Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 2: Γραφήματα

Αν. Καθηγητής Κ. Στεργίου

e-mail: *kstergiou@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

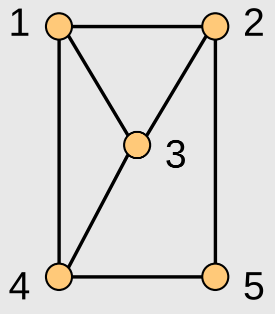
- Εισαγωγή στα Γραφήματα.
- Βασικοί Ορισμοί:
  - Μονοπάτια, κυκλώματα, ισόμορφα γραφήματα, εμβαρημένα γραφήματα, συνεκτικότητα.
- Ο Αλγόριθμος του Dijkstra.
- Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.
- Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.

Στόχοι

- Εισαγωγή στη θεωρία γραφημάτων.
- Κατανόηση και μελέτη γραφημάτων και των πρακτικών εφαρμογών τους.
- Εξοικείωση με την ορολογία των γραφημάτων και με τις κατηγοριοποιήσεις τους.
- Μελέτη ορισμένων βασικών προβλημάτων σε γραφήματα, όπως η εύρεση ελαφρυτέρων διαδρομών σε εμβαρημένα γραφήματα (με τον αλγόριθμο του Dijkstra), η εύρεση μονοπατιών Euler και η εύρεση μονοπατιών Hamilton.

Γραφήματα (1)

- **Γράφημα**: Συνδυαστικό αντικείμενο που αποτελείται από 2 σύνολα.
  - Σύνολο κορυφών (vertex set) V
  - Σύνολο ακμών (edge set) $E \subseteq V \times V$ (διμελής σχέση επί των κορυφών)



$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

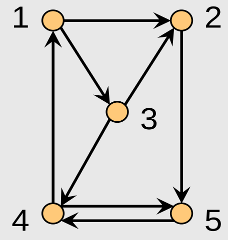
$$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$$

$|V| = n$ πλήθος κορυφών

$|E| = m$ πλήθος ακμών

Γραφήματα (2)

- **Γράφημα**: Συνδυαστικό αντικείμενο που αποτελείται από 2 σύνολα.
  - Σύνολο κορυφών (vertex set) V
  - Σύνολο ακμών (edge set) $E \subseteq V \times V$ (διμελής σχέση επί των κορυφών)



$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1,2), (1,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,5), (5,4)\}$$

$|V| = n$ πλήθος κορυφών

$|E| = m$ πλήθος ακμών

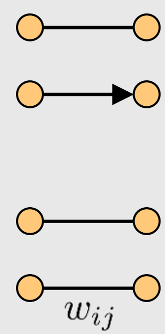
TexPoint fonts used in EMF.
Read the TexPoint manual before you delete this box.: AAAAA

Γραφήματα (3)

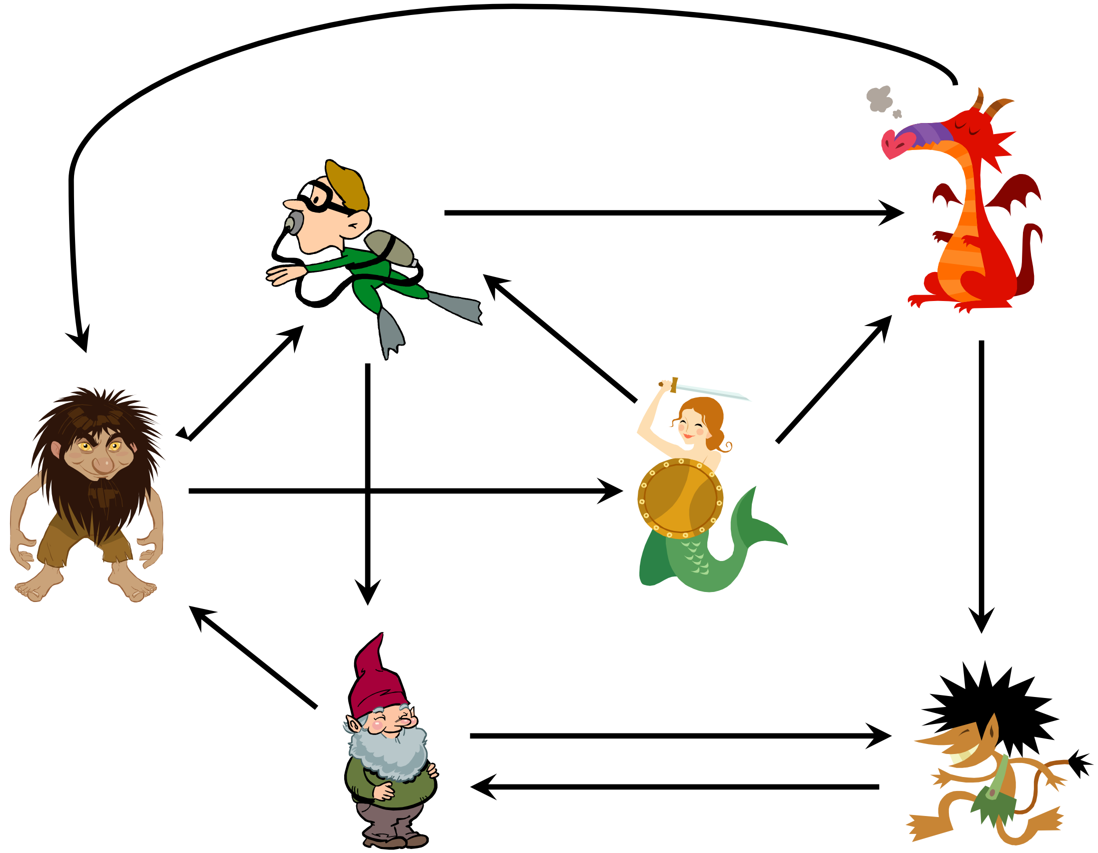
- **Γράφημα**: Συνδυαστικό αντικείμενο που αποτελείται από 2 σύνολα.
  - Σύνολο κορυφών (vertex set) V
  - Σύνολο ακμών (edge set) $E \subseteq V \times V$ (διμελής σχέση επί των κορυφών)

Μερικά είδη γραφημάτων:

- Κατεύθυνση ακμών
  - μη κατευθυνόμενα
  - κατευθυνόμενα
- Βάρος ακμών
  - αβαρή
  - εμβαρή

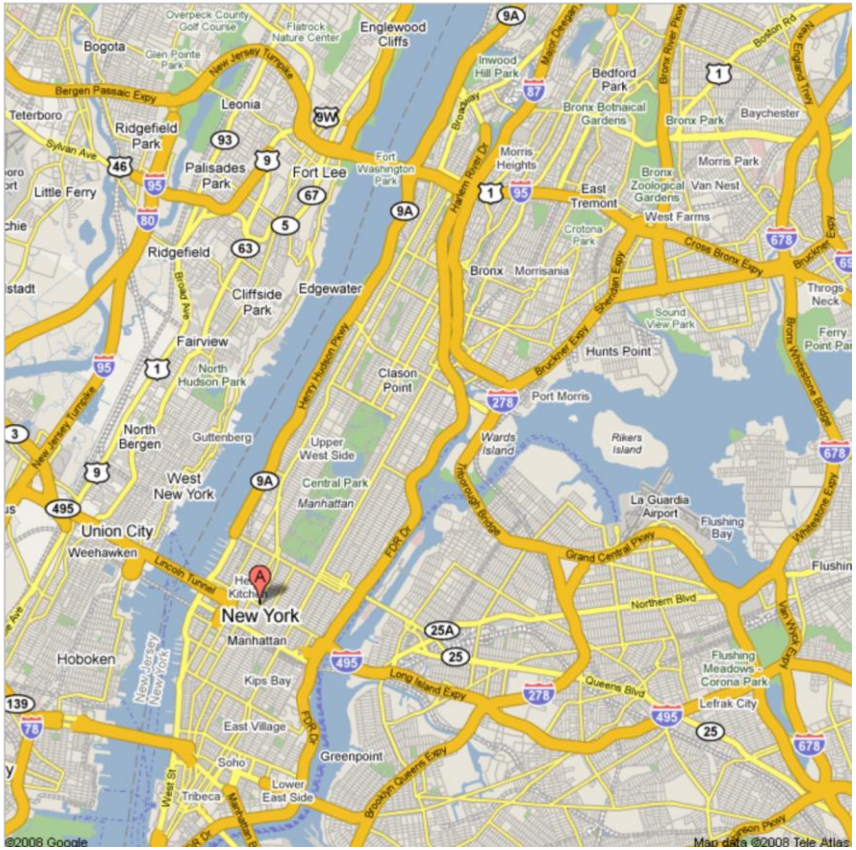


Γραφήματα (4)



Εφαρμογές: διμελείς σχέσεις (π.χ. κοινωνικά δίκτυα)

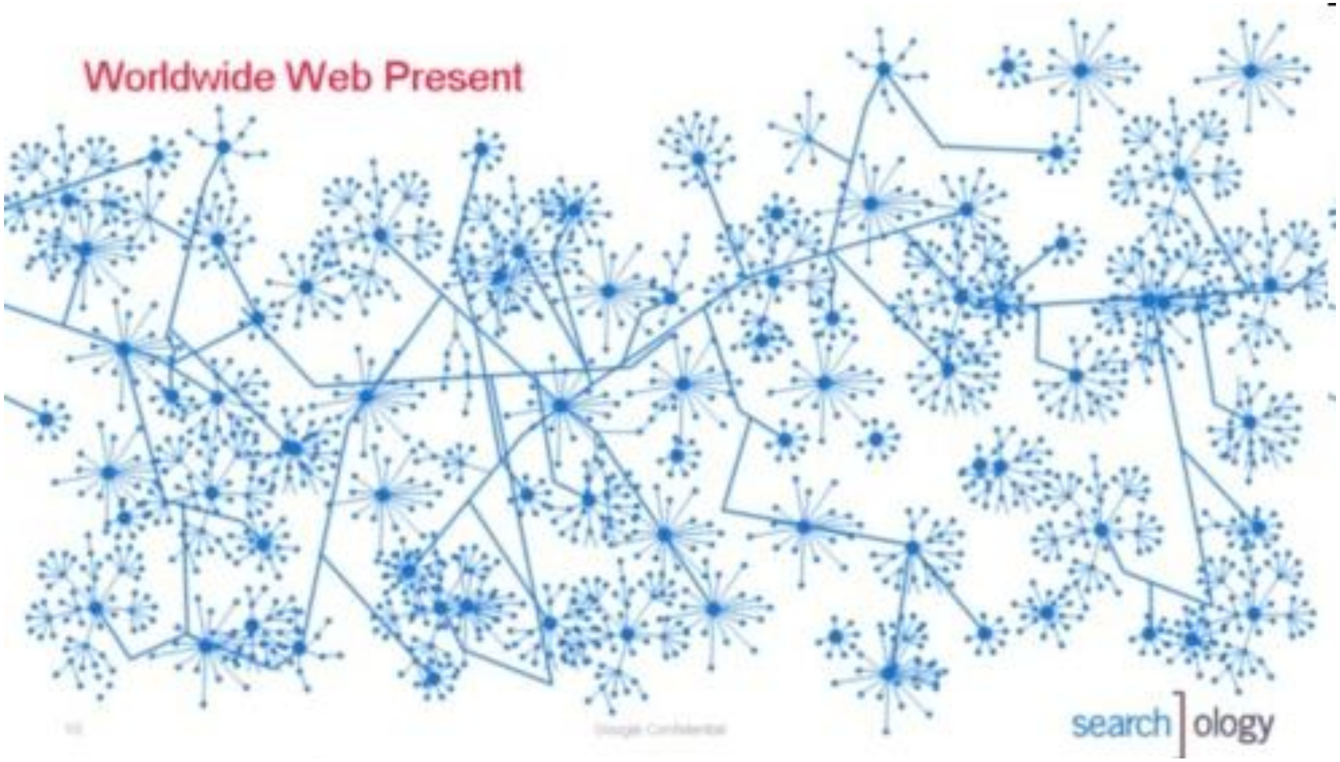
Γραφήματα (5)



Εφαρμογές: οδικά ή μεταφορικά δίκτυα, δίκτυα υπολογιστών κ.λ.π.

Πηγή: [http: //www.personal.psu.edu/kxl272/assignment5%266.html](http://www.personal.psu.edu/kxl272/assignment5%266.html)

Γραφήματα (6)



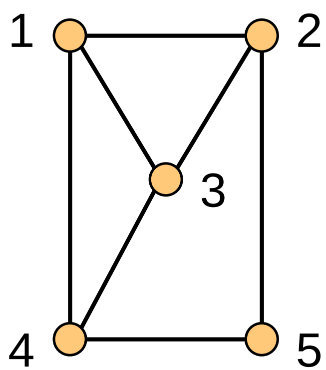
Εφαρμογές: internet / world wide web

Πηγή: [http: //www.pearltrees.com/davidbruce/web/id2623706](http://www.pearltrees.com/davidbruce/web/id2623706)

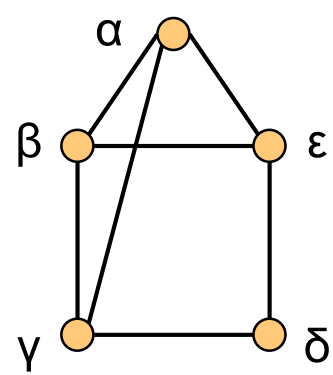
Γραφήματα (7)

Ισόμορφα Γραφήματα

$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$



	f
1	β
2	ϵ
3	α
4	γ
5	δ

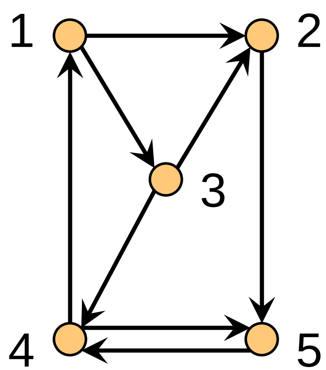
Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : V_1 \rightarrow V_2$ τέτοια ώστε

$$\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$$

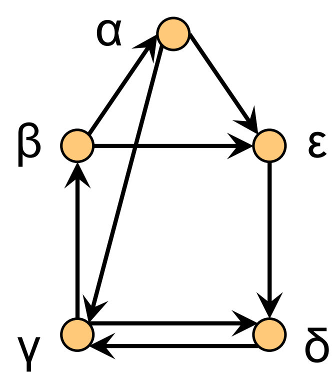
Γραφήματα (8)

Ισόμορφα Γραφήματα

$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$



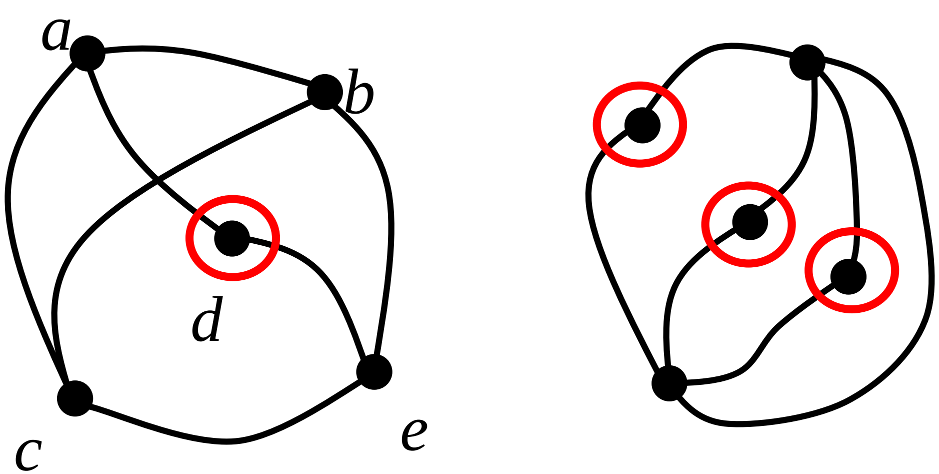
	f
1	β
2	ε
3	α
4	γ
5	δ

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : V_1 \to V_2$ τέτοια ώστε

$$(a, b) \in E_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2$$

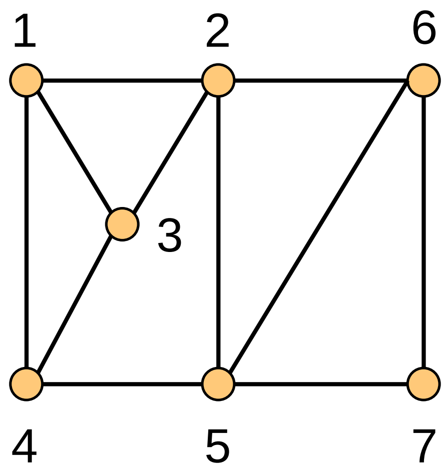
Γραφήματα (9)

- Είναι τα δύο παρακάτω γραφήματα ισόμορφα;

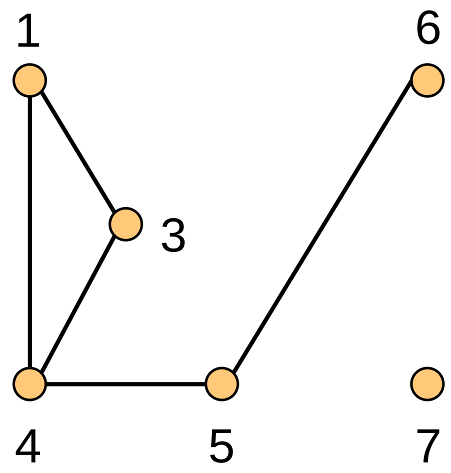


Γραφήματα (10)

$G = (V, E)$

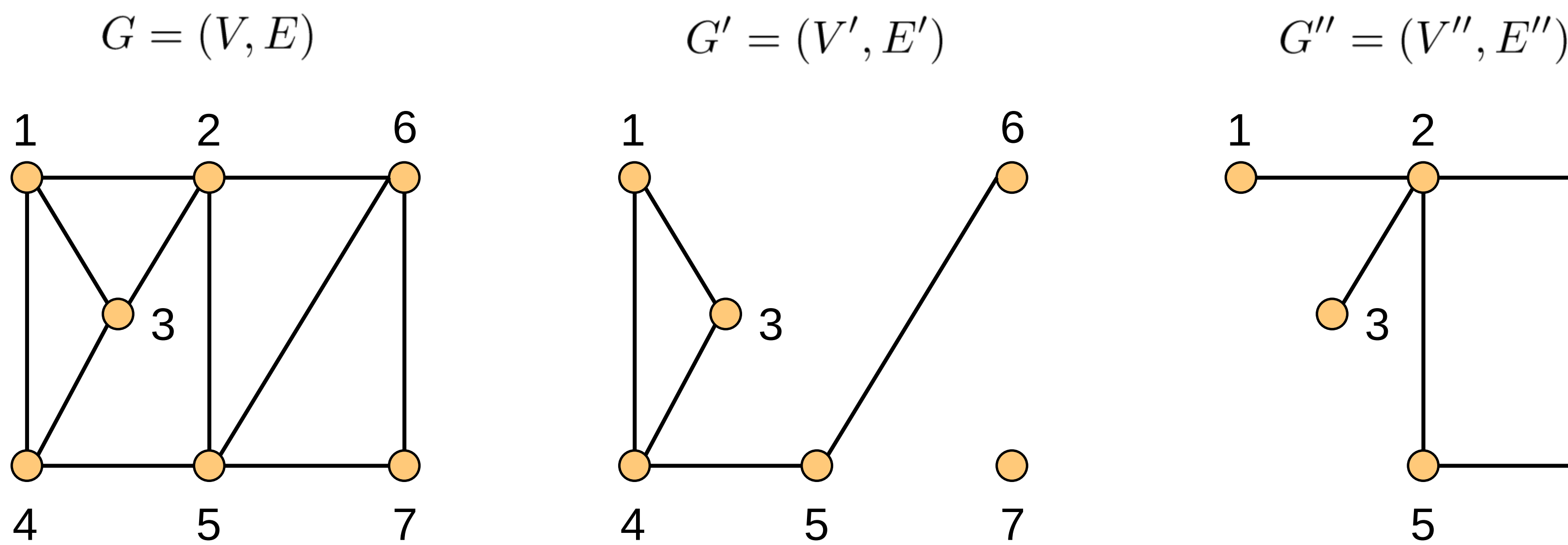


$G' = (V', E')$



Το G' είναι **υπογράφημα** του G εάν $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ και $E' \subseteq V' \times V'$

Γραφήματα (11)



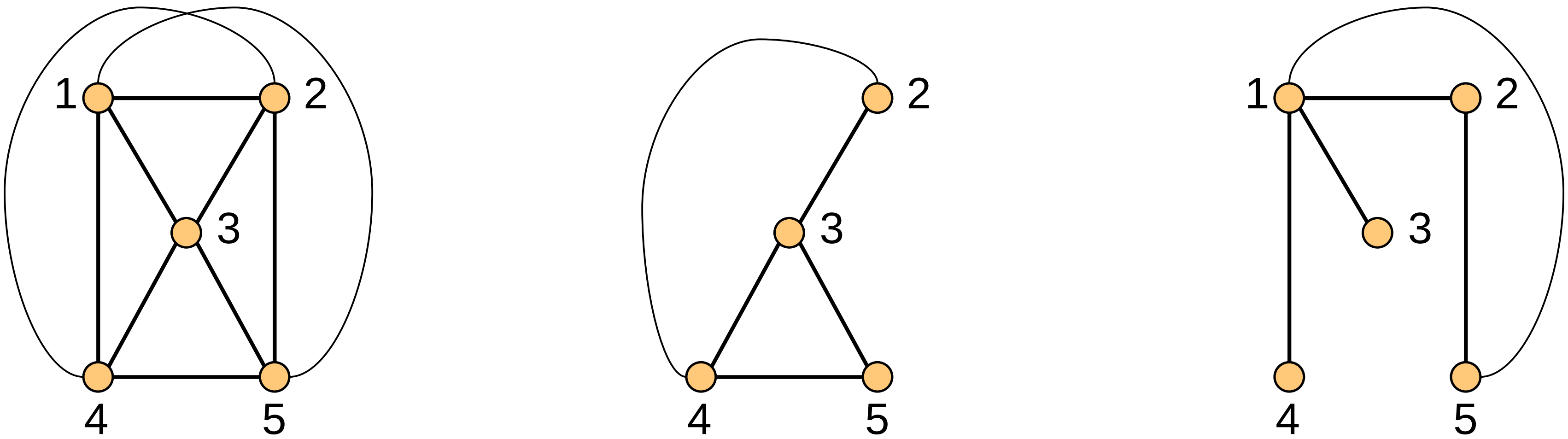
Το G' είναι **υπογράφημα** του G εάν $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ και $E' \subseteq V' \times V'$

Το G'' είναι το **συμπλήρωμα** του G'ως προς το G εάν $E'' = E - E'$

και $\{a, b\} \in E'' \Rightarrow a, b \in V''$

Γραφήματα (12)

K_5 $\qquad G = (V, E)$ $\qquad \overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$



K_n **πλήρες (μη κατευθυνόμενο) γράφημα** με n κορυφές

G ένα οποιοδήποτε (μη κατευθυνόμενο γράφημα) με n κορυφές $(G \subseteq K_n)$

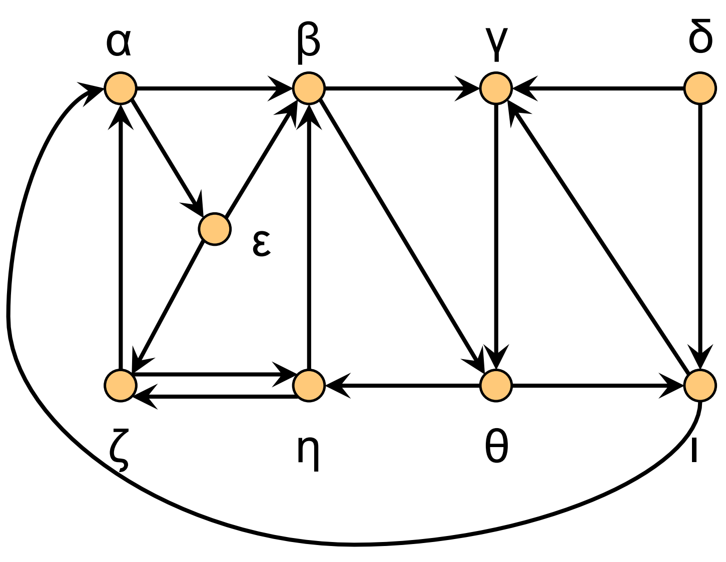
$\overline{G}$ **συμπλήρωμα** του G (ως προς το K_n)

Γραφήματα (13)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

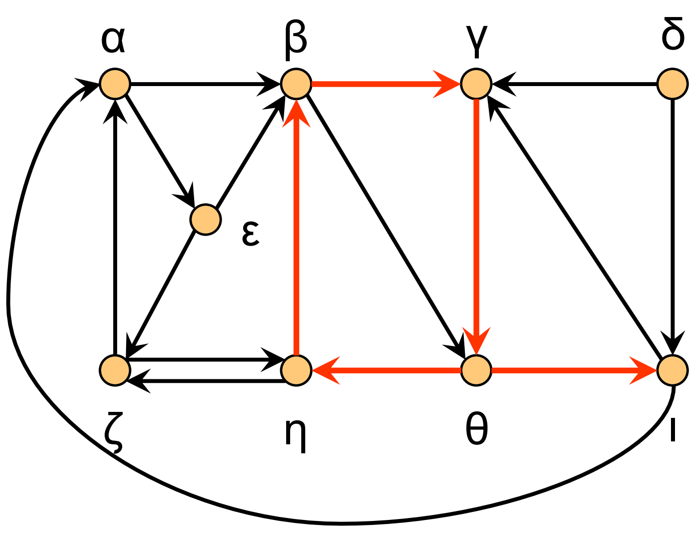


Γραφήματα (14)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)



Π.χ. (β,γ,θ,η,β,γ,θ,ι)

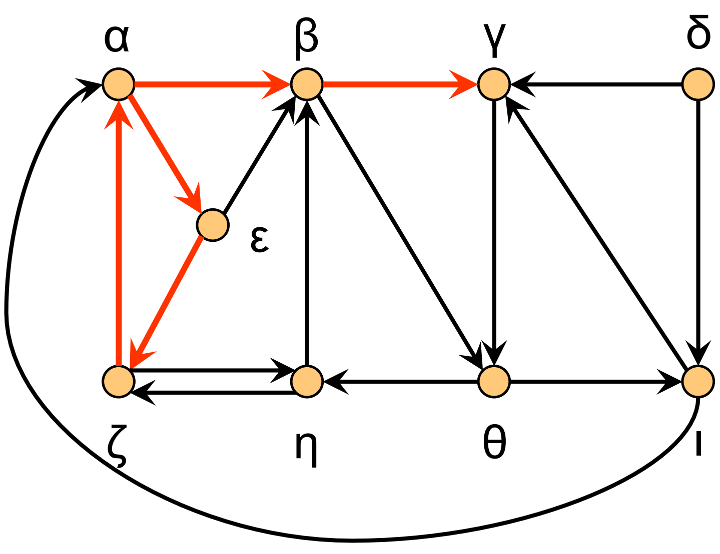
Οι ακμές (β,γ) και (γ,θ) εμφανίζονται 2 φορές

Γραφήματα (15)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)



Π.χ. (α,ε,ζ,α,β,γ)

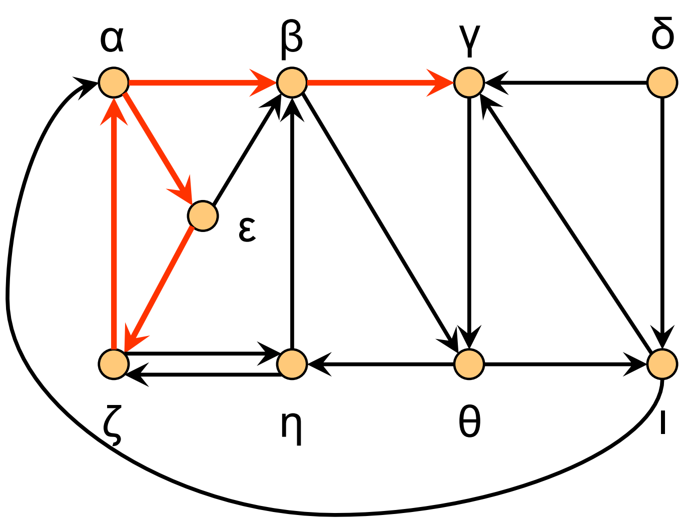
Κάθε ακμή εμφανίζεται μία φορά
Οι κορυφή α εμφανίζεται 2 φορές

Γραφήματα (16)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)



Π.χ. (α,ε,ζ,α,β,γ)

Κάθε ακμή εμφανίζεται μία φορά
Η κορυφή α εμφανίζεται 2 φορές

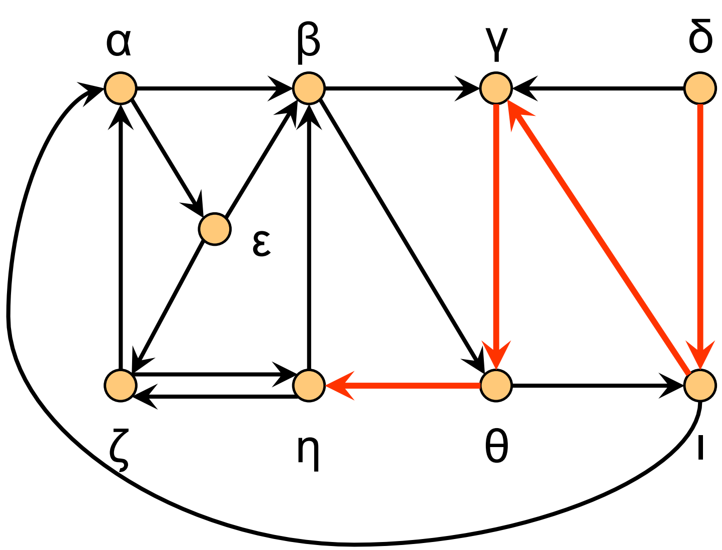
Απλό μονοπάτι : $e_i \neq e_j$ για κάθε $i \neq j$

Γραφήματα (17)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)



Π.χ. (δ,ι,γ,θ,η)

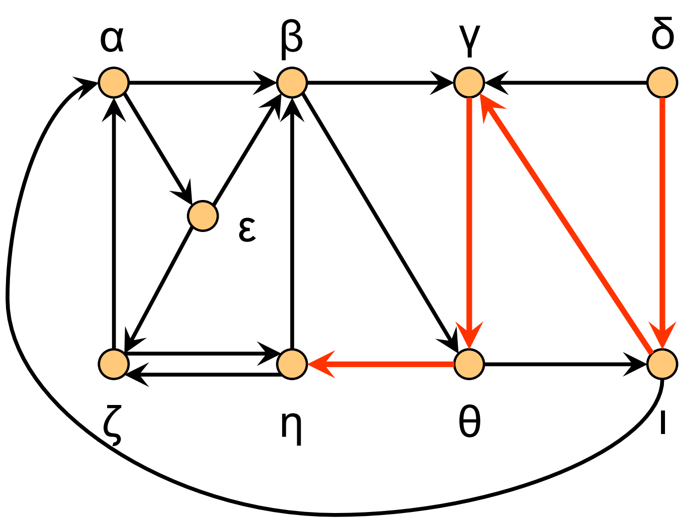
Κάθε κορυφή εμφανίζεται μία φορά

Γραφήματα (18)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)



Π.χ. (δ,ι,γ,θ,η)

Κάθε κορυφή εμφανίζεται μία φορά

Στοιχειώδες μονοπάτι : $v_i \neq v_j$ για κάθε $i \neq j$

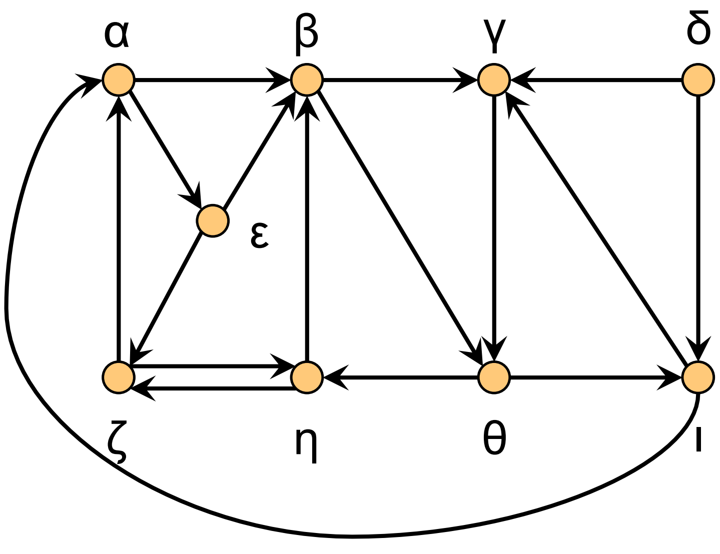
Γραφήματα (19)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



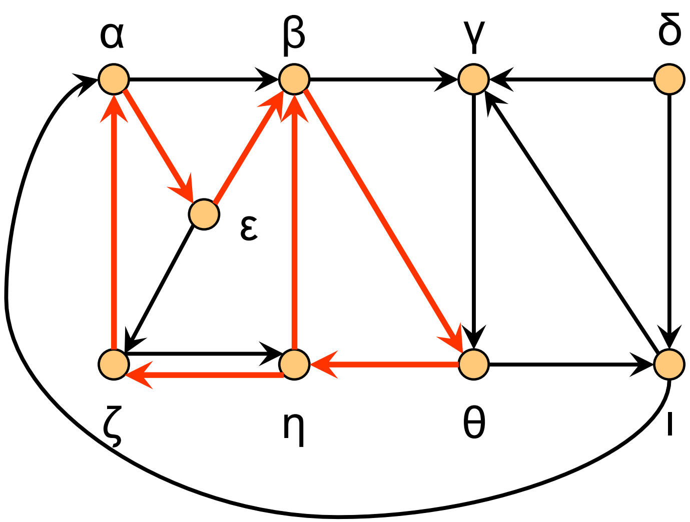
Γραφήματα (20)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



Π.χ. (α,ε,β,θ,η,β,θ,η,ζ,α)

Οι ακμές (β,θ) και (θ,η) εμφανίζονται 2 φορές

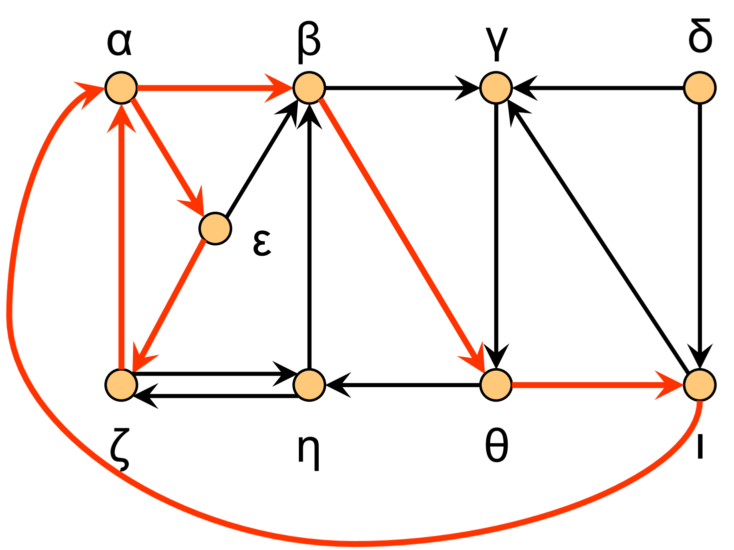
Γραφήματα (21)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



Π.χ. (α,ε,ζ,α,β,θ,ι,α)

Κάθε ακμή εμφανίζεται μία φορά
Η κορυφή α εμφανίζεται 3 φορές

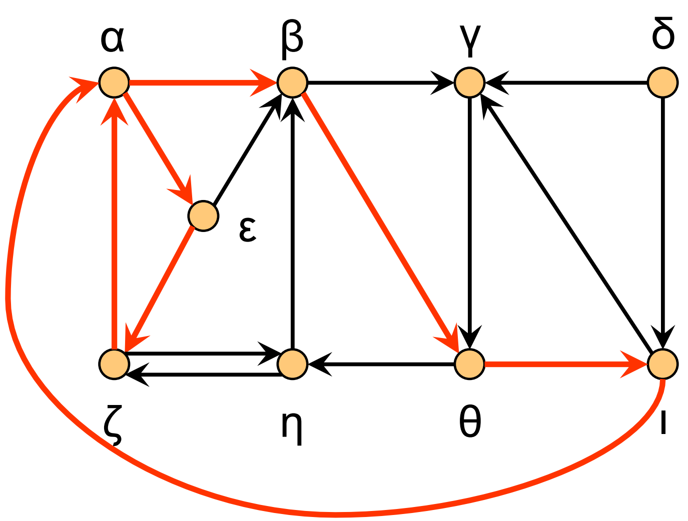
Γραφήματα (22)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



Π.χ. (α,ε,ζ,α,β,θ,ι,α)

Κάθε ακμή εμφανίζεται μία φορά
Η κορυφή α εμφανίζεται 3 φορές

Απλό κύκλωμα : $e_i \neq e_j$ για κάθε $i \neq j$

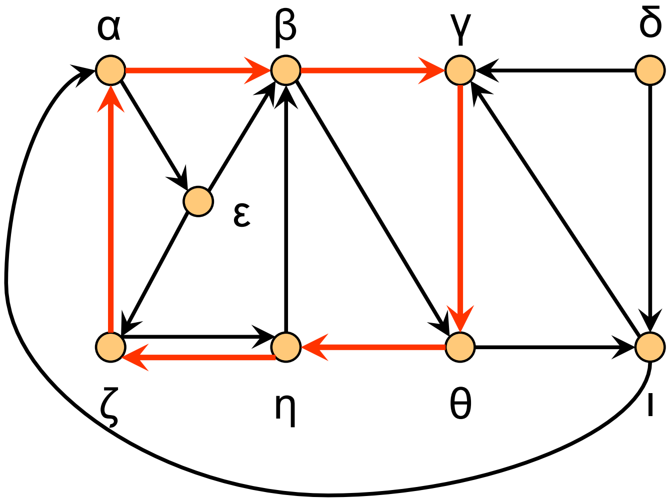
Γραφήματα (23)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$

(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



Π.χ. (γ,θ,η,ζ,α,β,γ)

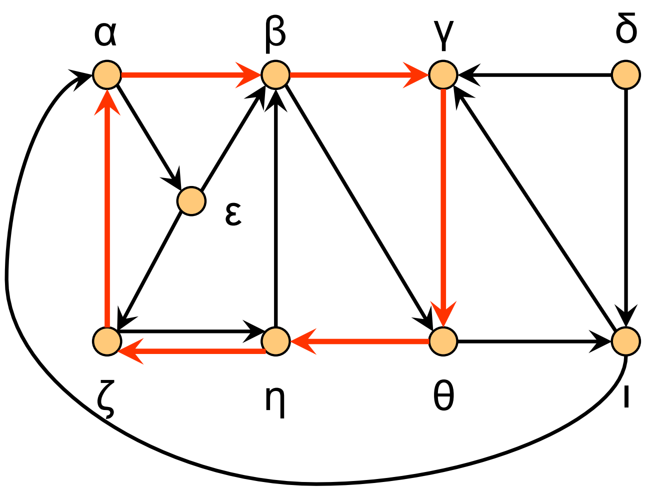
Κάθε κορυφή εκτός της γ εμφανίζεται μία φορά

Γραφήματα (24)

Έστω (κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$

Μονοπάτι : ακολουθία κορυφών $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$
(ακολουθία ακμών $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$)

Κύκλωμα : μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ τέτοιο ώστε $v_k = v_0$



Π.χ. (γ,θ,η,ζ,α,β,γ)

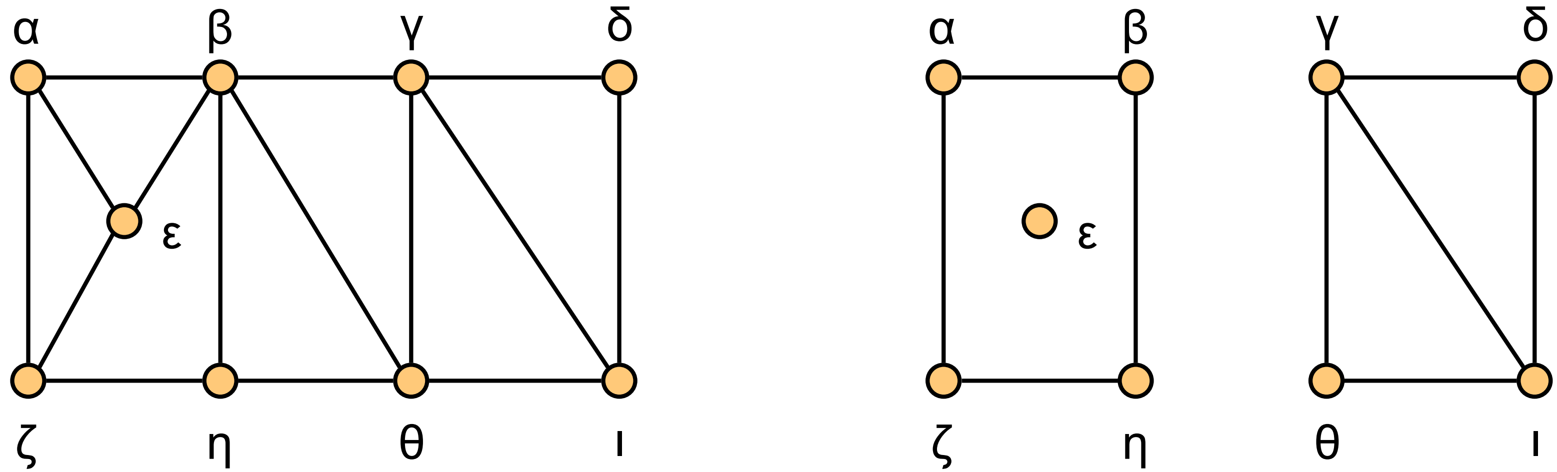
Κάθε κορυφή εκτός της γ εμφανίζεται μία φορά

Στοιχειώδες κύκλωμα : αποτελείται από στοιχειώδες μονοπάτι $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$
και την ακμή (v_{k-1}, v_0)

Γραφήματα (25)

Συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα :

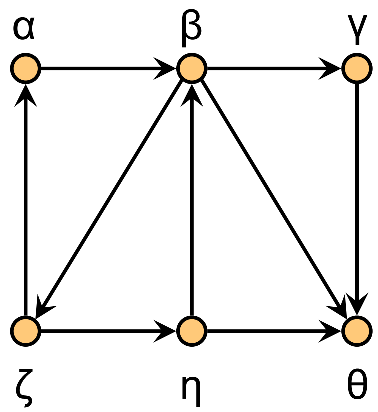
περιέχει μονοπάτι μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών του



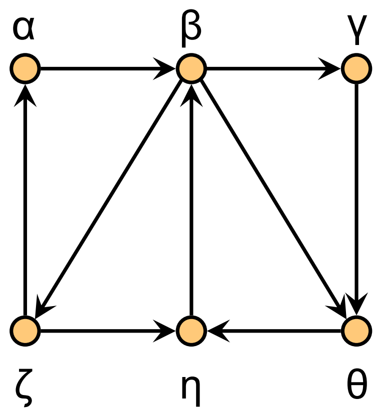
συνεκτικό μη συνεκτικό

Γραφήματα (26)

- **Συνεκτικό** κατευθυνόμενο γράφημα:
  - το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα (αγνοώντας τις κατευθύνσεις των ακμών) είναι συνεκτικό.
- **Ισχυρά συνεκτικό** κατευθυνόμενο γράφημα:
  - για οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών α και β περιέχει μονοπάτι από το α στο β και μονοπάτι από το β στο α.



συνεκτικό αλλά όχι ισχυρά συνεκτικό



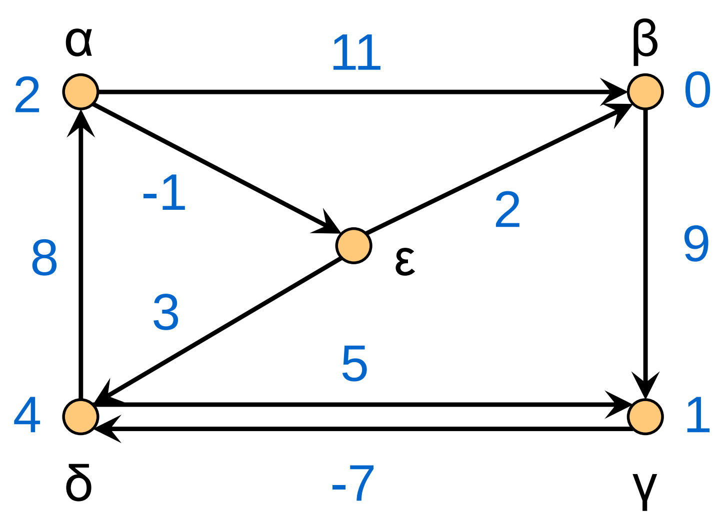
ισχυρά συνεκτικό

Γραφήματα (27)

Εμβαρές γράφημα $G = (V, E, \ell, w)$

ℓ βάρος κορυφών : συνάρτηση με πεδίο ορισμού V

w βάρος ακμών : συνάρτηση με πεδίο ορισμού E



Γραφήματα (28)

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E, w)$

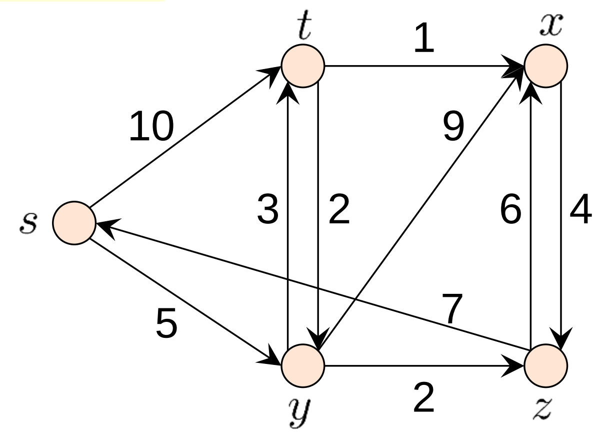
Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ (μη αρνητικά βάρη)

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

διαδρομή $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$

με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_k)$$



Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε όλες τις ελαφρύτερες διαδρομές από το s προς κάθε άλλο κόμβο

Γραφήματα (29)

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E, w)$

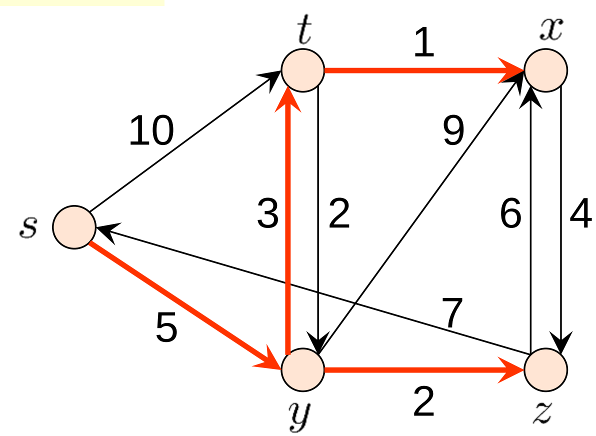
Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ (μη αρνητικά βάρη)

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

διαδρομή $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$

με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_k)$$



Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε όλες τις ελαφρύτερες διαδρομές από το s προς κάθε άλλο κόμβο

Γραφήματα (30)

- **Αλγόριθμος του Dijkstra:**
  - Διατηρεί τις ακόλουθες πληροφορίες.

$\rightarrow$ για κάθε κορυφή v μία **προεκτίμηση** $d(v)$ του βάρους της ελαφρύτατης διαδρομής από το s $(d(v) \geq \delta(s,v))$

$\rightarrow$ για κάθε κορυφή v έναν **προκάτοχο** $\pi(v)$ που είναι ο κόμβος που προηγείται του v στην διαδρομή από το s που έχει κατασκευαστεί μέχρι τώρα

$\rightarrow$ σύνολο κορυφών S για τις οποίες έχει υπολογιστεί το τελικό βάρος της ελαφρύτατης διαδρομής από το s $(d(v) = \delta(s,v), \forall v \in S)$

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

Γραφήματα (31)

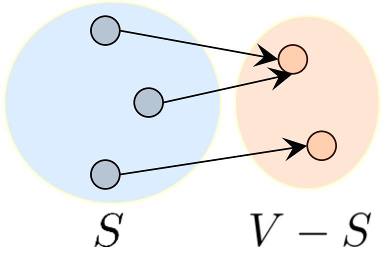
- **Αλγόριθμος του Dijkstra:**
  – Διατηρεί τις ακόλουθες πληροφορίες.

$\rightarrow$ για κάθε κορυφή v μία **προεκτίμηση** $d(v)$ του βάρους της ελαφρύτατης διαδρομής από το s $(d(v) \geq \delta(s, v))$

$\rightarrow$ για κάθε κορυφή v έναν **προκάτοχο** $\pi(v)$ που είναι ο κόμβος που προηγείται του v στην διαδρομή από το s που έχει κατασκευαστεί μέχρι τώρα

$\rightarrow$ σύνολο κορυφών S για τις οποίες έχει υπολογιστεί το τελικό βάρος της ελαφρύτατης διαδρομής από το s $(d(v) = \delta(s, v), \forall v \in S)$

Σε κάθε επανάληψη επιλέγει μία κορυφή $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$. Θέτει $S \leftarrow S \cup \{u\}$ και $d(v) = \min\{d(v), d(u) + w(u, v)\}$ για κάθε ακμή $(u, v) \in E$



Γραφήματα (32)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

Γραφήματα (33)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

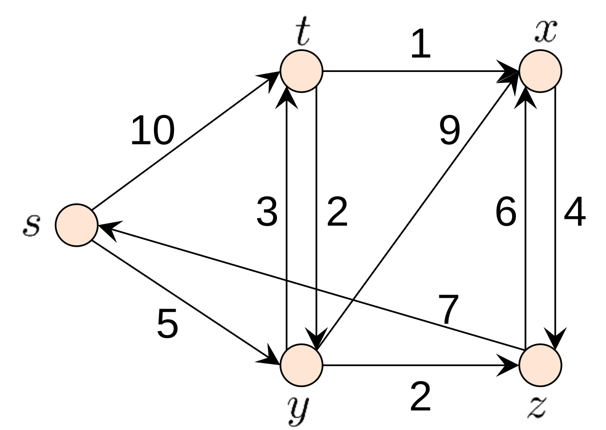
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$



Γραφήματα (34)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

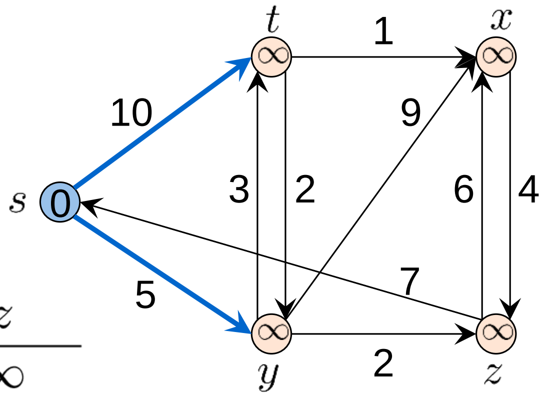
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$



	s (u)	t	x	y	z
$d()$	0	∞	∞	∞	∞
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\kappa\varepsilon\nu o$

Γραφήματα (35)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

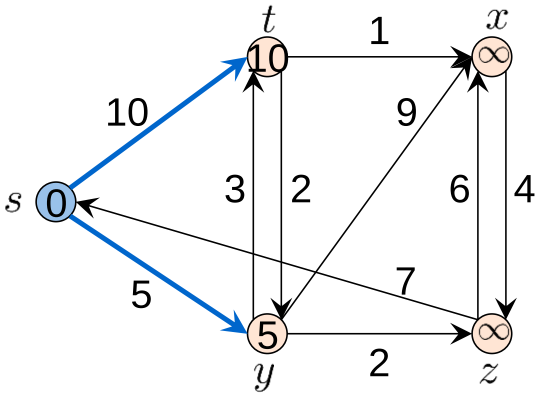
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$



	s (u)	t	x	y	z
$d()$	0	$\mathbf{10}$	∞	$\mathbf{5}$	∞
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\mathbf{s}$	$\kappa\varepsilon\nu o$	$\mathbf{s}$	$\kappa\varepsilon\nu o$

Γραφήματα (36)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

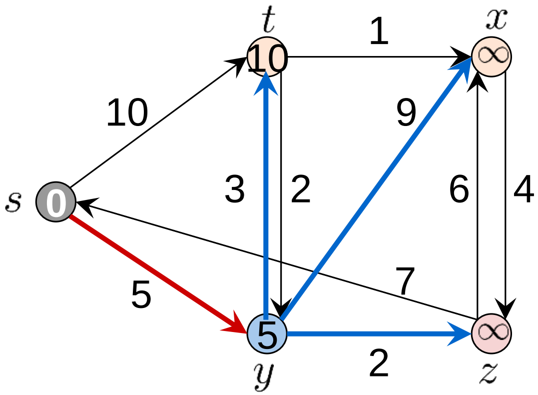
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

	s	t	x	u ↓ y	z
$d()$	0	10	∞	5	∞
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	s	$\kappa\varepsilon\nu o$	s	$\kappa\varepsilon\nu o$



Γραφήματα (37)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

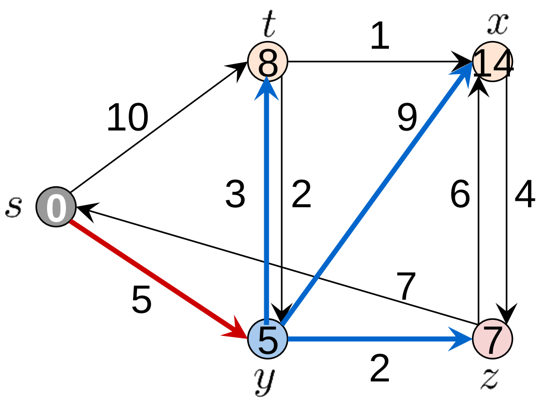
αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

u

	s	t	x	y	z
$d()$	0	**8**	**14**	5	**7**
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	**y**	**y**	s	**y**



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Γραφήματα (38)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

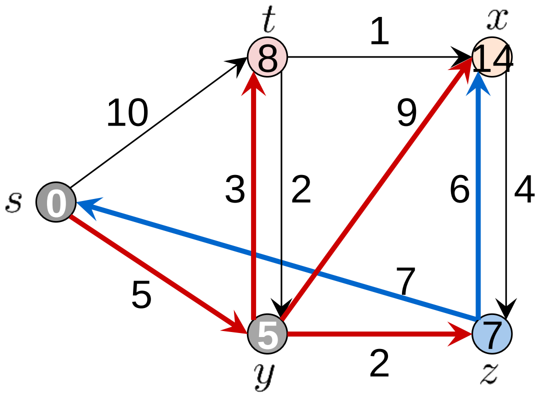
αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

u

	s	t	x	y	z
$d()$	0	8	14	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	y	s	y



Γραφήματα (39)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

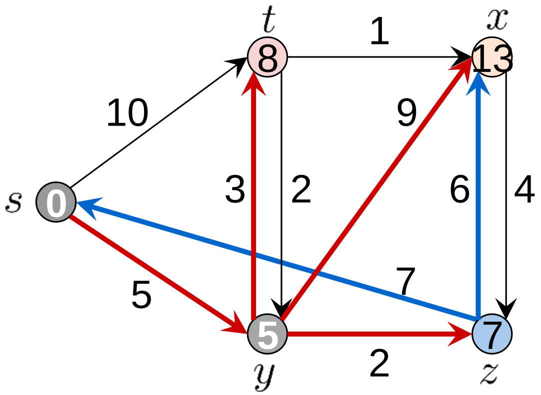
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

	s	t	x	y	z (u)
$d()$	0	8	**13**	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	**z**	s	y



Γραφήματα (40)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

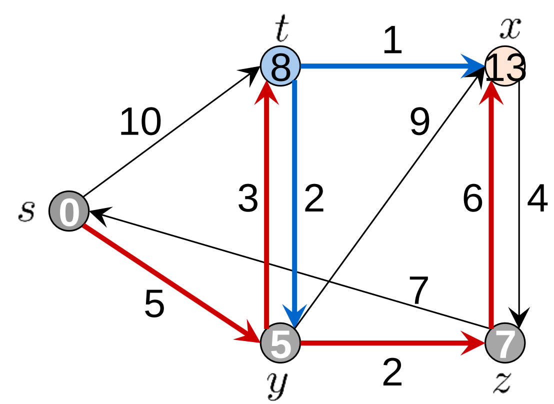
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$



u

	s	t	x	y	z
$d()$	0	8	13	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	z	s	y

Γραφήματα (41)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

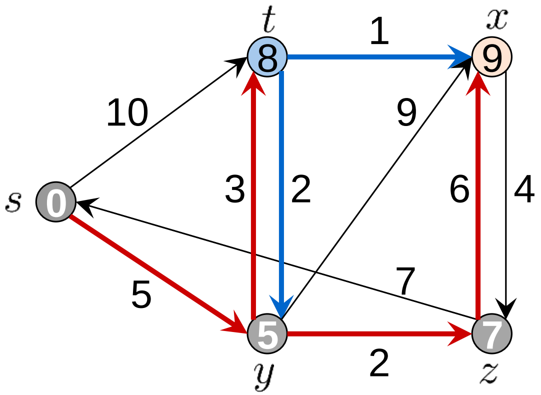
αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

u ↓

	s	t	x	y	z
$d()$	0	8	**9**	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	**t**	s	y



Γραφήματα (42)

Αλγόριθμος του Dijkstra

<u>Αρχικοποίηση</u> : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

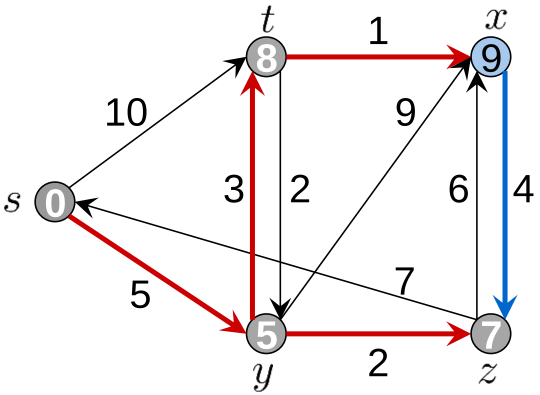
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

	s	t	u ↓ x	y	z
$d()$	0	8	9	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	t	s	y



Γραφήματα (43)

Αλγόριθμος του Dijkstra

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \kappa\varepsilon\nu o,\ d(v) \leftarrow \infty,\ \forall v \in V - \{s\}$

$S \leftarrow \emptyset,\ d(s) \leftarrow 0$

ενόσω $S \neq V$

έστω $u \in V - S$ τέτοια ώστε $d(u) = \min\{d(v) \mid v \in V - S\}$

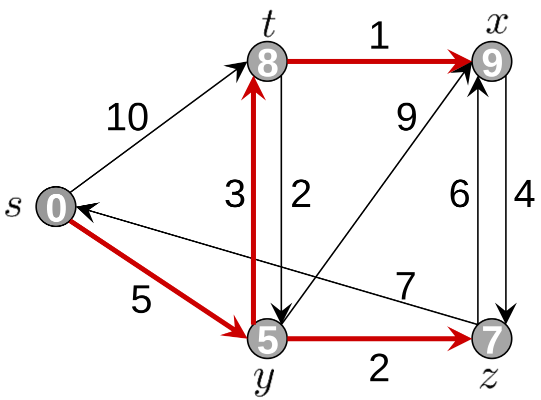
$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

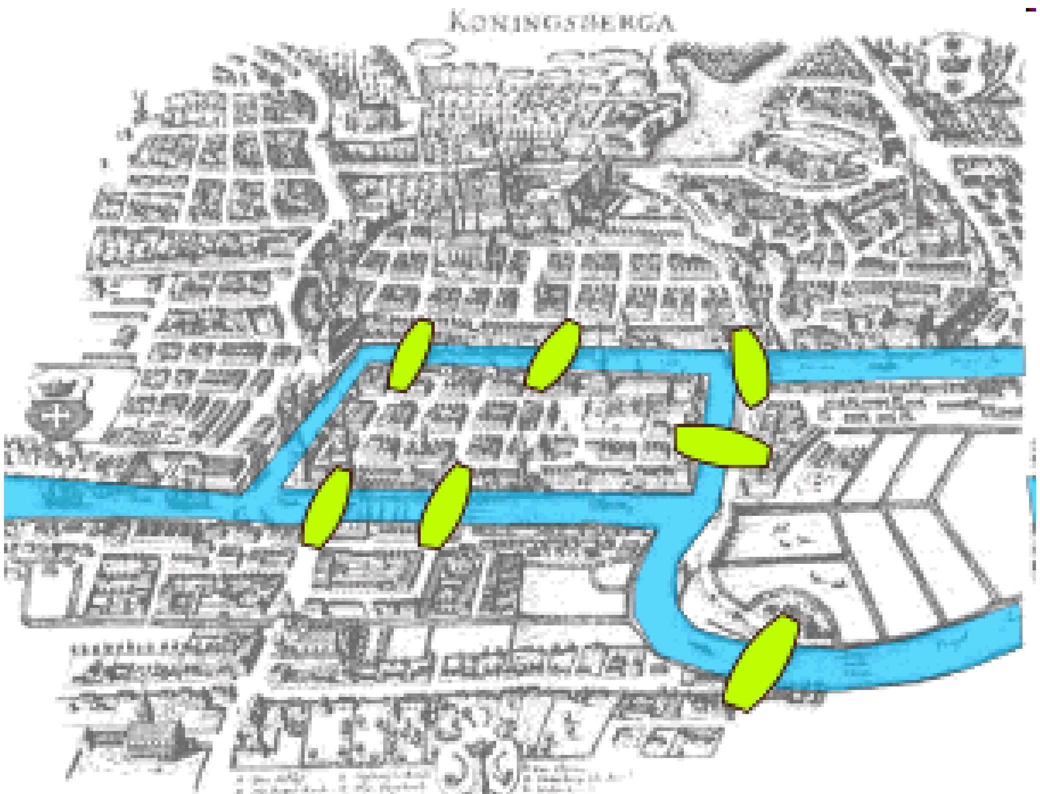
$\pi(v) \leftarrow u$



	s	t	x	y	z
$d()$	0	8	9	5	7
$\pi()$	$\kappa\varepsilon\nu o$	y	t	s	y

Γραφήματα (44)

Μονοπάτια και κυκλώματα Euler

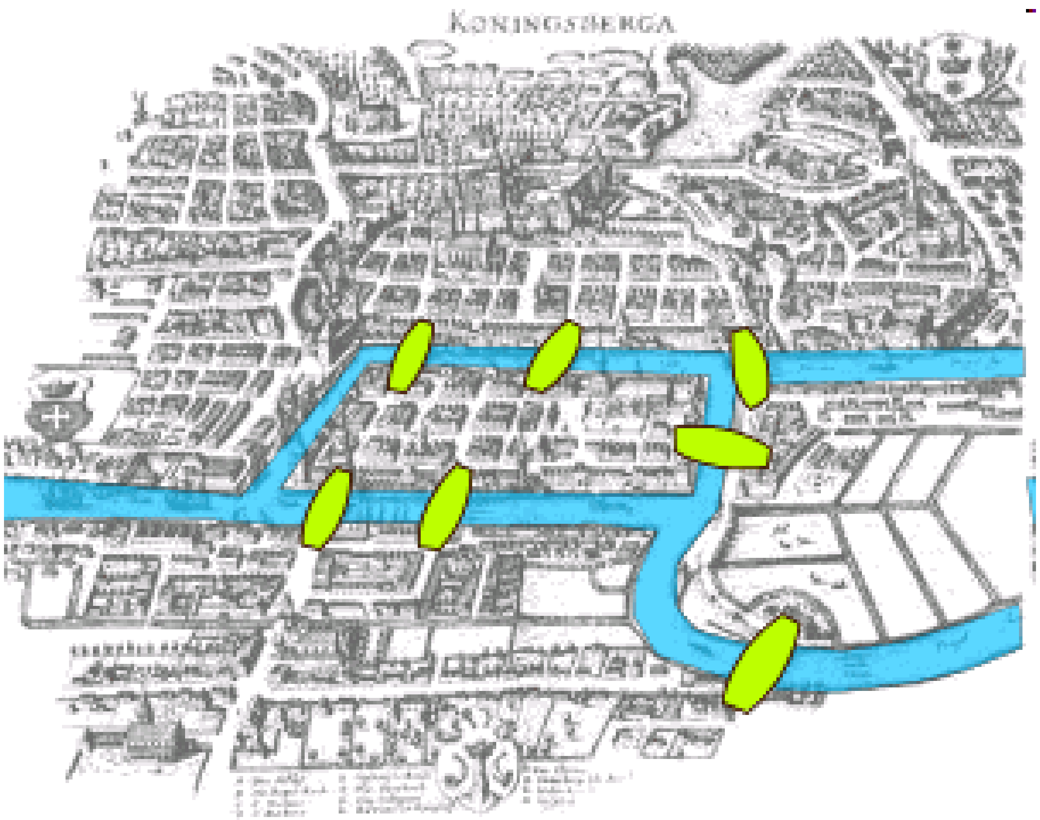


Μπορεί κανείς να διασχίσει ακριβώς μία φορά κάθε γέφυρα σε έναν περίπατο;

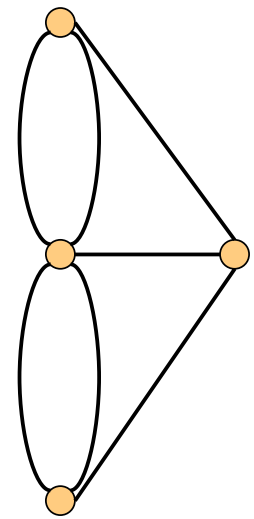
Πηγή: http: //www.ebabylone.com/encyclopedie_1736.html

Γραφήματα (45)

Μονοπάτια και κυκλώματα Euler



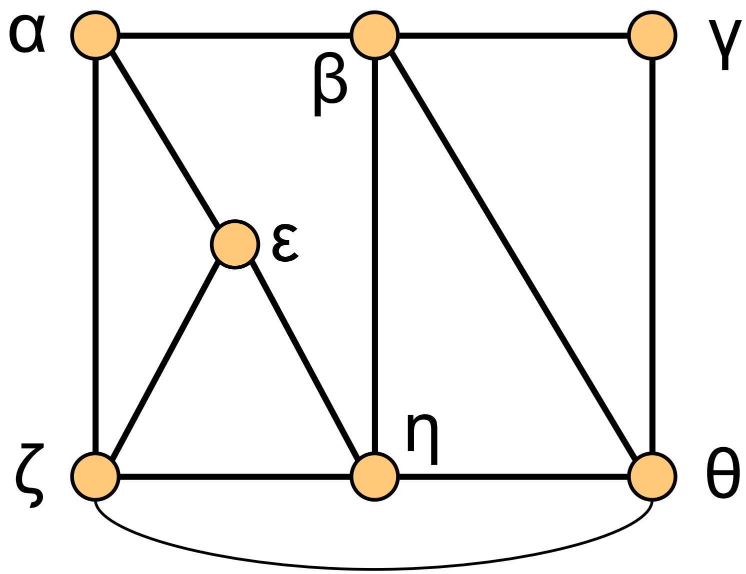
Μπορεί κανείς να διασχίσει ακριβώς μία φορά κάθε γέφυρα σε έναν περίπατο;



Πηγή: [http: //philsproof.com/2007/11/04/how-i-met-leonhard-euler/](http://philsproof.com/2007/11/04/how-i-met-leonhard-euler/)

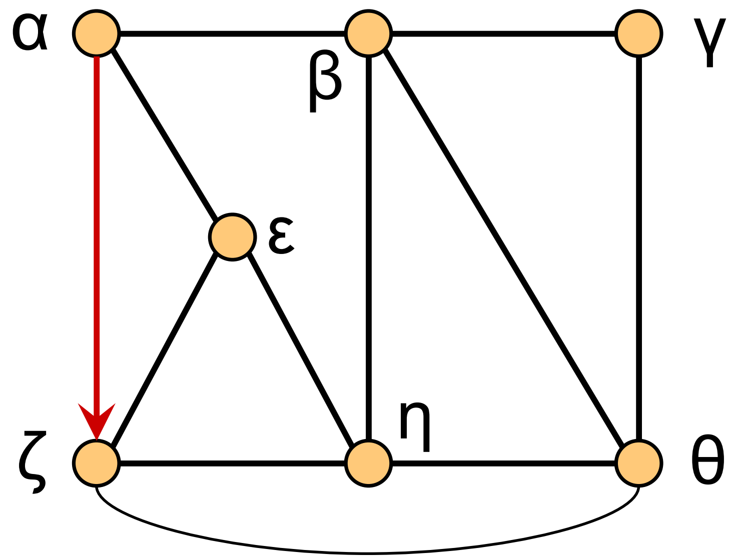
Γραφήματα (46)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



Γραφήματα (47)

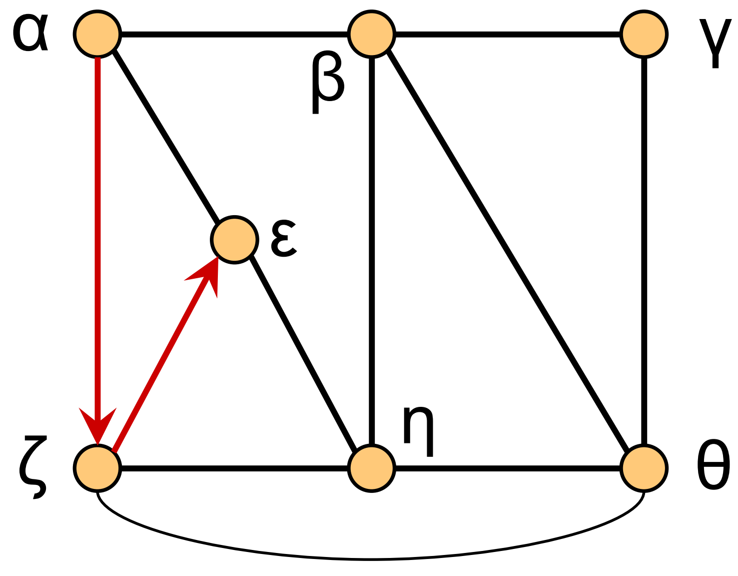
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ)

Γραφήματα (48)

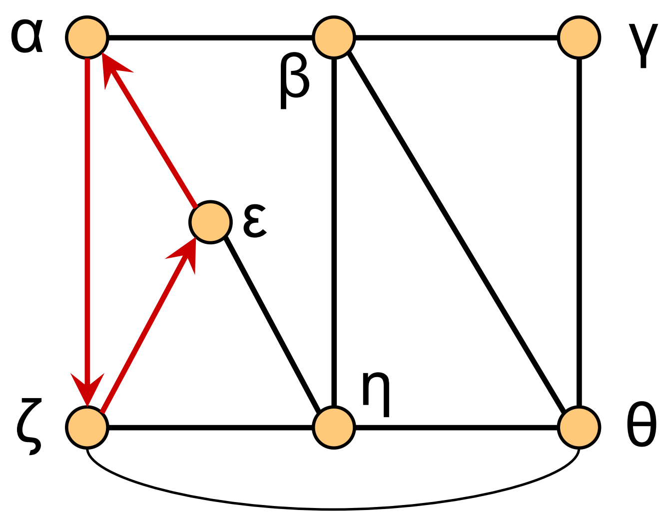
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε)

Γραφήματα (49)

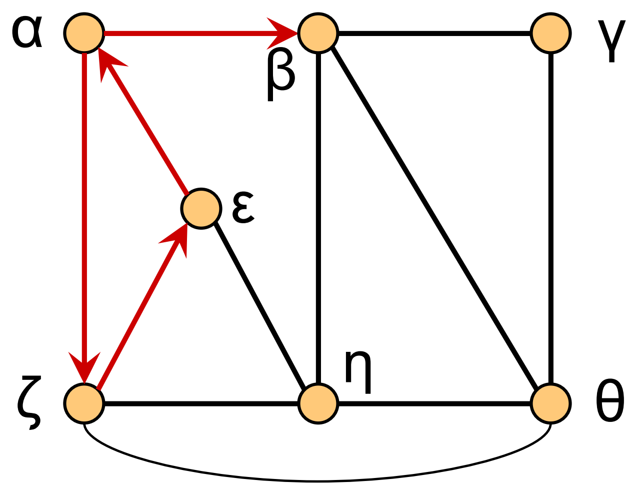
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α)

Γραφήματα (50)

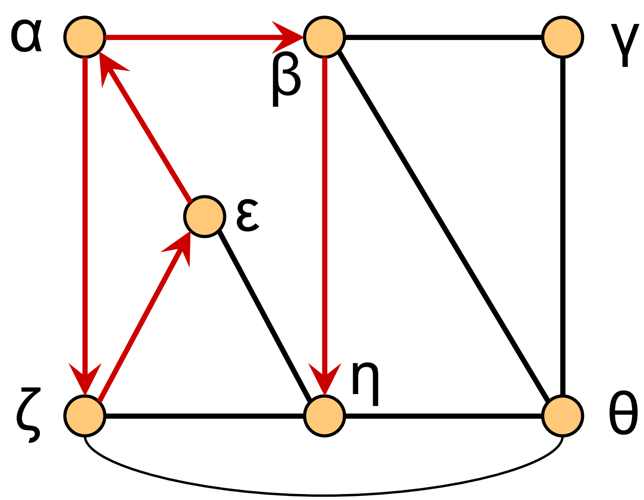
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β)

Γραφήματα (51)

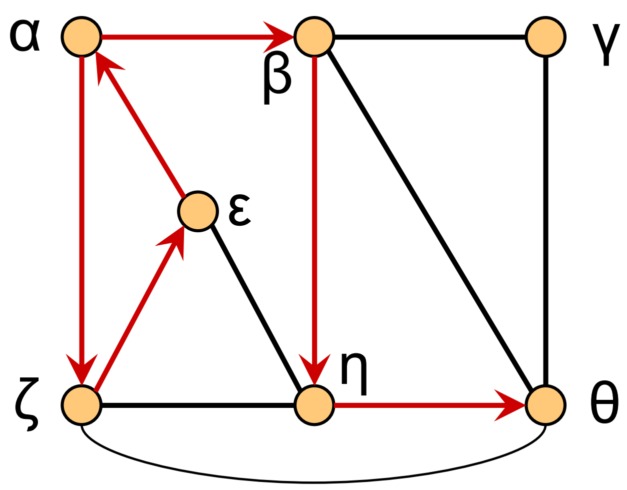
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η)

Γραφήματα (52)

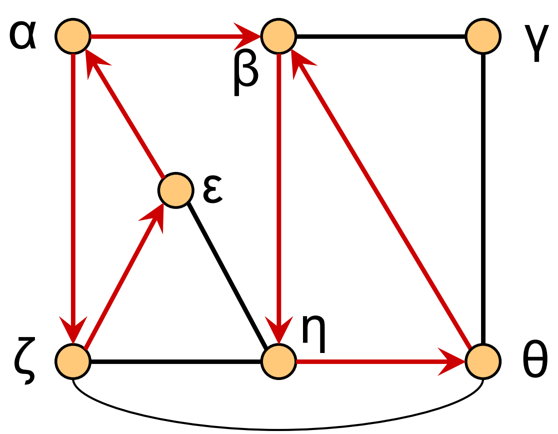
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ)

Γραφήματα (53)

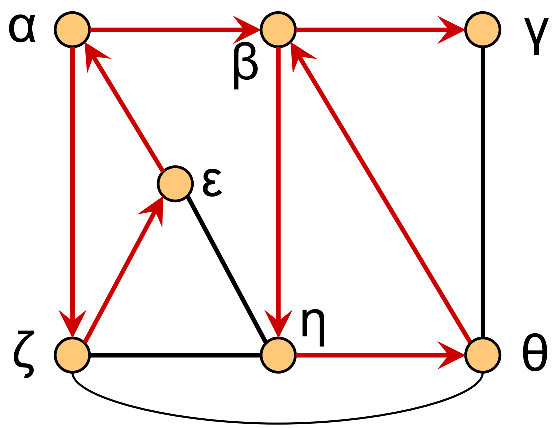
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β)

Γραφήματα (54)

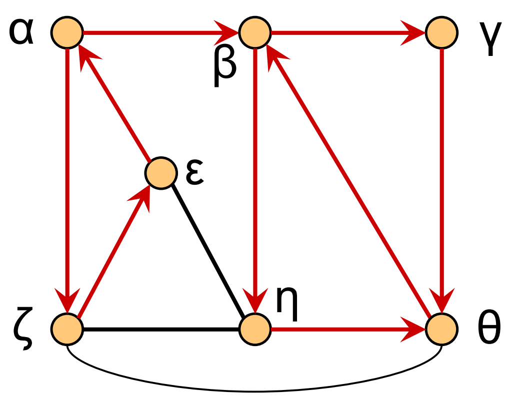
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  – **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β) (β,γ)

Γραφήματα (55)

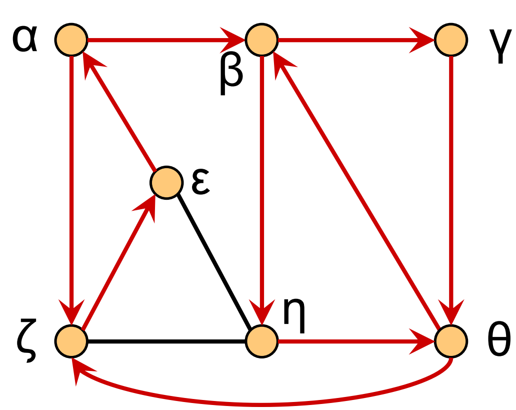
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β) (β,γ) (γ,θ)

Γραφήματα (56)

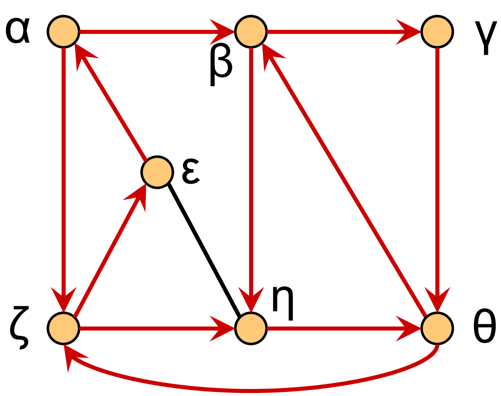
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,ζ)

Γραφήματα (57)

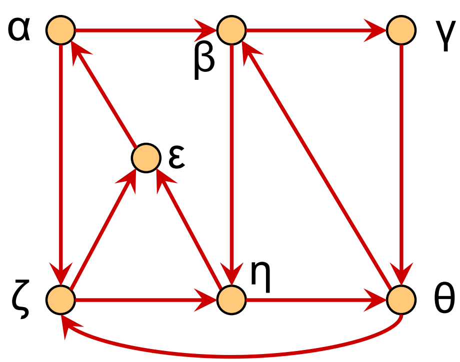
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,ζ) (ζ,η)

Γραφήματα (58)

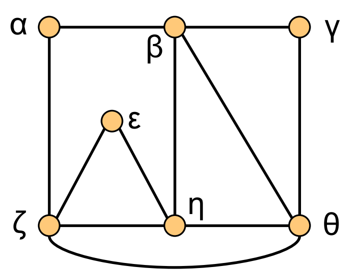
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  – **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,α) (α,β) (β,η) (η,θ) (θ,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,ζ) (ζ,η) (η,ε)

Γραφήματα (59)

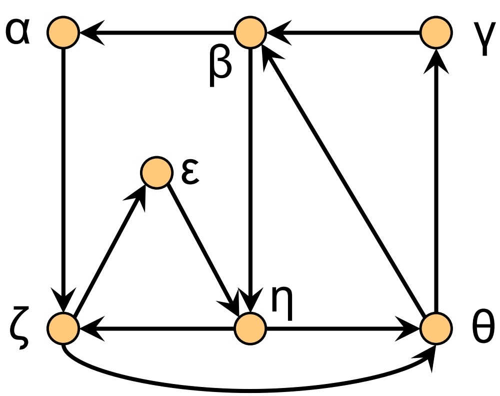
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Euler**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.



TexPoint fonts used in EMF.
Read the TexPoint manual before you delete this box.: AAAAAAA

Γραφήματα (60)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
  - **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Euler**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.



(α,ζ) (ζ,ε) (ε,η) (η,ζ) (ζ,θ) (θ,β) (β,η) (η,θ) (θ,γ) (γ,β) (β,α)

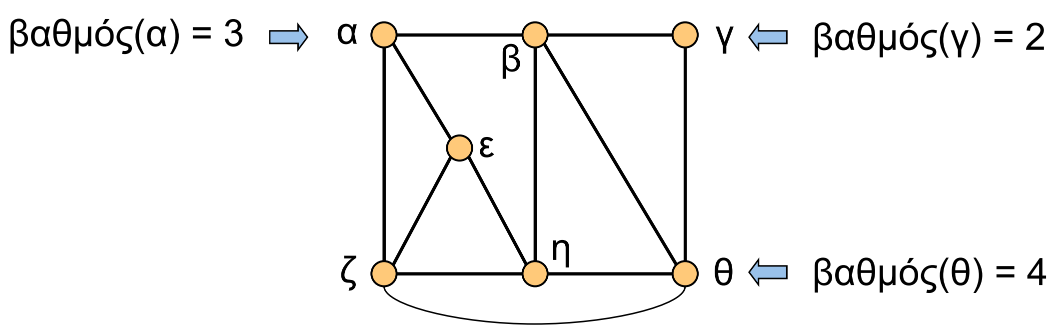
Γραφήματα (61)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.

Γραφήματα (62)

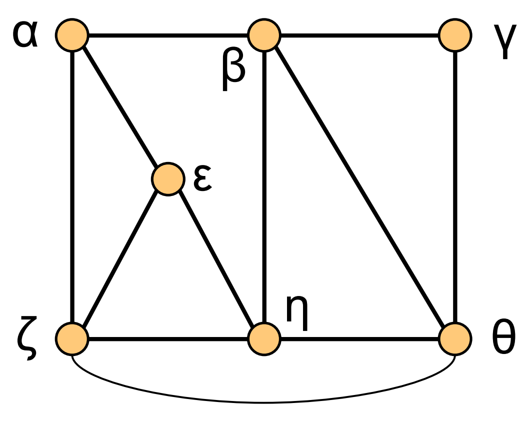
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.

Βαθμός κορυφής : πλήθος ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν



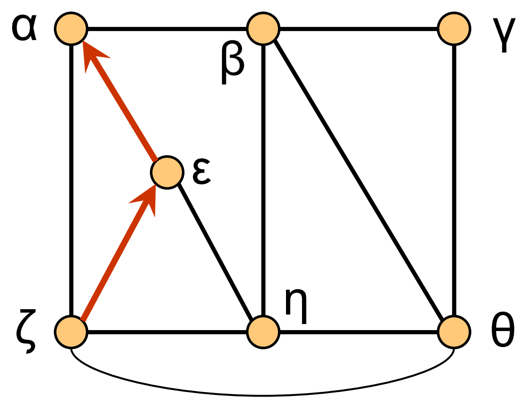
Γραφήματα (63)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** α) Έστω ότι υπάρχει μονοπάτι Euler. Τότε το γράφημα είναι συνεκτικό.



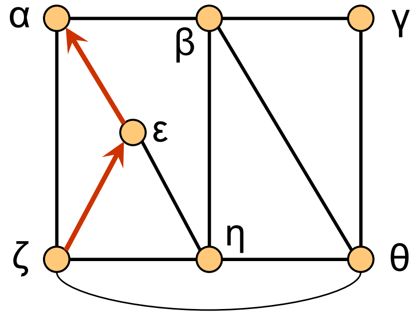
Γραφήματα (64)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** α) Έστω ότι υπάρχει μονοπάτι Euler. Τότε το γράφημα είναι συνεκτικό.
  - Κάθε φορά που το μονοπάτι επισκέπτεται μία κορυφή διασχίζει δύο ακμές.



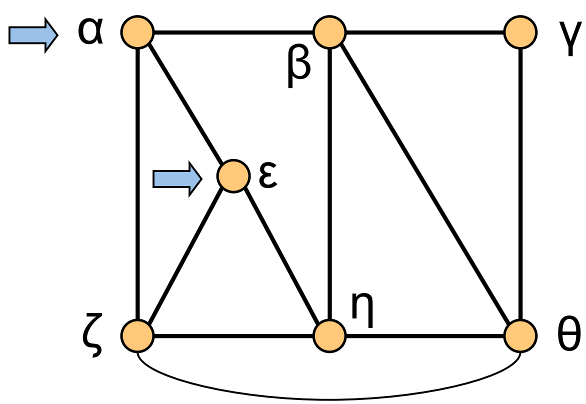
Γραφήματα (65)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** α) Έστω ότι υπάρχει μονοπάτι Euler. Τότε το γράφημα είναι συνεκτικό.
  - Κάθε φορά που το μονοπάτι επισκέπτεται μία κορυφή διασχίζει δύο ακμές.
  - Άρα όλες οι ενδιάμεσες κορυφές (εκτός από την αρχική και την τελική κορυφή του μονοπατιού) πρέπει να έχουν άρτιο βαθμό.
  - Αν οι κορυφές στα άκρα του μονοπατιού διαφέρουν τότε έχουν περιττό βαθμό, διαφορετικά έχουμε κύκλωμα Euler και όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.



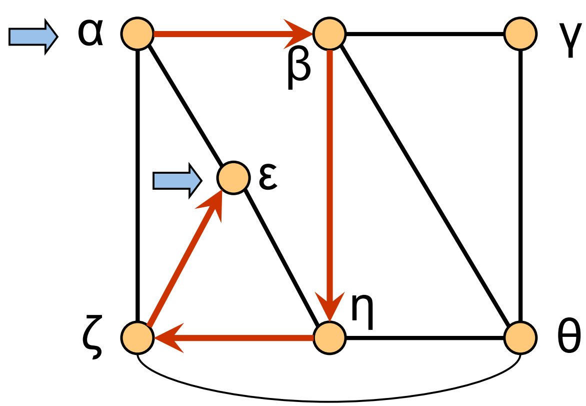
Γραφήματα (66)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.



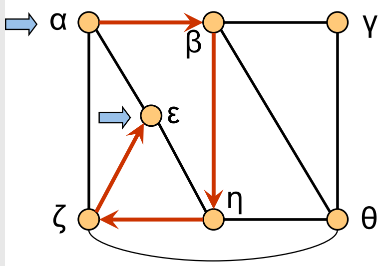
Γραφήματα (67)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι από την μία κορυφή περιττού βαθμού στην άλλη: σε κάθε άλλη κορυφή το μονοπάτι μπορεί να συνεχιστεί ακολουθώντας μία ακμή που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα.



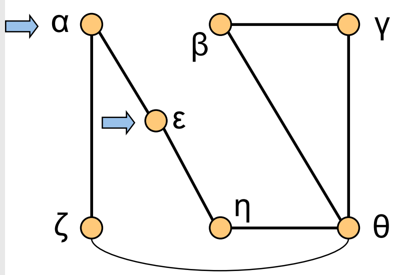
Γραφήματα (68)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι από την μία κορυφή περιττού βαθμού στην άλλη: σε κάθε άλλη κορυφή το μονοπάτι μπορεί να συνεχιστεί ακολουθώντας μία ακμή που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα.
  - Αν έχουμε χρησιμοποιήσει όλες τις ακμές τότε έχουμε βρει ένα μονοπάτι Euler.
  - Διαφορετικά αφαιρούμε τις ακμές του μονοπατιού από το γράφημα.



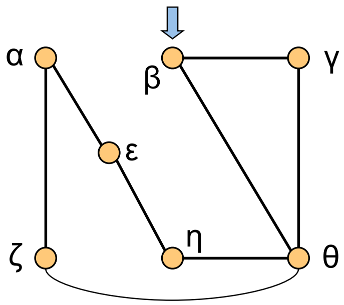
Γραφήματα (69)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι από την μία κορυφή περιττού βαθμού στην άλλη: σε κάθε άλλη κορυφή το μονοπάτι μπορεί να συνεχιστεί ακολουθώντας μία ακμή που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα.
  - Αν έχουμε χρησιμοποιήσει όλες τις ακμές τότε έχουμε βρει ένα μονοπάτι Euler.
  - Διαφορετικά αφαιρούμε τις ακμές του μονοπατιού από το γράφημα.



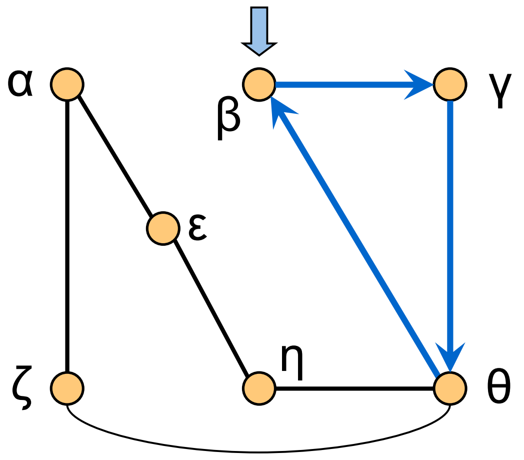
Γραφήματα (70)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Στο υπογράφημα που λαμβάνουμε κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό. Επιπλέον περιέχει μία τουλάχιστον κορυφή που βρίσκεται πάνω στο μονοπάτι που αφαιρέσαμε.



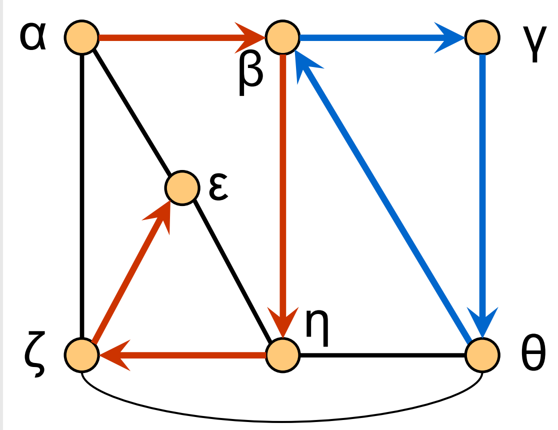
Γραφήματα (71)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Στο υπογράφημα που λαμβάνουμε κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό. Επιπλέον περιέχει μία τουλάχιστον κορυφή που βρίσκεται πάνω στο μονοπάτι που αφαιρέσαμε.
  - Ένα μονοπάτι που ξεκινά από αυτήν την κορυφή και διασχίζει κάθε ακμή από μία φορά πρέπει να καταλήγει στην ίδια κορυφή.



Γραφήματα (72)

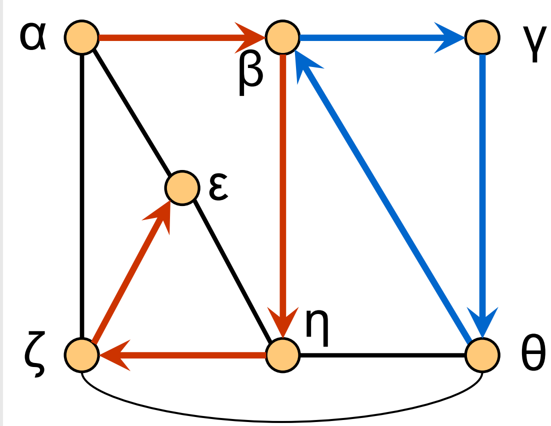
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.



(α,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε) + (β,γ) (γ,θ) (θ,β) =
(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε)

Γραφήματα (73)

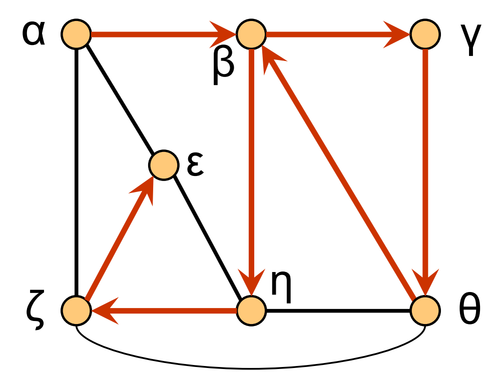
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



(α,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε) + (β,γ) (γ,θ) (θ,β) =
(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε)

Γραφήματα (74)

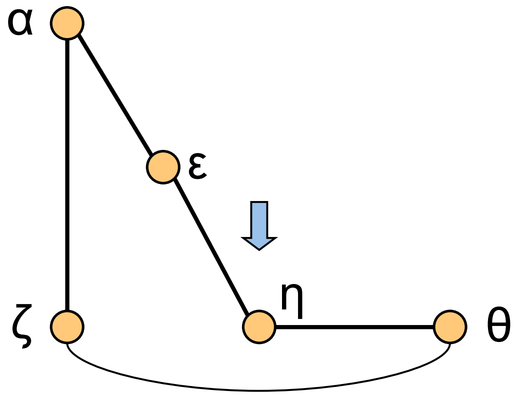
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



(α,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε) + (β,γ) (γ,θ) (θ,β) =
(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε)

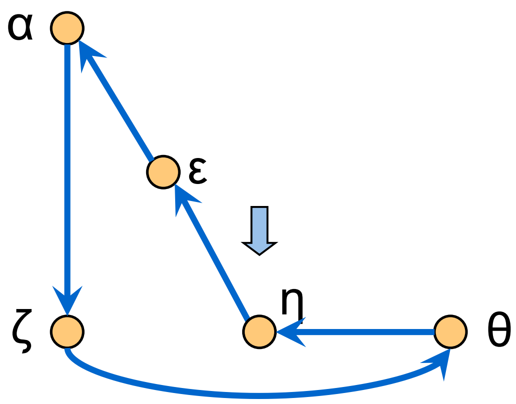
Γραφήματα (75)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



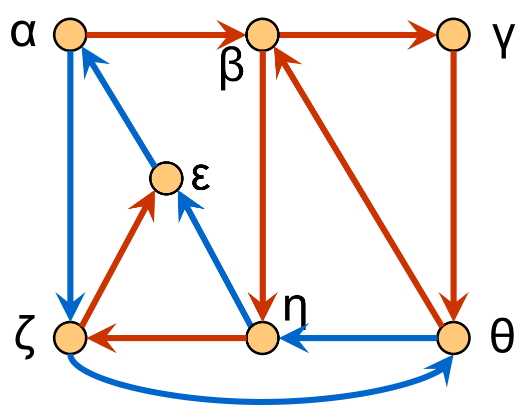
Γραφήματα (76)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



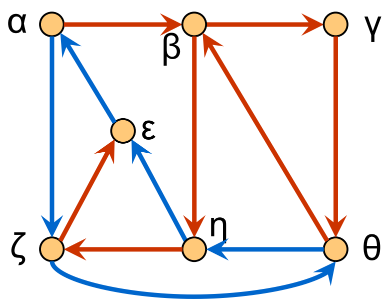
Γραφήματα (77)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



Γραφήματα (78)

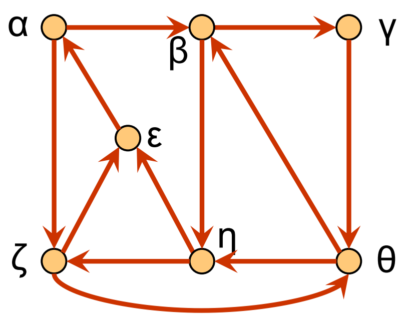
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε) + (η,ε) (ε,α) (α,ζ) (ζ,θ) (θ,η) =
(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ε) (ε,α) (α,ζ) (ζ,θ) (θ,η) (η,ζ) (ζ,ε)

Γραφήματα (79)

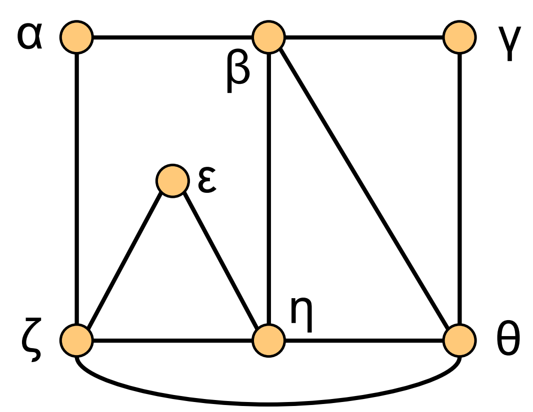
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Απόδειξη:** β) Έστω ότι υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού.
  - Συνδυάζοντας τα δύο μονοπάτια παίρνουμε ένα μεγαλύτερο μονοπάτι που διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος το πολύ μία φορά.
  - Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να λάβουμε ένα μονοπάτι Euler.



(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ζ) (ζ,ε) + (η,ε) (ε,α) (α,ζ) (ζ,θ) (θ,η) =
(α,β) (β,γ) (γ,θ) (θ,β) (β,η) (η,ε) (ε,α) (α,ζ) (ζ,θ) (θ,η) (η,ζ) (ζ,ε)

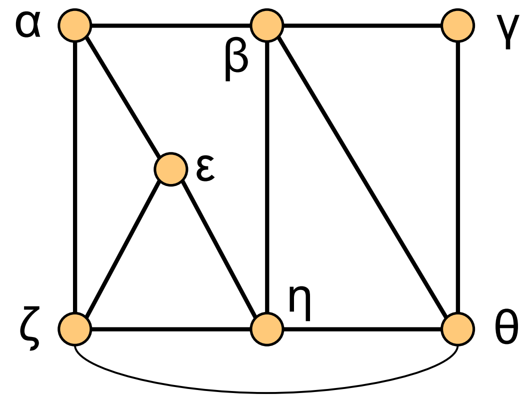
Γραφήματα (80)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Euler.**
- **Μονοπάτι Euler**: διασχίζει κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά
- **Θεώρημα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.
- **Πόρισμα:** Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει ένα κύκλωμα Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό.



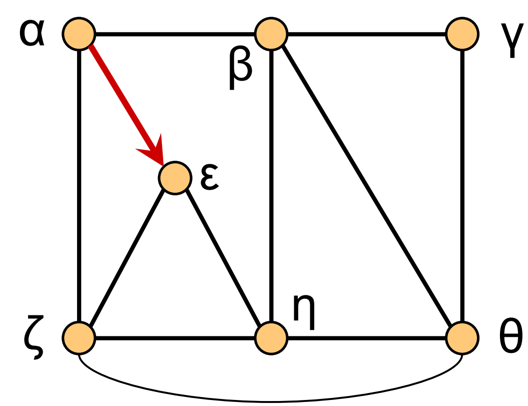
Γραφήματα (81)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



Γραφήματα (82)

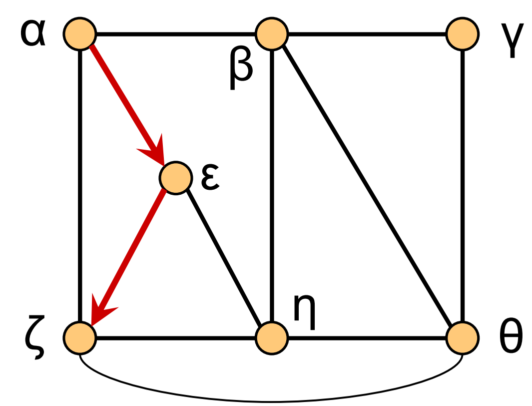
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε)

Γραφήματα (83)

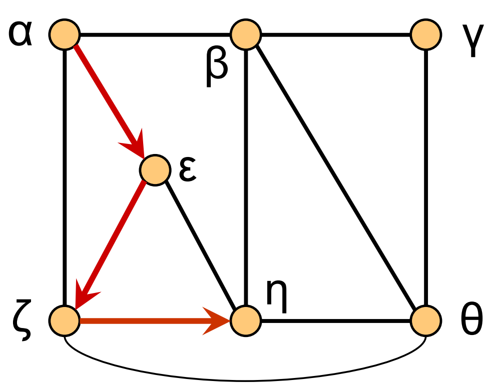
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε) (ε,ζ)

Γραφήματα (84)

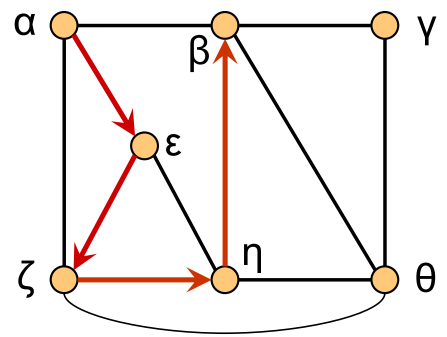
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε) (ε,ζ) (ζ,η)

Γραφήματα (85)

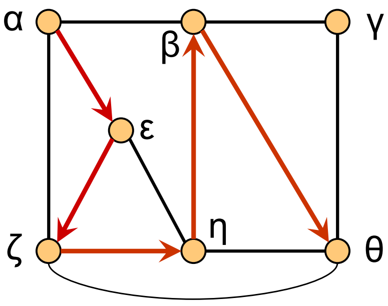
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε) (ε,ζ) (ζ,η) (η,β)

Γραφήματα (86)

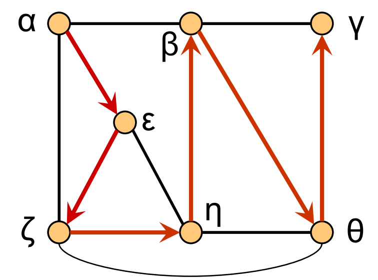
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε) (ε,ζ) (ζ,η) (η,β) (β,θ)

Γραφήματα (87)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.



(α,ε) (ε,ζ) (ζ,η) (η,β) (β,θ) (θ,γ)

Γραφήματα (88)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

- Η εύρεση μονοπατιού ή κυκλώματος Hamilton είναι γενικά ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα για το οποίο κανένας αποδοτικός αλγόριθμος δεν είναι γνωστός.
- Επιπλέον δεν γνωρίζουμε κάποια απλή ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μονοπατιού ή κυκλώματος Hamilton.

Γραφήματα (89)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

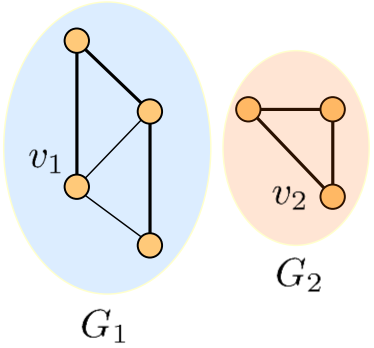
Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό. Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ δύο συνιστώσες του G. Θεωρούμε δύο κορυφές $v_1 \in V_1$ και $v_2 \in V_2$. Τότε η v_1 έχει βαθμό το πολύ $|V_1| - 1$.

Ομοίως η v_2 έχει βαθμό το πολύ $|V_2| - 1$.

Άρα το άθροισμα των βαθμών είναι μικρότερο ή ίσο με

$$|V_1| - 1 + |V_2| - 1 = (|V_1| + |V_2|) - 2 < n - 1$$

Άτοπο, άρα το γράφημα είναι συνεκτικό.



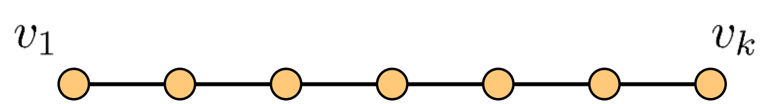
Γραφήματα (90)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έστω τώρα ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$



Γραφήματα (91)

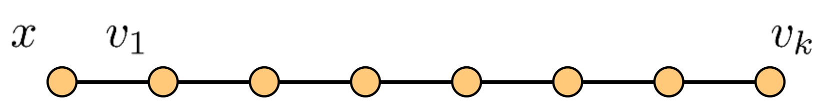
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έστω τώρα ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$

Αν υπάρχει ακμή $\{v_1, x\}$ τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές



Γραφήματα (92)

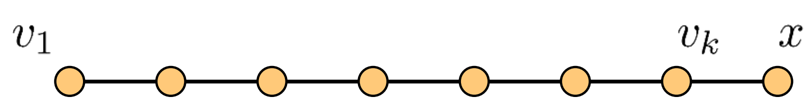
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έστω τώρα ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ όπου $k < n$

Ομοίως αν υπάρχει ακμή $\{v_k, x\}$ τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, v_2, \dots, v_k, x)$



Γραφήματα (93)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

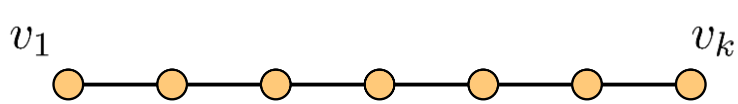
Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έστω τώρα ένα μονοπάτι $p=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k<n$

Διαφορετικά για κάθε ακμή $\{v_1, x\}$ και $\{v_k, x\}$ ισχύει $x \in p$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδες κύκλωμα με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$



Γραφήματα (94)

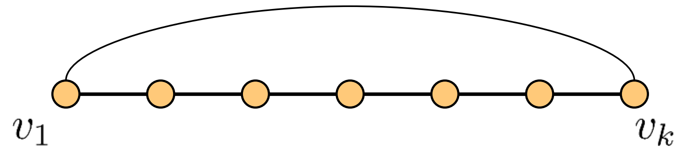
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδες κύκλωμα με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Προφανώς ισχύει αν υπάρχει η ακμή $\{v_1, v_k\}$



Γραφήματα (95)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

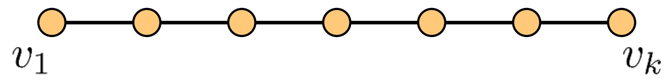
Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδες κύκλωμα με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Υποθέτουμε τώρα ότι δεν υπάρχει η $\{v_1, v_k\}$

Έστω ότι η v_1 συνδέεται με τις κορυφές $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_\ell}, 2 \leq i_j \leq k-1$

Τότε η v_k πρέπει να συνδέεται με μία από τις $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \ldots, v_{i_\ell-1}$. Διαφορετικά το άθροισμα των βαθμών των v_1 και v_k θα ήταν το πολύ $\ell + k - 1 - \ell \leq n-2$



Γραφήματα (96)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

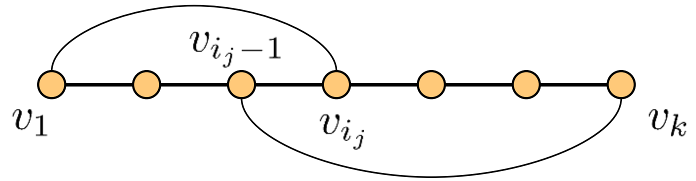
Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδες κύκλωμα με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Υποθέτουμε τώρα ότι δεν υπάρχει η $\{v_1, v_k\}$

Έστω ότι η v_1 συνδέεται με τις κορυφές $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_\ell}, 2 \leq i_j \leq k-1$

Έστω λοιπόν ότι η v_k συνδέεται με την v_{i_j-1}



Γραφήματα (97)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

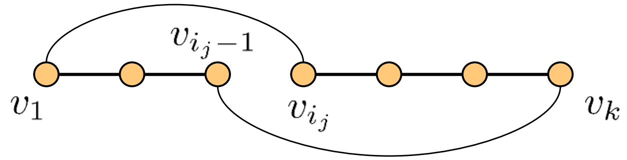
Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδες κύκλωμα με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Υποθέτουμε τώρα ότι δεν υπάρχει η $\{v_1, v_k\}$

Έστω ότι η v_1 συνδέεται με τις κορυφές $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_\ell}, 2 \leq i_j \leq k-1$

Έστω λοιπόν ότι η v_k συνδέεται με την v_{i_j-1}



Άρα έχουμε τον κύκλο $v_1, v_2, \ldots, v_{i_j-1}, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_{i_j}, v_1$

Γραφήματα (98)

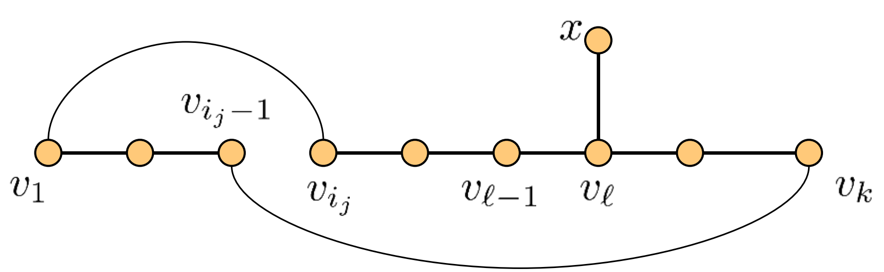
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έχουμε τώρα ένα στοιχειώδες κύκλωμα c με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Αφού $k < n$ υπάρχει κορυφή x τέτοια ώστε η ακμή $\{x, v_\ell\}$ ανήκει στο G



Γραφήματα (99)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

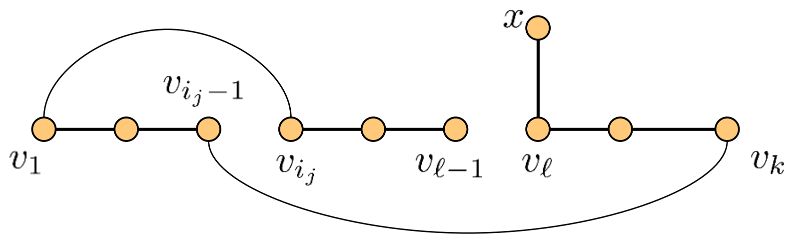
Θεώρημα Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ τότε υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο G.

Απόδειξη

Έχουμε τώρα ένα στοιχειώδες κύκλωμα c με τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Αφού $k < n$ υπάρχει κορυφή x τέτοια ώστε η ακμή $\{x, v_i\}$ ανήκει στο G

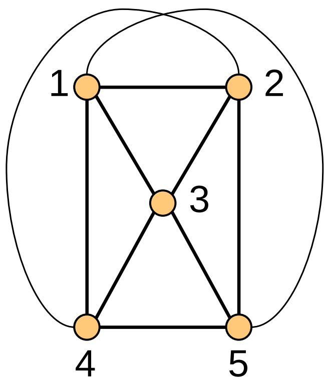
Τότε υπάρχει το μονοπάτι $x, v_\ell, \ldots, v_k, v_{i_j-1}, \ldots, v_1, v_{i_j}, \ldots, v_{\ell-1}$ με $k+1$ κορυφές



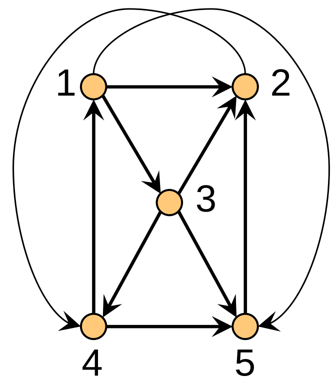
Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή αυτή μέχρι να πάρουμε μονοπάτι με n κορυφές

Γραφήματα (100)

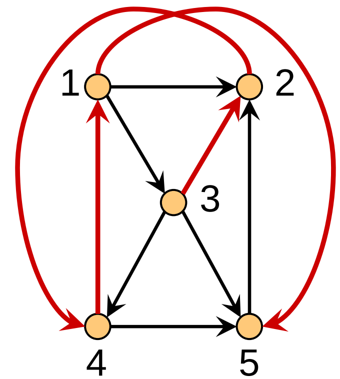
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.



K_5



κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα: επιλέγουμε μία κατεύθυνση για κάθε ακμή



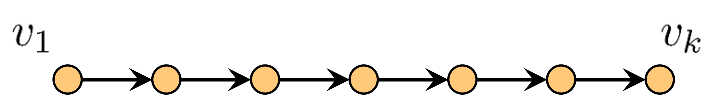
Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Γραφήματα (101)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$.



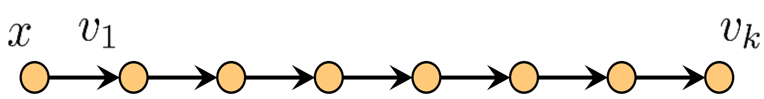
Γραφήματα (102)

- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές



Γραφήματα (103)

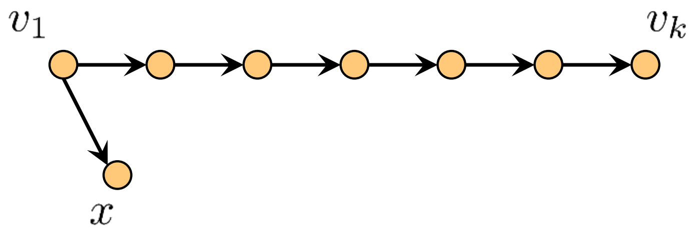
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x).



Γραφήματα (104)

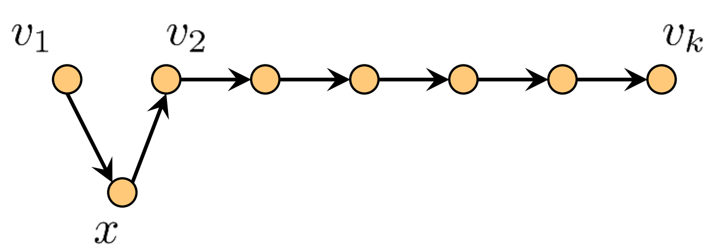
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές.



Γραφήματα (105)

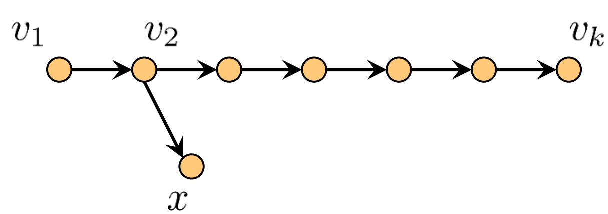
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k + 1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k + 1$ κορυφές. Αν όχι τότε υπάρχει η (v_2, x) και εξετάζουμε



αν υπάρχει (x, v_3) ή (v_3, x) κ.ο.κ.

Γραφήματα (106)

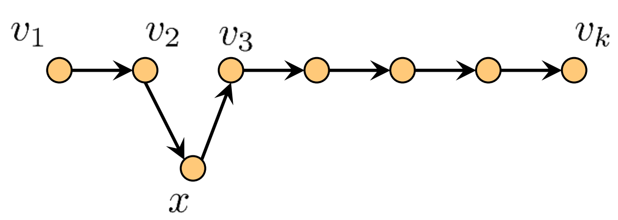
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές. Αν όχι τότε υπάρχει η (v_2, x) και εξετάζουμε



αν υπάρχει (x, v_3) ή (v_3, x) κ.ο.κ.

Γραφήματα (107)

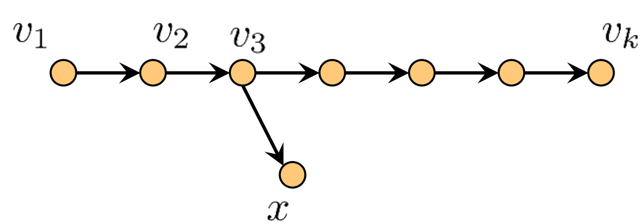
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές. Αν όχι τότε υπάρχει η (v_2, x) και εξετάζουμε



αν υπάρχει (x, v_3) ή (v_3, x) κ.ο.κ.

Γραφήματα (108)

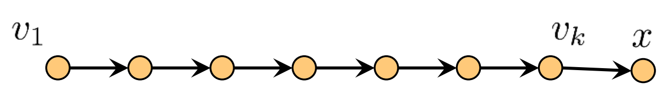
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές. Αν όχι τότε υπάρχει η (v_2, x) και εξετάζουμε



αν υπάρχει (x, v_3) ή (v_3, x) κ.ο.κ. Αν τελικά δεν υπάρχει $v_i \in p$ τέτοιο ώστε (v_i, x) και (x, v_{i+1}) να υπάρχουν στο γράφημα, τότε υπάρχει η (v_k, x) οπότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, v_2, \ldots, v_k, x)$ με $k+1$ κορυφές.

Γραφήματα (109)

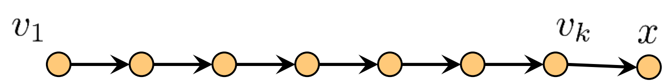
- **Μονοπάτια και κυκλώματα Hamilton.**
  - **Μονοπάτι Hamilton**: επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
  - **Κύκλωμα Hamilton**: ορίζεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα Ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Έστω ένα μονοπάτι $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ όπου $k < n$. Έστω κορυφή $x \notin p$

Αν υπάρχει ακμή (x, v_1) τότε έχουμε μονοπάτι $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές

Διαφορετικά υπάρχει η ακμή (v_1, x). Αν υπάρχει και η (x, v_2) τότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, x, v_2, \ldots, v_k)$ με $k+1$ κορυφές. Αν όχι τότε υπάρχει η (v_2, x) και εξετάζουμε



αν υπάρχει (x, v_3) ή (v_3, x) κ.ο.κ. Αν τελικά δεν υπάρχει $v_i \in p$ τέτοιο ώστε (v_i, x) και (x, v_{i+1}) να υπάρχουν στο γράφημα, τότε υπάρχει η (v_k, x) οπότε έχουμε μονοπάτι $(v_1, v_2, \ldots, v_k, x)$ με $k+1$ κορυφές.

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο μέχρι να κατασκευάσουμε μονοπάτι με n κορυφές.

Ασκήσεις

- Έστω G={V,E} ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με k συνεκτικές συνιστώσες και |V|=n, |E|=m. Αποδείξτε ότι $m \geq n-k$.
- Δείξτε ότι σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα το άθροισμα των εισερχόμενων βαθμών επί όλων των κορυφών ισούται με το άθροισμα όλων των εξερχόμενων ακμών.

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- http: //www.personal.psu.edu/kxl272/assignment5%266.html
- http: //www.pearltrees.com/davidbruce/web/id2623706
- http: //www.ebabylone.com/encyclopedie_1736.html
- http: //philsproof.com/2007/11/04/how-i-met-leonhard-euler/