Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 6: Προτασιακός Λογισμός

Αν. Καθηγητής Κ. Στεργίου

e-mail: kstergiou@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Μαθηματική Λογική.
- Προτασιακός Λογισμός:
  - Απλές προτάσεις.
  - Τελεστές.
  - Σύνθετες προτάσεις.
  - Παραδείγματα.
  - Λογική Ισοδυναμία.
  - Ικανοποιησιμότητα.

Στόχοι

- Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική και τον Προτασιακό Λογισμό.
- Κατανόηση της χρήσης των προτασιακών τελεστών και των τρόπων κατασκευής σύνθετων προτάσεων.
- Περιγραφή των εννοιών της λογικής ισοδυναμίας και της ικανοποιησιμότητας.

Μαθηματική Λογική

- Η **Μαθηματική Λογική** είναι ένα εργαλείο που μας βοηθά να χειριστούμε *σύνθετες* προτάσεις.

Περιλαμβάνει:

  – Μία **τυπική γλώσσα** για να τις εκφράζουμε.

  – Μία **μεθοδολογία** για να αποφασίζουμε σχετικά με το αν είναι αληθείς ή ψευδείς.

- **Αποτελεί το θεμέλιο της έκφρασης τυπικών αποδείξεων σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών!**

Προτασιακός Λογισμός (1/11)

- Ο *Προτασιακός λογισμός* είναι η λογική των σύνθετων προτάσεων οι οποίες δημιουργούνται από απλούστερες, χρησιμοποιώντας *λογικές πράξεις.*
- Μερικές άμεσες εφαρμογές στους υπολογιστές:
  - Σχεδιασμός ψηφιακών κυκλωμάτων.
  - Έκφραση συνθηκών σε προγράμματα.
  - Ερωτήσεις σε βάσεις δεδομένων και μηχανές αναζήτησης.

Προτασιακός Λογισμός (2/11)

- Δηλωτική) πρόταση: δηλώνει ένα γεγονός – η πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής (T) είτε ψευδής (F).
- Μία πρόταση είναι απλά μία δήλωση με κάποια οριστική σημασία και η οποία μπορεί να είναι είτε αληθής (**T**) είτε ψευδής (**F**)
  - Δεν είναι **ποτέ** και τα δύο, **ούτε** κάπου “ανάμεσα”
  - Ωστόσο, η τιμή αληθείας της δεν είναι απαραίτητο να μας είναι γνωστή…

Προτασιακός Λογισμός (3/11)

(Δηλωτική) πρόταση : δηλώνει ένα γεγονός – η πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής (T) είτε ψευδής (F)

αύριο θα χιονίσει

~~ίσως αύριο βρέξει~~

Το Παν. Δυτ. Μακ. Δεν θα καταργηθεί

~~Πρέπει το Παν. Δυτ. Μακ. να καταργηθεί;~~

Πηγή: [http: //www.ipaideia.gr/k-arvanitopoulos-strevloseis-stin-pistopoiisi-kai-stin-askisi-ton-texnikon-epaggelmaton.htm](http://www.ipaideia.gr/k-arvanitopoulos-strevloseis-stin-pistopoiisi-kai-stin-askisi-ton-texnikon-epaggelmaton.htm)

Προτάσεις στον Προτασιακό Λογισμό (1/2)

- Ατομικές: *p*, *q*, *r*, …
  - (πχ p = “Ονομάζομαι Κώστας”).
- Σύνθετες: χτίζονται από τις ατομικές προτάσεις χρησιμοποιώντας *λογικούς τελεστές.*
  - (π.χ., “Ονομάζομαι Κώστας **ΚΑΙ** διδάσκω Διακριτά Μαθηματικά”).
- Ο προτασιακός λογισμός προσφέρει ορισμούς γι’ αυτούς τους τελεστές και επομένως για το “τι σημαίνουν” οι σύνθετες προτάσεις που δημιουργούνται με τη χρήση τους.

Προτάσεις στον Προτασιακό Λογισμό (2/2)

- Ένας *τελεστής* συνδυάζει *n* το πλήθος *εκφράσεις* σε μία μεγαλύτερη έκφραση:
  - *π.χ.*, “+” στις αριθμητικές εκφράσεις.
- *Οι μοναδιαίοι τελεστές* έχουν 1 όρισμα (*π.χ.*, −3).
- *Οι δυαδικοί τελεστές* έχουν 2 ορίσματα (*π.χ.*, 3+4).
- …
- *Οι προτασιακοί τελεστές* (*Boolean* operators) εφαρμόζονται σε λογικές προτάσεις και όχι σε αριθμητικές εκφράσεις.

Προτασιακός Λογισμός (4/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

διάζευξη $p \vee q$

είναι αληθής όταν τουλάχιστον μία από τις p και q είναι αληθής

π.χ. «αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει»

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Εννοούμε ή/και στα ελληνικά

Προτασιακός Λογισμός (5/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

σύζευξη $p \wedge q$

είναι αληθής όταν και η p και η q είναι αληθής

π.χ. «αύριο θα βρέξει και θα έχει κρύο»

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός (6/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

άρνηση $\overline{p}$

είναι αληθής όταν η p είναι ψευδής

π.χ. $p =$ «αύριο θα βρέξει»

$\overline{p} =$ «αύριο δε θα βρέξει»

p	$\overline{p}$
F	T
T	F

Προτασιακός Λογισμός (7/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

συνεπαγωγή $p \to q$

είναι αληθής εάν η q είναι αληθής ή εάν p και q είναι ψευδείς

π.χ. $p =$ «αύριο θα έχει καλό καιρό»

$q =$ «αύριο θα πάμε εκδρομή»

$p \to q =$ «αν αύριο έχει καλό καιρό τότε θα πάμε εκδρομή»

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός (8/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

συνεπαγωγή $p \to q$

είναι αληθής εάν η q είναι αληθής ή εάν p και q είναι ψευδείς

π.χ. $p =$ «αύριο θα έχει καλό καιρό»

$q =$ «αύριο θα πάμε εκδρομή»

$p \to q =$ «αν αύριο έχει καλό καιρό
τότε θα πάμε εκδρομή»

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Παρατήρηση : Αν $p = F$ τότε $p \to q = T$

(Αν δεν συμβεί το p τότε δεν ξέρουμε αν p συνεπάγεται q)

Προτασιακός Λογισμός (9/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

συνεπαγωγή $p \rightarrow q$

είναι αληθής εάν η q είναι αληθής ή εάν p και q είναι ψευδείς

π.χ. $p =$ «αύριο θα έχει καλό καιρό»

$q =$ «αύριο θα πάμε εκδρομή»

$p \rightarrow q =$ «αν αύριο έχει καλό καιρό τότε θα πάμε εκδρομή»

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Παρατήρηση : Αν $p = F$ τότε $p \rightarrow q = T$

(Αν δεν συμβεί το p τότε δεν ξέρουμε αν p συνεπάγεται q)

Προτασιακός Λογισμός (10/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

διπλή συνεπαγωγή (αν και μόνο αν) $p \leftrightarrow q$

είναι αληθής εάν p και q είναι αληθείς ή εάν p και q είναι ψευδείς

π.χ. $p =$ «θα πάμε εκδρομή»

$q =$ «έχουμε χρήματα»

$p \leftrightarrow q =$ «θα πάμε εκδρομή αν και μόνο αν έχουμε χρήματα»

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός (11/11)

Συνδυασμός προτάσεων

Θεωρούμε προτάσεις p και q

διπλή συνεπαγωγή (αν και μόνο αν) $p \leftrightarrow q$

είναι αληθής εάν p και q είναι αληθείς ή εάν p και q είναι ψευδείς

π.χ. $p =$ «θα πάμε εκδρομή»

$q =$ «έχουμε χρήματα»

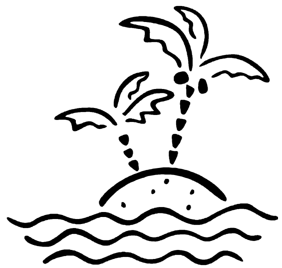
$p \leftrightarrow q =$ «θα πάμε εκδρομή αν και μόνο αν έχουμε χρήματα»

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

η q είναι **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να συμβεί η p

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (1/17)

Παράδειγμα



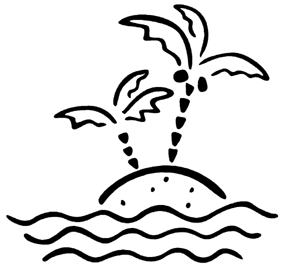
Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (2/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

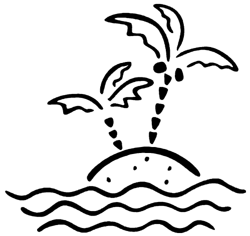
Ένας εξερευνητής φθάνει στο νησί…

Γνωρίζει ότι υπάρχουν αυτές οι δύο φυλές αλλά δεν τις έχει δει από κοντά και έτσι δεν μπορεί να τις διαχωρίσει…

Συναντά ένα κάτοικο του νησιού και τον ρωτά αν υπάρχει θησαυρός…

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (3/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένας εξερευνητής φθάνει στο νησί…

Γνωρίζει ότι υπάρχουν αυτές οι δύο φυλές αλλά δεν τις έχει δει από κοντά και έτσι δεν μπορεί να τις διαχωρίσει…

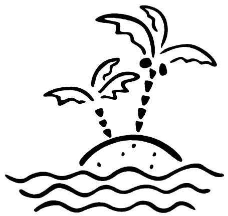
Συναντά ένα κάτοικο του νησιού και τον ρωτά αν υπάρχει θησαυρός…

Λαμβάνει την εξής απάντηση :

«Υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (4/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένας εξερευνητής φθάνει στο νησί…

Γνωρίζει ότι υπάρχουν αυτές οι δύο φυλές αλλά δεν τις έχει δει από κοντά και έτσι δεν μπορεί να τις διαχωρίσει…

Συναντά ένα κάτοικο του νησιού και τον ρωτά αν υπάρχει θησαυρός…

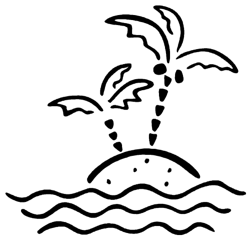
Λαμβάνει την εξής απάντηση :

«Υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

Μόλις το ακούει ξεκινάει το ψάξιμο στο νησί. Γιατί;

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (5/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

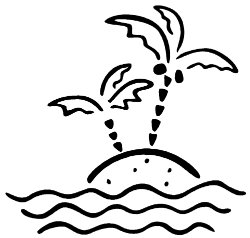
$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (6/17)

Παράδειγμα



λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

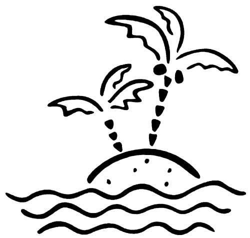
<u>1η περίπτωση</u>

ο εξερευνητής μίλησε με

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (7/17)

Παράδειγμα



λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

<u>1η περίπτωση</u>

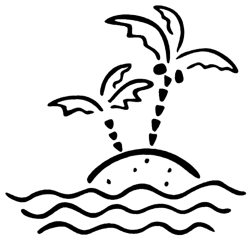
ο εξερευνητής μίλησε με

τότε $q = F$

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
~~F~~	~~T~~	~~F~~
T	F	F
~~T~~	~~T~~	~~T~~

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (8/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

<u>1η περίπτωση</u>

ο εξερευνητής μίλησε με

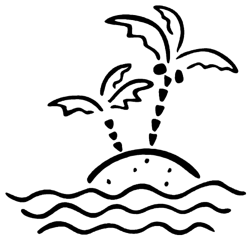
τότε $q = F$

αλλά επίσης $p \leftrightarrow q = F$

p	q	$p \leftrightarrow q$
~~F~~	~~F~~	~~T~~
~~F~~	~~T~~	~~F~~
T	F	F
~~T~~	~~T~~	~~T~~

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (9/17)

Παράδειγμα



Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

<u>2η περίπτωση</u>

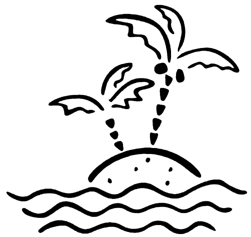
ο εξερευνητής μίλησε με

τότε

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (10/17)

Παράδειγμα



λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

<u>2η περίπτωση</u>

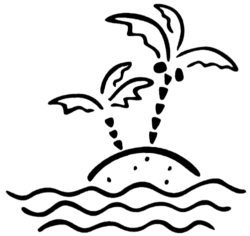
ο εξερευνητής μίλησε με

τότε $q = T$

p	q	$p \leftrightarrow q$
~~F~~	~~F~~	~~T~~
F	T	F
~~T~~	~~F~~	~~F~~
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (11/17)

Παράδειγμα



λένε **πάντα** ψέματα

λένε **πάντα** αλήθεια

Ένα νησί κατοικείται από δύο φυλές:

$p =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί»

$q =$ «λέω πάντα την αλήθεια»

$p \leftrightarrow q =$ «υπάρχει θησαυρός στο νησί αν και μόνο αν λέω πάντα την αλήθεια»

<u>2η περίπτωση</u>

ο εξερευνητής μίλησε με

τότε $q = T$

αλλά επίσης $p \leftrightarrow q = T$

p	q	$p \leftrightarrow q$
~~F~~	~~F~~	~~T~~
~~F~~	~~T~~	~~F~~
~~T~~	~~F~~	~~F~~
T	T	T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (12/17)

- **Ταυτολογία**: Πρόταση που είναι πάντα αληθής, π.χ.

  $p \vee \overline{p}$ (ή θα βρέξει ή δε θα βρέξει)

- **Αντίφαση**: Πρόταση που είναι πάντα ψευδής, π.χ.

  $p \wedge \overline{p}$ (και θα βρέξει και δε θα βρέξει)

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (13/17)

Ταυτολογία : Πρόταση που είναι πάντα αληθής, π.χ. $p \vee \overline{p}$
(ή θα βρέξει ή δε θα βρέξει)

Αντίφαση : Πρόταση που είναι πάντα ψευδής, π.χ. $p \wedge \overline{p}$
(και θα βρέξει και δε θα βρέξει)

Παράδειγμα Η $p \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ είναι ταυτολογία

Έχουμε

$$\begin{aligned} p \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) &= p \vee (\overline{p} \wedge (q \vee \overline{q})) \\ &= p \vee (\overline{p} \wedge \mathrm{T}) \\ &= p \vee \overline{p} = \mathrm{T} \end{aligned}$$

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (14/17)

Ταυτολογία : Πρόταση που είναι πάντα αληθής, π.χ. $p \vee \overline{p}$
(ή θα βρέξει ή δε θα βρέξει)

Αντίφαση : Πρόταση που είναι πάντα ψευδής, π.χ. $p \wedge \overline{p}$
(και θα βρέξει και δε θα βρέξει)

Παράδειγμα Η $p \wedge q \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$ είναι αντίφαση

Έχουμε
$$\begin{aligned} p \wedge q \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}) &= p \wedge ((q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{q})) \\ &= p \wedge ((q \wedge \overline{p}) \vee \mathrm{F}) \\ &= p \wedge ((q \wedge \overline{p}) \vee \mathrm{F}) \\ &= q \wedge (p \wedge \overline{p}) = \mathrm{F} \end{aligned}$$

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (15/17)

Παράδειγμα Ποίος είναι πίνακας αλήθειας της $(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})$;

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})$
T
T
T
T

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (16/17)

Παράδειγμα   Ποίος είναι πίνακας αλήθειας της $(p \rightarrow q) \rightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$;

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

$(p \rightarrow q) \rightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$
T
T
T
T

Άρα $(p \rightarrow q) \rightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p}) = T$ (ταυτολογία)

Προτασιακός Λογισμός – Παράδειγμα (17/17)

Ταυτολογία : Πρόταση που είναι πάντα αληθής, π.χ. $p \vee \overline{p}$

(ή θα βρέξει ή δε θα βρέξει)

Αντίφαση : Πρόταση που είναι πάντα ψευδής, π.χ. $p \wedge \overline{p}$

(και θα βρέξει και δε θα βρέξει)

Άσκηση : Δείξτε ότι η πρόταση $q \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow q$ είναι ταυτολογία

Λογική Ισοδυναμία (1/2)

- Δύο ***συντακτικά*** **διαφορετικές** σύνθετες προτάσεις μπορεί να είναι ***σημασιολογικά*** **ταυτόσημες** (*δηλ.*, να έχουν το ίδιο νόημα).
- Τέτοιες προτάσεις τις ονομάζουμε ***λογικά ισοδύναμες***.
- Συμβολισμός: … ⇔ …

Λογική Ισοδυναμία (2/2)

- Δύο σύνθετες προτάσεις *p* και *q* είναι *λογικά ισοδύναμες*, και το συμβολίζουμε με $p \Leftrightarrow q$:
  - Αν και μόνο αν οποιαδήποτε εκχώρηση τιμών στις επιμέρους προτάσεις που απαρτίζουν τις *p* και *q* καταλήγει σε ταυτολογία …
  - δηλαδή αν και μόνο αν οι *p* και *q* έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας σε όλες τις γραμμές των πινάκων αληθείας τους.
    - *Π.χ..* Αποδείξτε ότι $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

«Φωλιασμένες» λογικές προτάσεις (1/4)

- Χρήση παρενθέσεων για την ομαδοποίηση *υπο-εκφράσεων*:
  - “Ο Γιάννης είναι έξυπνος και είναι καλός ή είναι όμορφος”.

f g s

- *Η* $f \wedge (g \vee s)$ σημαίνει: Ο Γιάννης είναι έξυπνος και, είναι καλός ή είναι όμορφος.
- *Η* $(f \wedge g) \vee s$ σημαίνει: Ο Γιάννης είναι έξυπνος και είναι καλός, ή είναι όμορφος.
- *Η* $f \wedge g \vee s$ είναι διφορούμενη!

«Φωλιασμένες» λογικές προτάσεις (2/4)

- Μπορούμε να γράψουμε $p1 \wedge p2 \wedge p3$ χωρίς ασάφεια;
  – Εάν οι προτάσεις $(p1 \wedge p2) \wedge p3$ και $p1 \wedge (p2 \wedge p3)$ είναι ισοδύναμες, τότε ναι!
  – Πρέπει δηλαδή να δούμε κατά πόσον ισχύει $(p1 \wedge p2) \wedge p3 \Leftrightarrow p1 \wedge (p2 \wedge p3)$.

«Φωλιασμένες» λογικές προτάσεις (3/4)

- Κατά σύμβαση, ο τελεστής “¬” *έχει προτεραιότητα* έναντι των τελεστών “Λ” και “V”.

  – **Η** $\neg f \wedge g$ σημαίνει $(\neg f)\wedge g$, **και όχι** $\neg (f \wedge g)$

- Όπου χρειάζεται να επιβάλουμε την προτεραιότητα που επιθυμούμε, το κάνουμε χρησιμοποιώντας παρενθέσεις.

«Φωλιασμένες» λογικές προτάσεις (4/4)

- Ισχύει ότι $(p1 \lor p2) \lor p3 = p1 \lor (p2 \lor p3)$;
  - … Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΚΦΡΑΣΗ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ (δεν έχουμε ορίσει την ισότητα προτάσεων μόνο τη λογική ισοδυναμία!)
- Αυτό που ισχύει είναι ότι $(p1 \lor p2) \lor p3 \Leftrightarrow p1 \lor (p2 \lor p3)$.

Η αποκλειστική διάζευξη

- Δυαδικός τελεστής αποκλειστικής διάζευξης "$\bigoplus$" (*XOR*).
- p = "Θα πάρω 10 σε αυτό το μάθημα".
- q = "Θα παρατήσω αυτό το μάθημα".
- $p \bigoplus q$ = "Η θα πάρω 10 σε αυτό το μάθημα ή θα παρατήσω αυτό το μάθημα".
  - (…αλλά όχι και τα δύο!)

Η φυσική γλώσσα είναι διφορούμενη…

- Χρειαζόμαστε τα συμφραζόμενα για γνωρίζουμε εάν σε μία πρόταση το ακριβές νόημα αποδίδεται από την OR ή την XOR!
- *p* = “Μου αρέσουν τα θρίλερ”.
- *q* = “Μου αρέσει η επιστημονική φαντασία”.
- *r*= “Μου αρέσουν τα θρίλερ ή η επιστημονική φαντασία”.

$$r \Leftrightarrow p \vee q \;\ldots\; ή \;\ldots\; r \Leftrightarrow p \oplus q;$$

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (1/3)

- Θεωρείστε τη σύζευξη $p1 \wedge p2 \wedge \ldots \wedge pn$, n το πλήθος ατομικών προτάσεων.
- Πόσες γραμμές έχει ο πίνακας αληθείας της;
  – 2x2x2x … x2 (n παράγοντες).
- Επομένως, το πλήθος των γραμμών του πίνακα αληθείας είναι 2^n όπου n το πλήθος των προτάσεων.

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (2/3)

Λογικές μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Συνάρτηση $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Υπάρχει ανάθεση τιμών $\{T, F\}$ των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$

έτσι ώστε $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T$;

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2)$$

$$F(\mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}) = \mathrm{T}$$

$$F'(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_2)$$

$$F'(\mathrm{F}, \mathrm{T}, *) = (x_3 \wedge \overline{x_3}) = \mathrm{F}$$

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (3/3)

Λογικές μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Συνάρτηση $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Υπάρχει ανάθεση τιμών $\{T, F\}$ των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$

έτσι ώστε $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T$;

Είναι υπολογιστικά πολύ δύσκολο πρόβλημα:

δεν υπάρχει κανένας γνωστός αποδοτικός αλγόριθμος

Πέρα από τον Προτασιακό Λογισμό (1/2)

Ο Προτασιακός Λογισμός δεν είναι επαρκής για την περιγραφή προσδιορισμών

όπως : “υπάρχει” ($\exists$), “κάθε” ($\forall$) κλπ.

Π.χ. “κάθε ακέραιος είναι γινόμενο πρώτων αριθμών”

Πέρα από τον Προτασιακό Λογισμό (2/2)

Ο Προτασιακός Λογισμός δεν είναι επαρκής για την περιγραφή προσδιορισμών

όπως : “υπάρχει” ($\exists$), “κάθε” ($\forall$) κλπ.

Π.χ. “κάθε ακέραιος είναι γινόμενο πρώτων αριθμών”

$$\forall x \, (\, human(x) \rightarrow \exists y \, (\, flaw(y) \wedge has(x, y) \,) \,)$$

Ασκήσεις (1/4)

- Έστω οι προτάσεις p=”Ο Γιάννης είναι υγιής” και q=”Ο Γιάννης είναι πλούσιος και r=”Ο Γιάννης είναι σοφός”.
- Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις σε προτασιακό λογισμό:
  - Ο Γιάννης δεν είναι πλούσιος αλλά είναι υγιής και σοφός.
  - Ο Γιάννης δεν είναι ούτε υγιής, ούτε πλούσιος ούτε σοφός.
  - Αν ο Γιάννης είναι υγιής και σοφός, τότε είναι πλούσιος.
  - Ο Γιάννης είναι είτε πλούσιος είτε υγιής αλλά όχι και τα δύο.
  - Ο Γιάννης είναι πλούσιος αν και μόνο αν είναι υγιής και σοφός.
- Δοθέντος ότι η τιμή του $p \rightarrow q$ είναι ψευδής, προσδιορίστε την τιμή του $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow q$.

Ασκήσεις (2/4)

- Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, βρέστε (αν υπάρχει) μία τιμή των επιμέρους ατομικών προτάσεων που τις κάνουν αληθείς.
  – $(a \rightarrow \neg b) \wedge a$
  – $((a \rightarrow c) \rightarrow \neg b) \wedge (a \vee b)$
- Αποδείξτε ότι η πρόταση $p \Rightarrow q$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με χρήση μόνο των τελεστών $\vee$ και $\neg$
- Αποδείξτε ότι η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με χρήση μόνο των τελεστών $\wedge$ και $\neg$
- Γράψτε μια σύνθετη πρόταση η οποία είναι αληθής όταν ακριβώς δύο από τις τρεις ατομικές προτάσεις p, q, r είναι αληθείς.
- Γράψτε μια σύνθετη πρόταση η οποία είναι αληθής όταν καμία, ή μια, ή δύο από τις τρεις ατομικές προτάσεις p, q, r είναι αληθείς.

Ασκήσεις (3/4)

- Σε μία σπηλιά, υπάρχουν τρία σεντούκια,
  ένα κόκκινο, ένα πράσινο και ένα μπλε,
  καθένα από τα οποία έχει τις εξής επιγραφές:
  - **Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.**
  - **Μπλε σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.**
  - **Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.**
- Γνωρίζοντας ότι μόνο ένα σεντούκι έχει τον θησαυρό και πως το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής, μπορείτε να βρείτε που βρίσκεται ο θησαυρός;

Ασκήσεις (4/4)

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις γράψτε την άρνησή της.

- Αν το Π είναι τετράγωνο, τότε είναι ορθογώνιο.
- Αν σήμερα είναι παραμονή Πρωτοχρονιάς, τότε αύριο θα είναι Ιανουάριος.
- Αν τα δεκαδικά ψηφία του r είναι πεπερασμένα, τότε ο r είναι ρητός.
- Αν ο n είναι πρώτος, τότε ο n είναι περιττός ή ο n είναι το 2.
- Αν ο x είναι μη αρνητικός, τότε ο x είναι θετικός ή μηδέν.
- Αν ο Νίκος είναι ο πατέρας της Άννας, τότε ο Δημήτρης είναι θείος της και η Μαρία θεία της.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 και με το 3.

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- http: //www.ipaideia.gr/k-arvanitopoulos-strevloseis-stin-pistopoiisi-kai-stin-askisi-ton-texnikon-epaggelmaton.htm