Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 4: Εισαγωγή / Σύνολα

Αν. Καθηγητής Κ. Στεργίου
e-mail: *kstergiou@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Εισαγωγή στα Διακριτά Μαθηματικά.
  - Εφαρμογές.
- Σύνολα.
  - Συνδυασμοί συνόλων.
  - Δυναμοσύνολο.
  - Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα.
- Μαθηματική επαγωγή.
  - Παραδείγματα αποδείξεων.
- Απαγωγή εις άτοπο.

Στόχοι

- Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των διακριτών μαθηματικών και περιγραφή κάποιων εφαρμογών.
- Εισαγωγή στη θεωρία συνόλων. Περιγραφή των βασικών εννοιών. Περιγραφή των τρόπων συνδυασμών συνόλων.
- Κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής ως ισχυρού εργαλείου απόδειξης θεωρημάτων.

Γενικά

- **Ώρες Διδασκαλίας:**
  - Δευτέρα 14:00-16:00 (Αμφιθέατρο).
  - Πέμπτη 11:00-13:00 (Αμφιθέατρο).
- **Ύλη μαθήματος:**
  - Eclass.

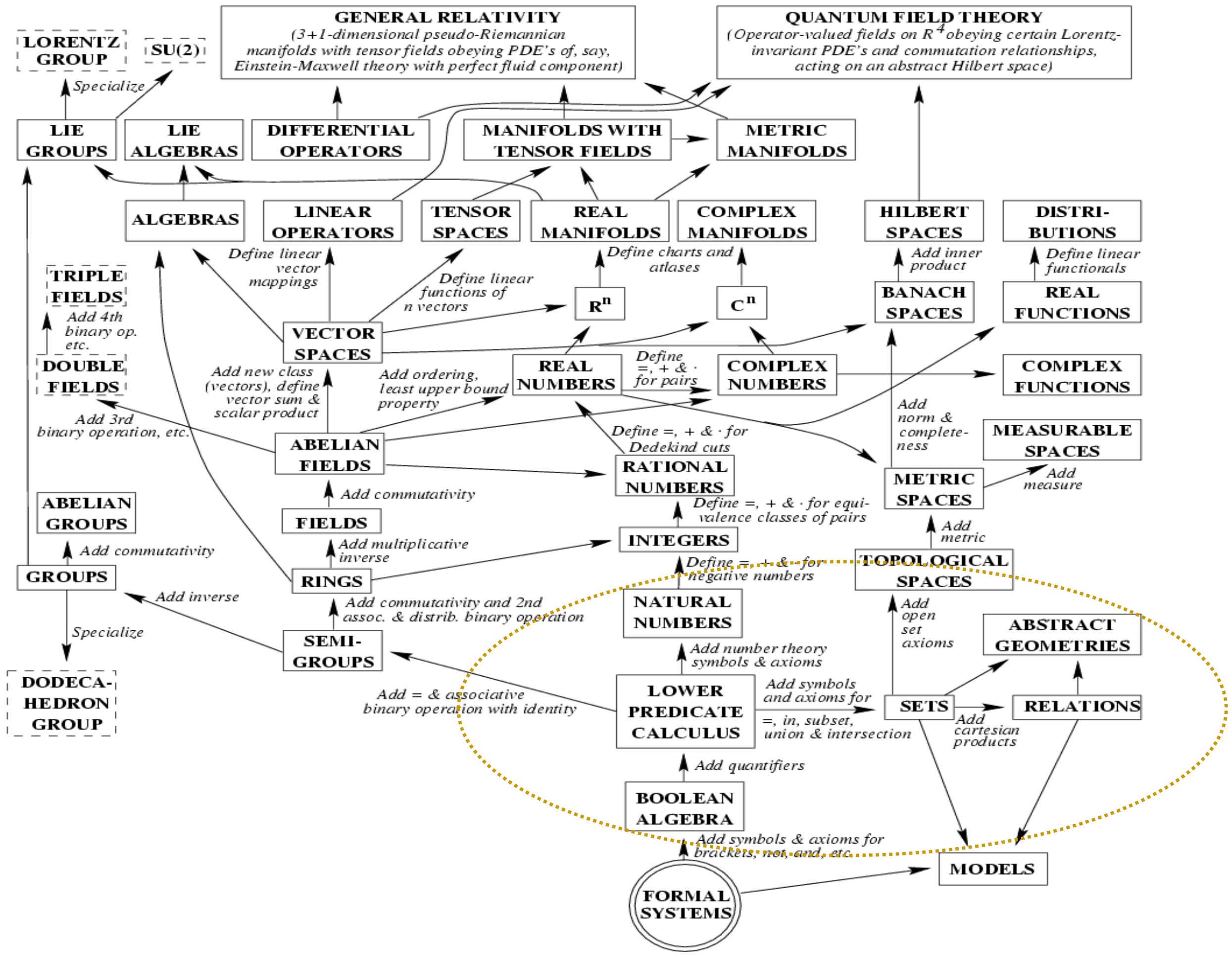
Τι είναι τα Διακριτά Μαθηματικά;

- Μελέτη διακριτών αντικειμένων και σχέσεων μεταξύ τους.

Επισκόπηση μαθήματος

- Το μάθημα διακριτών μαθηματικών πρέπει να διδάξει στους φοιτητές πως να χρησιμοποιούν και να επεξεργάζονται **διακριτές** (σε αντίθεση με συνεχείς) **δομές** που αντιπροσωπεύουν διακριτά αντικείμενα και συσχετίσεις ανάμεσα σε αυτά τα αντικείμενα.
  – Αυτές οι διακριτές δομές περιλαμβάνουν σύνολα, σχέσεις, γράφους, δέντρα, μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων, διακριτές συναρτήσεις, αλγόριθμους, κ.α.
- Το μάθημα διακριτών μαθηματικών εισάγει τους φοιτητές στην "**αλγοριθμική σκέψη**".
  – έμφαση στη χρήση της θεωρίας για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Τι περιλαμβάνουν τα Μαθηματικά;



Τι θα μελετήσουμε εμείς;

- Τι σημαίνει **διακριτές δομές**;
  - **Διακριτό** – Συνίσταται από διαφορετικά, διαχωριζόμενα μέρη (Το αντίθετο του **συνεχούς**)

    διακριτό:συνεχές :: ψηφιακό:αναλογικό.
  - **Δομές** – Αντικείμενα που χτίζονται από απλούστερα αντικείμενα με βάση κάποιους συγκεκριμένους κανόνες.
  - **Διακριτά Μαθηματικά** – Η μαθηματική μελέτη διακριτών αντικειμένων και δομών.

Διακριτά διατεταγμένο

- Όταν χρησιμοποιούμε νούμερα, είναι πολύ πιο πιθανό να χρησιμοποιήσουμε το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Z}$ από ότι το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{Q}$.
- Αιτία: το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$ είναι πυκνά διατεταγμένα.
- Τι σημαίνει αυτό;
  - Το $\langle \mathbb{R},< \rangle$ είναι πυκνά διατεταγμένο επειδή $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \neq y \rightarrow \exists z\ (x<z\ \&\ z<y))$
- Το αντίθετο του πυκνά διατεταγμένου: **διακριτά διατεταγμένο.**
  - Το $\langle \mathbb{N},< \rangle$ είναι διακριτά διατεταγμένο.

Διακριτές Δομές που θα μελετήσουμε

- Προτάσεις.
- Κατηγορήματα.
- Αποδείξεις.
- Σύνολα.
- Συναρτήσεις.
- Τάξεις μεγέθους.
- Αλγόριθμοι.
- Ακέραιοι αριθμοί.
- Αθροίσματα.

- Συμβολοσειρές.
- Μεταθέσεις.
- Συνδυασμοί.
- Σχέσεις.
- Γράφοι.
- Δέντρα.
- Λογικά Κυκλώματα.
- Αυτόματα.

Διακριτά Μαθηματικά στην Επιστήμη Υπολογιστών (1/2)

- Η βάση της επιστήμης υπολογιστών είναι: **Διαχείριση διακριτών δομών που αναπαριστώνται στη μνήμη.**
- Τα διακριτά μαθηματικά είναι η βασική γλώσσα και το θεωρητικό υπόβαθρο για όλη την επιστήμη υπολογιστών.

Διακριτά Μαθηματικά στην Επιστήμη Υπολογιστών (2/2)

- Αλγόριθμοι & Δομές Δεδομένων.
- Μεταγλωττιστές & Μεταφραστές.
- Εξέταση ορθότητας λογισμικού & υλικού.
- Αρχιτεκτονική Υπολογιστών.

- Βάσεις Δεδομένων.
- Κρυπτογραφία.
- Κώδικες διόρθωσης λαθών.
- Τεχνητή Νοημοσύνη κ.α.
- *Τα διακριτά μαθηματικά σχετίζονται με όλες τις περιοχές της πληροφορικής!*

Και λίγη διασκέδαση...

Πολλοί βρίσκουν τα Διακριτά Μαθηματικά το πιο ευχάριστο κομμάτι των μαθηματικών

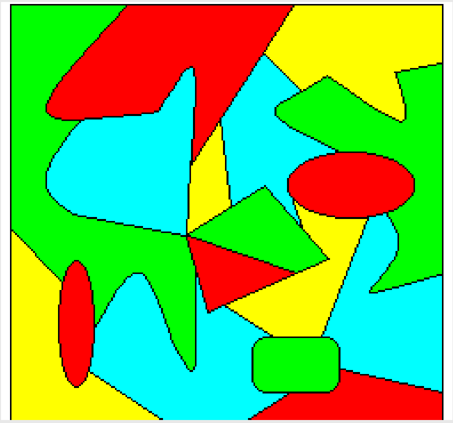
✓ πολύ πιο ευχάριστο από την Ανάλυση για παράδειγμα.

- Εφαρμόζονται σε σχεδόν τα πάντα:
    - Συμπεριλαμβανομένων πολλών puzzles.
- Έχουν μεγάλη ποικιλία.

Εφαρμογές (1/5)

- Ποιά είναι η πιθανότητα για straight flush στο pocker;

- Με πόσα χρώματα μπορούμε να χρωματίσουμε τις περιοχές ενός χάρτη έτσι ώστε να μην υπάρχουν 2 γειτονικές περιοχές με το ίδιο χρώμα;

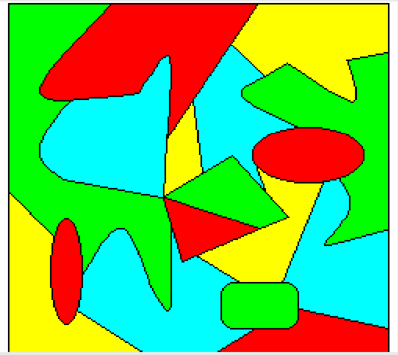


Εφαρμογές (2/5)

- Ποιά είναι η πιθανότητα για straight flush στο pocker;
- Με πόσα χρώματα μπορούμε να χρωματίσουμε τις

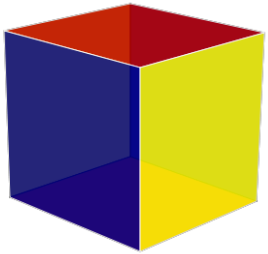
περιοχές ενός χάρτη έτσι ώστε να μην υπάρχουν 2 γειτονικές περιοχές με το ίδιο χρώμα;

$$\frac{40}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \div 5!} = \frac{40}{2598960}$$



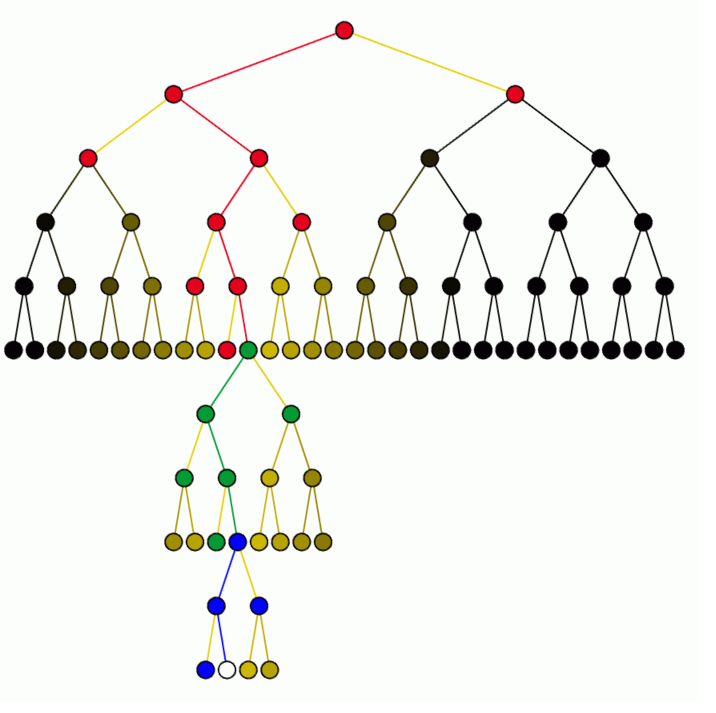
Εφαρμογές (3/5)

- Πόσοι είναι οι διαφορετικοί χρωματισμοί ενός κύβου με 4 χρώματα;
- Μπορούμε να καλύψουμε τη σκακιέρα με ένα άλογο έτσι ώστε να έχουμε επισκεφτεί κάθε τετράγωνο ακριβώς μία φορά;



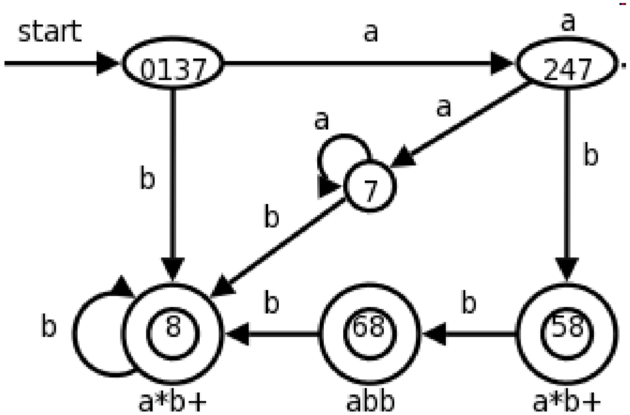
Εφαρμογές (4/5)

- Πως υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα των αλγόριθμων;

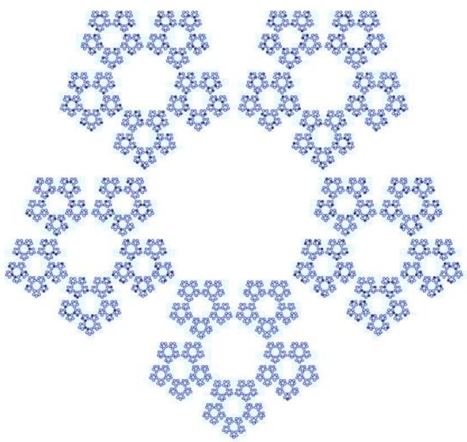


Εφαρμογές (5/5)

- Σχεδιασμός ενός compiler.



- Θεμελιώσεις κρυπτογραφίας.



Περιεχόμενα διαλέξεων

- Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις.
- Υπολογισιμότητα, Τυπικές Γλώσσες.
- Συνδυαστική, Πιθανότητες.
- Μηχανές Πεπερασμένων Καταστάσεων.
- Θεωρία Γραφημάτων.
- Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων.
- Γεννήτριες Συναρτήσεις.

Αξιολόγηση

Πρόοδος

- Η πρόοδος δίνει το 20% του τελικού βαθμού.

Τελική γραπτή εξέταση

- Δίνει το υπόλοιπο 80% του τελικού βαθμού.

Πρέπει να έχετε ≥5 στη τελική γραπτή εξέταση!

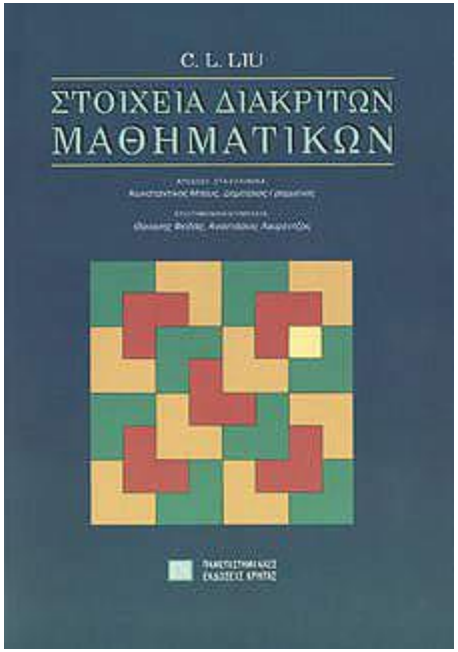
Αν βαθμός τελικής εξέτασης ≥ 5 τότε

Τελικός βαθμός = 0.2 × (βαθμός προόδου) +

0.8 × (βαθμός τελικής εξέτασης)

Αν τελικός βαθμός ≥ 5 τότε περάσατε!

Βιβλία

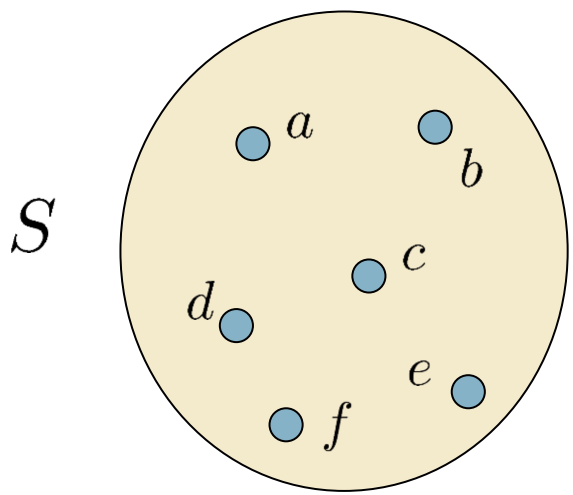

C. L. LIU
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ


ΔΙΑΚΡΙΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κεφάλαιο 1ο
Σύνολα
Σχέσεις
Συναρτήσεις

Σύνολα (1/30)

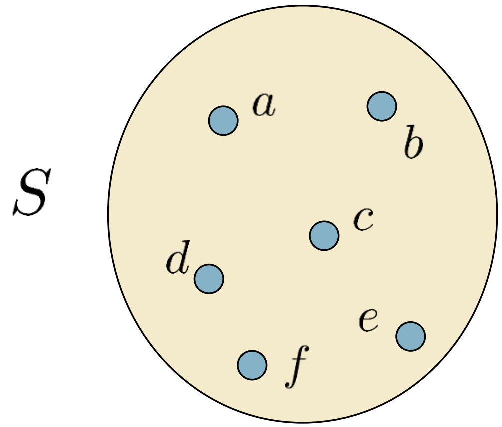
- Σύνολο = συλλογή ξεχωριστών αντικειμένων.



$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Σύνολα (2/30)

- Σύνολο = συλλογή ξεχωριστών αντικειμένων.



$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

στοιχεία ή *μέλη* συνόλου

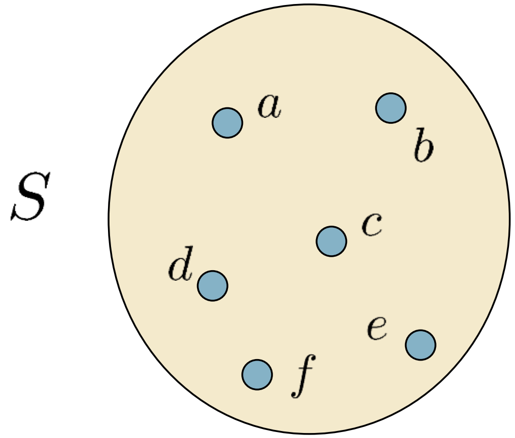
⇨ $S = \emptyset (= \{\})$: κενό σύνολο

⇨ $x \in S$: το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο S

⇨ $x \notin S$: το στοιχείο x δεν ανήκει στο σύνολο S

Σύνολα (3/30)

- Ένα σύνολο περιέχει μόνο διακεκριμένα αντικείμενα.



$S = \{a, a, b, b, c, d, e, e, f\}$

πλεονάζουσα αναπαράσταση του

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$

Στα στοιχεία ενός συνόλου δεν υπάρχει διάταξη

$\{a, b, c, d, e, f\}$ και $\{b, f, d, e, c, a\}$ αναπαριστούν το ίδιο σύνολο

Σύνολα (4/30)

- Εκτός από την αναλυτική καταγραφή των στοιχείων ενός συνόλου, π.χ. {2,4,6,8,10}, μπορούμε να περιγράψουμε ένα σύνολο με βάση κοινές ιδιότητες που μπορεί να έχουν τα στοιχεία του.
  - Το σύνολο S={2,4,6,8,10} μπορεί να περιγραφεί ως

    S= {x | το x είναι ένας θετικός άρτιος ακέραιος όχι μεγαλύτερος του 10}.

  Γενικά **S= {x | το x έχει κάποιες ιδιότητες}.**
  - Μπορεί όμως τα στοιχεία ενός συνόλου να μην έχουν κοινές ιδιότητες

    {Κοζάνη, 30221, Barcelona, -2}.

Σύνολα (5/30)

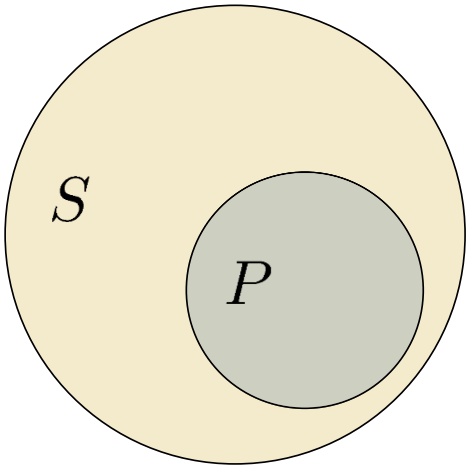
- Ένα σύνολο μπορεί να έχει ως στοιχεία άλλα σύνολα

$\{\{a,b,c\},d\}$

$\{\{a,b,c\},d,\{e\},\{\ \}\}$

$\{\{\{a,b\},c\},e\}$

Σύνολα (6/30)



⇨ $P \subseteq S$: το P υποσύνολο του S

Ισχύει για κάθε σύνολο P :

$$\emptyset \subseteq P \text{ και } P \subseteq P$$

⇨ $S \supseteq P$: το S υπερσύνολο του P

⇨ $P \subset S$: το P γνήσιο υποσύνολο του S

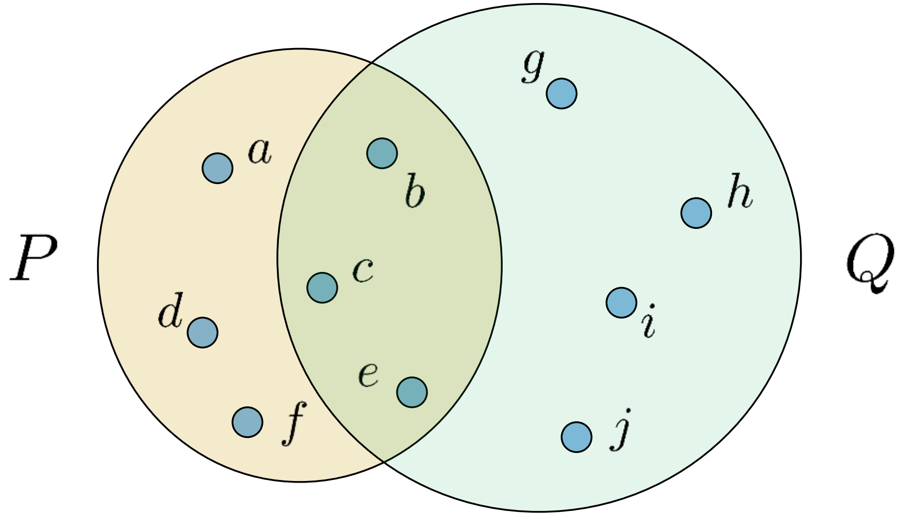
δηλαδή $P \subseteq S$ και υπάρχει στοιχείο $x \in S$ τέτοιο ώστε $x \notin P$

⇨ $S \supset P$: το S γνήσιο υπερσύνολο του P

⇨ $P = S$: ίσα σύνολα, δηλαδή $P \subseteq S$ και $S \subseteq P$

Σύνολα (7/30)

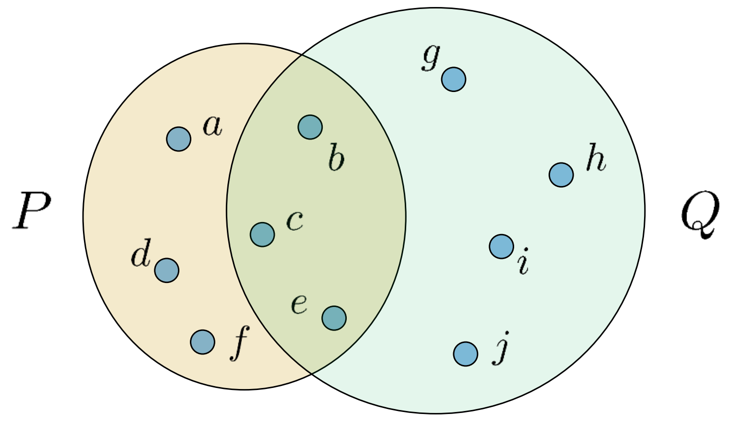
- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

Σύνολα (8/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

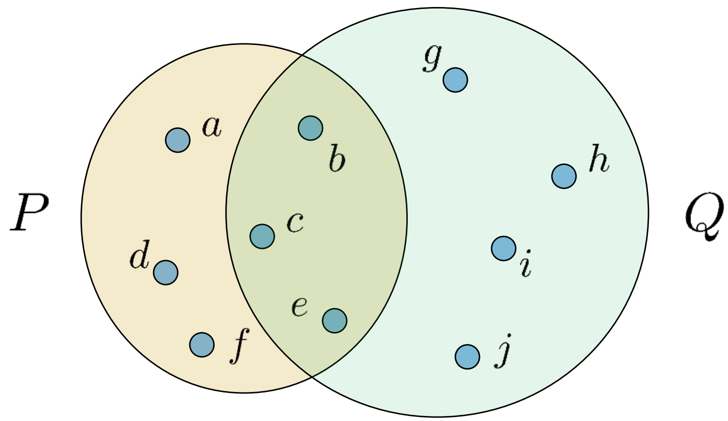
Ένωση $P \cup Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$x \in P \cup Q$ αν $x \in P$ ή/και $x \in Q$

⇨ $Q \subseteq P \Rightarrow P \cup Q = P$ π.χ. $P \cup \emptyset = P$

Σύνολα (9/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$P = \{a, b, c, d, e, f\}$ $\quad$ $Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$

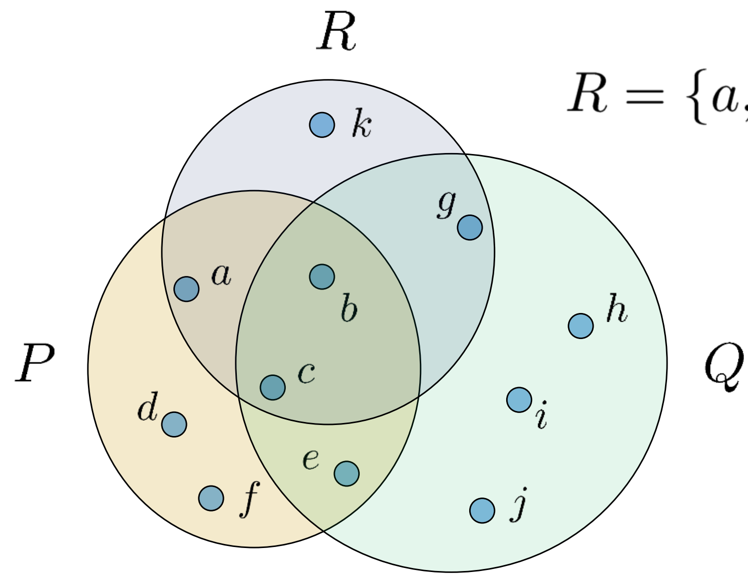
Τομή $\quad P \cap Q = \{b, c, e\}$

$x \in P \cap Q$ αν $x \in P$ και $x \in Q$

⇨ $Q \subseteq P \Rightarrow P \cap Q = Q$ $\quad$ π.χ. $P \cap \emptyset = \emptyset$

Σύνολα (10/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



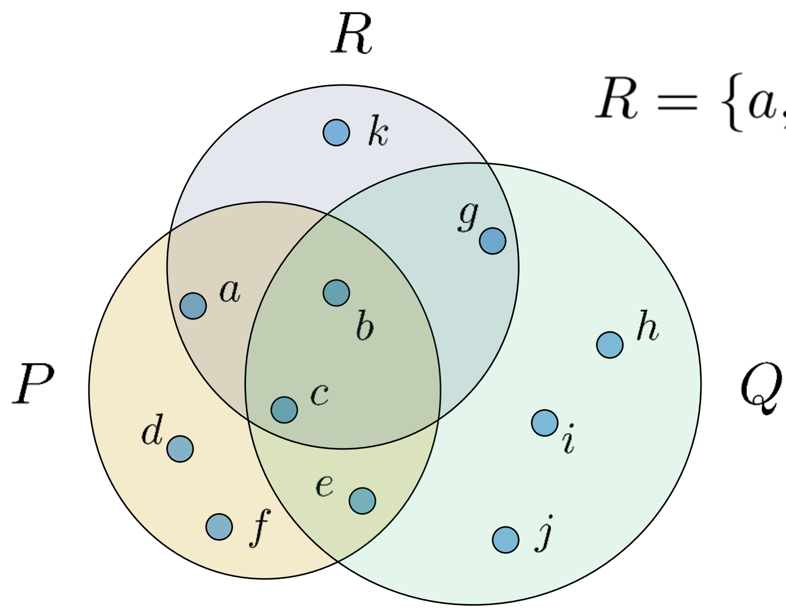
$$R = \{a, b, c, g, k\}$$

$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

$$(P \cup Q) \cup R = P \cup Q \cup R = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

Σύνολα (11/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



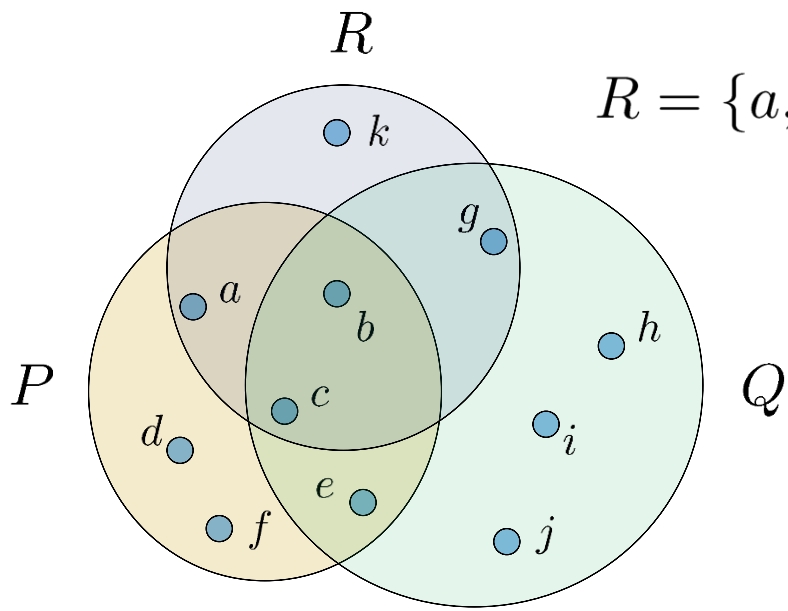
$$R = \{a, b, c, g, k\}$$

$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

$$(P \cap Q) \cap R = P \cap Q \cap R = \{b, c\}$$

Σύνολα (12/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



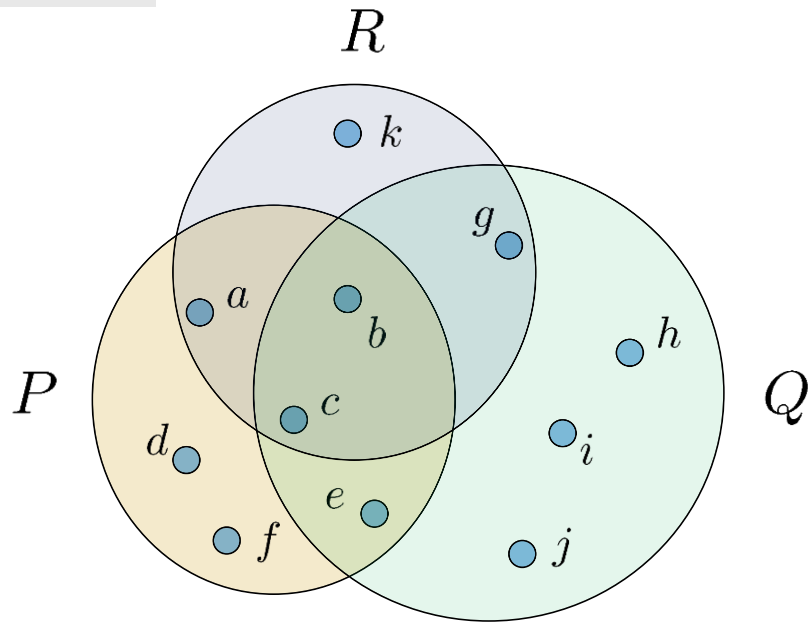
$$R = \{a, b, c, g, k\}$$

$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q) = \{a, b, c, g\}$$

Σύνολα (13/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**

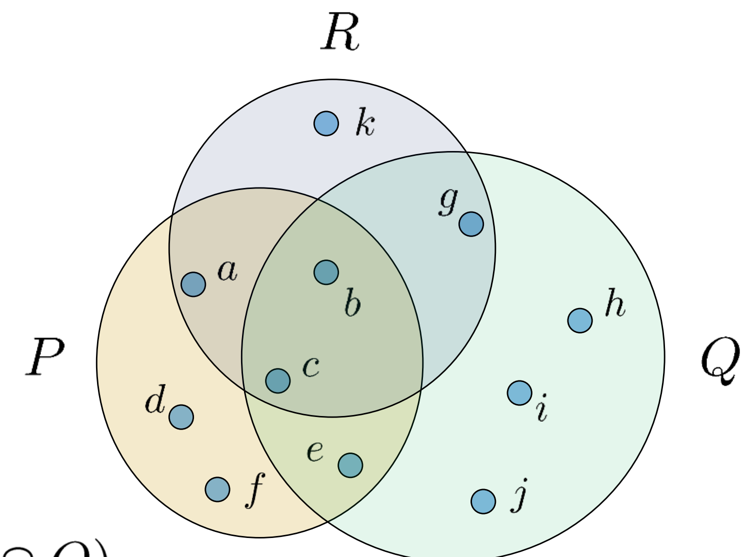


$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

Σύνολα (14/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



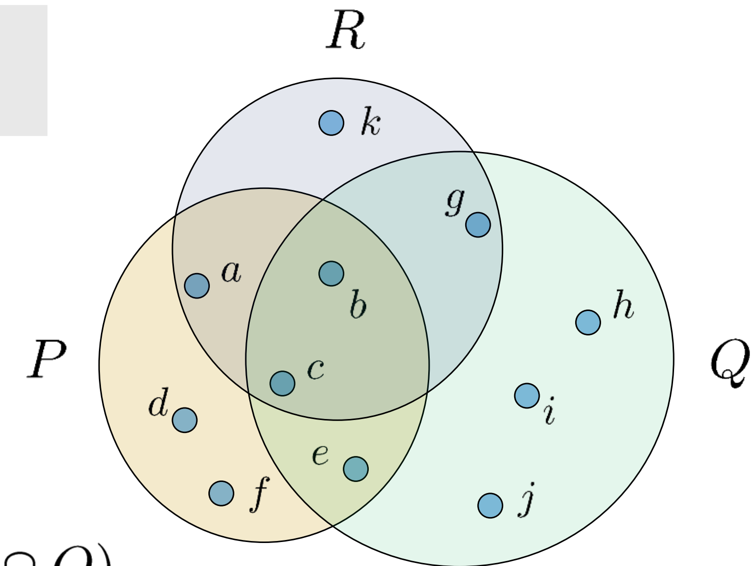
$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

Αν $x \in R \cap (P \cup Q)$ τότε $x \in R$ και $x \in (P \cup Q)$

Σύνολα (15/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

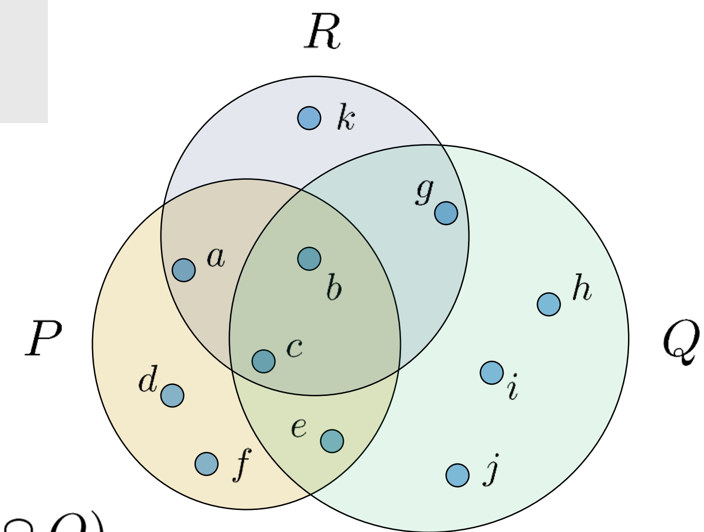
Απόδειξη

Αν $x \in R \cap (P \cup Q)$ τότε $x \in R$ και $x \in (P \cup Q)$

$x \in P$ ή $x \in Q$

Σύνολα (16/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

Αν $x \in R \cap (P \cup Q)$ τότε $x \in R$ και $x \in (P \cup Q)$

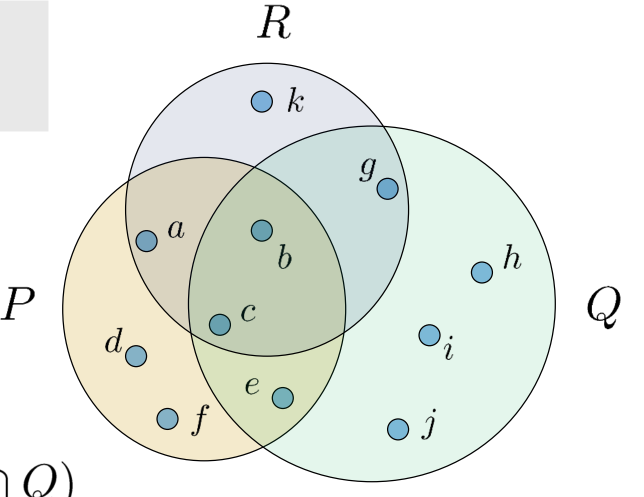
$x \in P$ ή $x \in Q$

Επομένως $x \in R \cap P$ ή $x \in R \cap Q$

$$\Rightarrow x \in (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Σύνολα (17/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

Αν $x \in R \cap (P \cup Q)$ τότε $x \in R$ και $x \in (P \cup Q)$

$x \in P$ ή $x \in Q$

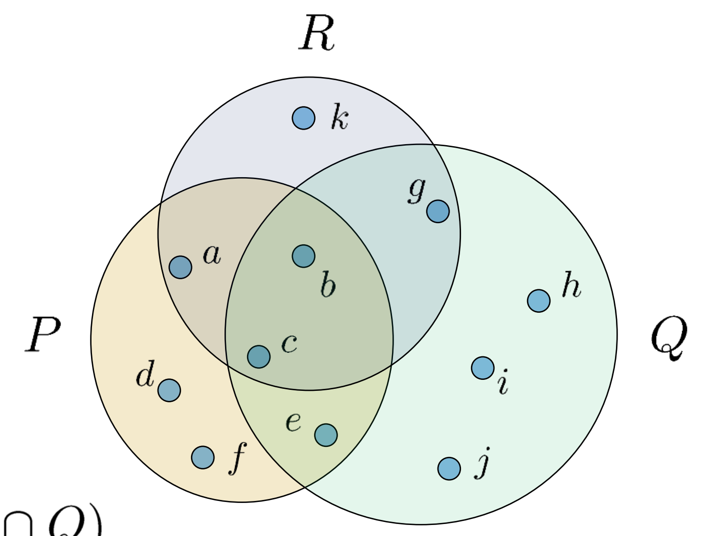
Επομένως $x \in R \cap P$ ή $x \in R \cap Q$

$$\Rightarrow x \in (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Συνεπάγεται $R \cap (P \cup Q) \subseteq (R \cap P) \cup (R \cap Q)$

Σύνολα (18/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

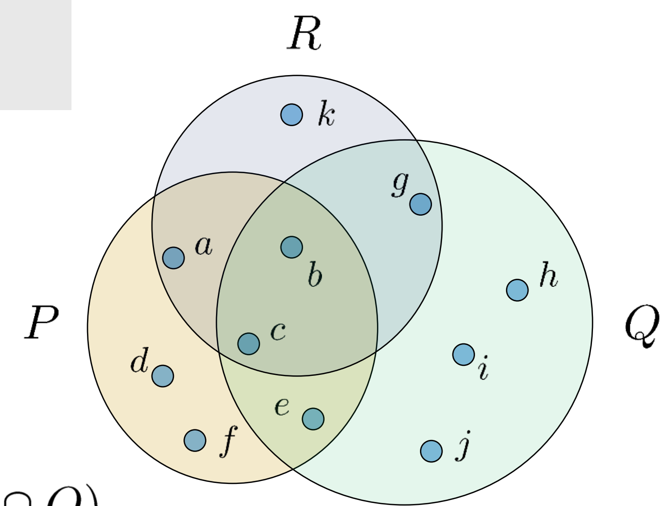
Αν $x \in (R \cap P) \cup (R \cap Q)$ τότε

$x \in R \cap P \Rightarrow \; x \in R$ και $x \in P$

ή $x \in R \cap Q \Rightarrow \; x \in R$ και $x \in Q$

Σύνολα (19/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

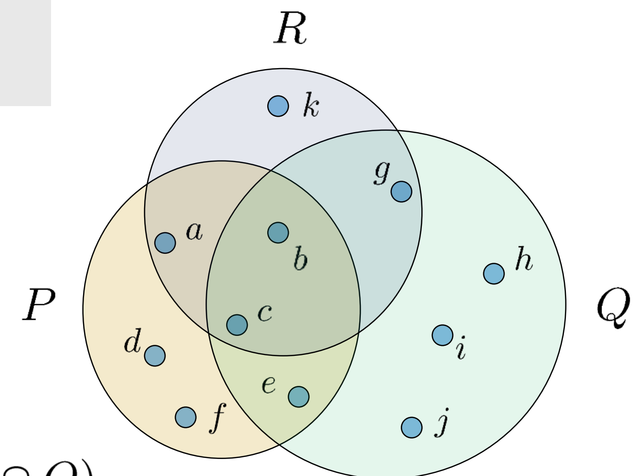
Αν $x \in (R \cap P) \cup (R \cap Q)$ τότε

$$\left.\begin{array}{ll} & x \in R \cap P \Rightarrow \; x \in R \text{ και } x \in P \\ \text{ή} & x \in R \cap Q \Rightarrow \; x \in R \text{ και } x \in Q \end{array}\right\} \begin{array}{c} x \in R \\ \text{και } x \in (P \cup Q) \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in R \cap (P \cup Q)$$

Σύνολα (20/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$R \cap (P \cup Q) = (R \cap P) \cup (R \cap Q)$$

Απόδειξη

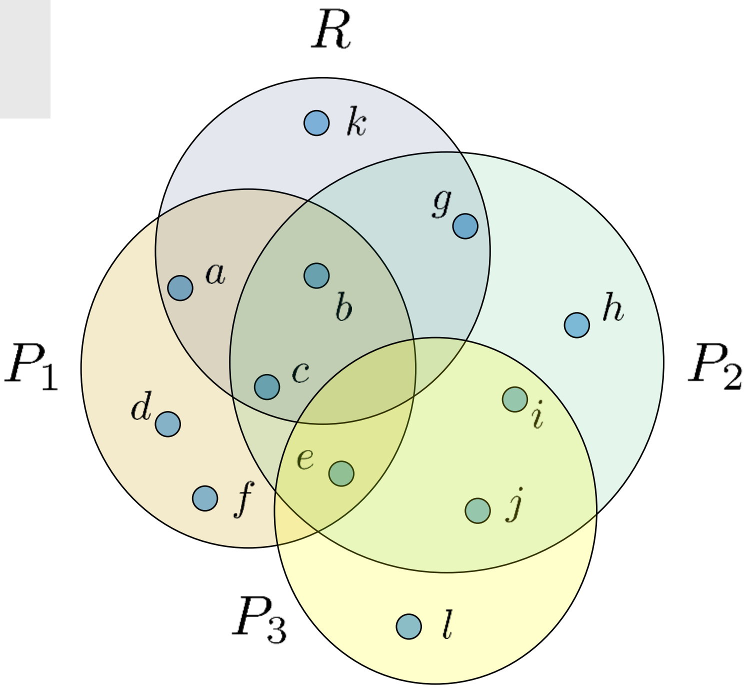
Αν $x \in (R \cap P) \cup (R \cap Q)$ τότε

$$\left.\begin{array}{lll} & x \in R \cap P \Rightarrow x \in R \text{ και } x \in P \\ \text{ή} & x \in R \cap Q \Rightarrow x \in R \text{ και } x \in Q \end{array}\right\} \Rightarrow x \in R \cap (P \cup Q)$$

Συνεπάγεται $R \cap (P \cup Q) \supseteq (R \cap P) \cup (R \cap Q)$

Σύνολα (21/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



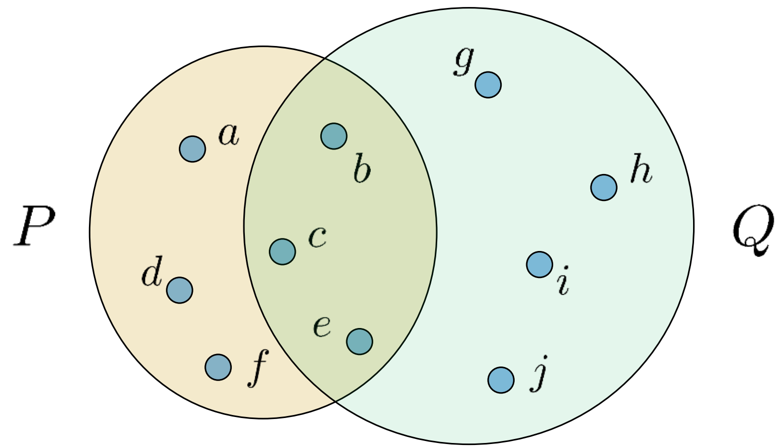
Γενικά

$$R \cap (P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k) = (R \cap P_1) \cup (R \cap P_2) \cup \ldots \cup (R \cap P_k)$$

$$R \cup (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k) = (R \cup P_1) \cap (R \cup P_2) \cap \ldots \cap (R \cup P_k)$$

Σύνολα (22/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



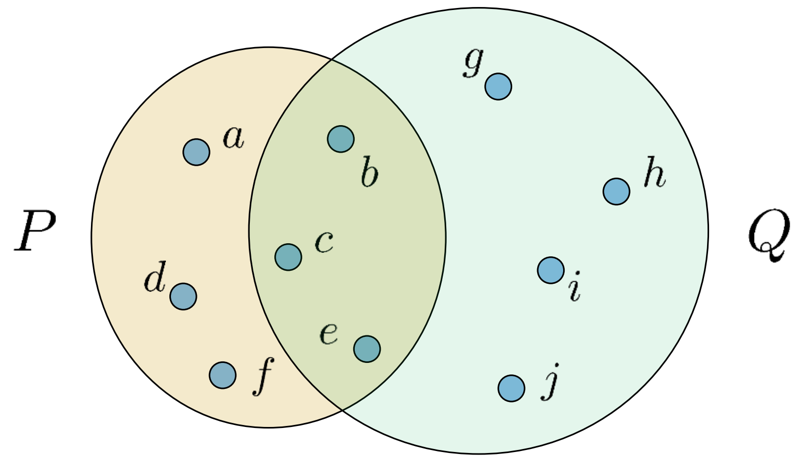
$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

Διαφορά $P - Q = \{a, d, f\}$

$x \in P - Q$ αν $x \in P$ και $x \notin Q$

Σύνολα (23/30)

- **Συνδυασμοί συνόλων**



$$P = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad Q = \{b, c, e, g, h, i, j\}$$

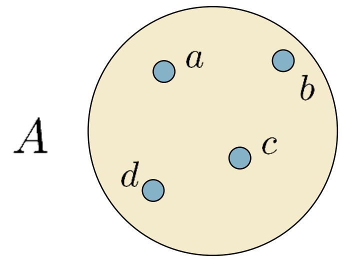
Συμμετρική Διαφορά

$$P \oplus Q = (P \cup Q) - (P \cap Q) = \{a, d, f, g, h, i, j\}$$

$x \in P \oplus Q$ αν $x \in P - Q$ ή $x \in Q - P$

Σύνολα (24/30)

- **Δυναμοσύνολο**



$\mathcal{P}(A) =$ σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A

$$A = \{a, b, c, d\} \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) = \{\; &\emptyset, \\ &\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ &\{a, b, c, d\} \;\}\end{aligned}$$

Σύνολα (25/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

Σύνολα (26/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

π.χ. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ σε 3 γύρους :

Σύνολα (27/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

π.χ. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ σε 3 γύρους :

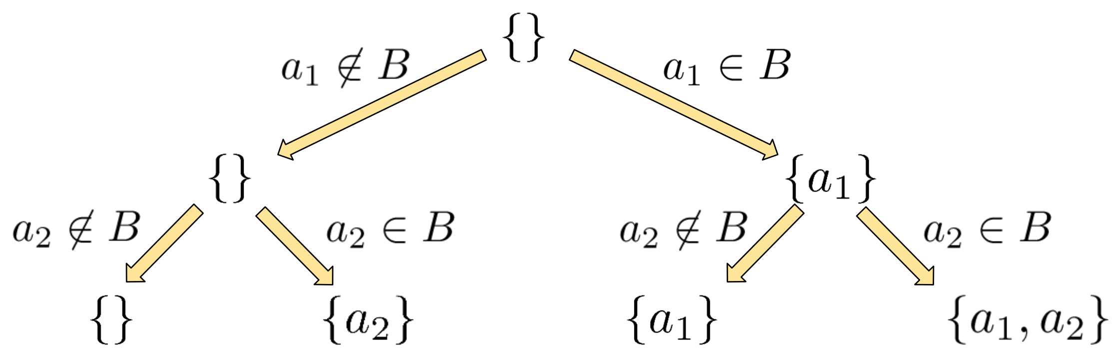
$$
\begin{tikzcd}
 & \{\} \arrow[dl, "a_1 \notin B"'] \arrow[dr, "a_1 \in B"] & \\
\{\} & & \{a_1\}
\end{tikzcd}
$$

Σύνολα (28/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

π.χ. $A = \{a_1, a_2, a_3\}.$

Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ σε 3 γύρους :

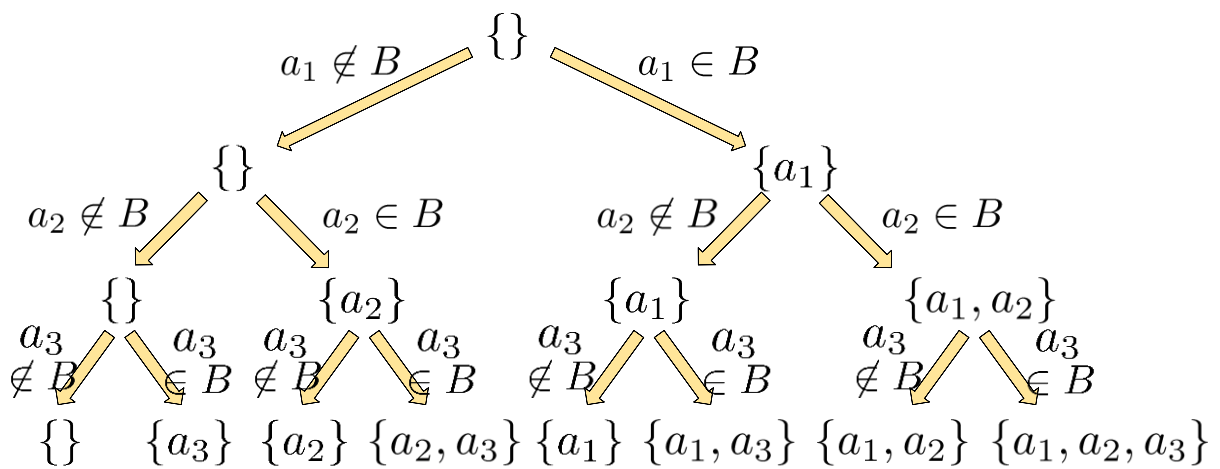


Σύνολα (29/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

π.χ. $A = \{a_1, a_2, a_3\}.$

Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ σε 3 γύρους :

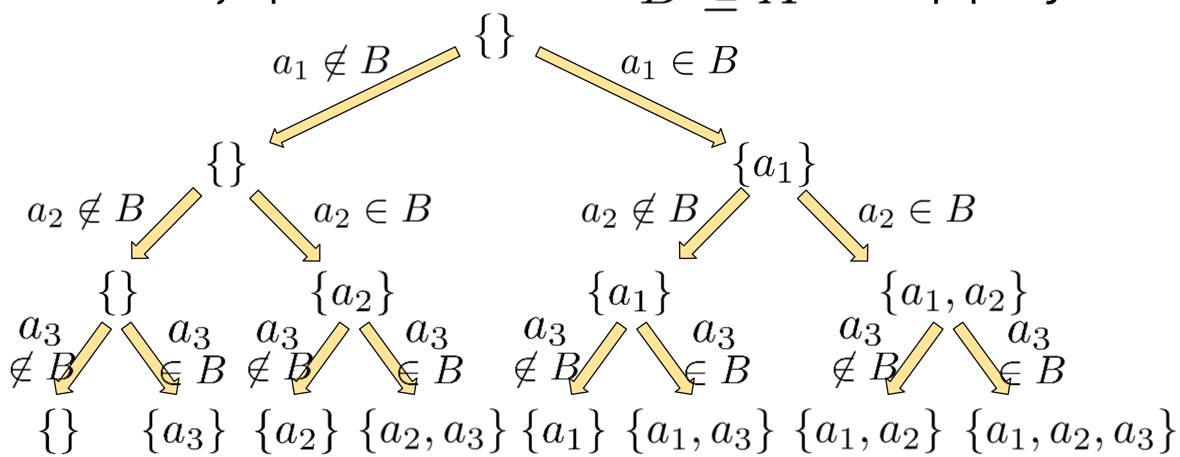


Σύνολα (30/30)

- Πόσα σύνολα περιέχει το P(A) ;

π.χ. $A = \{a_1, a_2, a_3\}.$

Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ σε 3 γύρους :



Σε κάθε γύρο διπλασιάζονται τα δυνατά αποτελέσματα $\Rightarrow$ 2^3 υποσύνολα

Μαθηματική Επαγωγή (1/4)

- Θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό n.

- Μια επαγωγική απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n=n_0$.
2. Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n_0 \leq n \leq k$.
3. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση του βήματος 2, αποδεικνύουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = k+1$.

Μαθηματική Επαγωγή (2/4)

- Ας δείξουμε ότι

$$1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$$

- Ας δείξουμε ότι

$$n < 2^n$$

- Ας δείξουμε ότι

$$2^n < n! \qquad \text{για } n \geq 4$$

Τρεις φίλοι θέλουν να μοιράσουν μεταξύ τους n^3-n γραμματόσημα. Αποδείξτε ότι δε χρειάζεται να τσακωθούν στη μοιρασιά

Μαθηματική Επαγωγή (3/4)

Να βρείτε το **λάθος** στον παρακάτω επαγωγικό συλλογισμό.

Θδο για κάθε n ≥ 1, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

- Βάση: Ισχύει για n = 1.
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 1, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
- Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
  - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

$$\{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, \alpha_{n+1}\} \qquad \{\alpha_1, \overbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

  - Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!

Μαθηματική Επαγωγή (4/4)

Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.

- Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
- Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

$$\{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, \alpha_{n+1}\} \qquad \{\alpha_1, \overbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

- Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο Α έχουν ίδιο χρώμα!

Για n = 1, τα δύο σύνολα **δεν** έχουν **κοινά** στοιχεία!

Εδώ ισχύει ότι P(1) και ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$ για κάθε $n \geq 2$.

- Δεν ισχύει ότι $P(1) \rightarrow P(2)$: αυτό καθιστά συμπέρασμα αβάσιμο!

Παράδειγμα - Σύνολα (1/9)

Πόσα σύνολα περιέχει το $\mathcal{P}(A)$;

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν 2^n υποσύνολα του A

Παράδειγμα - Σύνολα (2/9)

Πόσα σύνολα περιέχει το $\mathcal{P}(A)$;

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν 2^n υποσύνολα του A

- **Βάση της επαγωγής**

Παράδειγμα - Σύνολα (3/9)

Πόσα σύνολα περιέχει το $\mathcal{P}(A)$;

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν 2^n υποσύνολα του A

- **Βάση της επαγωγής**

  Επιλέγουμε $n = 0.$ Τότε $A = \{\}$ και επομένως υπάρχει μόνο ένα υποσύνολο του $A.$

Παράδειγμα - Σύνολα (4/9)

Πόσα σύνολα περιέχει το $\mathcal{P}(A)$;

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν 2^n υποσύνολα του A

- **Βάση της επαγωγής**

  Επιλέγουμε $n = 0.$ Τότε $A = \{\}$ και επομένως υπάρχει μόνο ένα υποσύνολο του $A.$

- **Επαγωγική υπόθεση**

  Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα.

Παράδειγμα - Σύνολα (5/9)

Πόσα σύνολα περιέχει το $\mathcal{P}(A)$;

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν 2^n υποσύνολα του A

- **Βάση της επαγωγής**

  Επιλέγουμε $n = 0.$ Τότε $A = \{\}$ και επομένως υπάρχει μόνο ένα υποσύνολο του $A.$

- **Επαγωγική υπόθεση**

  Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα.

- **Επαγωγικό βήμα**

  Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}.$

  Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν 2^{k+1} υποσύνολα του $A.$

Παράδειγμα - Σύνολα (6/9)

- **Επαγωγικό βήμα**

  Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}.$

  Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν 2^{k+1} υποσύνολα του $A.$

Έστω υποσύνολο $B \subseteq A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$

Παράδειγμα - Σύνολα (7/9)

- **Επαγωγικό βήμα**

  Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}.$

  Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν 2^{k+1} υποσύνολα του $A.$

Έστω υποσύνολο $B \subseteq A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "\text{δε συμπεριλαμβάνουμε το } a_{k+1}"'] \arrow[dr, "\text{συμπεριλαμβάνουμε το } a_{k+1}"] & \\
B & & B \cup \{a_{k+1}\}
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα - Σύνολα (8/9)

- **Επαγωγικό βήμα**

  Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}.$

  Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν 2^{k+1} υποσύνολα του $A.$

Έστω υποσύνολο $B \subseteq A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$

B

δε συμπεριλαμβάνουμε το a_{k+1} → B

συμπεριλαμβάνουμε το a_{k+1} → $B \cup \{a_{k+1}\}$

Έτσι διπλασιάζουμε τον αριθμό των υποσυνόλων.

Παράδειγμα - Σύνολα (9/9)

- **Επαγωγικό βήμα**

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}.$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν 2^{k+1} υποσύνολα του $A.$

Έστω υποσύνολο $B \subseteq A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\text{δε συμπεριλαμβάνουμε το } a_{k+1}"'] \arrow[dr, "\text{συμπεριλαμβάνουμε το } a_{k+1}"] & \\ B & & B \cup \{a_{k+1}\} \end{tikzcd}$$

Έτσι διπλασιάζουμε τον αριθμό των υποσυνόλων.

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν 2^k υποσύνολα του A'.

Συνεπώς έχουμε $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ υποσύνολα του $A.$

Μέγεθος Συνόλου (1/22)

Το μέγεθος ενός **πεπερασμένου** συνόλου είναι ο αριθμός των στοιχείων του .

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Rightarrow |A| = n$$

Τι γίνεται όμως για μη πεπερασμένα («άπειρα») σύνολα;

Μέγεθος Συνόλου (2/22)

Το μέγεθος ενός **πεπερασμένου** συνόλου είναι ο αριθμός των στοιχείων του .

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Rightarrow |A| = n$$

Τι γίνεται όμως για μη πεπερασμένα («άπειρα») σύνολα;

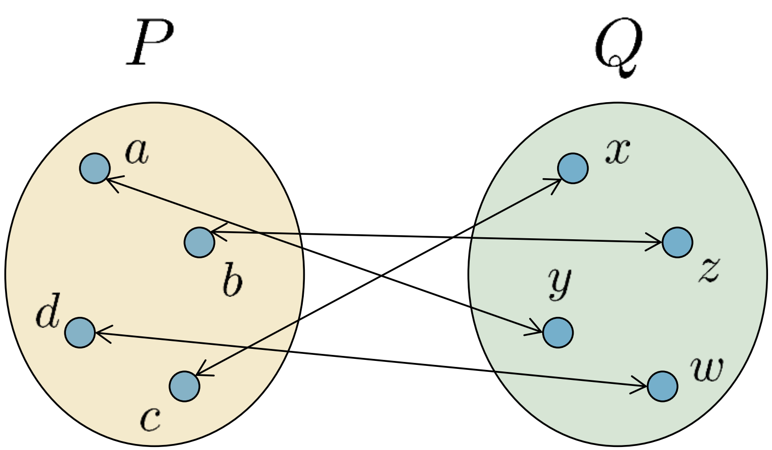
- ορίζουμε την έννοια του μεγέθους με **συγκριτικό** τρόπο

Μέγεθος Συνόλου (3/22)

Ένα-προς-ένα αντιστοιχία

Έστω σύνολα P και $Q.$

Εάν μπορούμε να δημιουργήσουμε ζεύγη (p, q) όπου $p \in P$ και $q \in Q$ έτσι ώστε κάθε $p \in P$ και ομοίως κάθε $q \in Q$ να εμφανίζεται σε **ακριβώς ένα ζεύγος**, τότε έχουμε μία 1-προς-1 αντιστοιχία μεταξύ των P και $Q.$



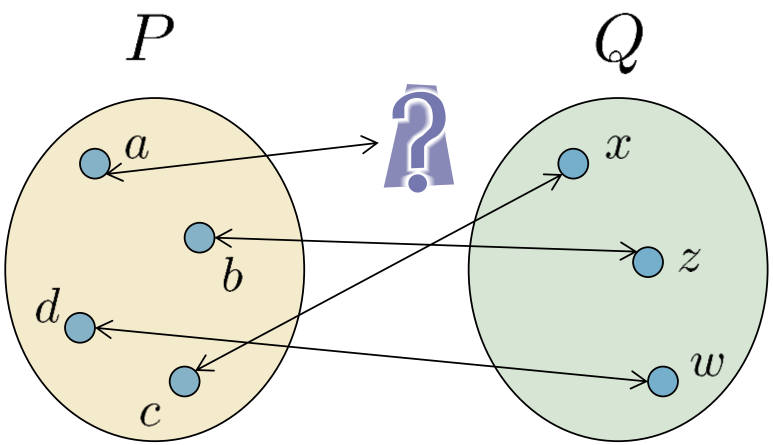
$$(a, y), (b, z), (c, x), (d, w)$$

Μέγεθος Συνόλου (4/22)

Ένα-προς-ένα αντιστοιχία

Έστω σύνολα P και Q.

Εάν μπορούμε να δημιουργήσουμε ζεύγη (p, q) όπου $p \in P$ και $q \in Q$ έτσι ώστε κάθε $p \in P$ και ομοίως κάθε $q \in Q$ να εμφανίζεται σε **ακριβώς ένα ζεύγος**, τότε έχουμε μία 1-προς-1 αντιστοιχία μεταξύ των P και Q.



Μέγεθος Συνόλου (5/22)

Ένα-προς-ένα αντιστοιχία

Έστω σύνολα P και Q.

Εάν μπορούμε να δημιουργήσουμε ζεύγη (p, q) όπου $p \in P$ και $q \in Q$ έτσι ώστε κάθε $p \in P$ και ομοίως κάθε $q \in Q$ να εμφανίζεται σε **ακριβώς ένα ζεύγος**, τότε έχουμε μία 1-προς-1 αντιστοιχία μεταξύ των P και Q.

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Μέγεθος Συνόλου (6/22)

Ένα-προς-ένα αντιστοιχία

Έστω σύνολα P και Q.

Εάν μπορούμε να δημιουργήσουμε ζεύγη (p, q) όπου $p \in P$ και $q \in Q$ έτσι ώστε κάθε $p \in P$ και ομοίως κάθε $q \in Q$ να εμφανίζεται σε **ακριβώς ένα ζεύγος**, τότε έχουμε μία 1-προς-1 αντιστοιχία μεταξύ των P και Q.

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

<u>Παράδειγμα</u> Το σύνολο των μη αρνητικών άρτιων αριθμών $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ είναι αριθμήσιμο. 1-προς-1 αντιστοιχία : $k \leftrightarrow 2k$

Μέγεθος Συνόλου (7/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε **όλα** τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

Μέγεθος Συνόλου (8/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε **όλα** τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

<u>Παράδειγμα</u> Το σύνολο των ακεραίων $\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ είναι αριθμήσιμο.

Μέγεθος Συνόλου (9/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε **όλα** τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

<u>Παράδειγμα</u> Το σύνολο των ακεραίων $\mathbf{Z} = \{\ldots - 3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ είναι αριθμήσιμο. Μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του ως

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Μπορείτε να βρείτε μια 1-προς-1 αντιστοιχία με το N ?

Μέγεθος Συνόλου (10/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

<u>Παράδειγμα</u> Το σύνολο των ρητών

$$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}^*\}$$

είναι αριθμήσιμο.

Μέγεθος Συνόλου (11/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

<u>Παράδειγμα</u> Το σύνολο των ρητών

$$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}^*\}$$

είναι αριθμήσιμο.

1/1	1/2 →	1/3	1/4 →	1/5	1/6 →	1/7	1/8 →	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Μέγεθος Συνόλου (12/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

Ιδιότητα : Η ένωση ενός πεπερασμένου ή αριθμήσιμα απείρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Μέγεθος Συνόλου (13/22)

Αριθμήσιμο σύνολο

Ένα σύνολο P είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει 1-προς-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

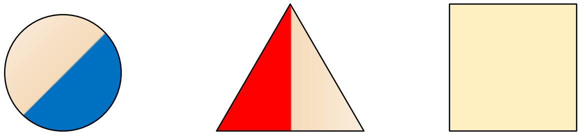
Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο. (Γιατί;)

Ιδιότητα : Η ένωση ενός πεπερασμένου ή αριθμήσιμα απείρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ αριθμήσιμο;

Μέγεθος Συνόλου (14/22)

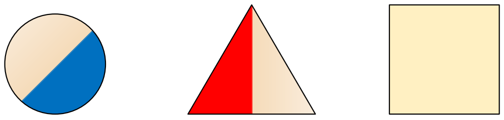
- **Διαγωνιοποίηση:**
  - Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο n αντικειμένων με n ιδιότητες.
  - Π.χ. 3 γεωμετρικά αντικείμενα με 3 δυνατά χρώματα.



	Κύκλος	Τρίγωνο	Τετράγωνο
Άσπρο	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Μπλε	ΝΑΙ	ΌΧΙ	ΌΧΙ
Κόκκινο	ΌΧΙ	ΝΑΙ	ΌΧΙ

Μέγεθος Συνόλου (15/22)

- **Διαγωνιοποίηση:**
  - Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο n αντικειμένων με n ιδιότητες.
  - Π.χ. 3 γεωμετρικά αντικείμενα με 3 δυνατά χρώματα.

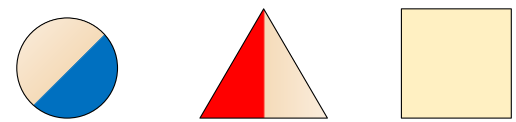


	Κύκλος	Τρίγωνο	Τετράγωνο
Άσπρο	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Μπλε	ΝΑΙ	ΌΧΙ	ΌΧΙ
Κόκκινο	ΌΧΙ	ΝΑΙ	ΌΧΙ

Υπάρχει αντικείμενο που έχει και μπλε και κόκκινο και όχι άσπρο;

Μέγεθος Συνόλου (16/22)

- **Διαγωνιοποίηση:**
  - Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο n αντικειμένων με n ιδιότητες.
  - Π.χ. 3 γεωμετρικά αντικείμενα με 3 δυνατά χρώματα.



	Κύκλος	Τρίγωνο	Τετράγωνο
Άσπρο	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Μπλε	ΝΑΙ	ΌΧΙ	ΌΧΙ
Κόκκινο	ΌΧΙ	ΝΑΙ	ΌΧΙ

Υπάρχει αντικείμενο που έχει και μπλε και κόκκινο και όχι άσπρο;

Μέγεθος Συνόλου (17/22)

Διαγωνιοποίηση

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο n αντικειμένων με n ιδιότητες.

Γενικά για να αποδείξουμε ότι το σύνολο μας **δεν περιλαμβάνει** ένα αντικείμενο με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες δείχνουμε ότι διαφέρει στην πρώτη ιδιότητα με το 1ο αντικείμενο, στη δεύτερη ιδιότητα με το 2ο αντικείμενο κ.ο.κ.

Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ αριθμήσιμο;

- θα δείξουμε με χρήση διαγωνιοποίησης ότι το $\mathbf{R}$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο

Μέγεθος Συνόλου (18/22)

Διαγωνιοποίηση

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο n αντικειμένων με n ιδιότητες.

Γενικά για να αποδείξουμε ότι το σύνολο μας **δεν περιλαμβάνει** ένα αντικείμενο με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες δείχνουμε ότι διαφέρει στην πρώτη ιδιότητα με το 1ο αντικείμενο, στη δεύτερη ιδιότητα με το 2ο αντικείμενο κ.ο.κ.

Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ αριθμήσιμο;

- θα δείξουμε με χρήση διαγωνιοποίησης ότι το $\mathbf{R}$ είναι μη αριθμήσιμα άπειρο

Απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο** : θα υποθέσουμε ότι το $\mathbf{R}$ είναι αριθμήσιμο και θα καταλήξουμε σε κάποια αντίφαση.

Μέγεθος Συνόλου (19/22)

Απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο** : θα υποθέσουμε ότι το $\mathbf{R}$ είναι αριθμήσιμο και θα καταλήξουμε σε κάποια αντίφαση.

Μας αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αν είναι τότε μπορούμε να καταγράψουμε τα στοιχεία του :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & = & 0 & . & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
\alpha_2 & = & 0 & . & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
\alpha_3 & = & 0 & . & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
 & & & & & \vdots & & \\
\alpha_k & = & 0 & . & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots \\
 & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Μέγεθος Συνόλου (20/22)

Απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο** : θα υποθέσουμε ότι το $\mathbf{R}$ είναι αριθμήσιμο και θα καταλήξουμε σε κάποια αντίφαση.

Μας αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αν είναι τότε μπορούμε να καταγράψουμε τα στοιχεία του :

$$
\begin{array}{cccccccc}
\alpha_1 & = & 0 & . & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
\alpha_2 & = & 0 & . & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\
\alpha_3 & = & 0 & . & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\
 & & & & & \vdots & & \\
\alpha_k & = & 0 & . & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots \\
 & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Θεωρούμε τον αριθμό

$$\beta = 0 \, . \, b_1 \, b_2 \, b_3 \, \dots$$

όπου $b_i = 1$ αν $a_{ii} = 9$

$b_i = 9 - a_{ii}$ αν $a_{ii} \in \{0, 1, \dots, 8\}$

Μέγεθος Συνόλου (21/22)

Απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο** : θα υποθέσουμε ότι το $\mathbf{R}$ είναι αριθμήσιμο και θα καταλήξουμε σε κάποια αντίφαση.

Μας αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αν είναι τότε μπορούμε να καταγράψουμε τα στοιχεία του :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & = & 0 & . & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
\alpha_2 & = & 0 & . & a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots \\
\alpha_3 & = & 0 & . & a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots \\
 & & & & & \vdots & & \\
\alpha_k & = & 0 & . & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots \\
 & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Θεωρούμε τον αριθμό

$$\beta = 0 \,.\, b_1\, b_2\, b_3\, \dots$$

όπου $b_i = 1$ αν $a_{ii} = 9$

$b_i = 9 - a_{ii}$ αν $a_{ii} \in \{0, 1, \dots, 8\}$

Έχουμε $b_i \neq a_{ii}$ για $i = 1, 2, 3, \dots$

Μέγεθος Συνόλου (22/22)

Απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο** : θα υποθέσουμε ότι το $\mathbf{R}$ είναι αριθμήσιμο και θα καταλήξουμε σε κάποια αντίφαση.

Μας αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αν είναι τότε μπορούμε να καταγράψουμε τα στοιχεία του :

$$\begin{array}{lcccllll}
\alpha_1 & = & 0 & . & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
\alpha_2 & = & 0 & . & a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \ldots \\
\alpha_3 & = & 0 & . & a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \ldots \\
 & & & & & \vdots & & \\
\alpha_k & = & 0 & . & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots \\
 & & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Θεωρούμε τον αριθμό

$$\beta = 0 \,.\, b_1 \; b_2 \; b_3 \; \ldots$$

όπου $b_i = 1$ αν $a_{ii} = 9$

$b_i = 9 - a_{ii}$ αν $a_{ii} \in \{0, 1, \ldots, 8\}$

Έχουμε $b_i \neq a_{ii}$ για $i = 1, 2, 3, \ldots$

Όμως $\beta \in (0,1)$ ΑΤΟΠΟ!

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Στεργίου Κωνσταντίνος. «Διακριτά Μαθηματικά». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE257/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.