Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 2: Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Επίκ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: tzygiridis@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Ορισμός.
- Συγκλίνουσες ακολουθίες.
- Ακολουθίες που απειρίζονται.
- Φραγμένες ακολουθίες.
- Μονότονες ακολουθίες.
- Υπακολουθίες.

Ακολουθίες

Ως **ακολουθία πραγματικών αριθμών** ορίζεται μια απεικόνιση από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Περιγραφή ακολουθιών:

$$(a_n) \qquad a_n = \ldots \qquad \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$

Παραδείγματα:

$$\left(\frac{n}{n^2+2}\right) \qquad a_n = \frac{n}{n^2+2} \qquad \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{2}{9}, \ldots\right\} \qquad a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{5}{2a_n - 1}$$

Σύγκλιση ακολουθιών/η έννοια του ορίου (1/3)

$$\left(a_n\right)=\left(\frac{1}{n}\right)=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots\right\}$$

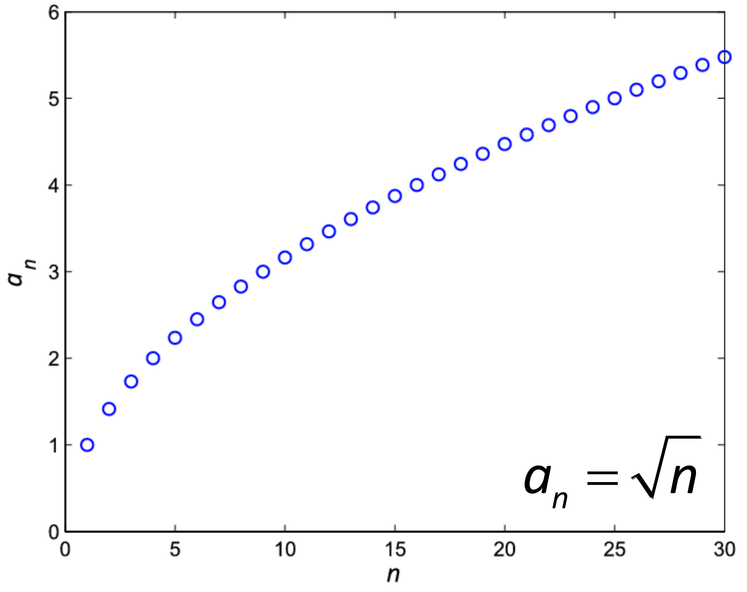
όσο αυξάνει η τιμή του *n*, οι όροι “πλησιάζουν” σε συγκεκριμένη τιμή (την τιμή 0)

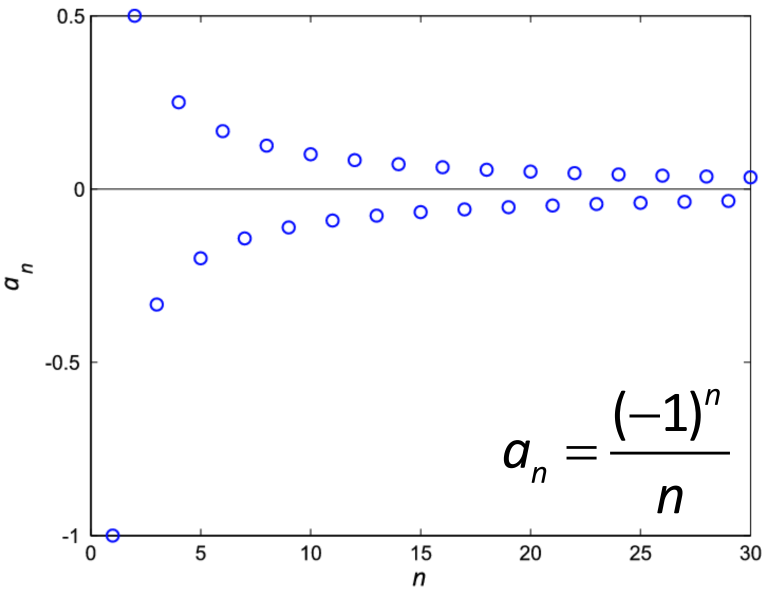
$$\left(b_n\right)=\left(n^2\right)=\left\{1,4,9,16,25,36,49,\ldots\right\}$$

οι όροι δεν “πλησιάζουν” σε συγκεκριμένη τιμή, όσο μεγάλο και αν γίνει το *n*

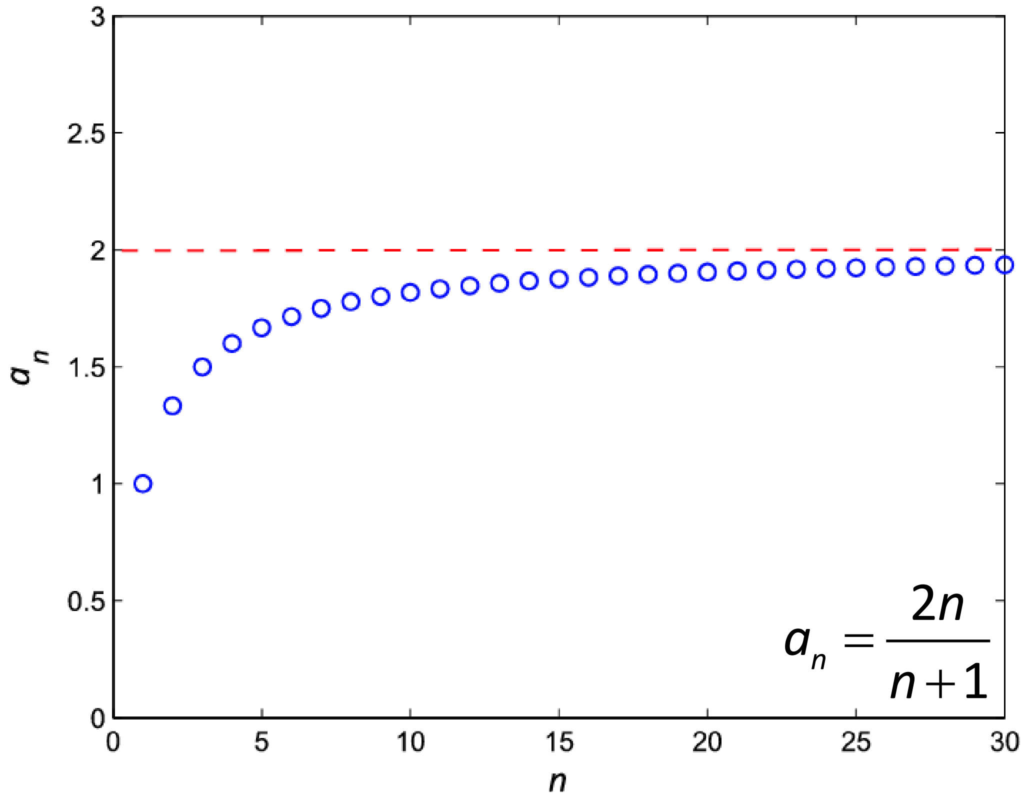
$$\left(c_n\right)=\left(\left(-1\right)^{n-1}\right)=\left\{1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\right\}$$

Σύγκλιση ακολουθιών/η έννοια του ορίου (2/3)





Σύγκλιση ακολουθιών/η έννοια του ορίου (3/3)



$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

Συγκλίνουσες ακολουθίες (1/7)

Μια ακολουθία (a_n) **συγκλίνει στον αριθμό *L*** ή **έχει όριο τον αριθμό *L***, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $|a_n - L| < \varepsilon$ για κάθε $n > N$. Τότε γράφουμε:

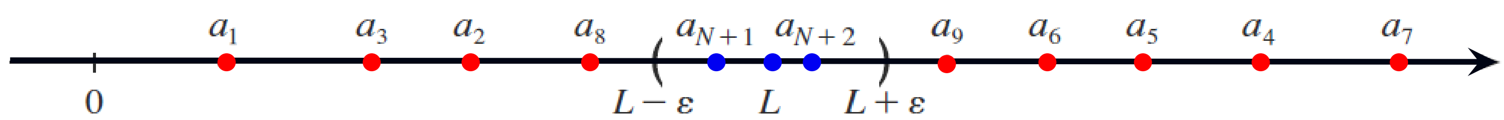
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad \left(\text{ή } a_n \to L\right)$$

Μια ακολουθία που συγκλίνει στον $L \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **συγκλίνουσα**.

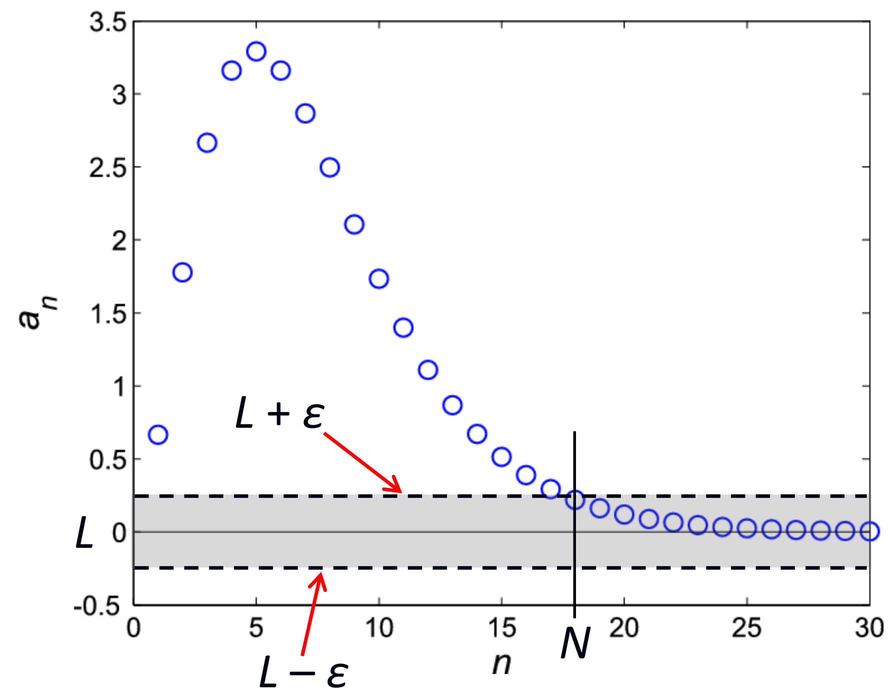
Μια συγκλίνουσα ακολουθία λέγεται **μηδενική**, αν $L = 0$.

Αν μια ακολουθία συγκλίνει, το όριό της είναι **μοναδικό**.

Συγκλίνουσες ακολουθίες (2/7)



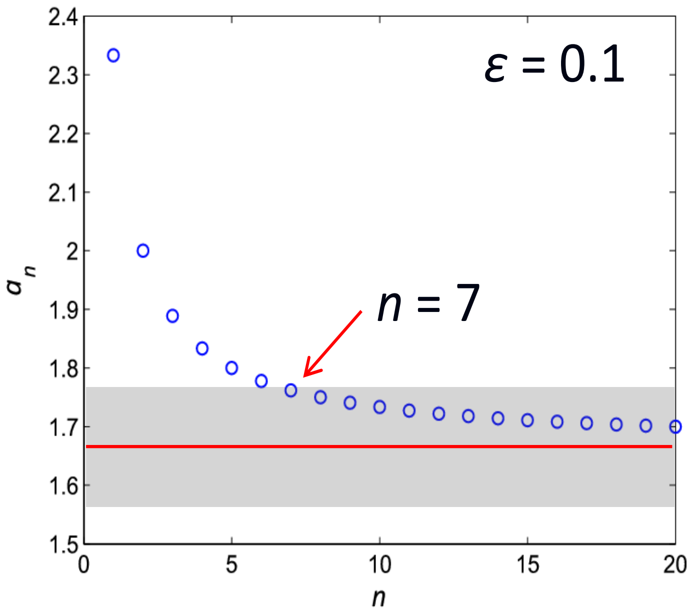
Οσοδήποτε μικρή επιλεγεί η τιμή του ε, οι όροι της ακολουθίας που αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του $N(\varepsilon)$ θα ανήκουν στο διάστημα $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



Συγκλίνουσες ακολουθίες (3/7)

Παράδειγμα:

Να δειχτεί μέσω του ορισμού ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n}=\frac{5}{3}$



$$\left|\frac{5n+2}{3n}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5n+2-5n}{3n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{3n}<\varepsilon$$

Επιλέγοντας $n>\frac{2}{3\varepsilon}$

τότε $\left|\frac{5n+2}{3n}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon$

Συγκλίνουσες ακολουθίες (4/7)

Έστω δύο **συγκλίνουσες** ακολουθίες (a_n), (b_n), με αντίστοιχα όρια A, B. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- $$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = A \pm B$$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = A \cdot B$$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$ $\longrightarrow$ όταν $B \neq 0$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(c \cdot a_n\right) = c \cdot A$$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(c\right) = c$$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^p\right) = A^p$$ $\longrightarrow$ όταν $p > 0$ και $a_n > 0$

Συγκλίνουσες ακολουθίες (5/7)

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|a_n\right|\right)=\left|A\right|$

  * Το αντίστροφο δεν ισχύει, εκτός αν A = 0:

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|A\right| \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=A$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

- Αν $a_n \leq b_n$ για $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε $A \leq B$.

- Αν $M \leq a_n \leq N$ για $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε $M \leq A \leq N$.

Συγκλίνουσες ακολουθίες (6/7)

- Αν $a_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Αν $a_n = a^n$, τότε $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ αν } -1 < a < 1 \\ 1, \text{ αν } a = 1 \\ +\infty, \text{ αν } a > 1 \end{cases}$
- Αν $a_n = \sqrt[n]{a}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- Αν $a_n = \sqrt[n]{n}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- Αν $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = e = 2{,}7182818...$

Συγκλίνουσες ακολουθίες (7/7)

Κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

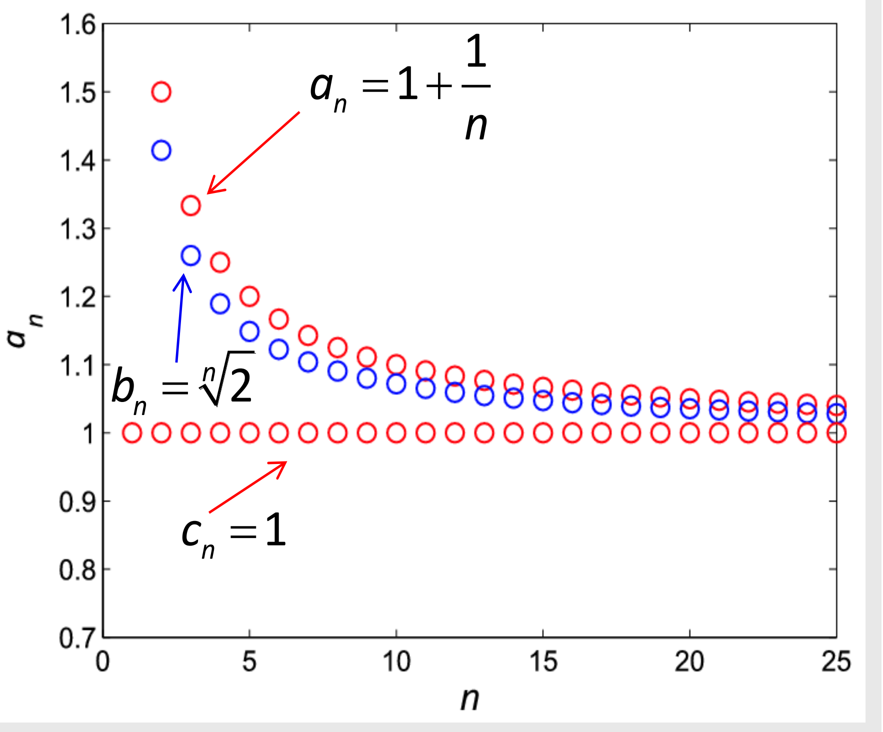
Έστω τρεις ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n),

για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Αν για $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$,

τότε και $\lim_{n\to\infty} b_n = L$



Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί – αν υπάρχει – το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

Είναι γνωστό ότι:

$$-1\leq \sin n\leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n}\leq \frac{\sin n}{n}\leq \frac{1}{n}$$

Εφόσον είναι

$$\lim\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\frac{1}{n}=0$$

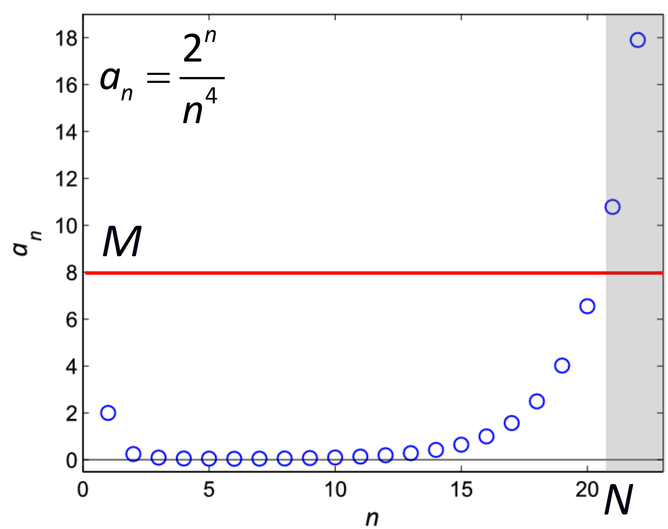
θα ισχύει και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

Σύγκλιση στο ∞

Μια ακολουθία a_n **συγκλίνει στο +∞** (στο –∞) ή **έχει όριο το +∞** (το –∞) ή **απειρίζεται θετικά** (**αρνητικά**), όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει ένας $N \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $a_n > M$ ($a_n < -M$) για κάθε $n > N$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ ή } a_n \to +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ ή } a_n \to -\infty\right)$$



Πράξεις με ακολουθίες που απειρίζονται

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 0$

Φραγμένες ακολουθίες (1/3)

Μια ακολουθία (a_n) ονομάζεται **άνω φραγμένη**, όταν υπάρχει ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε

$$a_n \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Μια ακολουθία (a_n) ονομάζεται **κάτω φραγμένη**, όταν υπάρχει ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε

$$a_n \geq m \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Μια ακολουθία (a_n) ονομάζεται **φραγμένη**, όταν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.

Φραγμένες ακολουθίες (2/3)

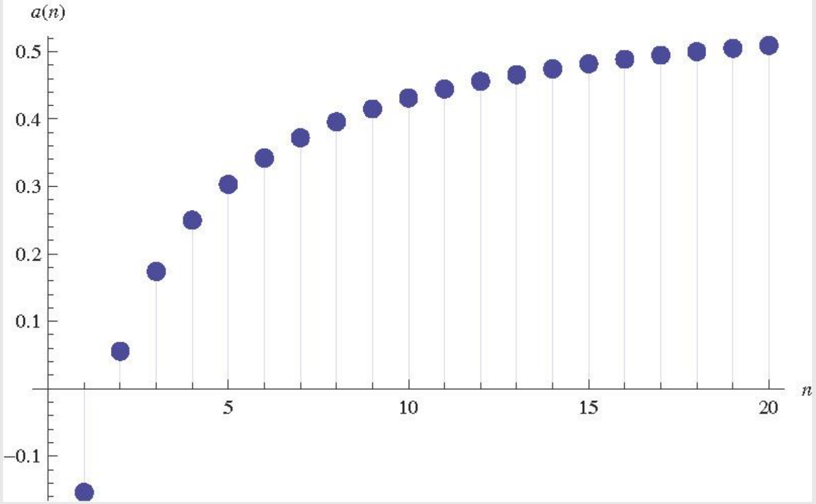
Παράδειγμα

Έστω ακολουθία με $a_n = \dfrac{3n-5}{5n+8}$

Τότε:

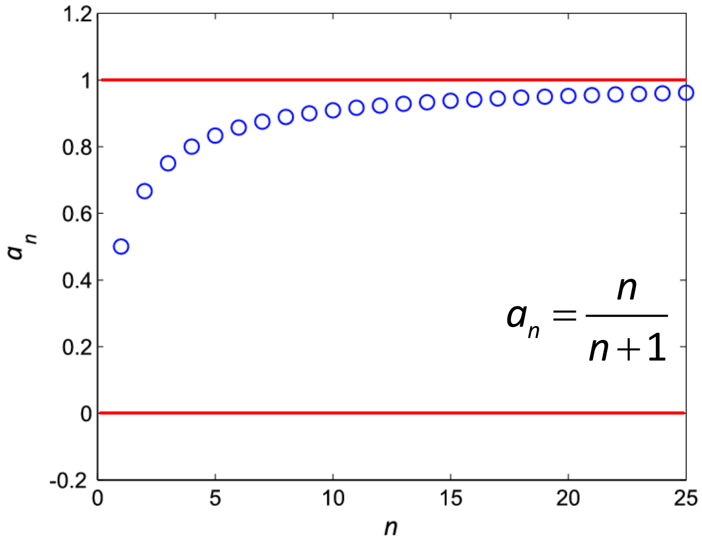
$$a_n = \frac{3n-5}{5n+8} < \frac{3n}{5n+8} < \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5}$$

$$a_n = \frac{3n-5}{5n+8} \geq \frac{-2}{5n+8} \geq -\frac{2}{13}$$



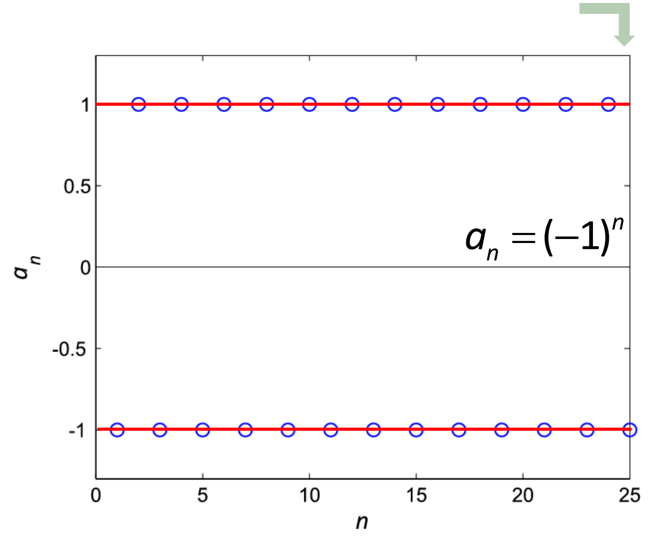
Άρα η συγκεκριμένη ακολουθία είναι φραγμένη.

Φραγμένες ακολουθίες (3/3)



Μια οποιαδήποτε **συγκλίνουσα** ακολουθία είναι **φραγμένη**.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.



Παράδειγμα:

Η ακολουθία με $a_n = \dfrac{3n-5}{5n+8}$

είναι **φραγμένη**.

Μονοτονία (1/2)

Μια ακολουθία a_n είναι:

- **αύξουσα (γνησίως αύξουσα)**, αν και μόνο αν ισχύει

$$a_n \leq a_{n+1} \; (a_n < a_{n+1}) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

- **φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα)**, αν και μόνο αν ισχύει

$$a_n \geq a_{n+1} \; (a_n > a_{n+1}) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Μια ακολουθία που είναι είτε (γνησίως) αύξουσα, είτε (γνησίως) φθίνουσα, ονομάζεται **(γνησίως) μονότονη**.

Μονοτονία (2/2)

Παράδειγμα:
Να δειχτεί ότι η ακολουθία με $a_n = \dfrac{3n-5}{5n+8}$ είναι γν. μονότονη.

$$a_{n+1} > a_n$$

$$\frac{3(n+1)-5}{5(n+1)+8} > \frac{3n-5}{5n+8}$$

$$\frac{3n-2}{5n+13} > \frac{3n-5}{5n+8}$$

$$15n^2+14n-16 > 15n^2+14n-65$$

$$49 > 0$$

που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία είναι γν. αύξουσα.

Μονότονες ακολουθίες

Κάθε **μονότονη** και **φραγμένη** ακολουθία είναι **συγκλίνουσα**.

Αν m είναι ένα **κάτω φράγμα** μιας φθίνουσας ακολουθίας (a_n),

τότε $$\lim_{n\to\infty} a_n \geq m$$

Αν M είναι ένα **άνω φράγμα** μιας αύξουσας ακολουθίας (a_n),

τότε $$\lim_{n\to\infty} a_n \leq M$$

Μια **μονότονη** και **μη φραγμένη** ακολουθία συγκλίνει:

- στο $+\infty$, αν είναι **αύξουσα**,
- στο $-\infty$, αν είναι **φθίνουσα**.

Άνω και κάτω πέρας ακολουθίας

Άνω πέρας (supremum) μιας άνω φραγμένης ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το ελάχιστο των άνω φραγμάτων της.

Κάτω πέρας (infimum) μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το μέγιστο των κάτω φραγμάτων της.

Αν μια ακολουθία έχει άνω ή κάτω πέρας, τότε αυτό είναι **μοναδικό**.

Μια ακολουθία που είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (φθίνουσα και κάτω φραγμένη) συγκλίνει στο άνω (κάτω) πέρας της.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Παράδειγμα:

Να δειχτεί ότι η ακολουθία με $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ είναι γν. μονότονη.

Η ακολουθία είναι γν. φθίνουσα:

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)(n^2+1) < n\left[(n+1)^2+1\right] \Leftrightarrow$$

$$n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow$$

$$n^2+n-1>0$$

που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη:

$$a_n > 0$$

Άρα η ακολουθία είναι **συγκλίνουσα**.

Υπακολουθίες (1/2)

Έστω μια ακολουθία (a_n). Μερικές υπακολουθίες της είναι οι ακόλουθες:

- $(a_{2\kappa}) = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\}$
- $(a_{2\kappa+1}) = \{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\}$
- $(a_{2\kappa}) = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\}$
- $(a_{5k-1}) = \{a_4, a_9, a_{14}, a_{19}, \ldots\}$
- $(a_{\kappa!}) = \{a_1, a_2, a_6, a_{24}, \ldots\}$

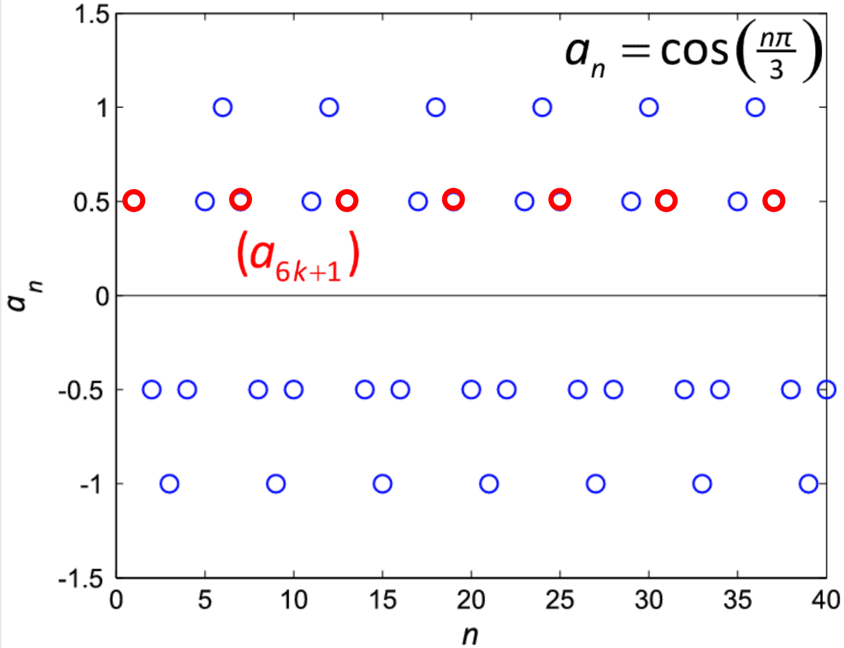
- Μια ακολουθία (a_{κ_n}) αποτελεί υπακολουθία της (a_n), αν η ακολουθία (κ_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (δηλ. $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \ldots$).

Υπακολουθίες (2/2)

- Αν μια ακολουθία (a_n) έχει όριο τον $a \in \mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στην ίδια τιμή.
- Κάθε ακολουθία περιέχει μια μονότονη υπακολουθία.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass:

- Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.



Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.