Διακριτά Μαθηματικά

Ενότητα 5: Μεταθέσεις & Συνδυασμοί

Αν. Καθηγητής Κ. Στεργίου

e-mail: kstergiou@uowm.gr

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Συνδυαστική.
  - Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου.
  - Αρχή Εγκλεισμού και Αποκλεισμού.
  - Η αρχή του Περιστερώνα.
- Μεταθέσεις.
  - Μεταθέσεις με επανάληψη.
- Συνδυασμοί.
  - Συνδυασμοί με επανάληψη.

Στόχοι

- Κατανόηση της πρακτικής σημασίας της συνδυαστικής ως μελέτης των τρόπων συνδυασμών διακριτών αντικειμένων.
- Στοιχειοθέτηση των διαφορετικών τρόπων συνδυασμών αντικειμένων ανάλογα με το αν τα αντικείμενα είναι διαφορετικά, αν επιτρέπονται επαναλήψεις, και αν μας ενδιαφέρει η διάταξη τους.
- Μελέτη μεγάλου πλήθους παραδειγμάτων για την κατανόηση όλων των σχετικών εννοιών.

Συνδυαστική (1/6)

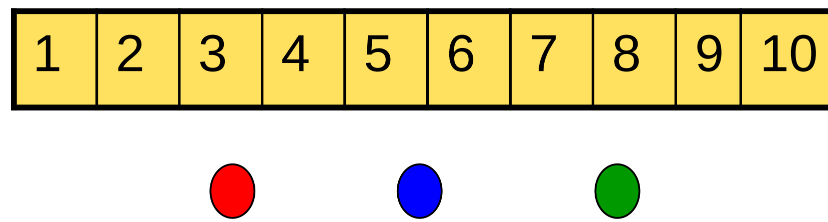
- Συχνά θέλουμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις όπως:
  - ποιο είναι το πλήθος των διακριτών υποσυνόλων ενός συνόλου *A* με μέγεθος *n*;
    - Δηλ. το μέγεθος του *δυναμοσυνόλου* του *A*, *P*(*A*).
  - ποιο είναι το πλήθος των υποσυνόλων του *A* που έχουν μέγεθος *k*;
  - ποιο είναι το πλήθος των διατεταγμένων υποσυνόλων που τα στοιχεία τους είναι στοιχεία του *A*;
- Αν έχουμε 10 βουλευτές,
  - πόσες πιθανές επιτροπές μπορούν να συγκροτηθούν;
  - πόσες είναι οι πιθανές 6-μελείς επιτροπές;
  - πόσα είναι τα πιθανά αποτελέσματα για το top 3 σε ψήφους.

Συνδυαστική (2/6)

- Η μελέτη του πλήθους των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να συνδυάσουμε αντικείμενα.
- **Π.χ. Σε έναν διαγωνισμό όπου συμμετέχουν 100 άτομα**,
  - πόσα διαφορετικά top-10 αποτελέσματα μπορούν να συμβούν;
- **Π.χ. Αν ένα password έχει 8 γράμματα και/ή ψηφία**,
  - πόσα passwords μπορούν να υπάρξουν;

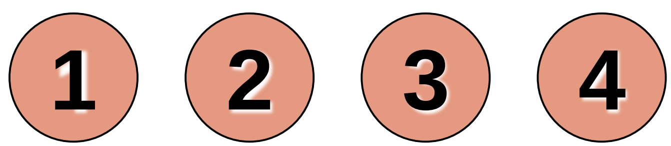
Συνδυαστική (3/6)

- Έχουμε 3 μπάλες (μια κόκκινη, μια μπλε και μια πράσινη) τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε σε 10 κουτιά αριθμημένα από το 1 ως το 10.
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 3 μπάλες;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 2 μπάλες;



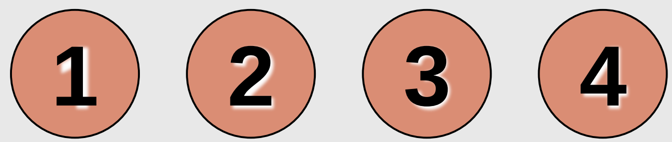
Βασικοί Κανόνες (1/5)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία κόκκινη μπάλα από ένα σύνολο με 4 κόκκινες μπάλες;



Βασικοί Κανόνες (2/5)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία κόκκινη μπάλα από ένα σύνολο με 4 κόκκινες μπάλες;



- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία μπλε μπάλα από ένα σύνολο με 3 μπλε μπάλες;

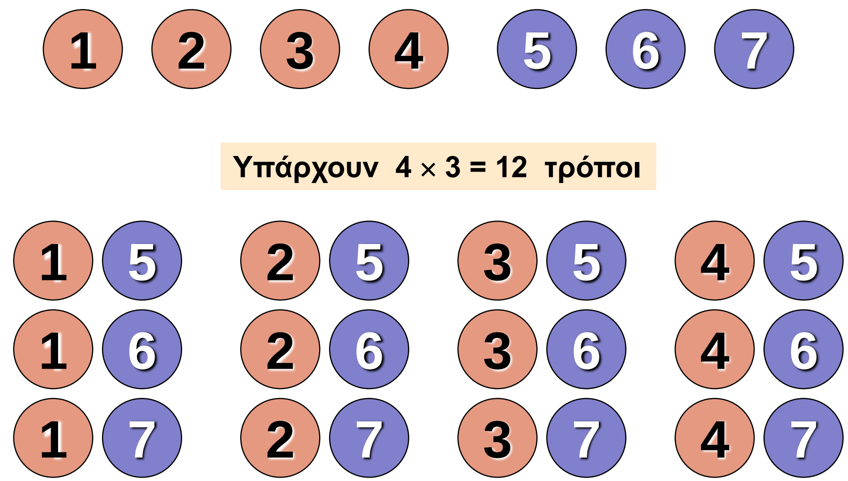
Βασικοί Κανόνες (3/5)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε **μία** μπάλα που να προέρχεται από ένα σύνολο με 4 κόκκινες μπάλες **ή** από ένα σύνολο με 3 μπλε μπάλες;

Υπάρχουν 4 + 3 = 7 τρόποι

Βασικοί Κανόνες (4/5)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε **μία** μπάλα που να προέρχεται από ένα σύνολο με 4 κόκκινες μπάλες **και μία** μπάλα που να προέρχεται από ένα σύνολο με 3 μπλε μπάλες;



Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου (1/2)

- **Πείραμα** είναι μια φυσική διαδικασία που έχει ένα πλήθος παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων:
  - **η τοποθέτηση μια μπάλας σε ένα κουτί**
    - μόνο ένα δυνατό αποτέλεσμα
  - **η τοποθέτηση ενός συγκεκριμένου αριθμού από μπάλες σε ένα συγκεκριμένο αριθμό κουτιών**
    - πολλά δυνατά αποτελέσματα
  - **η επιλογή ενός αντιπροσώπου από μια ομάδα φοιτητών**
    - τόσα αποτελέσματα όσα και το πλήθος των φοιτητών
  - **η ρίψη ενός νομίσματος**
    - δύο δυνατά αποτελέσματα
  - **η ρίψη ενός ζαριού**
    - έξι δυνατά αποτελέσματα
  - **το μοίρασμα μιας παρτίδας πόκερ**
    - πολλά δυνατά αποτελέσματα

Βασικοί Κανόνες (5/5)

Πείραμα Α ⇒ n δυνατά αποτελέσματα

Πείραμα Β ⇒ m δυνατά αποτελέσματα

Κανόνας Αθροίσματος: Όταν συμβαίνει μόνο ένα από τα Α και Β τότε υπάρχουν $n + m$ δυνατά αποτελέσματα

Κανόνας Γινομένου: Όταν συμβαίνει και το Α και το Β τότε υπάρχουν $n \times m$ δυνατά αποτελέσματα

Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου (2/2)

- Ας υποθέσουμε ότι **m** το πλήθος των πιθανών αποτελεσμάτων του πειράματος 1 (ή αλλιώς των τρόπων να επιτευχθεί το έργο 1) και **n** το πλήθος των πιθανών αποτελεσμάτων του πειράματος 2 (ή αλλιώς των τρόπων να γίνει το έργο 2),
  - το κάθε νούμερο είναι ανεξάρτητο από το πως μπορεί να γίνει το άλλο έργο,
  - επίσης κανένας τρόπος να γίνει το ένα έργο δεν επιτυγχάνει επίσης και το άλλο έργο.
- Ο **κανόνας του αθροίσματος**: Το έργο “κάνε είτε το έργο 1 είτε το έργο 2, αλλά όχι και τα δύο” μπορεί να γίνει με m+n τρόπους.
- Ο **κανόνας του γινομένου** : Το έργο “κάνε και τα δύο έργα” μπορεί να γίνει με mn τρόπους.

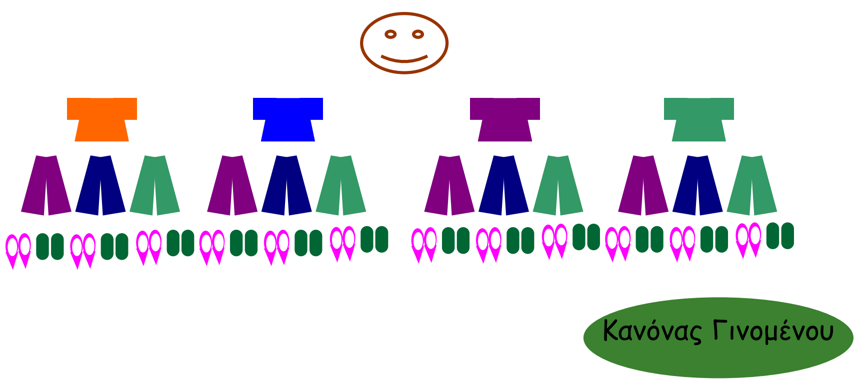
Προσέγγιση με Θεωρία Συνόλων

Αν A το σύνολο των τρόπων να γίνει το έργο 1, και B το σύνολο των τρόπων να γίνει το έργο 2, και A και B είναι διακριτά, τότε:

- Οι τρόποι που μπορεί να γίνει *είτε* το 1 *είτε* το 2 είναι $A \cup B$, και $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Οι τρόποι που μπορούν να γίνουν *και τα δύο* μπορεί να αναπαρασταθεί ως $A \times B$, και $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Παράδειγμα (1/2)

- Αν έχετε 4 πουκάμισα, 3 παντελόνια, και 2 ζευγάρια παπούτσια, πόσες διαφορετικές ενδυμασίες έχετε;



Παράδειγμα (2/2)

- Αν υπάρχουν 52 πρωτοετείς και 49 δευτεροετείς, πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλεγεί ένας αντιπρόσωπος από κάθε έτος
  - 52×49
- Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλεγεί ένας αντιπρόσωπος και για τα δύο έτη
  - $52+49$
- Αν υπάρχουν 7 πρωινά και 5 απογευματινά μαθήματα, πόσες επιλογές υπάρχουν για κάποιον φοιτητή που θέλει να γραφτεί σε ένα πρωινό κι ένα απογευματινό μάθημα;
  - πόσες για έναν που θέλει να γραφτεί σε ένα μάθημα που είναι είτε πρωινό είτε απογευματινό;

Παράδειγμα: IP Διευθύνσεις (1/2)

- Το Internet Πρωτόκολλο, έκδοση 4 (IPv4)
  - Οι διευθύνσεις Η/Υ που ισχύουν ανήκουν σε 3 τύπους:
    - Μια class A IP διεύθυνση περιέχει ένα 7-bit “netid” ≠ $\mathbf{1}^7$, κι ένα 24-bit “hostid”
    - Μια class B διεύθυνση έχει ένα 14-bit netid κι ένα 16-bit hostid.
    - Μια class C διεύθυνση έχει ένα 21-bit netid κι ένα 8-bit hostid.
  - Οι τρεις 3 κλάσεις έχουν διαφορετικές επικεφαλίδες (0, 10, 110)
  - Hostids που είναι όλα 0 ή όλα 1s δεν επιτρέπονται.

π.χ., ufl.edu είναι 128.227.74.58

Πόσες διευθύνσεις Η/Υ που ισχύουν υπάρχουν;

Παράδειγμα: IP Διευθύνσεις (2/2)

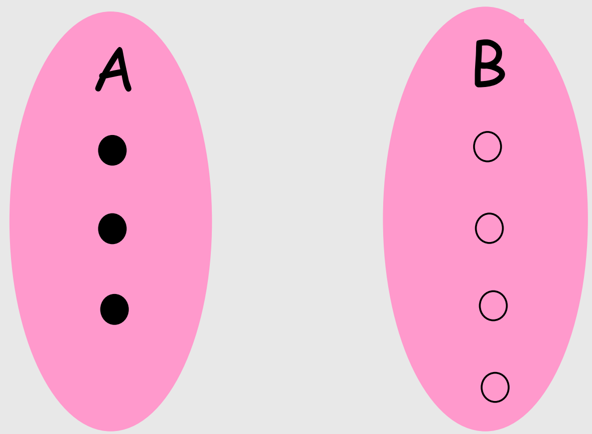
- (# addrs) = (# class A) + (# class B) + (# class C)
  - (από τον κανόνα αθροίσματος)
- # class A = (# valid netids)·(# valid hostids)
  - (από τον κανόνα γινομένου)
- (# valid class A netids) = $2^7 - 1 = 127$.
- (# valid class A hostids) = $2^{24} - 2 = 16{,}777{,}214$.
- Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε οτι η απάντηση είναι:

  3,737,091,842 (3.7 δισεκατομύρια IP διευθύνσεις)

Παράδειγμα: Συναρτήσεις (1/2)

- Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B;

64

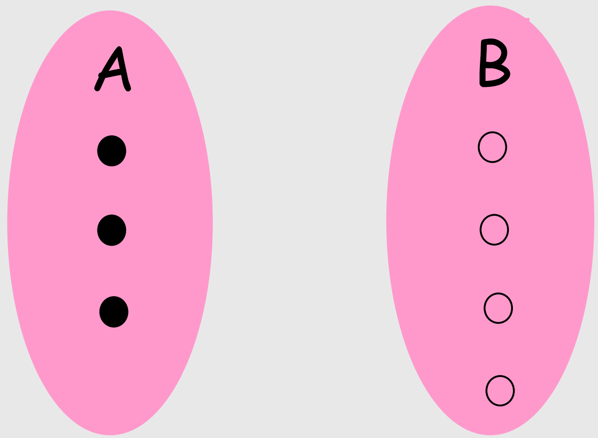


- Για να ορίσουμε κάθε συνάρτηση πρέπει να κάνουμε 3 επιλογές, μία για κάθε στοιχείο του A.
- Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κάθε επιλογή;

4 4 4

Παράδειγμα: Συναρτήσεις (2/2)

- Πόσες 1-1 συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β;



24

- Για να ορίσουμε κάθε συνάρτηση πρέπει να κάνουμε 3 επιλογές, μία για κάθε στοιχείο του Α.
- Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κάθε επιλογή;

4 3 2

Αρχή Εγκλεισμού και Αποκλεισμού

- Ας υποθέσουμε ότι οι $k \leq m$ των τρόπων που μπορούμε να κάνουμε το έργο 1 επίσης επιτυγχάνουν το έργο 2.
  - Οπότε είναι τρόποι να κάνουμε το έργο 2.
- Τότε, το πλήθος των τρόπων να κάνουμε "Είτε το έργο 1 είτε το έργο 2" είναι $m+n-k$.

- Με θεωρία συνόλων: Αν A και B δεν είναι διακριτά, τότε $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
  - Αν είναι διακριτά, αυτό απλοποιείται σε $|A|+|B|$.

Παράδειγμα Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (1/6)

- Από 200 φοιτητές, 50 παρακολουθούν Διακριτά, 140 Μαθηματικά ΙΙ, 24 και τα δύο.
  - Πόσοι φοιτητές δεν παρακολουθούν κανένα από τα δύο?
    - 200 – (50 + 140 – 24) = 34
- Από τους 200 οι 60 είναι πρωτοετείς. Από αυτούς, 20 παρακολουθούν Διακριτά ΙΙ, 45 Μαθηματικά ΙΙ, 16 και τα δύο.
  - Πόσοι μη-πρωτοετείς δεν παρακολουθούν κανένα από τα δύο;
  - Πρέπει να βρούμε το πλήθος των φοιτητών που δεν παρακολουθούν ούτε το ένα ούτε το άλλο μάθημα και ούτε είναι πρωτοετείς.
    - 200 – (50 + 140 + 60 – 24 – 20 – 45 + 16) = 177

Παράδειγμα Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (2/6)

- Κάποιοι υποθετικοί κανόνες για passwords:
- Τα passwords πρέπει να έχουν μήκος 2 χαρακτήρες.
  - Κάθε χαρακτήρας πρέπει να είναι
    - ένα γράμμα a-z (#=26), ή
    - ένα ψηφίο 0-9 (#=10), ή
    - ένα από τα ειδικά σύμβολα (#=10) !@#$%^&*().
  - Κάθε password πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 ψηφίο ή ειδικό σύμβολο.
- Πόσα σωστά passwords υπάρχουν;

Παράδειγμα
Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (3/6)

- Ένα σωστό password έχει ψηφίο ή ειδικό χαρακτήρα στη θέση 1 **ή** στη θέση 2.
  - αυτές οι περιπτώσεις επικαλύπτονται, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

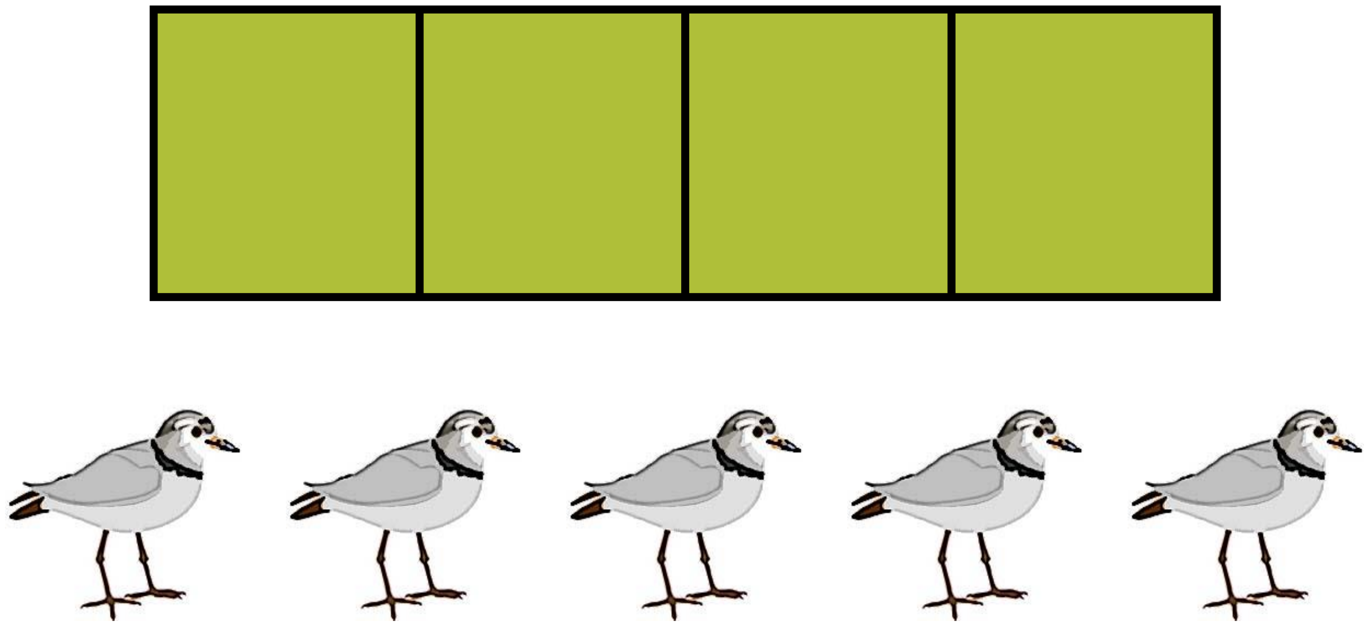
(# από passwords με ψηφίο ή ειδικό χαρακτήρα στη θέση #1) = $(10+10)\cdot(10+10+26)$

(# με ψηφίο ή ειδικό χαρακτήρα στη θέση #2) = επίσης $20\cdot46$

(# με ψηφίο ή ειδικό χαρακτήρα και στις δύο θέσεις)= $20\cdot20$

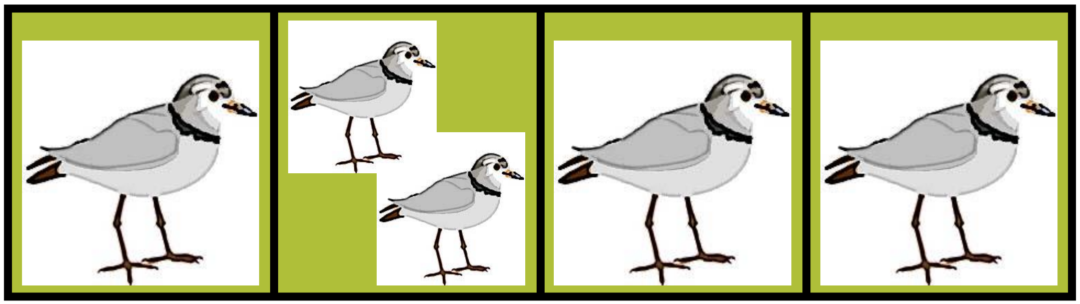
- Απάντηση: $920+920-400 = 1{,}440$

Η Αρχή του Περιστερώνα (1/3)



Αν n περιστέρια πετάξουν σε k φωλιές στον περιστερώνα και $k < n$, τότε σε κάποια φωλιά θα μπουν τουλάχιστον 2 περιστέρια.

Η Αρχή του Περιστερώνα (2/3)



Αν n περιστέρια πετάξουν σε *k* φωλιές στον περιστερώνα και $k < n$, τότε σε κάποια φωλιά θα μπουν τουλάχιστον 2 περιστέρια.

Η Αρχή του Περιστερώνα (3/3)

- Θεώρημα Αρχής του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle).

Αν k+1 ή περισσότερα αντικείμενα ανατεθούν σε k χώρους, τότε σε τουλάχιστον 1 χώρο πρέπει να ανατεθούν 2 ή περισσότερα αντικείμενα.

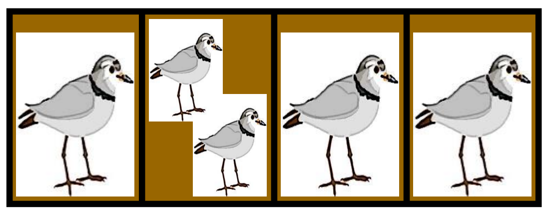
- Με συναρτήσεις:
  – Αν $f{:}A\rightarrow B$ και $|A|\geq|B|+1$, τότε κάποιο στοιχείο του B έχει ≥2 είδωλα στο A κάτω από την f.
    - δηλαδή, η f δεν είναι ένα-προς-ένα.
- Επίσης γνωστή ως “Η αρχή Dirichlet drawer”.

Παράδειγμα 1ο
Αρχής του Περιστερώνα

- Υπάρχουν 101 πιθανοί βαθμοί (0%-100%) στρογγυλεμένοι στον πλησιέστερο ακέραιο.
- Υποθέστε επίσης ότι υπάρχουν >101 φοιτητές στην τάξη.
- Οπότε, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας βαθμός που θα δοθεί σε τουλάχιστον 2 φοιτητές στο τέλος του εξαμήνου.
  - δηλαδή, η συνάρτηση από φοιτητές σε βαθμούς *δεν είναι* συνάρτηση ένα-προς-ένα.

Παράδειγμα 2ο
Αρχής του Περιστερώνα (1/2)

- Υποθέστε ότι το S περιέχει οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους (περισσότερους από 5). Τότε, υπάρχει ένα ζευγάρι αριθμών στο S των οποίων η διαφορά διαιρείται ακριβώς με το 5.



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την απλή αρχή για να αποδείξουμε πολύ περίπλοκα πράγματα.

Υποθέστε $S = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$. Καθένας από αυτούς έχει ένα υπόλοιπο όταν διαιρείται με το 5. Ποια μπορεί να είναι αυτά τα υπόλοιπα? 0, 1, 2, 3, ή 4

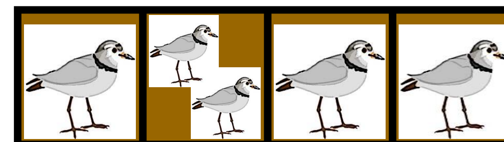
Παράδειγμα 2ο
Αρχής του Περιστερώνα (2/2)

Υποθέστε $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Καθένας από αυτούς έχει ένα υπόλοιπο όταν διαιρείται με το 5. Ποια μπορεί να είναι αυτά τα υπόλοιπα?

0, 1, 2, 3, or 4

6 αριθμοί, 5 πιθανά υπόλοιπα...

Τι ξέρουμε σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα?



Κάποιο ζευγάρι έχει το ίδιο υπόλοιπο!

Έστω a_i και a_j αυτό το ζευγάρι και r το υπόλοιπο τους.

$a_i = 5m + r$, και $a_j = 5n + r$.

Η διαφορά είναι: $a_i - a_j = (5m + r) - (5n + r) = 5m - 5n = 5(m-n)$, που διαιρείται ακριβώς με το 5.

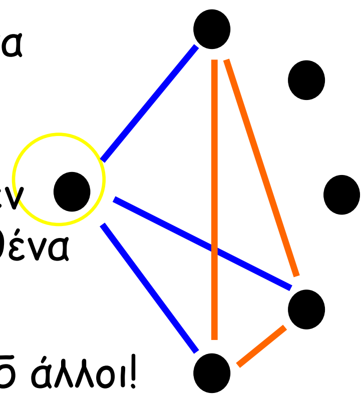
Παράδειγμα 3ο
Αρχής του Περιστερώνα

- Έξι άνθρωποι πηγαίνουν σε ένα πάρτι. Είτε υπάρχουν 3 που ξέρουν ο ένας τον άλλο, ή υπάρχουν 3 που είναι άγνωστοι μεταξύ τους.

Ας πάρουμε ένα άτομο.

Είτε ξέρει είτε δεν ξέρει τον καθένα άλλο.

Άλλα υπάρχουν 5 άλλοι! Έτσι, είτε ξέρει, είτε δεν ξέρει, τουλάχιστον 3 άλλους.



Ας πούμε ότι ξέρει 3 άλλους

Αν κάποιοι από αυτούς τους 3 ξέρουν ο ένας τον άλλο, τότε 3 άνθρωποι ξέρουν ο ένας τον άλλο. Οπότε πρέπει να είναι όλοι άγνωστοι.

Άρα αποδείξαμε αυτό που θέλουμε!

Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια

Παράδειγμα 4ο
Αρχής του Περιστερώνα

- Υποθέστε ότι τον επόμενο μήνα, η ομάδα μπάσκετ L.A. Lakers παίζει τουλάχιστον 1 παιχνίδι την ημέρα, αλλά ≤ 45 παιχνίδια συνολικά. Θα δείξουμε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια ακολουθία συνεχών ημερών στο μήνα κατά τη διάρκεια της οποίας παίζουν *ακριβώς* 14 παιχνίδια.
  - **Απόδειξη:** Έστω a_j το πλήθος των παιχνιδιών που παίζονται κατά τη διάρκεια ή πριν την ημέρα j. Τότε, $a_1,\ldots,a_{30} \in \mathbb{Z}^+$ είναι ακολουθία 30 διαφορετικών ακεραίων με $1 \leq a_j \leq 45$. Οπότε $a_1+14,\ldots,a_{30}+14$ είναι ακολουθία 30 διαφορετικών ακεραίων με $15 \leq a_j+14 \leq 59$. Άρα, $(a_1,\ldots,a_{30},a_1+14,\ldots,a_{30}+14)$ είναι ακολουθία 60 ακεραίων από το σύνολο {1,..,59}. Σύμφωνα με την Αρχή του Περιστερώνα, δύο από αυτούς πρέπει να είναι ίδιοι, αλλά $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$. Οπότε, $\exists ij$: $a_i = a_j+14$. Άρα, 14 παιχνίδια παίχτηκαν τις μέρες $a_j+1, \ldots, a_i$.

Παράδειγμα
Αρχής του Περιστερώνα

- Παράδειγμα από $\{a_i\}$: Όλα τα στοιχεία είναι διαφορετικά.
  - 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 45
  - Τότε $\{a_i+14\}$ είναι η παρακάτω ακολουθία: 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 55, 57, 59

Για παράδειγμα, ακριβώς 14 παιχνίδια παίχτηκαν τις ημέρες 3 ως 11: 2+1+2+1+2+1+2+1+2

- Σε οποιουσδήποτε 60 ακέραιους από1-59 πρέπει να υπάρχουν διπλοί. Στο παράδειγμα είναι οι εξής :
  - 16, 19, 21, 22, 25, 27, 30, 33, 36, 37, 39, 41, 43, 45

Γενικευμένη Αρχή του Περιστερώνα

- **Παράδειγμα** υπάρχουν N=280 φοιτητές σε ένα έτος. Υπάρχουν k=52 εβδομάδες σε έναν χρόνο.
  - Άρα, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον 1 εβδομάδα κατά τη διάρκεια της οποίας τουλάχιστον $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$ φοιτητές στο έτος έχουν γενέθλια.
- **Θεώρημα:** Αν N αντικείμενα ανατεθούν σε k χώρους, τότε σε τουλάχιστον 1 χώρο πρέπει να ανατεθούν τουλάχιστον $\lceil N/k \rceil$ αντικείμενα.

Απόδειξη της Γ.Α.Π.

- Με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέστε ότι κάθε χώρος έχει λιγότερα από $\lceil N/k \rceil$ αντικείμενα, δηλαδή $\leq \lceil N/k \rceil - 1$.
- Τότε το συνολικό πλήθος των αντικειμένων είναι το πολύ

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = k\left(\frac{N}{k}\right) = N$$

- Οπότε, υπάρχουν λιγότερα από N αντικείμενα, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι υπάρχουν N αντικείμενα!

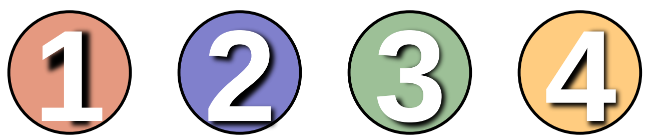
Παράδειγμα Γ.Α.Π.

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 280 φοιτητές στο έτος.
  – Χωρίς να ξέρουμε τα γενέθλια κανενός, ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του *n* για την οποία μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τη Γ.Α.Π. ότι τουλάχιστον *n* φοιτητές πρέπει να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα;

- Απάντηση: $\lceil 280/12 \rceil = \lceil 23.3 \rceil = 24$

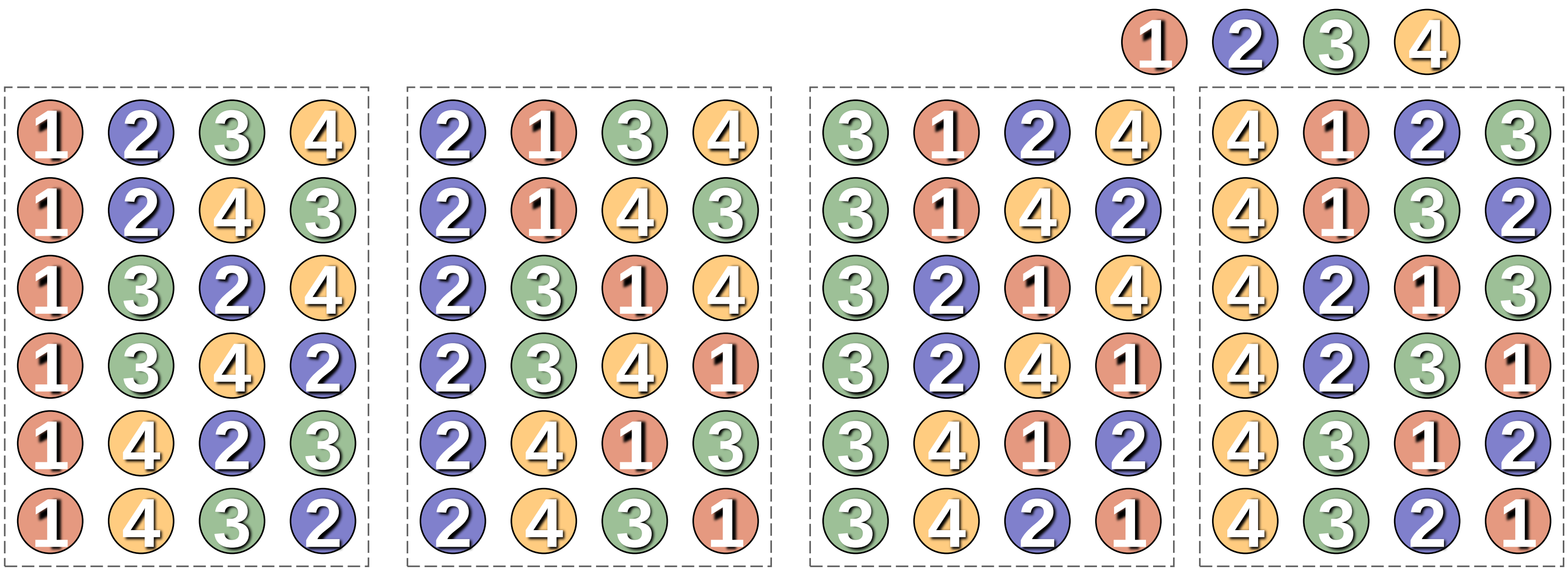
Μεταθέσεις (1/16)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 4 μπάλες;



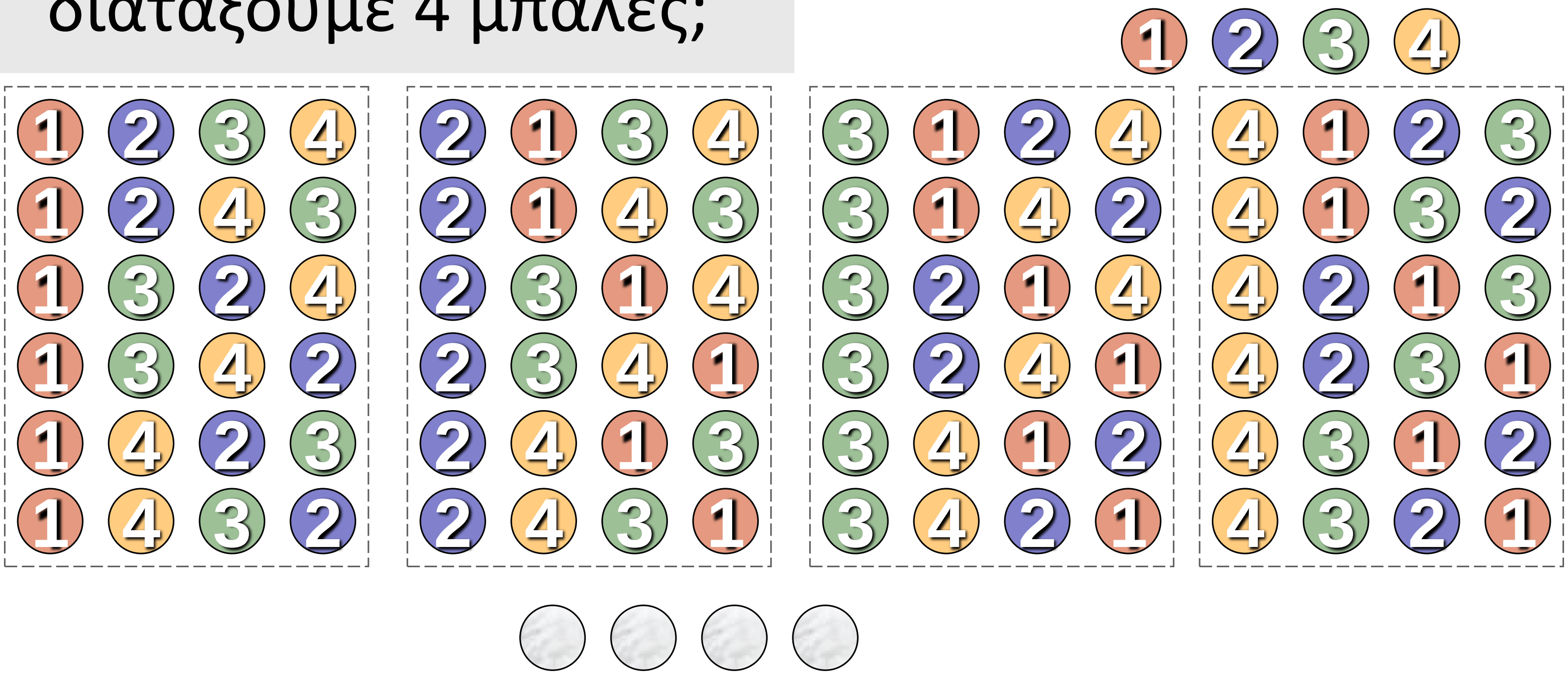
Μεταθέσεις (2/16)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 4 μπάλες;



Μεταθέσεις (3/16)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 4 μπάλες;



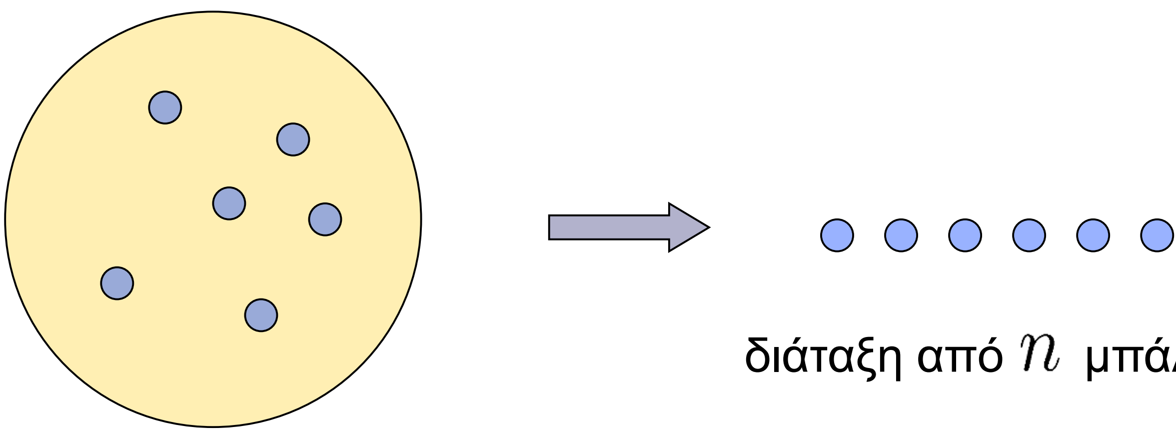
4 × 3 × 2 × 1 = 24

Μεταθέσεις (4/16)

Γενικά για n (διαφορετικές) μπάλες έχουμε

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

δυνατές διατάξεις

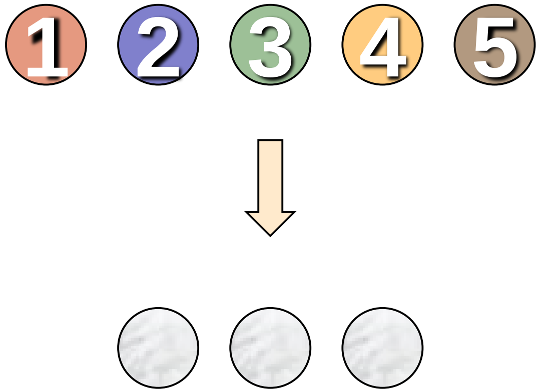


διάταξη από n μπάλες

σύνολο από n μπάλες

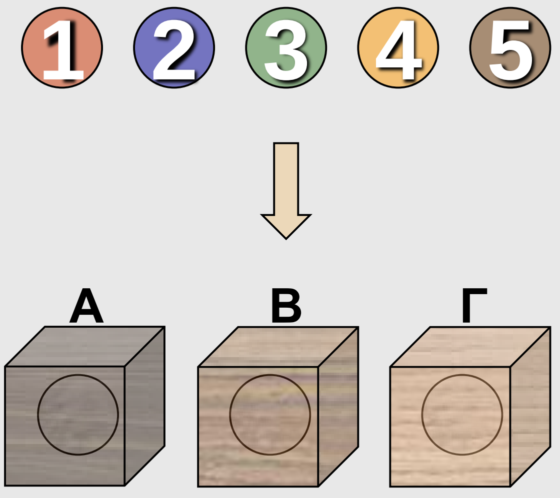
Μεταθέσεις (5/16)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 3 μπάλες από ένα σύνολο με 5 μπάλες;



Μεταθέσεις (6/16)

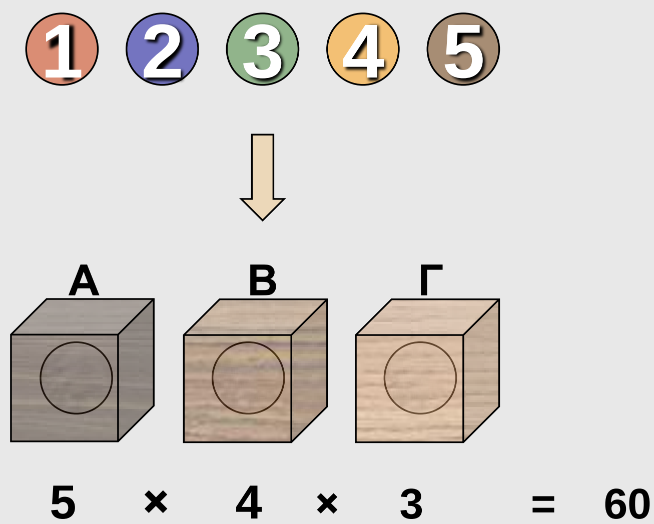
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 3 μπάλες από ένα σύνολο με 5 μπάλες;



- Ισοδύναμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε3 από τις 5 σε 3 διαφορετικά κουτιά;

Μεταθέσεις (7/16)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 3 μπάλες από ένα σύνολο με 5 μπάλες;



- Ισοδύναμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε3 από τις 5 σε 3 διαφορετικά κουτιά;

Μεταθέσεις (8/16)

- Σε έναν αγώνα δρόμου με 12 δρομείς, καθένας από τους top 5 λαμβάνει διαφορετικό βραβείο. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να δοθούν τα 5 βραβεία;

12 11 10 9 8

a) 60
b) 12^5
c) 12!/7!
d) 5^{12}
e) Δεν έχω ιδέα

Μια *μετάθεση* είναι μια διατεταγμένη τοποθέτηση αντικειμένων

Το πλήθος μεταθέσεων r διαφορετικών αντικειμένων επιλεγμένων από n διαφορετικά αντικείμενα συμβολίζεται ως P(n,r).

$P(n,r) = n! / (n-r)!$

Μεταθέσεις (9/16)

- Ας υποθέσουμε ότι μια παρέα φοιτητών σχεδιάζει να επισκεφτεί 4 bars στην Κοζάνη κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Αν υπάρχουν 7 bars στην Κοζάνη, και η παρέα σκοπεύει να επισκεφτεί τουλάχιστον ένα bar πάνω από μια φορά, πόσα είναι τα πιθανά προγράμματα επισκέψεων σε bars που μπορεί να καταστρώσει η παρέα;
- Π.χ: AABC, ACCD, AFAF είναι αποδεκτά προγράμματα, αλλά το AFDE δεν είναι.

Μεταθέσεις (10/16)

- Μια απλή προσέγγιση:
  - Τα 2 πρώτα είναι ίδια, και τα δύο τελευταία διαφορετικά: 7x1x6x5.
  - Το πρώτο και το τρίτο είναι ίδια, το δεύτερο και το τέταρτο διαφορετικά: 7x6x1x5.
  - Τα δύο πρώτα ίδια, τα δύο τελευταία ίδια, και διαφορετικά από το πρώτο: 7x1x6x1.
  - Κτλ.

Δύσκολο να γίνει έτσι

Μεταθέσεις (11/16)

- Μια καλύτερη προσέγγιση:
- Μέτρα τον συνολικό αριθμό των πιθανών προγραμμάτων:

7^4

- Αφαίρεσε αυτά που δε σε ενδιαφέρουν:

Κάθε bar διαφορετικό

7x6x5x4

- Όλα τα άλλα έχουν επαναλήψεις.

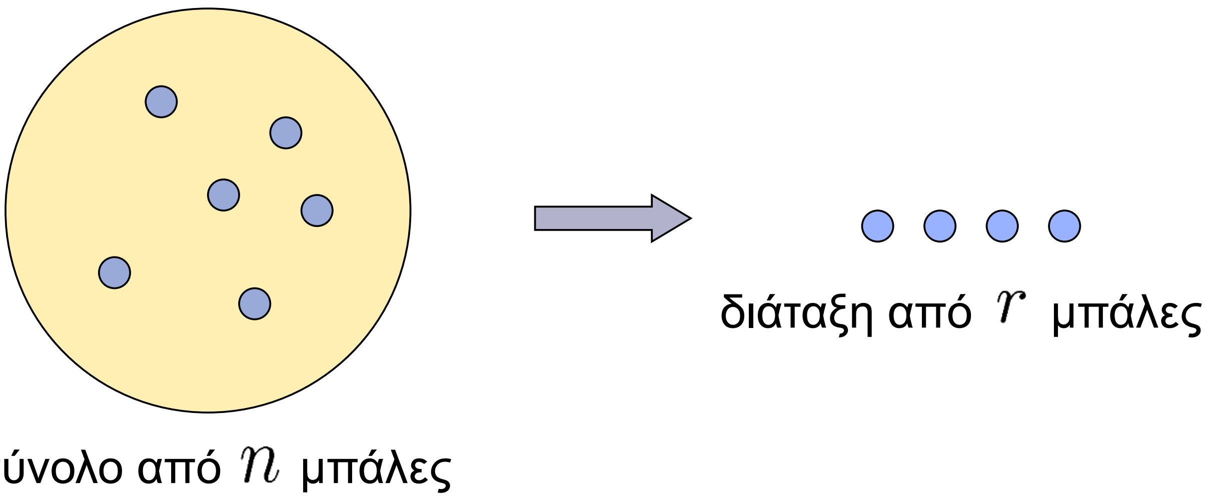
$7^4 - 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 1561$

Μεταθέσεις (12/16)

Γενικά για διάταξη r από n (διαφορετικές) μπάλες έχουμε

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+2) \times (n-r+1) =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$ δυνατές διατάξεις

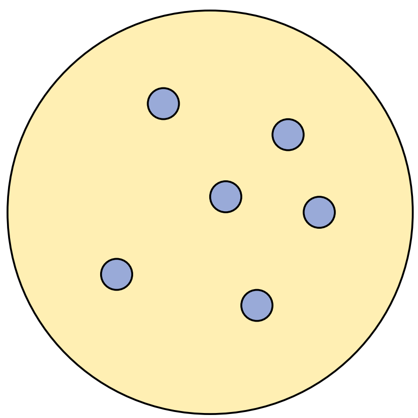


Μεταθέσεις (13/16)

Γενικά για διάταξη r από n (διαφορετικές) μπάλες έχουμε

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+2) \times (n-r+1) =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$ δυνατές διατάξεις



σύνολο από n μπάλες

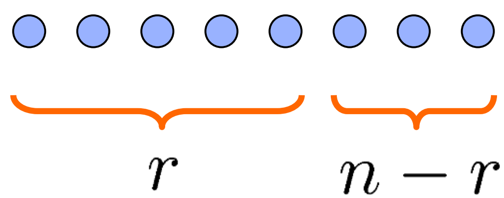
διάταξη από r μπάλες

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Μεταθέσεις (14/16)

Γενικά για διάταξη r από n (διαφορετικές) μπάλες έχουμε

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ δυνατές διατάξεις



- Διατάσσουμε τις n μπάλες με $n!$ τρόπους
- Η σειρά για τις τελευταίες $n-r$ μπάλες δεν επηρεάζει τη σειρά για τις πρώτες r

Μεταθέσεις (15/16)

- **Ορισμός.** Μια *μετάθεση* ή *διάταξη* ενός συνόλου *S* από αντικείμενα είναι μια διατεταγμένη ακολουθία που περιέχει κάθε αντικείμενο στο *S* ακριβώς μια φορά.
- **Ορισμός.** Μια διάταξη *r* διαφορετικών στοιχείων του *S* ονομάζεται *r-μετάθεση του S*.
- Το πλήθος των ***r*-μεταθέσεων** ενός συνόλου με $n=|S|$ στοιχεία είναι:

$$\boldsymbol{P(n,r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = n!/(n-r)!}$$

Μεταθέσεις (16/16)

- Έχουμε r διαφορετικά βαμμένες μπάλες τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε σε n κουτιά διαφορετικά αριθμημένα.
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα;
  - **μετάθεση** r από n διακριτά αντικείμενα
    - n(n-1)(n-2)…(n-r+1)
    - ή αλλιώς n!/(n-r)!
- Στην ορολογία διατεταγμένων συνόλων, υπάρχουν n(n-1)(n-2)…(n-r+1) διατεταγμένες r-άδες οι οποίες έχουν διακριτά στοιχεία που είναι στοιχεία ενός συνόλου μεγέθους n.

Παράδειγμα Μεταθέσεων (1/6)

- Ένας τρομοκράτης έχει βάλει μια οπλισμένη ατομική βόμβα στην πόλη σας, κι εσείς πρέπει να την απενεργοποιήσετε κόβοντας τα καλώδια του πυροκροτητή. Υπάρχουν 10 καλώδια. Αν κόψετε τα τρία σωστά καλώδια, στη σωστή σειρά, θα απενεργοποιήσετε τη βόμβα. Σε κάθε άλλη περίπτωση θα εκραγεί! Αν όλα τα καλώδια μοιάζουν ίδια (και δεν έχετε ιδέα από πυροκροτητές), ποιες είναι οι πιθανότητες επιβίωσης;

$P(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$,
άρα υπάρχει 1 στις 720 πιθανότητες επιβίωσης!

Παράδειγμα Μεταθέσεων (2/6)

- Πόσοι είναι οι τετραψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί που δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία;
  – P(10,4) = 5040
- Πόσοι από αυτούς δεν έχουν μηδενικό στην πρώτη θέση;
  – 9*9*8*7 = 4536
  – ή εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
    - από τους 5040 υπάρχουν 9*8*7 = 504 αριθμοί που έχουν μηδενικό στην πρώτη θέση. Άρα οι υπόλοιποι 5040 – 504 δεν έχουν.
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συμβολοσειρές από 4 διαφορετικά γράμματα ακολουθούμενες από 3 διαφορετικά ψηφία;
  – P(24,4)*P(10,3)

Μέγεθος Δυναμοσυνόλου

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσουμε 3 διαφορετικές μπάλες σε 10 διαφορετικά αριθμημένα κουτιά αν κάθε κουτί μπορεί να χωρέσει όσες μπάλες θέλουμε.
  – 10^3
  – Γενικά υπάρχουν n^r τρόποι να τοποθετήσουμε r διαφορετικές μπάλες σε n διαφορετικά αριθμημένα κουτιά αν κάθε κουτί μπορεί να χωρέσει όσες μπάλες θέλουμε.
- **Ας προσδιορίσουμε τον αριθμό των υποσυνόλων ενός συνόλου Α με μέγεθος r**
  – Θεωρήστε το πρόβλημα τοποθέτησης r στοιχείων του Α σε δύο κουτιά. Για κάθε δυνατή τοποθέτηση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία που βρίσκονται στο πρώτο κουτί συγκροτούν ένα υποσύνολο του Α. Αφού υπάρχουν 2^r τρόποι για να τοποθετηθούν τα r στοιχεία, υπάρχουν 2^r υποσύνολα στο P(A).
- **Προσοχή:** Είναι διαφορετικό από τον υπολογισμό μεταθέσεων!

Παράδειγμα Μεταθέσεων (3/6)

- Υποθέστε ότι έχετε χρόνο να ακούσετε 10 τραγούδια πηγαίνοντας με το λεωφορείο από την Κοζάνη στη Θεσ/νίκη. Υπάρχουν 6 τραγούδια των U2, 8 του Moby, και 3 των Nirvana για να διαλέξετε.
- Πόσες διαφορετικές playlists μπορείτε να φτιάξετε;

P(17,10) = 17x16x15x14x13x12x11x10x9x8

Παράδειγμα Μεταθέσεων (4/6)

- Υποθέστε ότι έχετε χρόνο να ακούσετε 10 τραγούδια πηγαίνοντας με το λεωφορείο από την Κοζάνη στη Θεσ/νίκη. Υπάρχουν 6 τραγούδια των U2, 8 του Moby, και 3 των Nirvana για να διαλέξετε.
- Υποθέστε ότι θέλετε να ακούσετε 4 τραγούδια των U2, 4 του Moby, και 2 των Nirvana, με αυτή τη σειρά. Πόσες διαφορετικές playlists μπορείτε να φτιάξετε;

$$P(6,4) \times P(8,4) \times P(3,2)$$

Παράδειγμα Μεταθέσεων (5/6)

- Υποθέστε ότι έχετε χρόνο να ακούσετε 10 τραγούδια πηγαίνοντας με το λεωφορείο από την Κοζάνη στη Θεσ/νίκη. Υπάρχουν 6 τραγούδια των U2, 8 του Moby, και 3 των Nirvana για να διαλέξετε.
- Υποθέστε ότι θέλετε να ακούσετε 4 τραγούδια των U2, 4 του Moby, και 2 των Nirvana. Θέλετε όλα τα τραγούδια ενός συγκροτήματος/καλλιτέχνη να παίζονται στη σειρά αλλά δε σας ενδιαφέρει η σειρά των συγκροτημάτων/καλλιτεχνών. Πόσες διαφορετικές playlists μπορείτε να φτιάξετε;

$$P(6,4) \times P(8,4) \times P(3,2) \times 3!$$

Παράδειγμα Μεταθέσεων (6/6)

- Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μια γραμμή 5 διαφορετικές Mercedes και 3 διαφορετικές BMW, αν οι BMW δε μπορούν να μπουν συνεχόμενες;

___ M1 ___ M2 ___ M3 ___ M4 ___ M5 ___

5! X P(6,3)

___ BMW1 ___ BMW2 ___ BMW3 ___ ?

Μεταθέσεις με Επανάληψη (1/13)

- Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να δημιουργηθούν με τα γράμματα της λέξης "*δυο*";

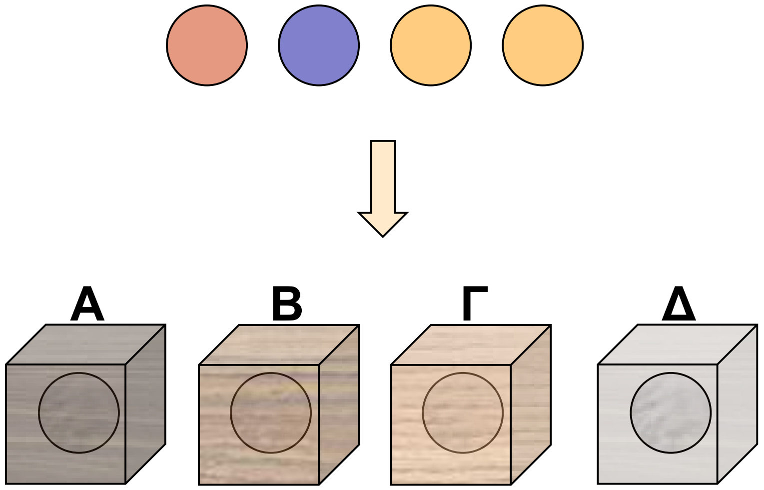
$3 \times 2 \times 1 = 6$

- Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να δημιουργηθούν με τα γράμματα της λέξης "*άρα*";

3

Μεταθέσεις με Επανάληψη (2/13)

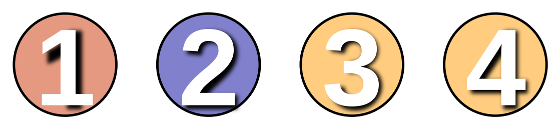
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;



Μεταθέσεις με Επανάληψη (3/13)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;

Αριθμούμε τις 4 μπάλες



οπότε έχουμε 4! δυνατές τοποθετήσεις

Μεταθέσεις με Επανάληψη (4/13)

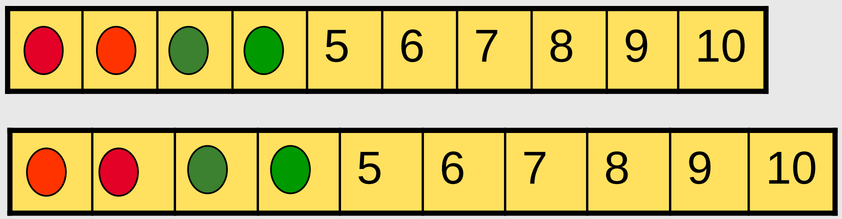
- Έχουμε 4 μπάλες (δύο κόκκινες, μια μπλε και μια πράσινη) τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε σε 10 κουτιά αριθμημένα από το 1 ως το 10, όπου το κάθε κουτί χωράει μια μπάλα.
  – Ας υποθέσουμε ότι τις δύο κόκκινες τις ξαναβάφουμε. Τη μια σκούρο και την άλλη ανοιχτό κόκκινο;
    - Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε στα κουτιά;

$$P(10,4) = 5040$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Μεταθέσεις με Επανάληψη (5/13)

- Ας πάρουμε τις παρακάτω τοποθετήσεις:



- Αν δεν ξεχωρίσουμε τις αποχρώσεις του κόκκινου, οι δύο τρόποι γίνονται ένας:
  – κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ζευγαρώσουμε όλες τις 5040 τοποθετήσεις.
- Άρα υπάρχουν 5040/2 = 2520 τρόποι να τοποθετήσουμε 2 κόκκινες, 1 μπλε και μια πράσινη μπάλα σε 10 αριθμημένα κουτιά.

Μεταθέσεις με Επανάληψη (6/13)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;

➡ Αριθμούμε τις 4 μπάλες 1 2 3 4

οπότε έχουμε 4! δυνατές τοποθετήσεις

➡ Η κατάσταση χωρίς αριθμούς δεν επηρεάζεται από τη σχετική διάταξη που δίνουμε στις 2 όμοιες μπάλες

	Α	Β	Γ	Δ		Α	Β	Γ	Δ
π.χ.	4	1	2	3	$\equiv$	3	1	2	4

Μεταθέσεις με Επανάληψη (7/13)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;

➡ Αριθμούμε τις 4 μπάλες 1 2 3 4

οπότε έχουμε 4! δυνατές τοποθετήσεις

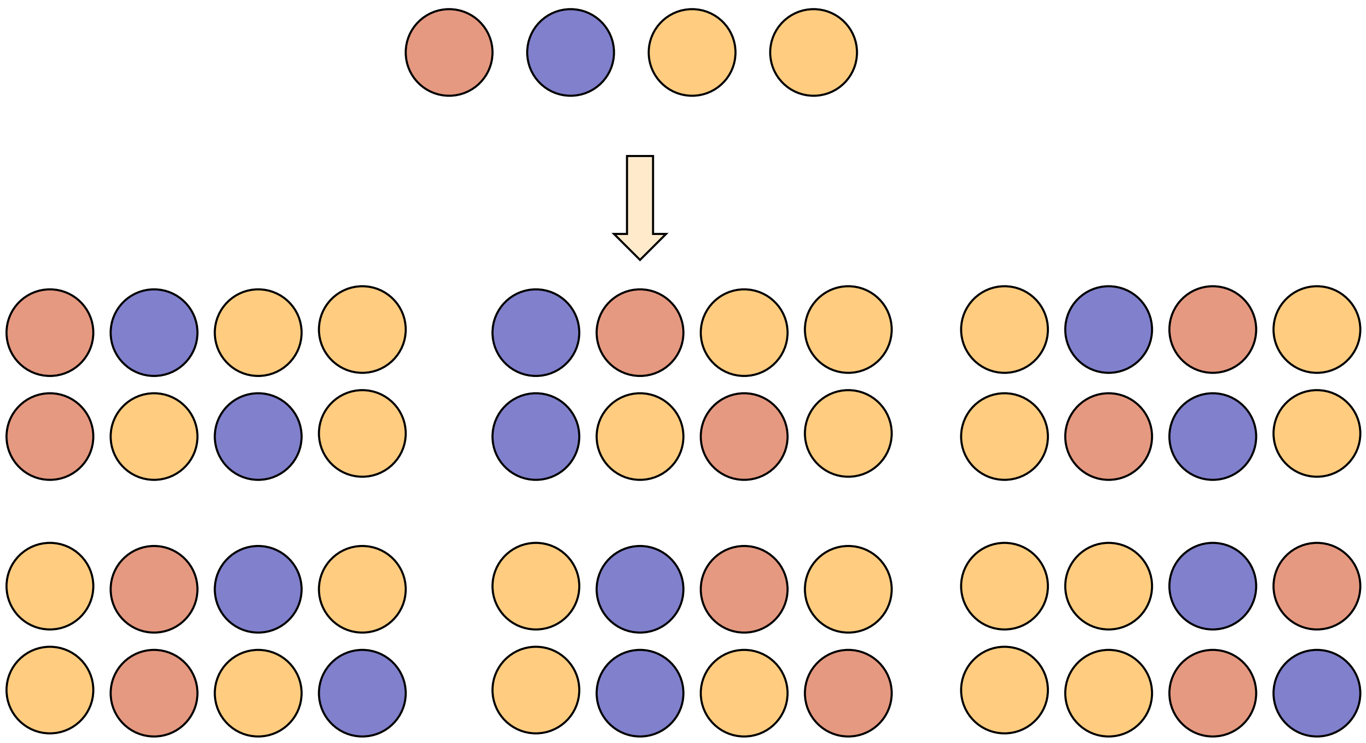
➡ Η κατάσταση χωρίς αριθμούς δεν επηρεάζεται από τη σχετική διάταξη που δίνουμε στις 2 όμοιες μπάλες

	Α	Β	Γ	Δ		Α	Β	Γ	Δ
π.χ.	4	1	2	3	$\equiv$	3	1	2	4

Άρα υπάρχουν 4!/2 = 12 τρόποι

Μεταθέσεις με Επανάληψη (8/13)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;



Μεταθέσεις με Επανάληψη (9/13)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 μπάλες σε 5 διαφορετικά κουτιά όταν 2 μπάλες είναι **όμοιες**;

- Αριθμούμε τις 4 μπάλες 1 2 3 4

οπότε έχουμε 5×4×3×2 δυνατές τοποθετήσεις

- Η κατάσταση χωρίς αριθμούς δεν επηρεάζεται από τη σχετική διάταξη που δίνουμε στις 2 όμοιες μπάλες

	Α	Β	Γ	Δ	Ε		Α	Β	Γ	Δ	Ε
π.χ.	4	1		2	3	$\equiv$	3	1		2	4

Άρα υπάρχουν 5×4×3×2 / 2 = 60 τρόποι

Μεταθέσεις με Επανάληψη (10/13)

- Σύμφωνα με το παραπάνω υπάρχουν P(10,5)/3! = 5040 με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 3 κόκκινες, 1 μπλε και μια πράσινη μπάλα σε 10 αριθμημένα κουτιά. Γιατί;
  - Επειδή ο κάθε τρόπος τοποθέτησης τριών όμοιων κόκκινων μπαλών, μιας μπλε και μιας πράσινης αντιστοιχεί σε 3! τρόπους τοποθέτησης τριών διακρίσιμων κόκκινων μπαλών, μιας μπλε και μιας πράσινης.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν γενικό τύπο για το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε r έγχρωμες μπάλες σε n αριθμημένα κουτιά, όπου q_1 είναι ενός χρώματος, q_2 ενός δεύτερου χρώματος,…,και q_t ενός t χρώματος.

Μεταθέσεις με Επανάληψη (11/13)

- Ο κάθε τρόπος με τον οποίο τοποθετούμε τις r όχι εντελώς διαφορετικά βαμμένες μπάλες αντιστοιχεί σε $q_1!q_2!...q_t!$ τρόπους με τους οποίους τοποθετούμε r διαφορετικά βαμμένες μπάλες.
  - Μια τοποθέτηση δεν αλλάζει αν αναδιατάξουμε τις q_1 μπάλες του ίδιου χρώματος. Το ίδιο για τις q_2 κτλ.
  - Με πόσους τρόπου μπορούμε να αναδιατάξουμε τις q_1 μπάλες του ίδιου χρώματος;
    - μετάθεση q_1 αντικειμένων = $q_1!$
  - Το ίδιο και για τις q_2 κτλ.
  - Άρα υπάρχουν $q_1!q_2!...q_t!$ τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κάνουμε αναδιάταξη.
- Άρα;

Μεταθέσεις με Επανάληψη (12/13)

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν γενικό τύπο για το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε *r* έγχρωμες μπάλες σε *n* αριθμημένα κουτιά, όπου q_1 είναι ενός χρώματος, q_2 ενός δεύτερου χρώματος,…,και q_t ενός *t* χρώματος.

$$P(n,r) \,/\, q_1!q_2!\ldots q_t!$$

Μεταθέσεις με Επανάληψη (13/13)

- Στα πλαίσια της διάταξης αντικειμένων λέμε ότι υπάρχουν $n!/q_1!q_2!\ldots q_t!$ τρόποι να διατάξουμε n αντικείμενα, από τα οποία q_1 είναι ενός είδους, q_2 ενός δεύτερου είδους,…,και q_t ενός *t* είδους.
  - αν όλα είναι διαφορετικά μεταξύ τους, έχουμε *n*! τρόπους διάταξης.
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάψουμε 12 γραφεία, έτσι ώστε 3 να είναι πράσινα, 2 κίτρινα, 2 γκρι, και τα υπόλοιπα άσπρα;
  - 12! / 3!2!2!5! = 166.320
- Ο αριθμός διαφορετικών μηνυμάτων που μπορούν να αναπαρασταθούν από ακολουθίες από 3 παύλες και 2 τελείες είναι 5!/3!2! = 10.

Παράδειγμα Μεταθέσεων με Επανάληψη (1/2)

- Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις των γραμμάτων APALACHICOLA υπάρχουν;

$$\frac{12!}{4!2!2!}$$

- Πόσες αν τα δύο L πρέπει να είναι συνεχόμενα;

$$\frac{11!}{4!2!}$$

- Πόσες αν το πρώτο γράμμα πρέπει να είναι A;

$$\frac{11!}{3!2!2!}$$

Παράδειγμα Μεταθέσεων με Επανάληψη (2/2)

- Θέλουμε να κατασκευάσουμε συμβολοσειρά με 20 γράμματα, όπου τα 4 είναι A, τα 5 U, τα 6 G, και τα 5 C. Αν η λέξη αρχίζει με AC ή με UG, πόσες συμβολοσειρές υπάρχουν;
- Ας υποθέσουμε ότι με A αναπαριστούμε το σύνολο των συμβολοσειρών που αρχίζουν με AC, και με U το σύνολο των συμβολοσειρών που αρχίζουν με UG. Μετρήστε τα ξεχωριστά και αθροίστε.

Πρώτα βρείτε το $|A|$: 18 γράμματα, 3 A, 5 U, 6 G, και 4 C.

$$|A| = 18!/(3!5!6!4!)$$

Παράδειγμα Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (4/6)

- Υποθέτουμε ότι ένας μαθητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μια εβδομάδα κατά την οποία θα μελετάει ένα μάθημα κάθε μέρα. Έχει 4 μαθήματα: μαθηματικά, φυσική, χημεία, ιστορία. Πόσα προγράμματα υπάρχουν τα οποία αφιερώνουν τουλάχιστον μια μέρα σε κάθε μάθημα;
  - **Απάντηση:** Από τις 7 μέρες θέλουμε 4 να αφιερώνονται σε διαφορετικά μαθήματα. Πόσες διατάξεις 4 διαφορετικών αντικειμένων από ένα σύνολο 7 αντικειμένων υπάρχουν;
    - P(7,4)

    Οι υπόλοιπες 3 μέρες μπορούν να αφιερωθούν σε οποιοδήποτε από τα 4 μαθήματα. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν;
    - 4^3

    Άρα υπάρχουν $P(7,4)\times 4^3$ προγράμματα.
  - Είναι σωστή αυτή η απάντηση;

Παράδειγμα Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (5/6)

- Στο παρακάτω παράδειγμα υπάρχουν δύο διαφορετικές επιλογές 4 ημερών όπου κάθε μια αφιερώνεται σε διαφορετικό μάθημα, αλλά τα δύο προγράμματα είναι ίδια.

Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ
Μαθ	Φυσ	Χημ	Ιστ	Μαθ	Φυσ	Χημ
Μαθ	Φυσ	Χημ	Ιστ	Μαθ	Φυσ	Χημ

Παράδειγμα Εγκλεισμού και Αποκλεισμού (6/6)

- Έστω A1 το σύνολο των προγραμμάτων όπου δεν περιλαμβάνονται ποτέ τα μαθηματικά. Έστω A2, A3, A4 τα αντίστοιχα σύνολα για φυσική, χημεία, ιστορία.
  - Τότε το $A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4$ είναι το σύνολο των προγραμμάτων στα οποία ένα ή περισσότερα μαθήματα δεν περιλαμβάνονται.
  - Οπότε αν αφαιρέσουμε το πλήθος των στοιχείων αυτού του συνόλου από το σύνολο όλων των προγραμμάτων έχουμε βρει αυτό που θέλουμε.
  - Πως θα υπολογίσουμε το $|A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4|$;

Συνδυασμοί (1/10)

- Μια ομάδα μπάσκετ αποτελείται από 12 παίκτες, 5 από τους οποίους παίζουν. Πόσες διαφορετικές πεντάδες μπορούν να δημιουργηθούν από τους 12;
- Ποια είναι η διαφορά;
- Σε έναν αγώνα δρόμου με 12 δρομείς, κάθε ένας από τους 5 πρώτους λαμβάνει ένα διαφορετικό βραβείο. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να δοθούν τα 5 βραβεία;

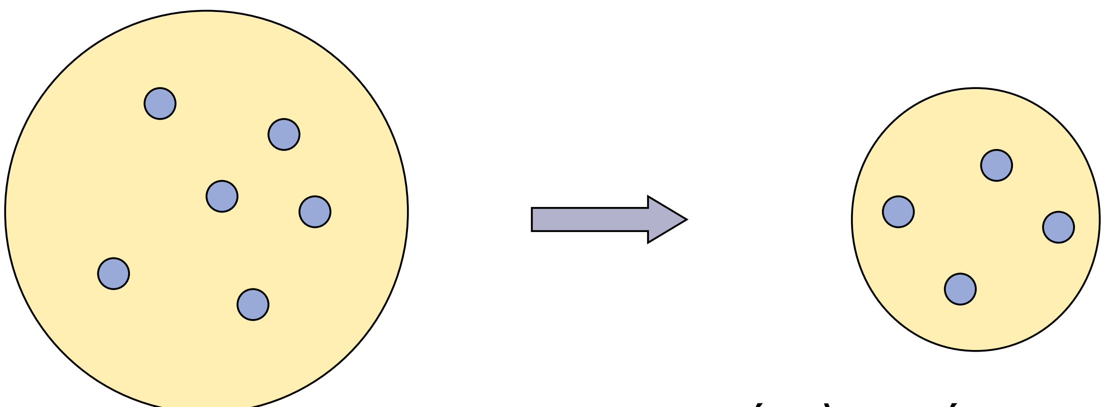
$C(12,5)=12!/7!5!$

$P(12,5) = C(12,5) \times 5!$

Συνδυασμοί (2/10)

Για επιλογή r αντικειμένων ένα σύνολο με n (διαφορετικά) αντικείμενα έχουμε

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$



σύνολο από n αντικείμενα

σύνολο από r αντικείμενα

Συνδυασμοί (3/10)

- Ορισμός. Ένας *r*-συνδυασμός στοιχείων ενός συνόλου *S* είναι ένα υποσύνολο $T \subseteq S$ με *r* μέλη, $|T|=r$.
- Το πλήθος των *r-συνδυασμών* ενός συνόλου με $n=|S|$ στοιχεία είναι:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Προσέξτε ότι $C(n,r) = C(n, n-r)$
  - Γιατί το να διαλέξουμε *r* μέλη του *T* είναι το ίδιο με το να διαλέξουμε τα $n-r$ μη-μέλη του *T*.

Συνδυασμοί (4/10)

- Προσέξτε ότι $C(n,r) = C(n, n-r)$
  - Γιατί το να διαλέξουμε *r* μέλη του *T* είναι το ίδιο με το να διαλέξουμε τα $n-r$ μη-μέλη του *T*.
- **Παράδειγμα:** Από 8 μπάλες επέλεξε 5. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί;   1 2 3 4 5 6 7 8
  - Κάθε διαφορετικός συνδυασμός 5 μπαλών αντιστοιχεί σε έναν διαφορετικό συνδυασμό των τριών που απομένουν.

1 2 3 4 5	6 7 8
1 2 3 4 6	5 7 8
1 2 4 7 8	3 5 6

Παράδειγμα Συνδυασμών (1/5)

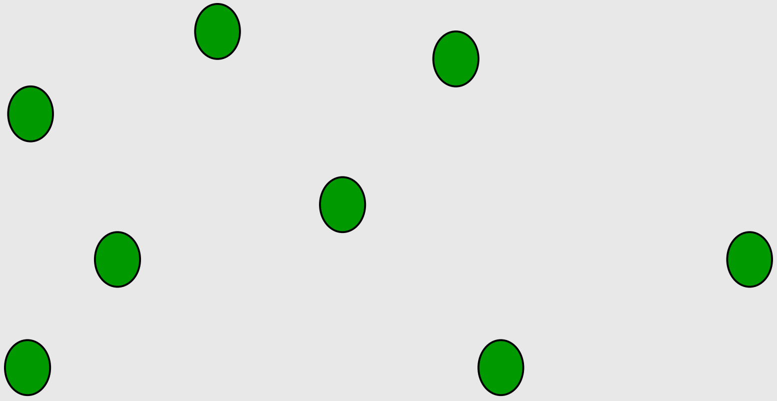
- Πόσες διαφορετικές μοιρασιές 7 τραπουλόχαρτων μπορούν να γίνουν από μια τράπουλα 52 χαρτιών;
  - Η σειρά των χαρτιών δεν έχει σημασία.

- **Απάντηση:** $C(52,7) = P(52,7)/P(7,7)$
  $= 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \; / \; 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

133,784,560

Παράδειγμα Συνδυασμών (2/5)

- Σε ένα σύνολο *n* κορυφών πόσες μη κατευθυνόμενες ακμές μπορώ να δημιουργήσω;



- Μια ακμή πόσες κορυφές επιλέγει;
  - **Απάντηση:** 2
- **Απάντηση:** $C(n,2) = n!/(n\text{-}2)!2! = n(n\text{-}1)/2$
- Πόσες κατευθυνόμενες ακμές μπορώ να δημιουργήσω;

Παράδειγμα Συνδυασμών (3/5)

- Σε ένα σύνολο 11 βουλευτών πόσοι τρόποι επιλογής μια πενταμελούς επιτροπής υπάρχουν;
  - C(11,5) = 11!/5!6!
- Πόσοι τρόποι επιλογής μιας 5μελούς επιτροπής ώστε ο βουλευτής Α να συμπεριλαμβάνεται πάντα υπάρχουν;
  - C(10,4) = 10!/4!6!
- Πόσοι τρόποι επιλογής μιας 5μελούς επιτροπής ώστε ο βουλευτής Α να μην συμπεριλαμβάνεται ποτέ υπάρχουν;
  - C(10,5) = 10!/5!5!

Παράδειγμα Συνδυασμών (4/5)

- Πόσοι τρόποι επιλογής μιας 5μελούς επιτροπής υπάρχουν έτσι ώστε να περιλαμβάνεται πάντα ένας τουλάχιστον από τους βουλευτές Α και Β;
  - Ο αριθμός των επιτροπών που περιλαμβάνουν και τους δύο είναι C(9,3). Ο αριθμός των επιτροπών που περιλαμβάνουν τον Α αλλά όχι τον Β είναι C(9,4). Ο αριθμός των επιτροπών που περιλαμβάνουν τον Β αλλά όχι τον Α είναι επίσης C(9,4). Άρα συνολικά C(9,4) + C(9,4) + C(9,3).
  - Εναλλακτικά, ο αριθμός των επιτροπών που δεν περιλαμβάνουν κανέναν από τους δύο είναι C(9,5). Άρα συνολικά C(11,5) – C(9,5).
  - Εναλλακτικά, με την αρχή εγκλεισμού και αποκλεισμού;

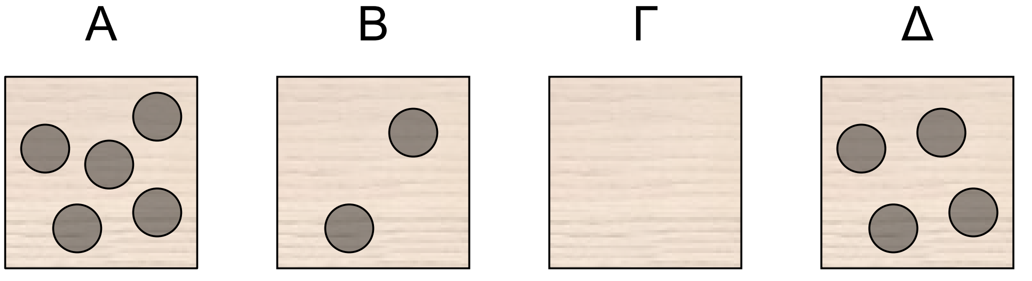
Παράδειγμα Συνδυασμών (5/5)

- Μια επιτροπή 8 φοιτητών θα επιλεχθεί από ένα σύνολο φοιτητών που αποτελείται από 19 πρωτοετείς, και 34 δευτεροετείς.
- Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεχθούν 3 πρωτοετείς και 5 δευτεροετείς;
- Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεχθεί μια επιτροπή με ακριβώς έναν πρωτοετή;
- Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεχθεί μια επιτροπή με το πολύ έναν πρωτοετή;
- Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεχθεί μια επιτροπή με το λιγότερο έναν πρωτοετή;

Συνδυασμοί (5/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

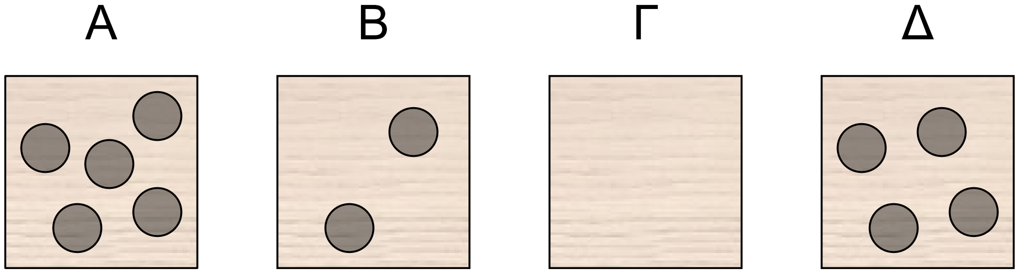
Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα



Συνδυασμοί (6/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα

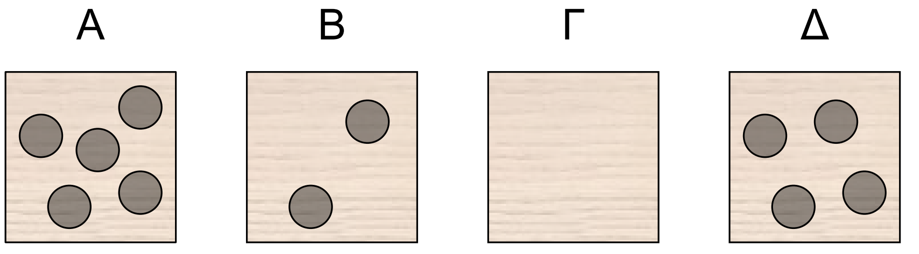


Για το κουτί Α έχουμε $r+1$ επιλογές. Η κ-οστή επιλογή αντιστοιχεί στην τοποθέτηση κ μπαλών στο κουτί Α, όπου $\kappa = 0, 1, \ldots, r$

Συνδυασμοί (7/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα



Για το κουτί Α έχουμε $r+1$ επιλογές. Η κ-οστή επιλογή αντιστοιχεί στην τοποθέτηση κ μπαλών στο κουτί Α, όπου $\kappa = 0, 1, \ldots, r$

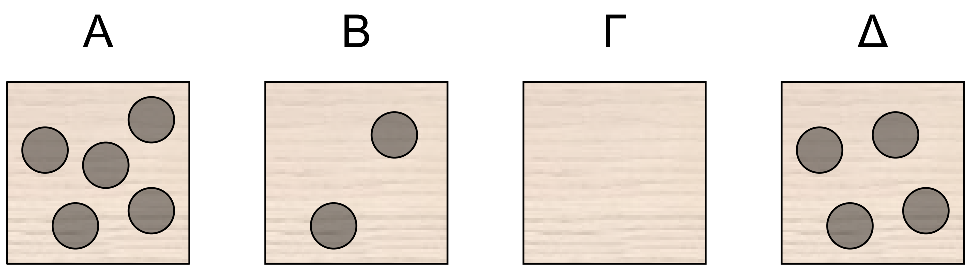
Για το κουτί Β έχουμε $r+1-\alpha$ επιλογές, όπου α ο αριθμός των μπαλών που τοποθετήσαμε στο κουτί Α

κ.ο.κ.

Συνδυασμοί (8/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα



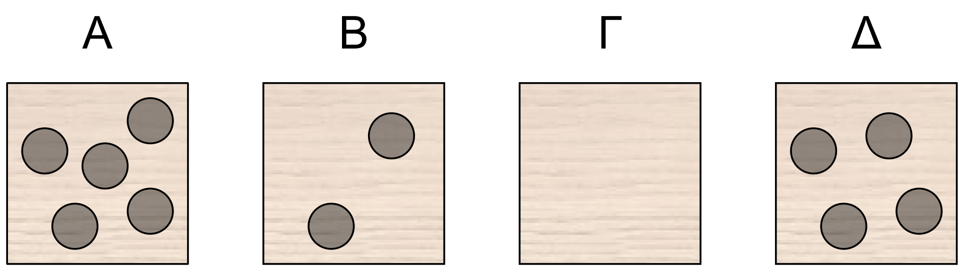
Μπορούμε να σκεφτούμε το πρόβλημα ως εξής: Έχουμε μία ακολουθία από K bits και αντιστοιχούμε : 1 → όριο ενός κουτιού, 0 → αντικείμενο

Π.χ. η ακολουθία 101000011001 αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου το Α έχει 1, το Β έχει 4, το Γ έχει 0 και το Δ έχει 2 αντικείμενα

Συνδυασμοί (9/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα



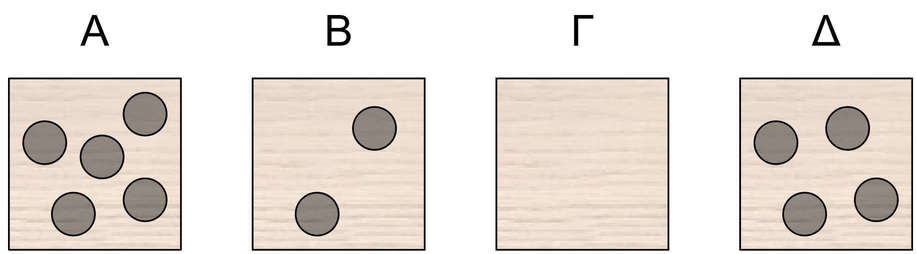
Μπορούμε να σκεφτούμε το πρόβλημα ως εξής: Έχουμε μία ακολουθία από K bits και κάνουμε αντιστοιχούμε : 1 → όριο ενός κουτιού, 0 → αντικείμενο

Γενικά μία έγκυρη ακολουθία έχει την μορφή $1b_1b_2\ldots b_{n+r-1}1$ όπου r bits πρέπει να είναι 0 και $n-1$ bits πρέπει να είναι 1

Συνδυασμοί (10/10)

Τοποθέτηση r όμοιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κουτί μπορεί να πάρει από 0 έως r αντικείμενα



Γενικά μία έγκυρη ακολουθία έχει την μορφή $1b_1b_2\ldots b_{n+r-1}1$

όπου r bits πρέπει να είναι 0 και $n-1$ bits πρέπει να είναι 1

Επομένως έχουμε $C(n+r-1,r)=\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ δυνατές τοποθετήσεις

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Έχουμε *n*-1 άσσους (γιατί οι δύο στην αρχή και στο τέλος είναι σταθεροί) και *r* μηδενικά. Δηλαδή *n*+*r*-1 αντικείμενα συνολικά. Άρα θέλουμε να διατάξουμε *n*+*r*-1 όπου έχουμε *n*-1 ενός είδους και *r* ενός άλλου είδους. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;
- Γενικά αυτός είναι ο αριθμός επιλογών *r* αντικειμένων από *n* αντικείμενα. Και είναι ίσος με

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$C(n+r-1,r)$$

Παράδειγμα Συνδυασμών με Επανάληψη (1/2)

- Ο αριθμός των τρόπων επιλογής τριών από επτά ημέρες (όταν επιτρέπονται επαναλήψεις) είναι:
  - C(7+3-1,3) = C(9,3) = 9!/6!3! = 84
- Ο αριθμός των τρόπων επιλογής επτά από τρεις ημέρες (οπότε αναγκαστικά υπάρχουν επαναλήψεις) είναι:
  - C(3+7-1,7) = C(9,7) = 9!/2!7! = 36
- Όταν ρίχνουμε 3 ζάρια πόσα διαφορετικά αποτελέσματα υπάρχουν;
  - C(6+3-1,3) = C(8,3) = 8!/5!3! = 56

Παράδειγμα

- Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άνθρωποι σε μια σειρά από 12 καρέκλες;
  - Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα ως αυτό της διάταξης 12 αντικειμένων που ανήκουν σε 6 διαφορετικά είδη – τα 5 είδη αντιστοιχούν στους 5 ανθρώπους και το έκτο στις 7 κενές καρέκλες. Ποιος είναι ο αριθμός των διατάξεων;
    - 12!/7!
  - Εναλλακτικά μπορούμε να διατάξουμε τους 5 ανθρώπους. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;
    - 5!

    και μετά κατανέμουμε τις άδειες καρέκλες είτε μεταξύ των ανθρώπων είτε στα δύο άκρα. Υπάρχουν 6 πιθανές θέσεις και 7 αντικείμενα να κατανεμηθούν. Άρα
    - C(6+7-1,7) = 12!/5!7! τρόποι

Παράδειγμα Συνδυασμών με Επανάληψη (2/2)

- Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άνθρωποι σε μια σειρά από 12 καρέκλες ώστε να μην κάθονται δύο άνθρωποι συνεχόμενα;
- Πως προκύπτει αυτό;

___ A1 ___ A2 ___ A3 ___ A4 ___ A5 ___

5! X $C(6+3-1,3)=8!/3!$

Συνδυαστική (4/6)

- Η μελέτη του πλήθους των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να συνδυάσουμε αντικείμενα.
- Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι ανάλογα με το αν όλα τα αντικείμενα είναι διαφορετικά μεταξύ τους, αν χωρίζονται σε ομάδες όμοιων αντικειμένων, αν ο συνδυασμός όλων τους ή κάποιων από αυτά πρέπει να είναι σε διάταξη ή όχι, κτλ.
  - **μεταθέσεις**
  - **μεταθέσεις με επανάληψη**
  - **συνδυασμοί**
  - **συνδυασμοί με επανάληψη**

Συνδυαστική (5/6)

- **Έχουμε r μπάλες τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε σε n κουτιά αριθμημένα από το 1 ως το n.**
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα και όλες οι μπάλες είναι διαφορετικές;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν n = r, κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα και όλες οι μπάλες είναι διαφορετικές;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν n=100 κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα και οι μπάλες ανήκουν σε 5 ομάδες όμοιων μπαλών όπου οι ομάδες έχουν 5, 10, 20, 30, 35 μπάλες;

Συνδυαστική (6/6)

- **Έχουμε *r* μπάλες τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε σε *n* κουτιά αριθμημένα από το 1 ως το *n*.**
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει όσες μπάλες θέλουμε και όλες οι μπάλες είναι διαφορετικές;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει 1 μπάλα και όλες οι μπάλες είναι ίδιες;
  - με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε κουτί χωράει όσες μπάλες θέλουμε και όλες οι μπάλες είναι ίδιες;

Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Στεργίου Κωνσταντίνος. «Διακριτά Μαθηματικά». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE257/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.