Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 7: Σχέσεις και Συναρτήσεις

Αν. Καθηγητής Κ. Στεργίου
e-mail: kstergiou@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

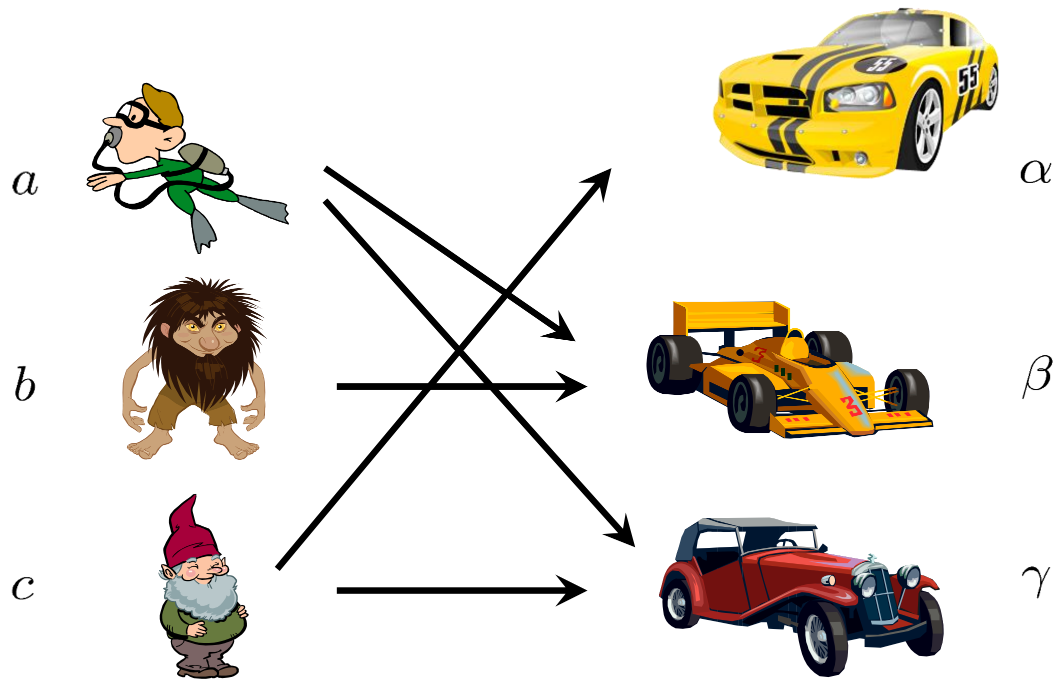
- Διμελείς σχέσεις μεταξύ διακριτών αντικειμένων.
  - Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.
    - Ανακλαστικές, συμμετρικές, αντισυμμετρικές, μεταβατικές σχέσεις.
  - Μεταβατική επέκταση.
  - Σχέσεις ισοδυναμίας.
  - Σχέσεις μερικής διάταξης.
- Συναρτήσεις.

Στόχοι

- Μελέτη της έννοιας της σχέσης μεταξύ δύο ή περισσότερων διακριτών αντικειμένων.
- Λεπτομερής μελέτη διμελών σχέσεων και των ιδιοτήτων τους τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο.
- Κατανόηση ορισμένων προχωρημένων αλλά σημαντικών εννοιών όπως η μεταβατική επέκταση και η μεταβατική θήκη.
- Εισαγωγή στη μελέτη διακριτών συναρτήσεων.

Σχέσεις και Συναρτήσεις (1/29)

- Σχέσεις μεταξύ διακριτών αντικειμένων.



Διμελής σχέση: $R = \{(a,\beta),(a,\gamma),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\gamma)\}$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (2/29)

- Σχέσεις μεταξύ διακριτών αντικειμένων.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Διμελής σχέση R από το A στο B: $R \subseteq A \times B$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (3/29)

- Σχέσεις μεταξύ διακριτών αντικειμένων.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

Διμελής σχέση R από το A στο B: $R \subseteq A \times B$

π.χ.

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$
$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a,\alpha), (a,\beta), (a,\gamma),\\ &(b,\alpha), (b,\beta), (b,\gamma),\\ &(c,\alpha), (c,\beta), (c,\gamma)\} \end{aligned}$$

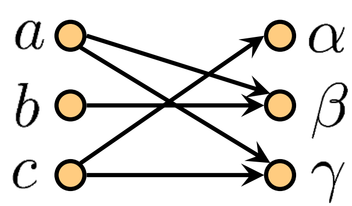
Σχέσεις και Συναρτήσεις (4/29)

- Αναπαράσταση διμελών σχέσεων

<u>*Διατεταμένα ζεύγη*</u>

$$R = \{(a,\beta),(a,\gamma),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\gamma)\}$$

<u>*Διάγραμμα*</u>



<u>*Πίνακας*</u>

	α	β	γ
a		$\surd$	$\surd$
b		$\surd$	
c	$\surd$		$\surd$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (5/29)

- Διμελής σχέσεις.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Διμελείς σχέσεις R_1 και R_2 από το A στο B

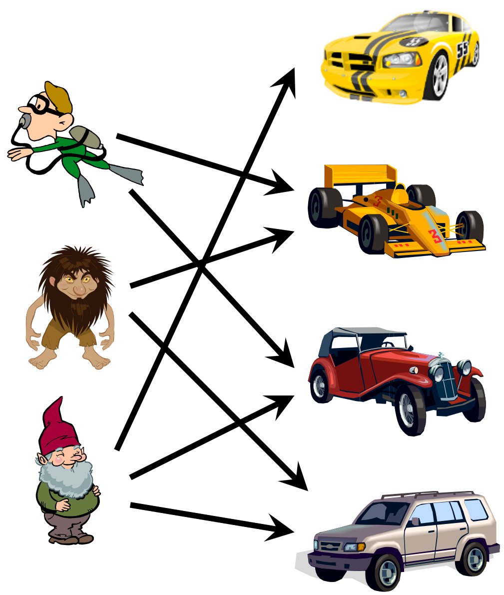
Οι παρακάτω είναι διμελείς σχέσεις από το A στο B

$$R_1 \cup R_2,\ \ R_1 \cap R_2,$$

$$R_1 - R_2,\ \ R_1 \oplus R_2$$

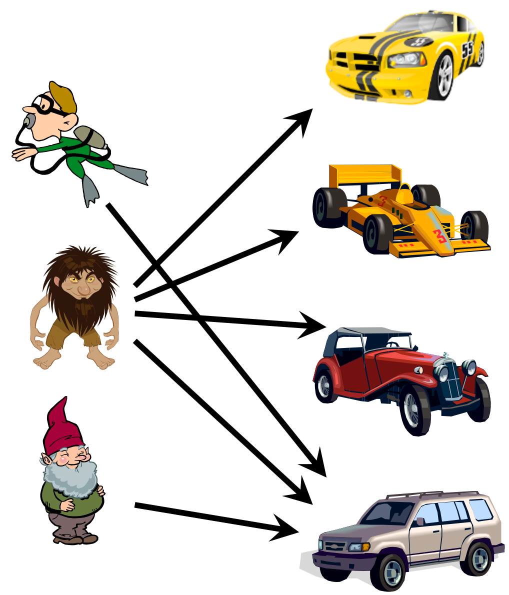
Σχέσεις και Συναρτήσεις (6/29)

- Διμελής σχέσεις.



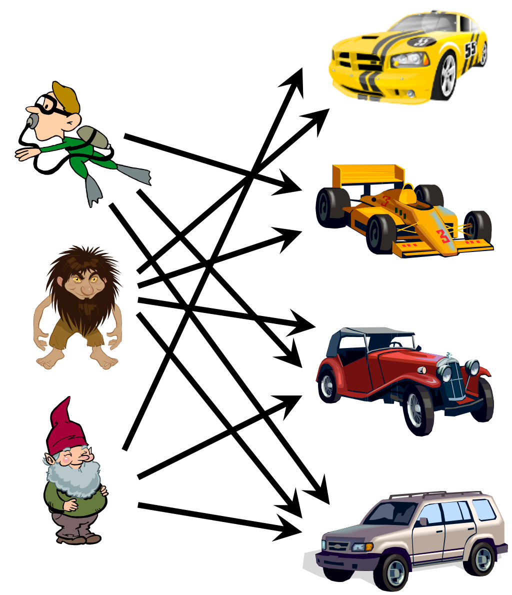
R_1

αυτοκίνητα που
τους αρέσουν



R_2

αυτοκίνητα που
μπορούν να αγοράσουν

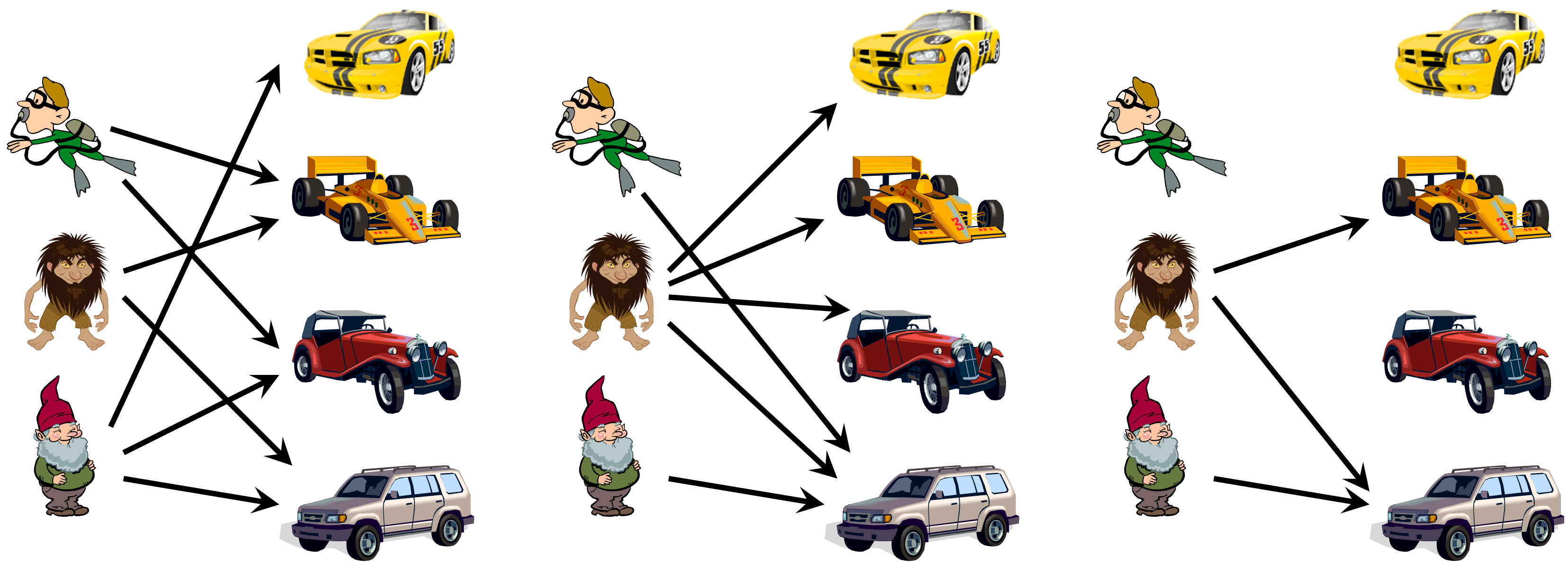


$R_1 \cup R_2$

είτε τους αρέσουν
είτε μπορούν να αγοράσουν

Σχέσεις και Συναρτήσεις (7/29)

- Διμελής σχέσεις.



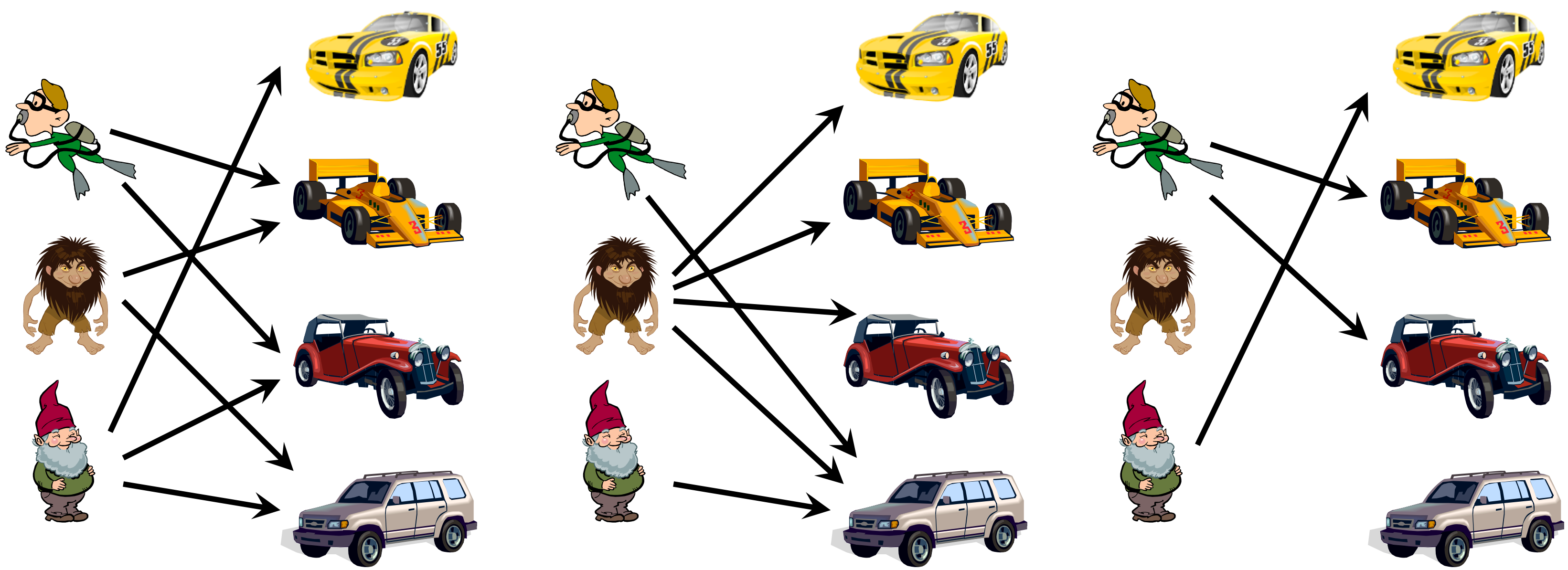
R_1
αυτοκίνητα που τους αρέσουν

R_2
αυτοκίνητα που μπορούν να αγοράσουν

$R_1 \cap R_2$
τους αρέσουν και μπορούν να αγοράσουν

Σχέσεις και Συναρτήσεις (8/29)

- Διμελής σχέσεις.



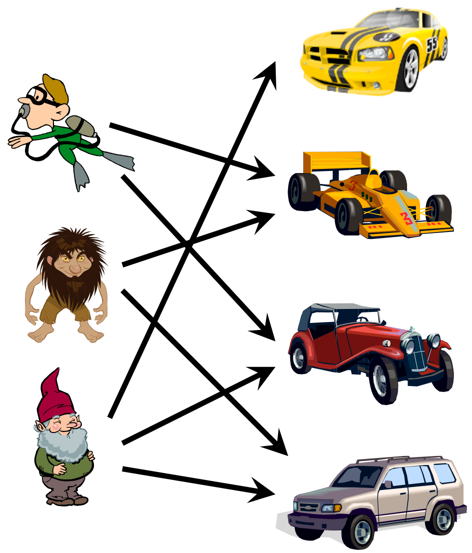
R_1
αυτοκίνητα που
τους αρέσουν

R_2
αυτοκίνητα που
μπορούν να αγοράσουν

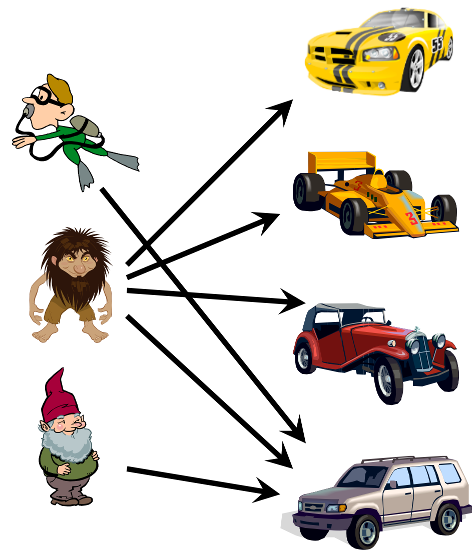
$R_1 - R_2$
τους αρέσουν και δεν
μπορούν να αγοράσουν

Σχέσεις και Συναρτήσεις (9/29)

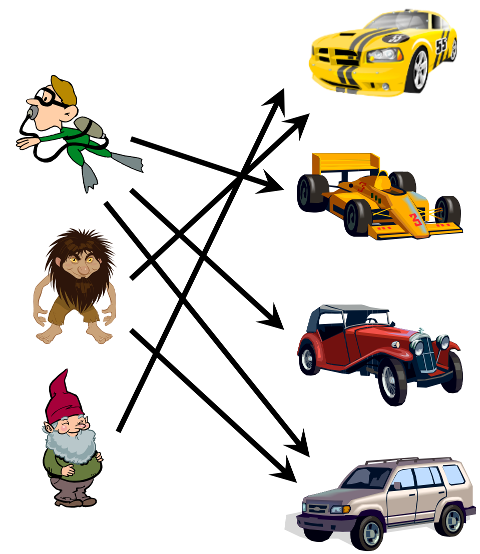
- Διμελής σχέσεις.



R_1
αυτοκίνητα που
τους αρέσουν



R_2
αυτοκίνητα που
μπορούν να αγοράσουν



$R_1 \oplus R_2$
τους αρέσουν και δεν
μπορούν να αγοράσουν
ή δεν τους αρέσουν και
μπορούν να αγοράσουν

Σχέσεις και Συναρτήσεις (10/29)

- Πολυμελείς σχέσεις.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Διμελής σχέση R από το A στο B: $R \subseteq A \times B$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε σχέσεις τριμελείς, τετραμελείς, κ.ο.κ.

Σχέσεις και Συναρτήσεις (11/29)

- Πολυμελείς σχέσεις.

Σύνολα A, B και C

Καρτεσιανό γινόμενο

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$$

Τριμελής σχέση $R \subseteq A \times B \times C$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (12/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Διμελής σχέση R από το A στο B: $R \subseteq A \times B$

Όταν $B = A$ έχουμε μία διμελή σχέση επί του A

Σχέσεις και Συναρτήσεις (13/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Σύνολα A και B

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Διμελής σχέση R από το A στο B: $R \subseteq A \times B$

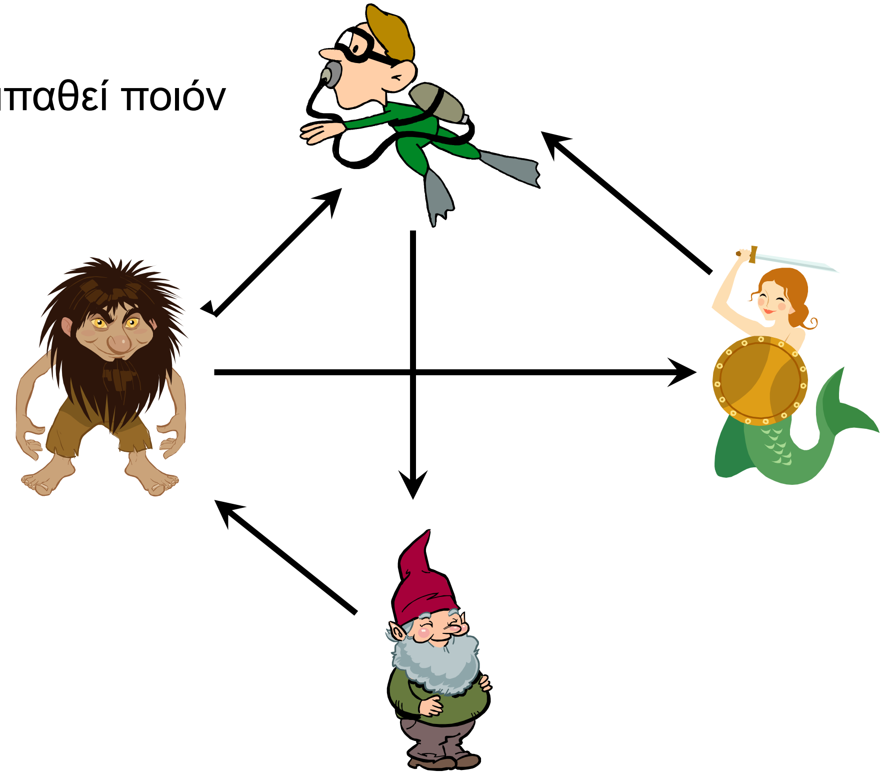
Όταν $B = A$ έχουμε μία διμελή σχέση επί του A

Πόσες διμελείς σχέσεις επί του A υπάρχουν;

Σχέσεις και Συναρτήσεις (14/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Παράδειγμα: ποιός αντιπαθεί ποιόν



Σχέσεις και Συναρτήσεις (15/28)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Έστω $R \subseteq A \times A$ μία διμελής σχέση επί του A

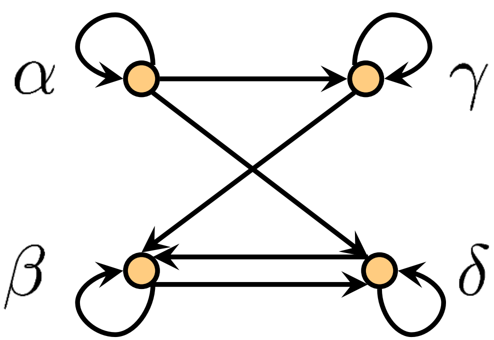
Η σχέση R είναι

- **Ανακλαστική** εάν για κάθε $a \in A$ ισχύει $(a, a) \in R$
- **Συμμετρική** εάν για κάθε $(a, b) \in R$ ισχύει $(b, a) \in R$
- **Αντισυμμετρική** εάν για κάθε $(a, b) \in R$ ισχύει $(b, a) \notin R$ εκτός εάν $b = a$
- **Μεταβατική** εάν για κάθε $(a, b), (b, c) \in R$ ισχύει $(a, c) \in R$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (16/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Ανακλαστική εάν για κάθε $a \in A$ ισχύει $(a, a) \in R$



	α	β	γ	δ
α	$\surd$		$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$	
γ		$\surd$	$\surd$	
δ		$\surd$		$\surd$

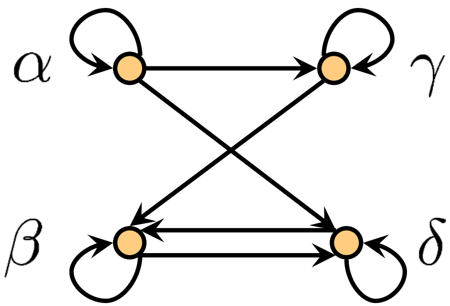
Κάθε κόμβος έχει βέλος προς τον εαυτό του

Κάθε τετράγωνο στην κύρια διαγώνιο είναι σημειωμένο

Σχέσεις και Συναρτήσεις (17/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Ανακλαστική εάν για κάθε $a \in A$ ισχύει $(a, a) \in R$



Κάθε κόμβος έχει βέλος προς τον εαυτό του

	α	β	γ	δ
α	$\surd$		$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$	
γ		$\surd$	$\surd$	
δ		$\surd$		$\surd$

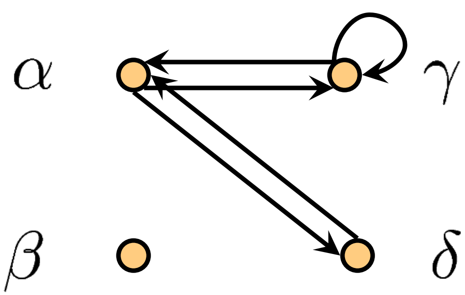
Κάθε τετράγωνο στην κύρια διαγώνιο είναι σημειωμένο

Π.χ. A = ακέραιοι, (a,b) $\in$ R αν ο a διαιρεί τον b

Σχέσεις και Συναρτήσεις (18/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Συμμετρική εάν για κάθε $(a, b) \in R$ ισχύει $(b, a) \in R$



	α	β	γ	δ
α			$\surd$	$\surd$
β				
γ	$\surd$		$\surd$	
δ	$\surd$			

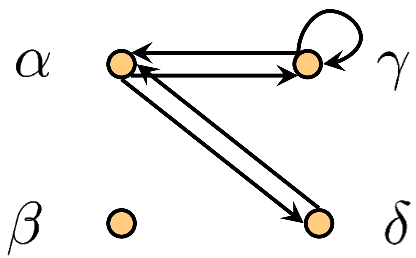
Για κάθε ζεύγος κόμβων a και b
εάν υπάρχει το βέλος από το a στο b
υπάρχει και από το b στο a

Ο πίνακας είναι συμμετρικός
ως προς την κύρια διαγώνιο

Σχέσεις και Συναρτήσεις (19/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Συμμετρική εάν για κάθε $(a,b) \in R$ ισχύει $(b,a) \in R$



	α	β	γ	δ
α			$\surd$	$\surd$
β				
γ	$\surd$		$\surd$	
δ	$\surd$			

Για κάθε ζεύγος κόμβων a και b
εάν υπάρχει το βέλος από το a στο b
υπάρχει και από το b στο a

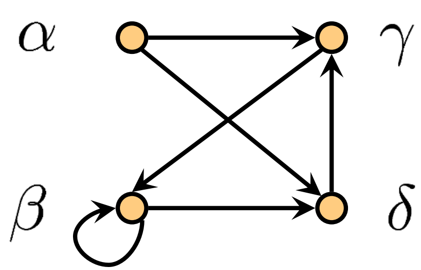
Ο πίνακας είναι συμμετρικός
ως προς την κύρια διαγώνιο

Π.χ. A = σύνολο ατόμων, (a,b) $\in$ R αν a και b είναι φίλοι

Σχέσεις και Συναρτήσεις (20/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Αντισυμμετρική εάν για κάθε $(a,b) \in R$ ισχύει $(b,a) \notin R$ εκτός εάν $b = a$



	α	β	γ	δ
α			$\surd$	$\surd$
β		$\surd$		$\surd$
γ		$\surd$		
δ			$\surd$	

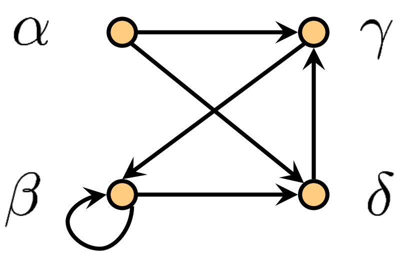
Για κάθε ζεύγος κόμβων a ≠ b εάν υπάρχει το βέλος από το a στο b τότε δεν υπάρχει από το b στο a

Αν ένα τετράγωνο είναι σημειωμένο τότε το συμμετρικό του ως προς την κύρια διαγώνιο δεν είναι σημειωμένο

Σχέσεις και Συναρτήσεις (21/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Αντισυμμετρική εάν για κάθε $(a, b) \in R$ ισχύει $(b, a) \notin R$
εκτός εάν $b = a$



	α	β	γ	δ
α			$\surd$	$\surd$
β		$\surd$		$\surd$
γ		$\surd$		
δ			$\surd$	

Για κάθε ζεύγος κόμβων a ≠ b
εάν υπάρχει το βέλος από το a στο b
τότε δεν υπάρχει από το b στο a

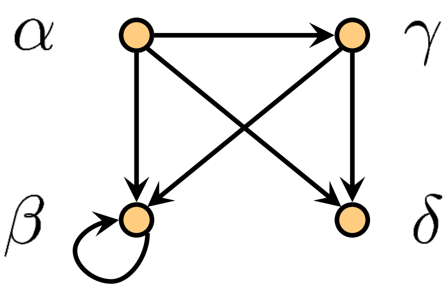
Αν ένα τετράγωνο είναι σημειωμένο
τότε το συμμετρικό του ως προς την
κύρια διαγώνιο δεν είναι σημειωμένο

Π.χ. Α = ακέραιοι, (a,b) $\in$ R αν a ≤ b

Σχέσεις και Συναρτήσεις (22/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Μεταβατική εάν για κάθε $(a,b),(b,c) \in R$ ισχύει $(a,c) \in R$



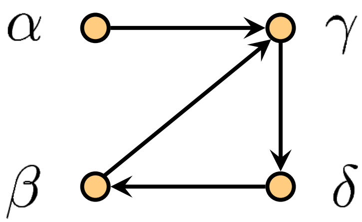
	α	β	γ	δ
α		$\surd$	$\surd$	$\surd$
β		$\surd$		
γ		$\surd$		$\surd$
δ				

Π.χ. A = σύνολο ατόμων, $(a,b) \in R$ αν a είναι πρόγονος του b

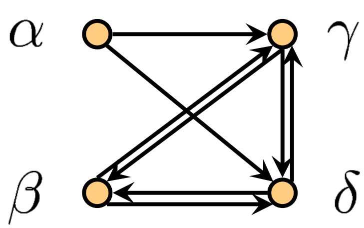
Σχέσεις και Συναρτήσεις (23/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Μεταβατική επέκταση $R_1 \supseteq R : (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R_1$



	α	β	γ	δ
α			$\surd$	
β			$\surd$	
γ				$\surd$
δ		$\surd$		



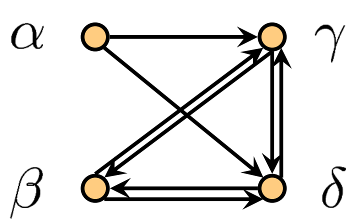
	α	β	γ	δ
α			$\surd$	$\surd$
β			$\surd$	$\surd$
γ		$\surd$		$\surd$
δ		$\surd$	$\surd$	

Σχέσεις και Συναρτήσεις (24/29)

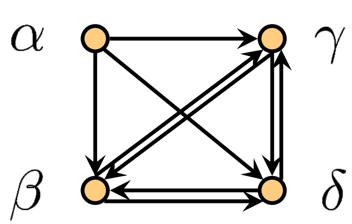
- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Μεταβατική επέκταση $R_1 \supseteq R : (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R_1$

Έστω R_2 η μεταβατική επέκταση της R_1



	α	β	γ	δ
α			√	√
β			√	√
γ		√		√
δ		√	√	



	α	β	γ	δ
α		√	√	√
β			√	√
γ		√		√
δ		√	√	

Σχέσεις και Συναρτήσεις (25/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Μεταβατική επέκταση $R_1 \supseteq R : (a,b), (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R_1$

Έστω R_2 η μεταβατική επέκταση της R_1

Γενικά, έστω R_{i+1} η μεταβατική επέκταση της R_i

Μεταβατική θήκη (transitive closure) της R

$$R^* = \cup_i R_i$$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (26/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

Μεταβατική επέκταση $R_1 \supseteq R : (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R_1$

Έστω R_2 η μεταβατική επέκταση της R_1

Γενικά, έστω R_{i+1} η μεταβατική επέκταση της R_i

Μεταβατική θήκη (transitive closure) της R

$$R^* = \cup_i R_i$$

Π.χ. A = σύνολο ατόμων, (a,b) $\in$ R αν ο a είναι πατέρας του b

(x,y) $\in$ R* αν ο x είναι πρόγονος του y

Σχέσεις και Συναρτήσεις (27/29)

- Διμελείς σχέσεις επί ενός συνόλου.

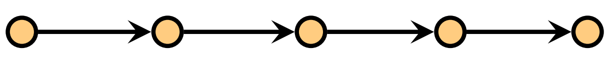
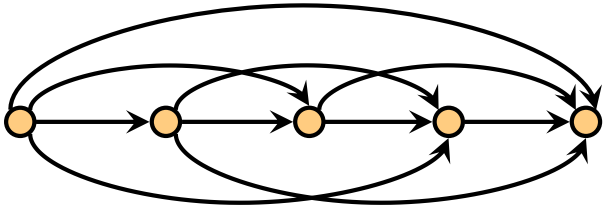
Μεταβατική επέκταση $R_1 \supseteq R : (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R_1$

Έστω R_2 η μεταβατική επέκταση της R_1

Γενικά, έστω R_{i+1} η μεταβατική επέκταση της R_i

Μεταβατική θήκη (transitive closure) της R

$$R^* = \cup_i R_i$$

R  R^* 

Σχέσεις και Συναρτήσεις (28/29)

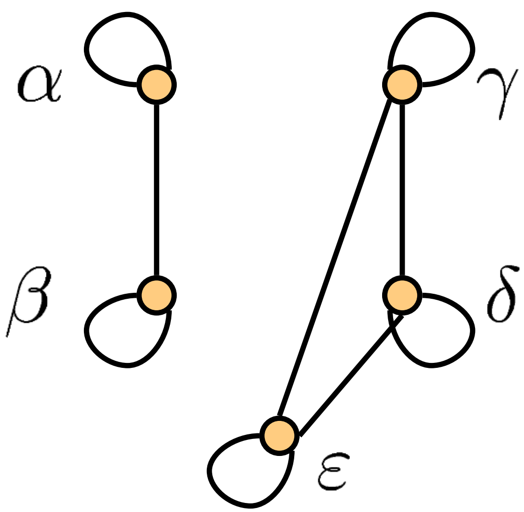
- Εξετάστε αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής, για οποιαδήποτε σύνολα A,B και C. Δικαιολογήστε ξεκάθαρα την απάντηση σας.
  - Αν $A \subseteq B$ και $B \in C$, τότε $A \in C$.
  - Αν $A \subseteq B$ και $B \in C$, τότε $A \subseteq C$.
- Δοθέντος ότι $A \subseteq C$ και $B \subseteq D$, δείξτε ότι $A \times B \subseteq C \times D$.
- Αν $A \times B \subseteq C \times D$ προκύπτει απαραίτητα ότι $A \subseteq C$ και $B \subseteq D$;
- Έστω A,B,C,D οποιαδήποτε σύνολα.
  - Δείξτε ότι $(A \cup B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
  - Επιβεβαιώστε ή αναιρέσθε τις ακόλουθες ταυτότητες:
    - $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
    - $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

Σχέσεις και Συναρτήσεις (29/29)

- Έστω A ένα σύνολο βιβλίων:
  - Έστω R1 μια διμελής σχέση πάνω στο A τέτοια ώστε το (a,b) να ανήκει στην R1 αν το βιβλίο a κοστίζει περισσότερο και περιέχει λιγότερες σελίδες από το βιβλίο b. Είναι η R1 ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική;
  - Έστω R2 μια διμελής σχέση πάνω στο A τέτοια ώστε το (a,b) να ανήκει στην R2 αν το βιβλίο a κοστίζει περισσότερο ή περιέχει λιγότερες σελίδες από το βιβλίο b. Είναι η R2 ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική;

Σχέσεις ισοδυναμίας (1/17)

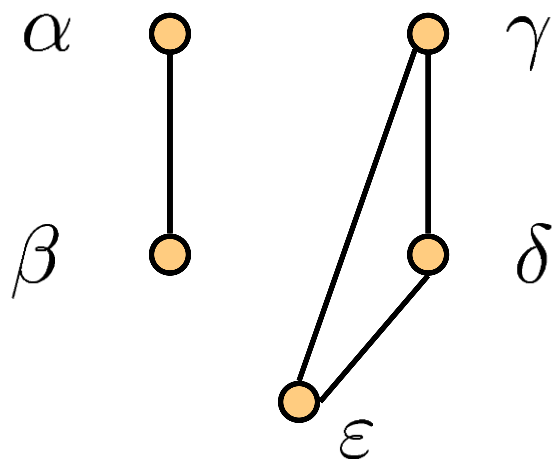
Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **συμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$			
β	$\surd$	$\surd$			
γ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
δ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
ε			$\surd$	$\surd$	$\surd$

Σχέσεις ισοδυναμίας (2/17)

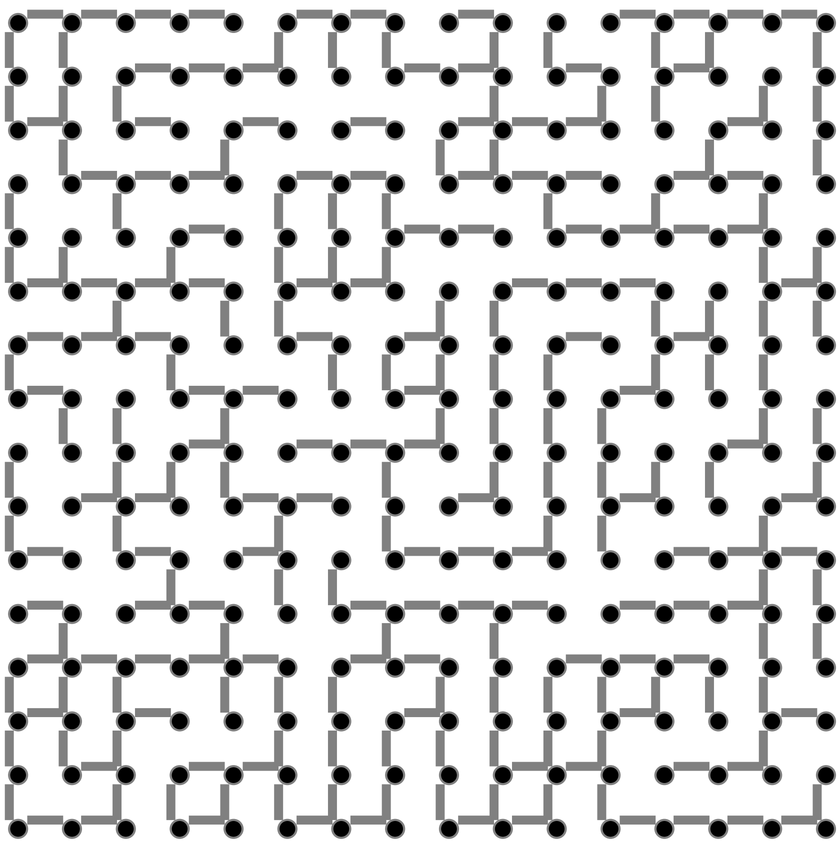
Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **συμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$			
β	$\surd$	$\surd$			
γ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
δ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
ε			$\surd$	$\surd$	$\surd$

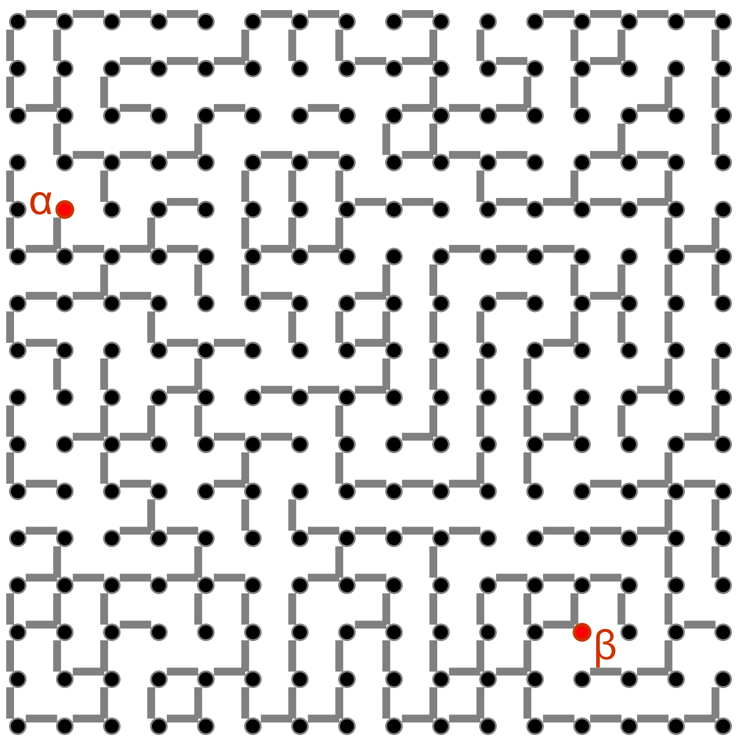
Σχέσεις ισοδυναμίας (3/17)

Παράδειγμα : Συνδετικότητα Γραφήματος



Σχέσεις ισοδυναμίας (4/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας – <u>Παράδειγμα</u> : Συνδετικότητα Γραφήματος

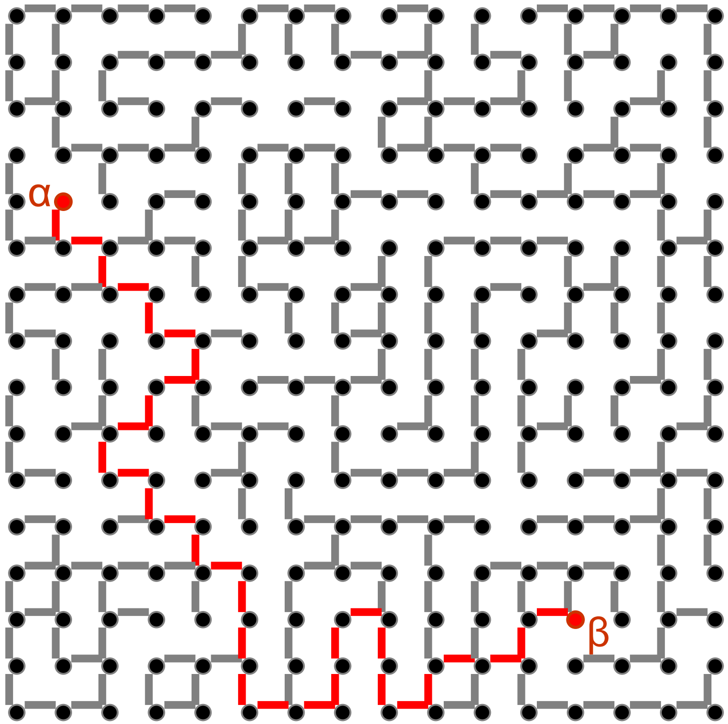


Υπάρχει μονοπάτι μεταξύ α και β;

Παραδείγματα:
- υπολογιστές ενός δικτύου
- ιστοσελίδες
- πόλεις σε ένα δίκτυο δρόμων
- τρανζίστορ σε ηλεκτρονικό κύκλωμα

Σχέσεις ισοδυναμίας (5/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας – <u>Παράδειγμα</u> : Συνδετικότητα Γραφήματος



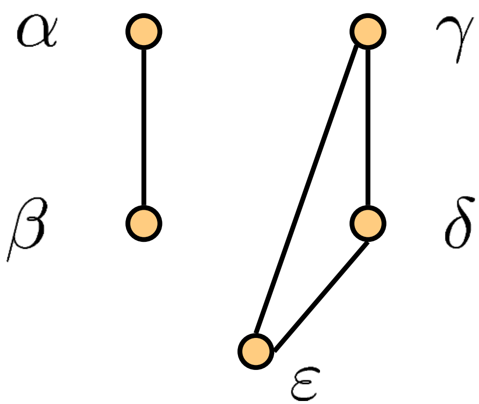
Υπάρχει μονοπάτι μεταξύ α και β;

Παραδείγματα:

- υπολογιστές ενός δικτύου
- ιστοσελίδες
- ισοδύναμες μεταβλητές ενός προγράμματος
- τρανζίστορ σε ηλεκτρονικό κύκλωμα

Σχέσεις ισοδυναμίας (6/17)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **συμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$			
β	$\surd$	$\surd$			
γ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
δ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
ε			$\surd$	$\surd$	$\surd$

Ορίζει μία **διαμέριση** του συνόλου A

Διαμέριση συνόλου

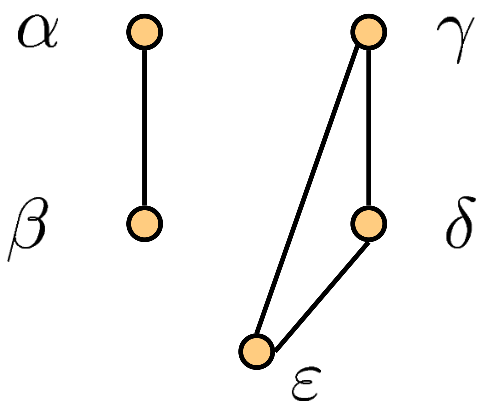
Έστω σύνολο

Διαμέριση του $A \rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ όπου

- $A_i \subseteq A, 1 \leq i \leq k$
- $\cup_{i=1}^{k} A_i = A$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

Σχέσεις ισοδυναμίας (7/17)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **συμμετρική** και **μεταβατική**

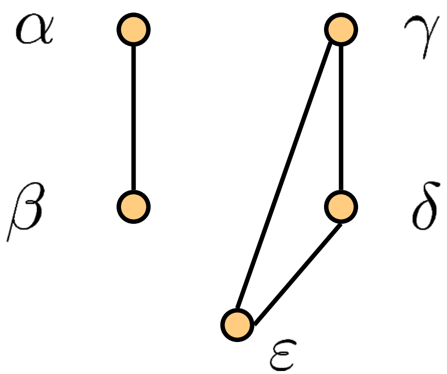


	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$			
β	$\surd$	$\surd$			
γ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
δ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
ε			$\surd$	$\surd$	$\surd$

Διαμέριση $\{\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta, \epsilon\}\}$

Σχέσεις ισοδυναμίας (8/17)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **συμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$			
β	$\surd$	$\surd$			
γ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
δ			$\surd$	$\surd$	$\surd$
ε			$\surd$	$\surd$	$\surd$

Διαμέριση $\{\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta, \epsilon\}\}$

Εναλλακτικός συμβολισμός $\{\overline{\alpha\beta}, \overline{\gamma\delta\epsilon}\}$

Σχέσεις ισοδυναμίας (9/17)

Παράδειγμα

A = σύνολο φυσικών αριθμών, n = ένας φυσικός αριθμός

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

δηλαδή δύο αριθμοί σχετίζονται αν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο δια του n

Έχουμε n σύνολα ισοδυναμίας $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$

$$A_i = \{a \in A \mid a \equiv i \pmod{n}\}$$

Σχέσεις ισοδυναμίας (10/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Αν $R_1 \subseteq R_2$ τότε η π_1 είναι **εκλέπτυνση** της π_2

Σχέσεις ισοδυναμίας (11/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Αν $R_1 \subseteq R_2$ τότε η π_1 είναι **εκλέπτυνση** της π_2

Συμβολισμός

$$\pi_1 \leq \pi_2$$

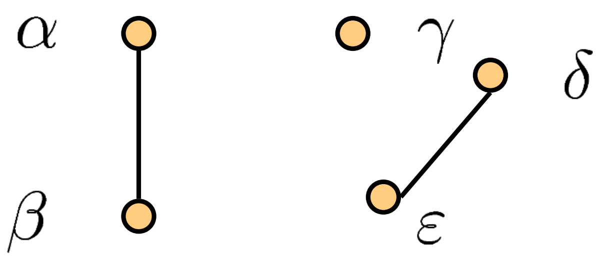
Σχέσεις ισοδυναμίας (12/17)

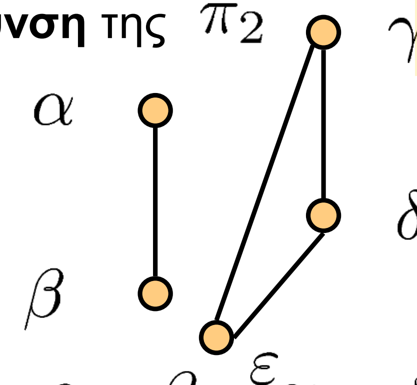
Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Συμβολισμός

$$\pi_1 \leq \pi_2$$

Αν $R_1 \subseteq R_2$ τότε η π_1 είναι **εκλέπτυνση** της π_2





	α	β	γ	δ	ε
α	√	√			
β	√	√			
γ			√		
δ				√	√
ε				√	√

	α	β	γ	δ	ε
α	√	√			
β	√	√			
γ			√	√	√
δ			√	√	√
ε			√	√	√

Σχέσεις ισοδυναμίας (13/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Γινόμενο διαμερίσεων $\pi_1 \cdot \pi_2 \longrightarrow$ σχέση ισοδυναμίας $R_1 \cap R_2$

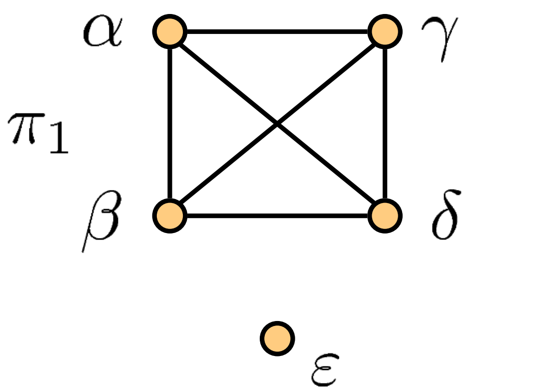
$\pi_1 \cdot \pi_2$ είναι **εκλέπτυνση** των π_1, π_2

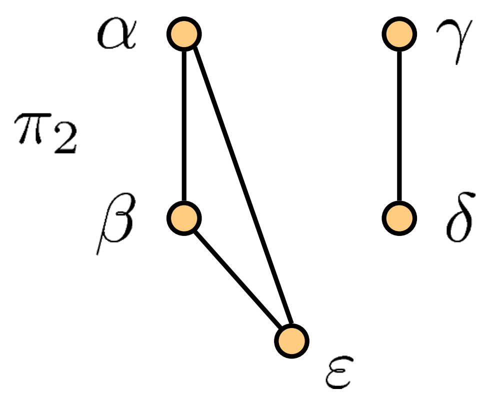
Σχέσεις ισοδυναμίας (14/17)

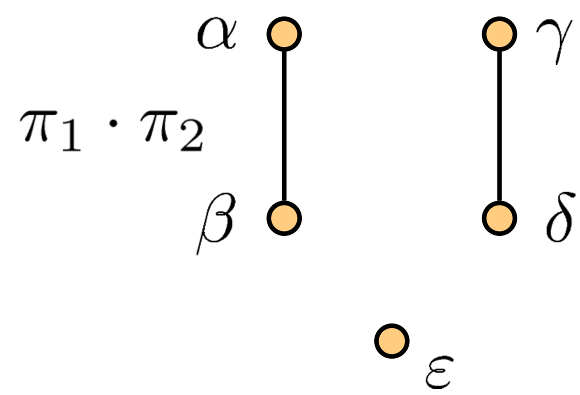
Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Γινόμενο διαμερίσεων $\pi_1 \cdot \pi_2 \longrightarrow$ σχέση ισοδυναμίας $R_1 \cap R_2$

$\pi_1 \cdot \pi_2$ είναι **εκλέπτυνση** των π_1, π_2







	α	β	γ	δ	ε
α	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
β	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
γ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
δ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
ε					$\checkmark$

	α	β	γ	δ	ε
α	$\checkmark$	$\checkmark$			$\checkmark$
β	$\checkmark$	$\checkmark$			$\checkmark$
γ			$\checkmark$	$\checkmark$	
δ			$\checkmark$	$\checkmark$	
ε	$\checkmark$	$\checkmark$			$\checkmark$

	α	β	γ	δ	ε
α	$\checkmark$	$\checkmark$			
β	$\checkmark$	$\checkmark$			
γ			$\checkmark$	$\checkmark$	
δ			$\checkmark$	$\checkmark$	
ε					$\checkmark$

Σχέσεις ισοδυναμίας (15/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Άθροισμα διαμερίσεων $\pi_1 + \pi_2 \longrightarrow$ σχέση ισοδυναμίας $(R_1 \cup R_2)^*$

π_1, π_2 είναι **εκλεπτύνσεις** της $\pi_1 + \pi_2$

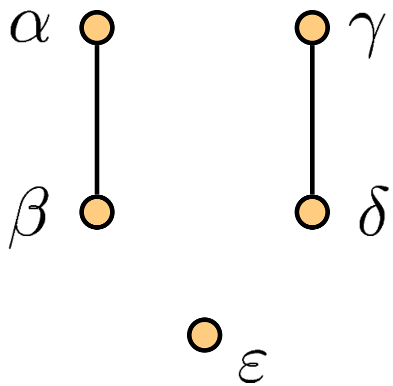
Σχέσεις ισοδυναμίας (16/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

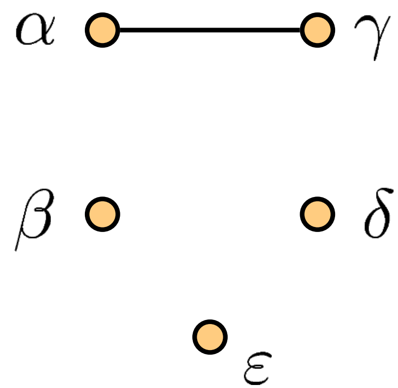
Άθροισμα διαμερίσεων $\pi_1 + \pi_2 \longrightarrow$ σχέση ισοδυναμίας $(R_1 \cup R_2)^*$

π_1, π_2 είναι **εκλεπτύνσεις** της $\pi_1 + \pi_2$

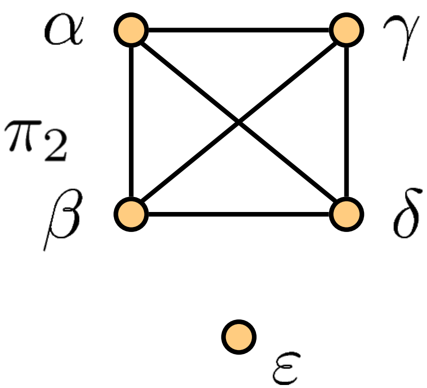
π_1



π_2



$\pi_1 + \pi_2$



	α	β	γ	δ	ε
α	√	√			
β	√	√			
γ			√	√	
δ			√	√	
ε					√

	α	β	γ	δ	ε
α	√		√		
β		√			
γ	√		√		
δ				√	
ε					√

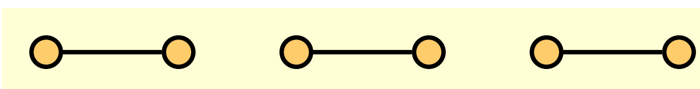
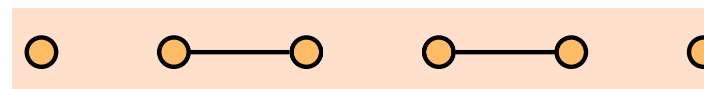
	α	β	γ	δ	ε
α	√	√	√	√	
β	√	√	√	√	
γ	√	√	√	√	
δ	√	√	√	√	
ε					√

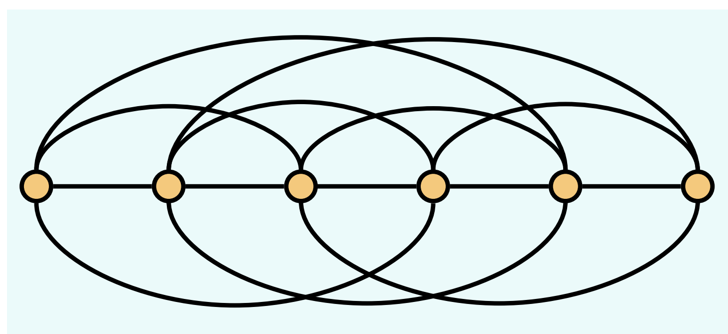
Σχέσεις ισοδυναμίας (17/17)

Σχέσεις ισοδυναμίας $R_1, R_2 \longrightarrow$ διαμερίσεις π_1, π_2

Άθροισμα διαμερίσεων $\pi_1 + \pi_2 \longrightarrow$ σχέση ισοδυναμίας $(R_1 \cup R_2)^*$

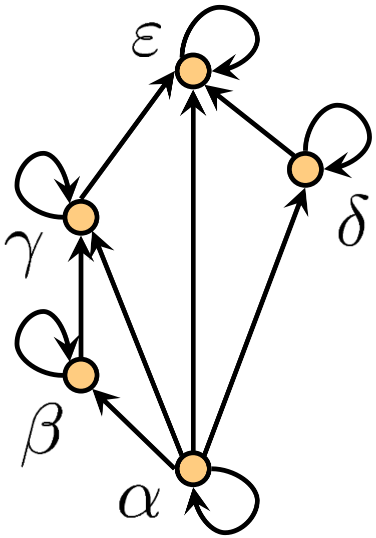
π_1, π_2 είναι **εκλεπτύνσεις** της $\pi_1 + \pi_2$

π_1   π_2

$\pi_1 + \pi_2$ 

Σχέση μερικής διάταξης (1/8)

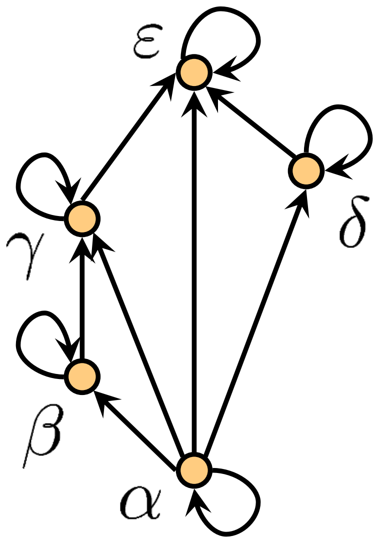
Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$		$\surd$
γ			$\surd$		$\surd$
δ				$\surd$	$\surd$
ε					$\surd$

Σχέση μερικής διάταξης (2/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**

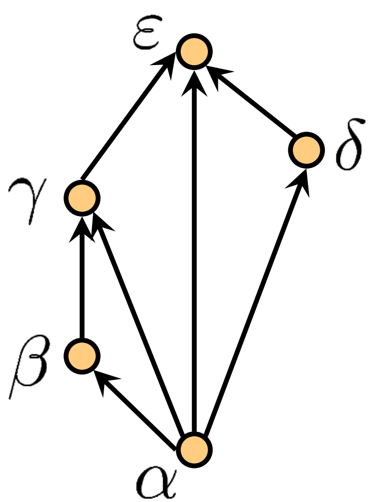


	α	β	γ	δ	ε
α	√	√	√	√	√
β		√	√		√
γ			√		√
δ				√	√
ε					√

Π.χ. A = σύνολο θετικών ακεραίων, (a,b) $\in$ R αν ο a διαιρεί τον b

Σχέση μερικής διάταξης (3/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**



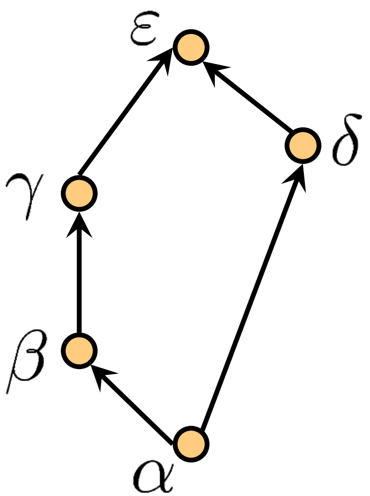
	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$		$\surd$
γ			$\surd$		$\surd$
δ				$\surd$	$\surd$
ε					$\surd$

<u>Απλοποιημένη γραφική αναπαράσταση</u> :

- παραλείπουμε τους βρόγχους

Σχέση μερικής διάταξης (4/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**



	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$		$\surd$
γ			$\surd$		$\surd$
δ				$\surd$	$\surd$
ε					$\surd$

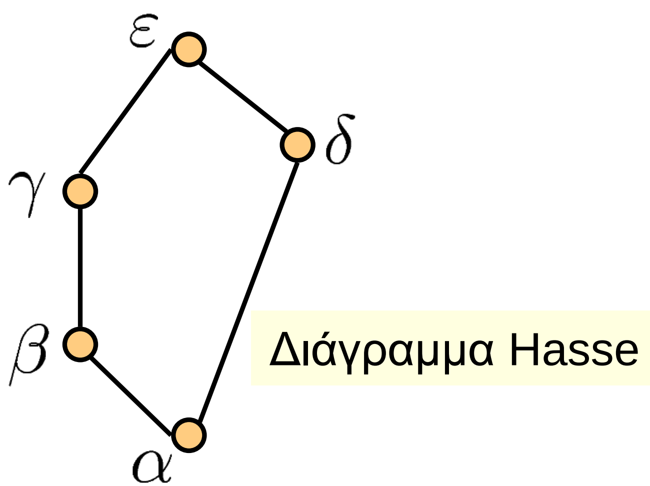
<u>Απλοποιημένη γραφική αναπαράσταση</u> :

- παραλείπουμε τους βρόγχους

- θεωρούμε (a,b) $\in$ R αν υπάρχει μονοπάτι από το a στο b

Σχέση μερικής διάταξης (5/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**



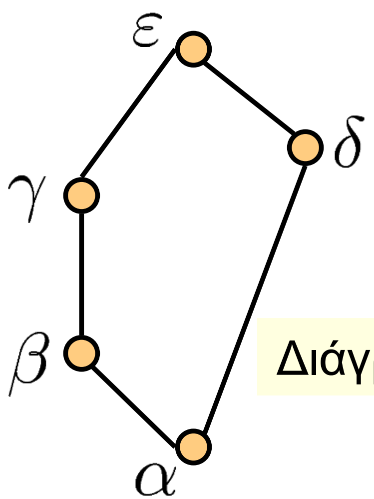
	α	β	γ	δ	ε
α	√	√	√	√	√
β		√	√		√
γ			√		√
δ				√	√
ε					√

<u>Απλοποιημένη γραφική αναπαράσταση</u> :

- παραλείπουμε τους βρόγχους
- θεωρούμε (a,b) $\in$ R αν υπάρχει μονοπάτι από το a στο b
- προσανατολίζουμε όλα τα βέλη προς την ίδια κατεύθυνση (π.χ. πάνω)

Σχέση μερικής διάταξης (6/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**



Διάγραμμα Hasse

	α	β	γ	δ	ε
α	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
β		$\surd$	$\surd$		$\surd$
γ			$\surd$		$\surd$
δ				$\surd$	$\surd$
ε					$\surd$

Σύνολο A + σχέση μερικής διάταξης R επί του A

$\longrightarrow$ **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** (A, R)

Σχέση μερικής διάταξης (7/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**

Σύνολο A + σχέση μερικής διάταξης R επί του A

$\longrightarrow$ **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** (A, R)

Εναλλακτικός συμβολισμός : $(A, \leq)$

$(a, b) \in R$ γράφεται ισοδύναμα $a \leq b$

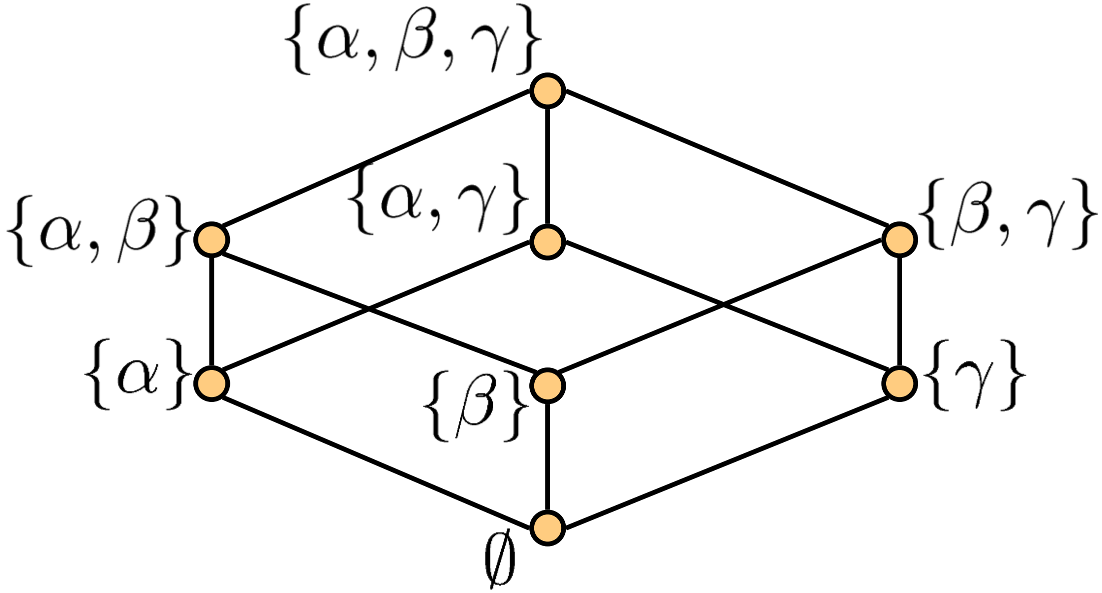
μερικές φορές γράφουμε $b \geq a$ αντί για $a \leq b$

Σχέση μερικής διάταξης (8/8)

Διμελής σχέση που είναι **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική**

<u>Παράδειγμα</u> $A = \mathcal{P}(\{\alpha, \beta, \gamma\})$

$a, b \in A \ : \ (a,b) \in R$ όταν $a \subseteq b$



Σχέσεις και Συναρτήσεις - Ασκήσεις

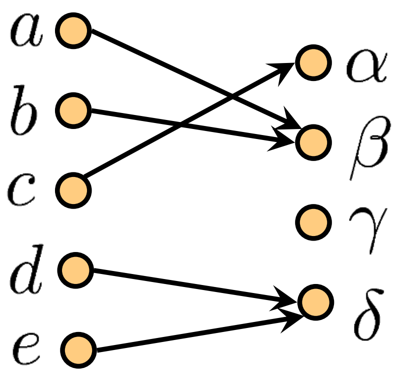
- Έστω P το σύνολο όλων των ανθρώπων και R μια διμελής σχέση πάνω στο P τέτοια ώστε, το (a,b) ανήκει στην R αν και μόνο αν ο a έχει τους ίδιους γονείς με τον b. Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική; Είναι μια σχέση ισοδυναμίας; Είναι μια σχέση μερικής διάταξης;
- Έστω R μια διμελής σχέση πάνω στο σύνολο όλων των συμβολοσειρών από 0 και 1 τέτοια ώστε R = {(a,b) | οι a και b είναι συμβολοσειρές που έχουν τον ίδιο αριθμό από 0}. Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική; Είναι μια σχέση ισοδυναμίας; Είναι μια σχέση μερικής διάταξης;
- Έστω R μια συμμετρική και μεταβατική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A. Δείξτε ότι αν για κάθε a στο A υπάρχει b στο A τέτοιο ώστε το (a,b) να ανήκει στην R, τότε η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
- Έστω R μια ανακλαστική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A. Δείξτε ότι η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν για κάθε (a,b) και (a,c) που ανήκουν στην R, συνεπάγεται ότι και το (b,c) ανήκει στην R.

Συνάρτηση (1/7)

Διμελής σχέση R από το A στο B τέτοια ώστε για κάθε

$a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ με $(a, b) \in R$

Τότε λέμε ότι το b είναι **εικόνα** του a



	α	β	γ	δ
a		$\surd$		
b		$\surd$		
c	$\surd$			
d				$\surd$
e				$\surd$

	R
a	β
b	β
c	α
d	δ
e	δ

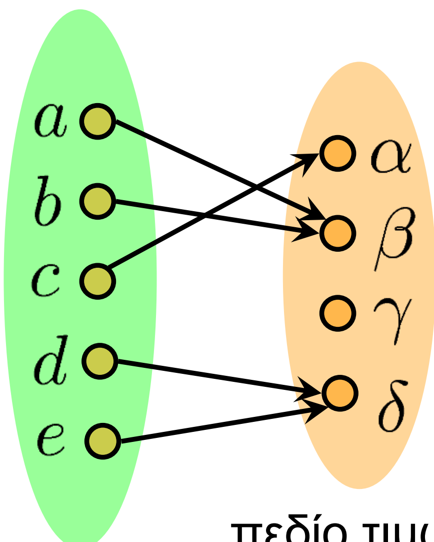
Συνάρτηση (2/7)

Διμελής σχέση R από το A στο B τέτοια ώστε για κάθε

$a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ με $(a, b) \in R$

Τότε λέμε ότι το b είναι **εικόνα** του a

πεδίο ορισμού



πεδίο τιμών

	α	β	γ	δ
a		$\surd$		
b		$\surd$		
c	$\surd$			
d				$\surd$
e				$\surd$

	R
a	β
b	β
c	α
d	δ
e	δ

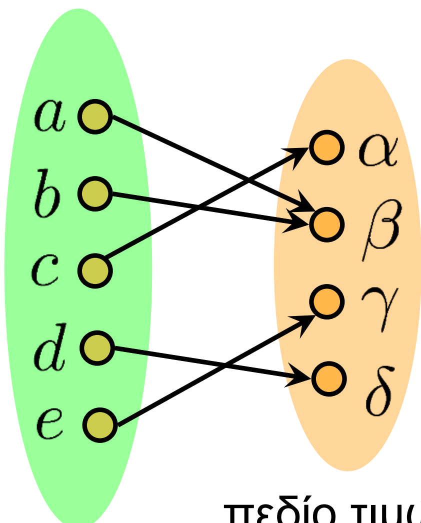
Συνάρτηση (3/7)

Διμελής σχέση R από το A στο B τέτοια ώστε για κάθε

$a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ με $(a, b) \in R$

Τότε λέμε ότι το b είναι **εικόνα** του a

πεδίο ορισμού



πεδίο τιμών

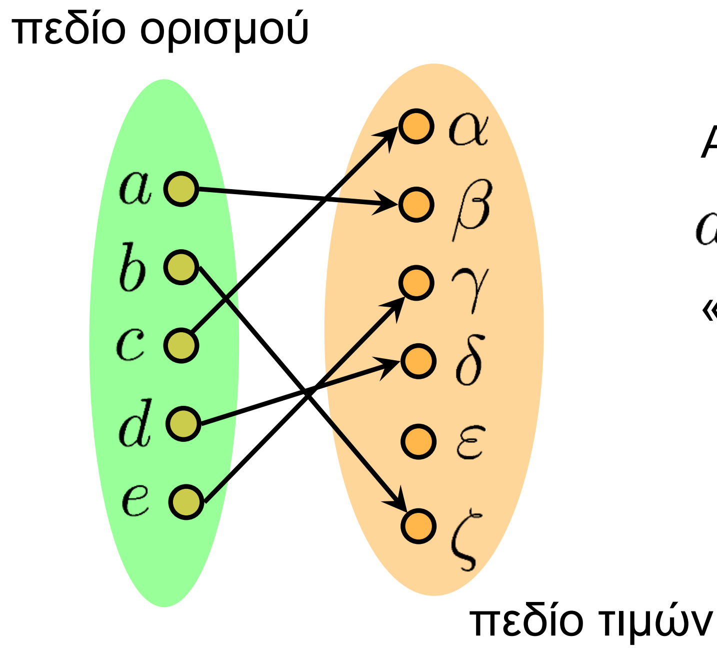
Αν κάθε $b \in B$ είναι εικόνα κάποιου $a \in A$

τότε η συνάρτηση R είναι «**επί**»

Συνάρτηση (4/7)

Διμελής σχέση R από το A στο B τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ με $(a, b) \in R$

Τότε λέμε ότι το b είναι **εικόνα** του a



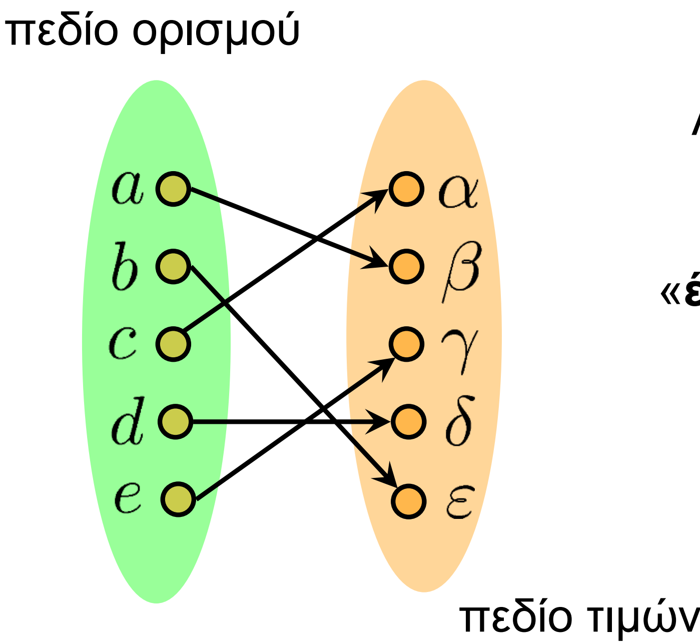
Αν κάθε $b \in B$ είναι εικόνα το πολύ ενός $a \in A$ τότε η συνάρτηση R είναι **«ένα προς ένα»**

Συνάρτηση (5/7)

Διμελής σχέση R από το A στο B τέτοια ώστε για κάθε

$a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ με $(a, b) \in R$

Τότε λέμε ότι το b είναι **εικόνα** του a



Αν η συνάρτηση R είναι και «ένα προς ένα»

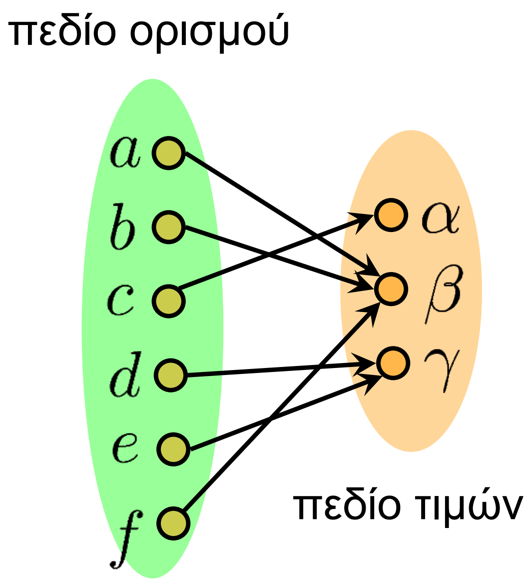
και «επί» τότε λέγεται

«**ένα προς ένα και επί**» ή «**αμφιμονοσήμαντη**»

Συνάρτηση (6/7)

Αρχή του περιστερώνα

« Αν υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από περιστερώνες τότε υπάρχει κάποιος περιστερώνας με τουλάχιστον δύο περιστέρια »

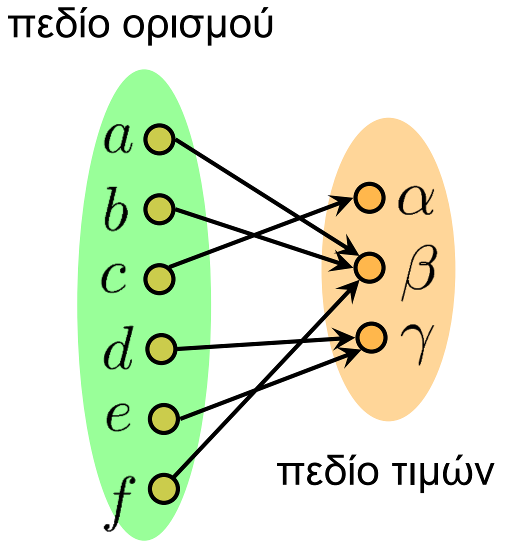


Αν $|A| > |B|$ τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση $f\ :\ A \rightarrow B$ υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ τέτοια ώστε $f(a_1) = f(a_2)$

Συνάρτηση (7/7)

Αρχή του περιστερώνα

« Αν υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από περιστερώνες τότε υπάρχει κάποιος περιστερώνας με τουλάχιστον δύο περιστέρια »



Αν $|A| > |B|$ τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ τέτοια ώστε $f(a_1) = f(a_2)$

Γενικότερα έστω $i = \lceil |A|/|B| \rceil$

Τότε υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_i \in A$

τέτοια ώστε $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_i)$

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Στεργίου Κωνσταντίνος. «Διακριτά Μαθηματικά». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE257/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.