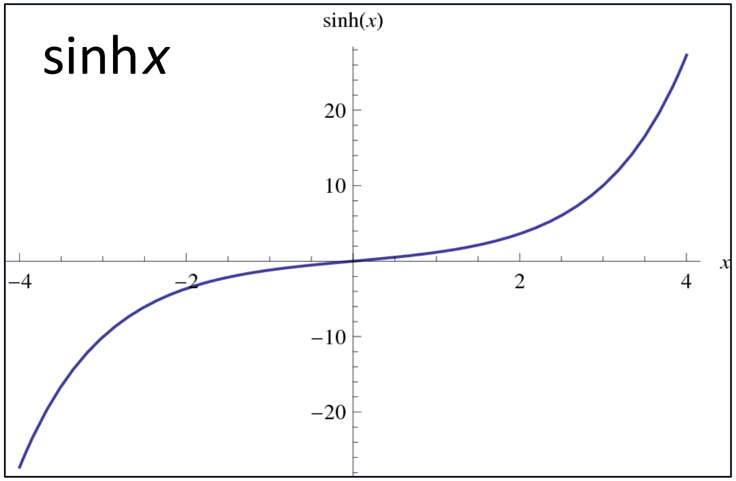
Υπερβολικό ημίτονο: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

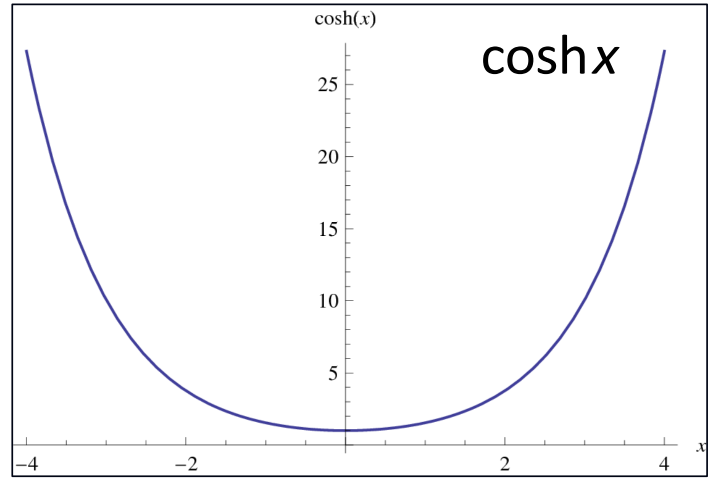
Υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

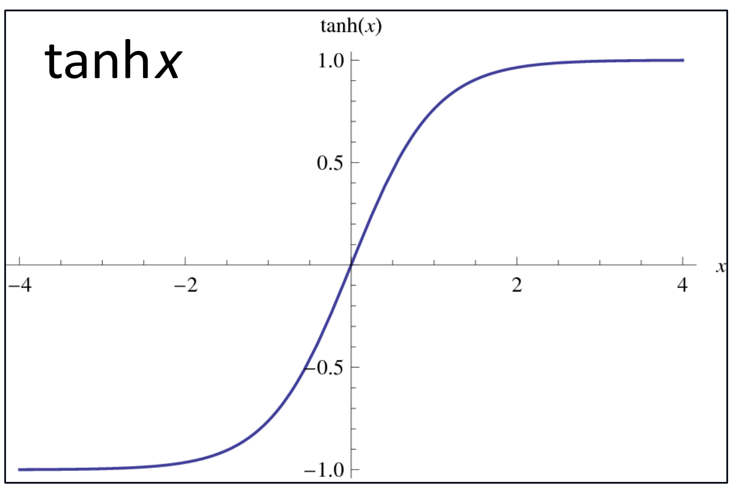
Υπερβολική εφαπτομένη: $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

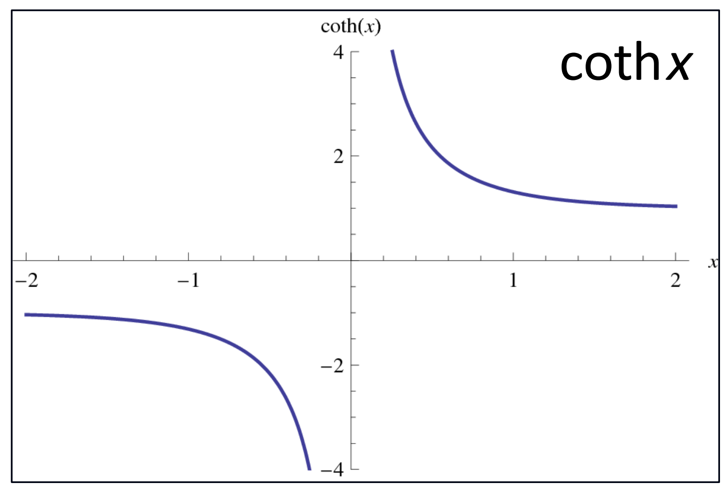
Υπερβολική συνεφαπτομένη: $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Υπερβολικές συναρτήσεις (2/3)









Υπερβολικές συναρτήσεις (3/3)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.