Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΚΕΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΣΩ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ Κ. ΣΟΦΟΚΛΕΟΥΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

2017

Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΚΕΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΣΩ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ Κ. ΣΟΦΟΚΛΕΟΥΣ

Διατριβή η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση διδακτορικού τίτλου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

Απρίλιος, 2017

ΣΕΛΙΔΑ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ

Υποψήφια Διδάκτορας: Παρασκευή Κ. Σοφοκλέους

Τίτλος Διατριβής: Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά: Ορισμός και ανάπτυξη της μέσω ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για απόκτηση Διδακτορικού διπλώματος στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και εγκρίθηκε στις 27 Απριλίου 2017 από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

Εξεταστική Επιτροπή:

Ερευνητικός Σύμβουλος: Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

…………………………………

Μέλη Επιτροπής: Κωνσταντίνος Χρίστου, Καθηγητής (Πρόεδρος)
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

…………………………………

Αθανάσιος Γαγάτσης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

…………………………………

Θεοδόσης Ζαχαριάδης, Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

…………………………………

Φραγκίσκος Καλαβάσης, Καθηγητής
Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

…………………………………

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Η παρούσα διατριβή υποβάλλεται προς συμπλήρωση των απαιτήσεων για απονομή Διδακτορικού Τίτλου του Πανεπιστημίου Κύπρου. Είναι προϊόν πρωτότυπης εργασίας αποκλειστικά δικής μου, εκτός των περιπτώσεων που ρητώς αναφέρονται μέσω βιβλιογραφικών αναφορών, σημειώσεων ή και άλλων δηλώσεων.

Παρασκευή Σοφοκλέους

………………………………………………..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας ήταν η παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου και κατάλληλου μοντέλου για τον ορισμό και τη μέτρηση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και η εξέταση του πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξή της σε μαθητές Στ΄ δημοτικού.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 802 μαθητές Στ΄ δημοτικού. Οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας αυτής και εξέτασε τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Από αυτούς, οι 85 συμμετείχαν σε τρία διαφορετικά ψηφιακά περιβάλλοντα που είχαν σκοπό την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών και συμπλήρωσαν το δοκίμιο που τους δόθηκε αρχικά και μετά τη συμμετοχή τους σε αυτά τα περιβάλλοντα. Τα περιβάλλοντα αυτά καθοδηγήθηκαν από τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής μάθησης, βασίστηκαν στην αρχή της μάθησης με τεχνολογία και αξιοποίησαν προσεγγίσεις που βρέθηκαν αποτελεσματικές για την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Όμως, διέφεραν ως προς το βαθμό καθοδήγησης που έδιναν οι δραστηριότητες που περιλάμβαναν και ως προς την ακολουθία τους. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ήταν: το ανοικτό (μόνο ανοικτά προβλήματα με ελάχιστη καθοδήγηση), το καθοδηγούμενο (καθοδηγούμενες δραστηριότητες→ανοικτά προβλήματα) και το μικτό (ανοικτά προβλήματα→καθοδηγούμενες δραστηριότητες →ανοικτά προβλήματα).

Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι:

(α) Η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά είναι ένα πολυδιάστατο σύστημα που περιγράφεται από τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες: τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης μπορούν να ερμηνευθούν άμεσα από την κριτική και τη δημιουργική σκέψη και έμμεσα από τη βασική γνώση. Ταυτόχρονα, η δημιουργική σκέψη μπορεί να ερμηνευθεί άμεσα από τη βασική γνώση και την κριτική σκέψη, ενώ η κριτική σκέψη μπορεί να ερμηνευθεί άμεσα από τη βασική γνώση.

(β) Οι μαθητές που συμμετείχαν και στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, ενίσχυσαν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους. Όμως, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον την ενίσχυσαν σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στο μικτό.

(γ) Υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: η «Επιφανειακά Βασική» (μερική επιτυχία στη βασική

γνώση), η «Εις βάθος Κριτική» (υψηλή επιτυχία σε βασική γνώση και κριτική σκέψη), η «Εις βάθος Δημιουργική» (υψηλή επιτυχία σε βασική γνώση και δημιουργική σκέψη) και η «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» (υψηλή επιτυχία σε βασική γνώση, κριτική και δημιουργική σκέψη). Η «Επιφανειακά Βασική» ομάδα που συμμετείχε στο καθοδηγούμενο περιβάλλον ενίσχυσε σε μεγαλύτερο βαθμό την ανωτέρου επιπέδου σκέψη της σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού. Η «Εις βάθος Κριτική» ομάδα που συμμετείχε στο ανοικτό περιβάλλον ενίσχυσε την ανωτέρου επιπέδου σκέψη της σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού. Οι ομάδες «Εις βάθος Δημιουργική» και «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» ενίσχυσαν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους στο ίδιο βαθμό σε όποιο περιβάλλον και αν συμμετείχαν. Άρα, οι δυο πρώτες ομάδες μαθητών που είχαν αδυναμίες στην αποκλίνουσα σκέψη δεν επωφελήθηκαν από τη συμμετοχή τους στο μικτό περιβάλλον που συνδύαζε προσεγγίσεις ως προς τη δομή του.

ABSTRACT

The purpose of this study was to present a comprehensive model of higher order thinking in mathematics and examine the ways to develop it through inquiry based teaching with the use of technology.

Eight hundred two 6th grade students participated in this study. All participants completed a test measuring higher order thinking in mathematics. In addition to this, eighty five students took part in three different intervention programs which aimed to develop students' higher order thinking in mathematics with the use of technology. The students completed the test before and after their participation in the intervention programs. The intervention programs were guided by features of inquiry based learning and educational principles of learning with technology. They were also designed based on the results of previous research studies which showed a positive impact on students' higher order thinking in mathematics. The three interventions, differed in the extend of the pedagogical guidance that students received and the sequence of the presented tasks. The three in intervention programs were the following: the open intervention program (included only open ended tasks with minimal guidance), the guided intervention program (guides tasks → open ended tasks) and the mixed intervention program (open ended tasks →guided tasks → open ended tasks).

The results of the study showed that:

(a) Higher order thinking in mathematics is a multidimensional system and can be described with four interrelated skills: basic knowledge, critical thinking, creative thinking and complex thinking processes in mathematics. Complex thinking processes can be explained directly by critical and creative thinking and indirectly by basic knowledge. Creative thinking can be explained directly by critical thinking and basic knowledge and critical thinking can be explained directly by basic knowledge.

(b) Students who participated in the three digital intervention programs enhanced their higher order thinking in mathematics. However, students who participated in the open and in the guided environment had better performance in higher order thinking, than students who participated in the mixed environment.

(c) Four different types of groups of students were identified based on their higher order thinking skills in mathematics. The "Superficial basic" group of students could successfully solve only some basic knowledge tasks. The "Deep critical" group of students could successfully solve almost all the basic knowledge and critical thinking tasks. The "Deep creative" group of students could successfully solve almost all the basic knowledge and creative thinking tasks, while the "Deep critical and creative" group of students could

successfully solve almost all the basic knowledge, critical and creative thinking tasks. The "Superficial basic" group of students who participated in the guided environment had better performance in higher order thinking than the "Superficial basic" group who participated in the mixed intervention. The "Deep critical" group of students who participated in the open environment had better performance in higher order thinking than the "Deep critical" group who participated in the mixed intervention. The "Deep creative" and the "Deep critical and creative" group of students benefited in the same extend by their participation in the three different types of intervention programs. Students with low creative abilities who participated in the mixed intervention program did not adequately benefit from this.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η συγγραφή αυτού του μέρους της διατριβής σημαίνει ότι έφτασε το τέλος … Το τέλος αυτής της μεγάλης διαδρομής γεμάτη πρωτόγνωρες εμπειρίες, συγκινήσεις, γνώσεις, δεξιότητες….. Μέσα από αυτή τη διαδρομή έμαθα πάρα πολλά, έγινα καλύτερος άνθρωπος, ωρίμασα και πήρα σημαντικά εφόδια που θα είναι χρήσιμα για τη μετέπειτα πορεία μου. Σε αυτή τη μεγάλη διαδρομή είχα πάντα δίπλα μου την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, την αναπληρώτρια καθηγήτρια Δρ. Δήμητρα Πίττα-Πανταζή. Χωρίς τη συνεχή και άμεση στήριξή και καθοδήγησή της, το ενδιαφέρον και τις γνώσεις της δεν θα μπορούσε αυτή η εργασία να ολοκληρωθεί και να πάρει τη μορφή που έχει. Θα ήθελα να της εκφράσω τις βαθύτερες μου ευχαριστίες τόσο για το σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισε στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής αλλά κυρίως για όλα όσα μου πρόσφερε σε αυτά τα 15 χρόνια γνωριμίας και εντατικής συνεργασίας που είχαμε. Οι ιδέες της, ο τρόπος σκέψης της και η θετική της προσέγγιση θα με συντροφεύουν πάντα στη ζωή μου. Θεωρώ ότι τα λόγια αυτά δεν μπορούν να εκφράσουν την πραγματική εκτίμηση και ευγνωμοσύνη που νιώθω για το πρόσωπό της.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στα υπόλοιπα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Δρ. Κωνσταντίνο Χρίστου για τις πολύτιμες συμβουλές που παρείχε σε κάθε στάδιο της έρευνας της εργασίας. Χωρίς αυτές δεν θα μπορούσε η εργασία αυτή να έχει τη μορφή που έχει. Ευχαριστίες εκφράζονται στον καθηγητή Δρ. Αθανάσιο Γαγάτση για τη στήριξη του και τις σημαντικές εισηγήσεις του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Δρ. Θεοδόση Ζαχαριάδη και Δρ. Φραγκίσκο Καλαβάση για τη συμμετοχή τους στην αξιολόγηση της συγκεκριμένης εργασίας και για τα επικοιδομητικά τους σχόλια για βελτίωση και επέκτασή της.

Ένα μεγάλο και ξεχωριστό ευχαριστώ οφείλω στους μαθητές που συμμετείχαν ως δείγμα στην εργασία μου, στους εκπαιδευτικούς τους και στους γονείς τους. Χωρίς αυτούς δεν θα μπορούσε να υλοποιηθεί η διατριβή αυτή. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα αυτά τα άτομα, την Ελένη, την Άνθια, τον Μάριο, τη Μαριλένα, τη Λουίζα και την Παναγιώτα, που έβαλαν το λιθαράκι τους για να μπορέσει η έρευνα της εργασίας αυτής να υλοποιηθεί. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω σε τρεις φίλες μου, στη Φλώρια Βαλανίδου, στη Λουίζα Μαλλούρη και στη Μαρία Χειμωνή, που με βοήθησε η κάθε μια με τον τρόπο της για να μπορέσω να ολοκληρώσω την εργασία αυτή. Επίσης, θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στη διευθύντρια, στο προσωπικό και στους μαθητές του σχολείου που υπηρετώ τον τελευταίο χρόνο, το Α΄Δημοτικό Σχολείο Λεμεσού, που με στήριξαν και πίστεψαν σε μένα.

Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες στα τρία πιο σημαντικά άτομα της ζωής μου, τους γονείς μου και την αδερφή μου, που χωρίς αυτούς η εργασία αυτή δεν θα μπορούσε να ξεκινήσει. Είναι τα άτομα που με ενθαρρύνουν σε κάθε μου βήμα και το ευχαριστώ είναι λίγο σε αυτά που κάνουν για μένα.

Στον Κυριάκο, στην Άντρη και στη Γαβριέλλα

και

Σε όσους πίστεψαν σε μένα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Σελίδα

Σελίδα

Σελίδα

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ/ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σελίδα

Κεφάλαιο Ι

Το Πρόβλημα

Ο κόσμος χαρακτηρίζεται από κοινωνικοοικονομικές προκλήσεις, αυξανόμενη ανταγωνιστικότητα και εξάρτηση από τη χρήση των τεχνολογικών επιτευγμάτων. Για το λόγο αυτό το άτομο για να επιβιώσει πρέπει να τις αντιμετωπίσει (English, 2010α· European Commission, 2015· National Research Council, 2009). Όμως, η εκπαίδευση του ατόμου αδυνατεί να «συναντήσει» αυτό τον κόσμο, αφού συνεχίζει να είναι η ίδια και να μην λαμβάνει υπόψη όλα αυτά τα επιτεύγματα και τις προκλήσεις (Levin & Wadmany, 2006). Αυτό το γεγονός παρουσιάζεται πιο ειδικά στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπου ερευνητές αναγνωρίζουν ότι υπάρχει αναντιστοιχία μεταξύ των δεξιοτήτων που δίνεται έμφαση στο σχολείο, οι οποίες χαρακτηρίζονται χαμηλού επιπέδου, και του είδους της κατανόησης και των ικανοτήτων που χρειάζονται οι μαθητές για να πετύχουν εκτός σχολείου (Lesh & Zawojewski, 2007). Για αυτό οι μαθητές χρειάζονται εκείνη την εκπαίδευση που θα τους ενισχύσει ικανότητες απαραίτητες για επιτυχία εκτός σχολείου. Τέτοιες ικανότητες μπορεί να είναι: η δημιουργική ικανότητα, η ικανότητα κατασκευής, περιγραφής, εξήγησης και πρόβλεψης σύνθετων συστημάτων, η ικανότητα διαχείρισης πολυεπίπεδων εργασιών που απαιτούν σχεδιασμό, έλεγχο και επικοινωνία ιδεών (English, 2010α· European Commission, 2012· Lesh & Doerr, 2003· Lesh & Zawojewski, 2007). Αυτές οι ικανότητες από διάφορους ερευνητές και επιτροπές χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής έχουν χαρακτηριστεί ως συνιστώσες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (higher order thinking) (Brookhart, 2010· Iowa Department of Education, 1989· King, Goodson, & Rohani, 1998).

Παρόλη την αναγνώριση της σημασίας για ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά στη σχολική τάξη, αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές έχουν περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση, περιορισμένες δεξιότητες επίλυσης προβλήματος και κριτικού συλλογισμού (Hamilton, 2007· Henningsen & Stein, 1997· Hiebert & Carpenter, 1992). Για το λόγο αυτό χρειάζονται περιβάλλοντα μάθησης που να προωθούν την ανάπτυξη και την ενίσχυση τέτοιων ικανοτήτων με μακροπρόθεσμα αποτελέσματα, αφού η φύση της διδασκαλίας επηρεάζει τη φύση και το επίπεδο της μάθησης των μαθητών (Hiebert & Grouws, 2007).

Τέτοια περιβάλλοντα θα μπορούσαν να αναπτυχθούν μέσω της κατάλληλης χρήσης των νέων τεχνολογιών (Clements, Sarama, Yelland, & Glass, 2008· Jonassen, 2000·

Jonassen, Howland, Marra, & Crismond, 2008· Slangen, Fanchamps, & Kommers, 2008). Αυτό γιατί έχει επισημανθεί ότι η χρήση τους μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους (Heid & Blume, 2008· Pea, 1987). Συγκεκριμένα, έχει βρεθεί ότι η χρήση νέων τεχνολογιών ενισχύει διάφορες ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών, όπως την ικανότητα τους να ερμηνεύουν συμβολικά αποτελέσματα (Yerushalmy, 1991), να έχουν εννοιολογική κατανόηση εννοιών (Heid & Blume, 2008· Tall, Smith & Piez, 2008), να κρίνουν και να επανεξετάζουν τη σκέψη τους (Geiger, Faragher, & Goos, 2010), να εκφράζουν γενικευμένους συλλογισμούς (Clements & Battista, 1989), να εκφράζονται δημιουργικά και να αναπτύσσουν την αποκλίνουσα σκέψη τους (Kordaki, 2014· Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2011· Tabach, Hershkowitz, Arcavi, & Dreyfus, 2008). Δηλαδή, οι διάφορες έρευνες έχουν προσπαθήσει να απαντήσουν στην ερώτηση *εάν* η χρήση της τεχνολογίας ενισχύει τις ικανότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά (Li & Ma, 2010). Παραμενει ωστόσο, ανοικτό το ερώτημα σχετικά με το *πώς* η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να αναπτύξει τις ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, όπως την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη, τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, τη λύση προβλήματος (Carreira, Jones, Amado, Jacinto, & Nobre, 2016· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao, & Maschietto, 2016· English, 2008α· Heid & Blume, 2008· Jupri, Drijvers, & van den Heuvel-Panhuizen, 2016· Lagrange, Artigue, Laborde, & Trouche, 2003). Αυτό γιατί ελάχιστες έρευνες έχουν εξετάσει το συγκεκριμένο ερώτημα εις βάθος (Li & Ma, 2010), καθώς και για το ότι δεν είναι ξεκάθαρο ακόμη τι είναι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Αυτά προσπαθεί να εξετάσει η εργασία αυτή.

Διατύπωση του Προβλήματος

Είναι γεγονός ότι η πρόσβαση σε διάφορα είδη τεχνολογίας στις τάξεις των μαθηματικών αυξάνεται με γοργούς ρυθμούς τα τελευταία χρόνια (Drijvers, 2014· Fahlgren & Brunström, 2014). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι έρευνες σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών να αυξάνονται συνεχώς (Drijvers et al., 2016· Heid & Blume, 2008· Hershkowitz, Tabach, & Dreyfus, 2016· Hoyles & Lagrange, 2010· Sinclair & Baccaglini-Frank, 2016). Τα περισσότερα ερευνητικά αποτελέσματα παρουσιάζουν θετική επίδραση της χρήσης της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Αυτό υποστηρίζεται και από τρεις πρόσφατες μεταναλύσεις ερευνών σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση (Cheung & Slavin, 2011· Li & Ma, 2010· Rakes, Valentine, McGatha & Ronau, 2010). Συγκεκριμένα, οι Rakes et al. (2010) βρήκαν ότι υπάρχουν μικρές, αλλά σημαντικές θετικές επιδράσεις της χρήσης της τεχνολογίας στη μάθηση της άλγεβρας από τους μαθητές. Παρόμοια και οι Li και Ma (2010) έχουν βρει μέτρια, αλλά σημαντική θετική επίδραση της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Όμως, οι Cheung και Slavin (2011) υπογραμμίζουν ότι η τεχνολογία δεν έχει επιφέρει τεράστιες αλλαγές στη μάθηση των μαθηματικών. Γενικά, όπως υποστηρίζει και ο Drijvers (2014), η θετική επίδραση της τεχνολογίας στα μαθηματικά δεν αποτελεί αδιαμφισβήτητο αποτέλεσμα.

Ο Drijvers (2014) παρατηρεί ότι δεν φαίνεται «ραγδαία» αύξηση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά σε διεθνείς έρευνες παρόλο το μεγάλο αριθμό τεχνολογικών μέσων που υπάρχει σήμερα στη διάθεση της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ευκολίας πρόσβασης των εκπαιδευτικών για συνεχή και σχετική επιμόρφωση. Αυτό πιθανόν να οφείλεται, σύμφωνα με τον Kaput, στο ότι η χρήση των νέων τεχνολογιών μπορεί να έχει γίνει απλώς μια υποδομή (“infrastructural”) στις τάξεις των μαθηματικών του σήμερα, αφού η παρουσία τους και μόνο δεν είναι αρκετή για θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών (Kaput & Hegedus, 2007). Εκτός αυτού, παρατηρήθηκε ότι η διδασκαλία με τεχνολογία γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως γίνεται η διδασκαλία χωρίς την τεχνολογία (Aviram, 2001), καθώς και το ότι η ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στην τάξη εστιάζεται κυρίως στις λειτουργικές τους χρήσεις (π.χ., εκτέλεση πράξεων) και όχι στις παιδαγωγικές (Bretscher, 2014· Pierce & Stacey, 2010). Ταυτόχρονα, έχει βρεθεί ότι η μέθοδος διδασκαλίας με τη χρήση των νέων τεχνολογιών αποτελεί ένα από τους παράγοντες που σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την επίδοση των μαθητών που συμμετέχουν σε αυτές τις διδασκαλίες (Li & Ma, 2010). Για αυτό, υπάρχει ανάγκη να γίνουν περισσότερες έρευνες για τη χρήση των νέων τεχνολογιών στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες να αφορούν τον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων εντατικών μαθησιακών εμπειριών και το πώς αυτές επιδρούν στη μάθηση των μαθητών και στη διδασκαλία των εκπαιδευτικών (English, 2008α· Drijvers et al., 2016). Τέτοιες μαθησιακές εμπειρίες χρειάζονται πιο επιτακτικά μαθητές ηλικίας 10-14 ετών που βρίσκονται σε στάδιο ανάπτυξης σύνθετης μαθηματικής σκέψης που επηρεάζεται από τις εμπειρίες που αποκτούν καθημερινά από τη διδασκαλία (Drijvers et al., 2016).

Οι διδακτικές προσεγγίσεις της τεχνολογίας που βασίζονται στο μοντέλο του εποικοδομητισμού έχουν βρεθεί να είναι αποτελεσματικές στη μάθηση των μαθητών (Li & Ma, 2010). Δεν είναι όμως ξεκάθαρο ποιες από αυτές τις προσεγγίσεις που βασίζονται στο μοντέλο του εποικοδομητισμού (π.χ., ανοικτή διερευνητική προσέγγιση, καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση, συνδυασμός αυτών) επιδρούν σε μεγαλύτερο βαθμό στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Ταυτόχρονα, υπάρχει ανάγκη να γίνονται συγκρίσεις της επίδρασης διαφορετικών περιβαλλόντων μάθησης των οποίων ο σχεδιασμός βασίζεται σε θεωρίες, ώστε να μπορεί να γίνει ερμηνεία των αποτελεσμάτων (Hiebert & Grouws, 2007). Παράλληλα τονίζεται να αποφεύγεται η σύγκριση με ομάδες ελέγχου, αφού δεν υπάρχει επαρκής ενημέρωση σχετικά με τις συνθήκες της ομάδας ελέγχου (Hiebert & Grouws, 2007). Επίσης, οι συγκρίσεις αυτές είναι αναγκαίες και χρήσιμες και όταν εξετάζονται σε σχέση με το τι μαθαίνουν μαθητές διαφορετικών ικανοτήτων (Lesh, Sriraman & English, 2014), αφού «ένα μέγεθος δεν ταιριάζει σε όλους» (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016).

Παράλληλα, έχει βρεθεί ότι αυξάνονται οι επιδόσεις στα μαθηματικά των μαθητών που εμπλέκονται σε προγράμματα που δίνουν έμφαση στην ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Boaler & Staples, 2008· Sternberg, Lipka, Newman, Wildfeuer, & Grigorenko, 2006). Ταυτόχρονα, όμως, τονίζεται η ανάγκη για σχεδιασμό κατάλληλων ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης για ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (Hollebrands, Laborde, & Strasser, 2008). Για να μπορεί να γίνει αυτό, χρειάζεται να ξεκαθαριστεί η έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και να μετρηθεί κατάλληλα, αφού πολύ λίγες έρευνες έχουν ασχοληθεί με αυτό (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016) και δεν έχει δοθεί ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός της στα μαθηματικά (Haladyna, 1997). Γενικά θεωρείται καταλληλότερη η πολυδιάστατη προσέγγιση της έννοιας αυτής (Brookhart, 2010· Resnick, 1987). Μια τέτοια προσέγγιση παρουσιάζεται στο Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) του Iowa Department of Education (1989) το οποίο αναφέρεται γενικά στον τρόπο που μπορεί να ενισχυθεί η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στην τάξη και όχι εξειδικευμένα στα μαθηματικά. Με βάση αυτό ο συνδυασμός βασικής γνώσης περιεχομένου, κριτικής σκέψης, δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης είναι απαραίτητος για να αποκτήσει κάποιος ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Τα τέσσερα αυτά στοιχεία αλληλοσχετίζονται και εξαρτάται το ένα από το άλλο. Δεν είναι όμως ξεκάθαρο εάν πράγματι το μοντέλο αυτό περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών και συγκεκριμένα τη σκέψη αυτή στα μαθηματικά.

Επομένως, με βάση τα πιο πάνω δεν είναι ακόμη ξεκάθαρο στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας η έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί η τεχνολογία να αξιοποιηθεί ώστε να την αναπτύξει. Η εργασία αυτή προσπαθεί να τα ξεκαθαρίσει. Συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε κατά πόσο επιβεβαιώνεται η δομή του πολυδιάστατου Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) με δεδομένα μαθητών σε μαθηματικές ασκήσεις για να παρουσιάσουμε ένα ολοκληρωμένο μοντέλο ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Επίσης, αξιοποιώντας τη διερευνητική προσέγγιση και την παιδαγωγική χρήση της τεχνολογίας θα παρουσιάσουμε τρία διαφορετικά ψηφιακά περιβάλλοντα και θα εξετάσουμε την αποτελεσματικότητά τους στην επίδοση των μαθητών.

Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα της Εργασίας

Σκοπός της εργασίας ήταν η παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου και κατάλληλου μοντέλου για ορισμό και μέτρηση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και η εξέταση του πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξή της στο δημοτικό σχολείο και συγκεκριμένα σε μαθητές Στ΄ δημοτικού. Ο σκοπός αυτός περιέλαβε:
(α) την επιβεβαίωση με εμπειρικά δεδομένα της δομής του Μοντέλου Σκέψης (Integrated Thinking Model) (Iowa Department of Education, 1989) για τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: βασική γνώση, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης, καθώς και τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ αυτών των ικανοτήτων,
(β) τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την εφαρμογή τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης (*ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό*), τα οποία είχαν σκοπό την ανάπτυξη των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά μαθητών Στ΄ δημοτικού,
(γ) τον εντοπισμό ομάδων μαθητών με διαφορετική επίδοση ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, την εξέταση εάν αναπτύσσουν τη ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους μέσα από τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (*ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό*) και σύγκριση μεταξύ τους.

Με βάση το σκοπό της εργασίας προκύπτουν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Επιβεβαιώνεται η δομή του Μοντέλου της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) στα μαθηματικά με βάση εμπειρικά δεδομένα μαθητών Στ΄δημοτικού;
2. Σε ποιο βαθμό οι επιδόσεις των μαθητών Στ΄ δημοτικού στη βασική γνώση, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργική σκέψη ερμηνεύουν την επίδοσή τους στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά και με ποιο τρόπο;

3. Ποιες είναι οι ομάδες μαθητών Στ΄ δημοτικού διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους στα μαθηματικά;
4. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά; Αν ναι, με ποιο τρόπο;
5. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά των μαθητών με ίδια ή διαφορετική επίδοση; Αν ναι, με ποιο τρόπο;

Σημαντικότητα της Εργασίας

Η σημασία της εργασίας είναι τριπλή: θεωρητική, μεθοδολογική και πρακτική.

Από θεωρητικής πλευράς, η εργασία ενισχύει τη γνώση σχετικά με την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για την έννοια αυτή δεν έχει ακόμη ξεκαθαριστεί τι είναι, από ποιες ικανότητες περιγράφεται και με ποιο τρόπο οι ικανότητες της αναπτύσσονται στο δημοτικό σχολείο (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Αυτά τα στοιχεία είναι απαραίτητα για τον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης που έχουν σκοπό την ενίσχυση των ικανοτήτων που περιγράφουν την έννοια αυτή. Οι ικανότητες αυτές αναγνωρίζονται ως απαραίτητες για επιβίωση του ατόμου στον 21^{ο} αιώνα (English & Gainsburg, 2016· Partnership for 21st Century Skills, 2015) και για αυτό διάφορα αναλυτικά προγράμματα θέτουν ως σκοπό την ανάπτυξη τους, αφού βοηθούν τους μαθητές να σκέφτονται πιο βαθιά και ανοικτά (π.χ., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2015· Department for Education in England, 2014·Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων, 2010). Η εργασία αυτή έχοντας υπόψη τις διαφορετικές ερμηνείες που δόθηκαν για την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και την ανάγκη για μια πιο ευρεία προσέγγισή της (Brookhart, 2010· Lewis & Smith, 1993), αξιοποιεί το Μοντέλο Σκέψης του Iowa Department of Education (1989). Το μοντέλο αυτό δεν έχει επιβεβαιωθεί με εμπειρικά δεδομένα και δεν έχει βρεθεί εργασία η οποία να το αξιοποιεί στα μαθηματικά. Δεν αποτελεί το μοναδικό μοντέλο που προσεγγίσει πολυδιάστατα την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, αλλά αποτελεί ένα οργανωμένο, καλά ορισμένο και ολοκληρωμένο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως λειτουργικός ορισμός για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2015). Με βάση το μοντέλο αυτό, η ανωτέρου επιπέδου σκέψη περιγράφεται από τέσσερις ικανότητες που αλληλοσχετίζονται και εξαρτάται η μία από την άλλη: τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Οι ικανότητες αυτές έχουν αναφερθεί τα τελευταία χρόνια και από ερευνητές της μαθηματικής παιδείας ως διαδικασίες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, αλλά κανένας δεν έχει προσπαθήσει να αξιοποιήσει όλες αυτές τις ικανότητες μαζί για ορίσει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και να επιβεβαιώσει το μοντέλο με εμπειρικά δεδομένα. Για αυτό η εργασία αυτή, αποσκοπεί αξιοποιώντας το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) να παρουσιάσει στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας ένα ολοκληρωμένο μοντέλο για τη δομή και την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά με εμπειρικά δεδομένα. Επίσης, αναγνωρίζοντας τις διαφορετικές ικανότητες, ανάγκες και επιδόσεις που μπορεί να έχουν ομάδες μαθητών, στοχεύει να εντοπίσει ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους στα μαθηματικά και να περιγράψει τις ικανότητές τους.

Από μεθοδολογικής πλευράς, η εργασία ενισχύει τη γνώση στο πεδίο της αξιολόγησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και στο πεδίο του τρόπου χρήσης της τεχνολογίας για ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά.

Η συνεισφορά της εργασίας στο πεδίο της αξιολόγησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης αφορά το σχεδιασμό εργαλείου μέτρησής της στα μαθηματικά. Τονίζεται ότι η χρήση αξιολογήσεων που απαιτούν ανωτέρου επιπέδου σκέψη είναι άμεσα συνδεδεμένη με την βελτίωση της επίδοσης των μαθητών και τη δημιουργία κινήτρων για μάθηση (Brookhart, 2010). Παράλληλα, τα εργαλεία μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης που έχουν ήδη αναπτυχθεί είτε αφορούν γενικές δεξιότητες και τίθονται θέματα γενικευσιμότητας τους σε άλλα πεδία (King et al., 1998), είτε επικεντρώνονται στην αξιολόγηση γνώσης περιεχομένου (Day, Arthur, & Gettman, 2001) που αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, αλλά δεν είναι ο μοναδικός. Γενικά, διαπιστώνεται έλλειψη κατάλληλων αξιολογήσεων για τις διαδικασίες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο γενικά όσο και ειδικά στα μαθηματικά και αυτό οδηγεί σε μια αδράνεια στο πεδίο σχεδιασμού κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης για υποστήριξή της (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Eseryel, Ifenthaler, & Ge, 2013· Kulm, 1990).

Η δεύτερη συνεισφορά της εργασίας από μεθοδολογικής πλευράς αφορά την παρουσίαση ενός αποτελεσματικού τρόπου χρήσης των νέων τεχνολογιών για την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Γενικά, η χρήση νέων τεχνολογιών στη μαθηματική παιδεία έχει απασχολήσει και συνεχίζει να απασχολεί μεγάλο μέρος των ερευνητών (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007), αποτελεί μία από τις αρχές των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών (π.χ., NCTM, 2000· Υπουργείο

Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου κ.ά., 2010) και αξιοποιείται από διεθνείς έρευνες στα Μαθηματικά (π.χ., TIMSS, PISA). Αυτό το έντονο ενδιαφέρον για τη χρήση της τεχνολογίας πηγάζει από το γεγονός ότι αποτελεί κοινή αποδοχή πως η τεχνολογία αποτελεί βασικό εργαλείο στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών (NCTM, 2008). Παράλληλα υπογραμμίζεται ότι η πρόσβαση και μόνο στη τεχνολογία δεν αρκεί για τη μάθηση των μαθητών και ειδικά σε περιοχές που έχουν εννοιολογικές δυσκολίες, όπως αυτή των μαθηματικών (Jacobson & Kozma, 2000). Για αυτό, όπως τονίζεται από διάφορους ερευνητές (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Drijvers et al., 2016· English, 2008α, 2010α), χρειάζεται να συνδυαστούν κατάλληλα διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις ώστε να σχεδιαστούν αποτελεσματικά ψηφιακά περιβάλλοντα τόσο για τη μάθηση των μαθηματικών όσο και για την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, η εργασία αυτή προτείνει και εξετάζει την αποτελεσματικότητα στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά τριών διαφορετικών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης (ανοικτό, καθοδηγούμενο και μικτό). Τα περιβάλλοντα αυτά έχουν κοινή τους αρχή τη διερευνητική μάθηση (Maaß & Artigue, 2013) και τη μάθηση με τεχνολογία (Jonassen, Howland, Moore, & Marra, 2003) και αξιοποιούν προσεγγίσεις που βρέθηκαν σε έρευνες ότι βοηθούν στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Οι προσεγγίσεις αυτές αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας του περιεχομένου (διερευνητική μάθηση, ανοικτά προβλήματα, προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, κατασκευή προβλήματος, μάθηση με παιχνίδι), τον τρόπο οργάνωσης της τάξης (συνεργατική λύση προβλήματος και χρήση κατάλληλων ερωτήσεων και συζήτησης) και τον τρόπο αξιοποίησης των τεχνολογικών εργαλείων (ως ενισχυτής, ως αναδιοργανωτής, για εξάσκηση δεξιοτήτων, για ενίσχυση εννοιολογικής κατανόησης). Ωστόσο, τα τρία περιβάλλοντα διαφέρουν ως προς τον τρόπο δόμησης των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν. Δηλαδή, ως προς το βαθμό καθοδήγησης που δίνουν οι δραστηριότητες που περιλαμβάνουν και ως προς την ακολουθία τους.

Από πρακτικής άποψης, τα αποτελέσματα της εργασίας συνεισφέρουν τόσο στους εκπαιδευτικούς όσο και στους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν γνωρίζουν με ποιους τρόπους η διδασκαλία τους γίνεται πιο αποτελεσματική στη μάθηση των μαθητών τους (Jacobse & Harskamp, 2011), καθώς αδυνατούν να σχεδιάσουν δραστηριότητες που να προωθούν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (π.χ., Thompson, 2008). Έτσι, τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής στοχεύουν να παρουσιάσουν στους εκπαιδευτικούς το/τα αποτελεσματικό/ά ψηφιακό/ά περιβάλλον/τα μάθησης ως προς την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα αυτά στοχεύουν να ενισχύσουν τα προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών σχετικά με την κατάλληλη χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι βασικοί παραλήπτες των αποτελεσμάτων αυτών είναι οι μαθητές, αφού μέσω της συμμετοχής τους σε αυτά τα περιβάλλοντα (Stein & Lane, 1996), στοχεύεται να αναπτύξουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους στα μαθηματικά, που θεωρείται απαραίτητη για «επιβίωση» στη σύγχρονη τεχνολογικά αναπτυσσόμενη κοινωνία (English, 2010α· Lesh & Zawojewski, 2007).

Πρωτοτυπία της Εργασίας

Τρεις είναι οι καινοτομίες της εργασίας:
(α) Πρώτη καινοτομία της εργασίας αποτελεί η περιγραφή ενός ολοκληρωμένου και κατάλληλου μοντέλου για ορισμό και μέτρηση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Δεν έχει εντοπιστεί τέτοιο στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας που να στηρίζεται σε εμπειρικά δεδομένα.
(β) Δεύτερη καινοτομία της εργασίας αποτελεί ο σχεδιασμός και η εφαρμογή διαφορετικών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης με στόχο την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά των μαθητών δημοτικού σχολείου. Δεν έχει βρεθεί στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας να έχει γίνει κάτι παρόμοιο, παρόλο που η σημαντικότητα του έχει υπογραμμιστεί όπως έχει αναφερθεί πιο πάνω. Παράλληλα, πρωτοτυπία της εργασίας αποτελεί και η επιλογή του ανοικτού, του καθοδηγούμενου και του μικτού ως διαφορετικά ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης.
(γ) Τρίτη καινοτομία της εργασίας αποτελεί η εξέταση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης ως προς την ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο του συνόλου των μαθητών όσο και των μαθητών με διαφορετικές ικανότητες.

Παραδοχές της Εργασίας

Η εργασία αυτή έχει δυο βασικές παραδοχές, οι οποίες παρουσιάζονται πιο κάτω. Αυτές αποτελούν τις συνθήκες/προϋποθέσεις που θεωρούνται ότι ισχύουν, για να μπορεί να υλοποιηθεί η έρευνα της συγκεκριμένης εργασίας.

Η πρώτη παραδοχή είναι ότι η χρήση νέων τεχνολογιών μπορεί να αναπτύξει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά. Αυτό πηγάζει από ευρήματα εργασιών που υποστηρίζουν ότι η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διάφορες ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Συγκεκριμένα, έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση της τεχνολογίας βοηθά: (i) στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών (π.χ., Heid & Blume, 2008· Tall et al., 2008), (ii) στην ανάπτυξη της κριτική σκέψης στα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα να συγκρίνουν και να συνδέουν αναπαραστάσεις (π.χ., Dalton & Hegedus, 2013· Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013α), (iii) στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης, όπως για παράδειγμα να εντοπίζουν πολλαπλές και πρωτότυπες λύσεις σε ένα πρόβλημα (π.χ., Kordaki, 2014· Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2011) και (iv) στην ανάπτυξη σύνθετων διαδικασιών σκέψης, όπως για παράδειγμα να επίλυουν προβλήματα μοντελοποίησης, σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης (π.χ., Jonassen, 2000· Mousoulides, 2013).

Η δεύτερη παραδοχή είναι ότι ο εκπαιδευτικός και πιο συγκεκριμένα η ικανότητα του να χρησιμοποιεί ψηφιακά εποπτικά μέσα στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα για βελτίωση της μάθησης των μαθητών που συμμετέχουν σε τέτοιες διδασκαλίες (π.χ., Drijvers et al., 2016· Guo & Cao, 2015). Αυτό λήφθηκε υπόψη στο σχεδιασμό της έρευνας και επιλέχθηκε ο εκπαιδευτικός που θα διδάσκει τα μαθήματα με τη χρήση της τεχνολογίας να είναι η ερευνήτρια, που θεωρείται ότι έχει τις γνώσεις τόσο του μαθηματικού περιεχομένου και των δυνατοτήτων της τεχνολογίας όσο και της διδακτικής προσέγγισής τους. Ακόμη, θεωρείται ότι έγινε πιστή εφαρμογή των οδηγιών για κάθε ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης από την εκπαιδευτικό/ερευνήτρια με στόχο την ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά και δεν επηρεάστηκε από την εμπειρία της. Αυτό γιατί έρευνες έχουν δείξει ότι η εφαρμογή έτοιμων περιβαλλόντων μάθησης επηρεάζεται από την εμπειρία και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών (Henningsen & Stein, 1997· Remillard, 2005· Stylianides & Stylianides, 2008). Επιπρόσθετα, οι έρευνες έχουν δείξει ότι παρατηρείται συχνά δραστηριότητες που απαιτούν ανωτέρου επιπέδου σκέψη να εφαρμόζονται στην τάξη από τους εκπαιδευτικούς με τρόπο που να μην εξυπηρετούν το σκοπό τους, απλοποιώντας τη σκέψη που απαιτούν (Henningsen & Stein, 1997).

Περιορισμοί της Εργασίας

Η εργασία έχει κάποιους περιορισμούς που θα συζητηθούν πιο κάτω. Συγκεκριμένα, οι περιορισμοί αυτοί αφορούν (i) την επιλογή των υποκειμένων της έρευνας, (ii) την επιλογή των μέσων συλλογής δεδομένων και (iii) τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας.

Η επιλογή των υποκειμένων της έρευνας δεν έγινε με τη χρήση τυχαίων μεθόδων δειγματοληψίας, αλλά αποτελεί ευκαιριακό δείγμα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα επιλέγηκαν με βάση την ευκολία πρόσβασης της ερευνήτριας σε δημοτικά σχολεία, καθώς και με βάση το ενδιαφέρον των μαθητών να συμμετέχουν σε μαθήματα στο ελεύθερό τους χρόνο. Για αυτό τα αποτελέσματα της εργασίας αφορούν τους μαθητές που συμμετέχουν στην έρευνα και δεν μπορούν να γενικευθούν για όλους τους μαθητές της Κύπρου.

Το εργαλείο μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά έχει επιλεχθεί να είναι σε γραπτή μορφή, έστω και αν υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις στη βιβλιογραφία για τις ευκαιρίες που δίνονται για ανάδυση των ικανοτήτων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών μέσω τεχνολογίας (Stacey & Wiliam, 2013). Αυτό έγινε για λόγους περιορισμένου χρόνου πρόσβασης στα σχολεία. Για τους ίδιους λόγους, δεν αξιοποιήθηκε η συνέντευξη ως μέσο συλλογής δεδομένων για περαιτέρω ανάλυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών. Επιπρόσθετα, δεν έγιναν διαχρονικές μετρήσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά των μαθητών που παρακολούθησαν τα μαθήματα, λόγω της επιλογής να δοθεί περισσότερος χρόνος στη διδασκαλία. Αυτό θα έδινε τη δυνατότητα για εξέταση τόσο αναπτυξιακών μοντέλων για περιγραφή της αλλαγής της συμπεριφοράς των μαθητών στα ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, όσο και των σχέσεων αλληλεξάρτησης των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά που δεν ήταν φανερές από τα δεδομένα μιας χρονικής στιγμής.

Ακόμη, η ερευνήτρια ανέλαβε τη διδασκαλία των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης, ώστε να εξασφαλιστεί η πιστή εφαρμογή του ερευνητικού διδακτικού σχεδιασμού, αλλά δεν είχε την ευκαιρία να έχει την εμπειρία της εφαρμογής των περιβαλλόντων πριν να τα διδάξει στις πειραματικές ομάδες μαθητών. Αυτή η πρακτική βρέθηκε από έρευνες να έχει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία των μαθημάτων ώστε να συνάδουν με το στόχο που σχεδιάστηκαν (Campuzano, Dynarski, Agodini, & Rall, 2009).

Δομή της Εργασίας

Η εργασία αυτή αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο έγινε παρουσίαση του σκοπού της έρευνας της εργασίας αυτής και των ερευνητικών της ερωτημάτων, με βάση τα προβλήματα, τις ασάφειες και τις ελλείψεις που διαπιστώθηκαν από τη βιβλιογραφία. Παράλληλα, αναλύθηκε η σημαντικότητα και η πρωτοτυπία της εργασίας και συζητήθηκαν οι παραδοχές και οι περιορισμοί της. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ορισμών για τις κυριότερες έννοιες της εργασίας για καλύτερη κατανόηση των κεφαλαίων που ακολουθούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται εκτεταμένα η βιβλιογραφία που αφορά τους ορισμούς, τον τρόπο μέτρησης και ανάπτυξης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο σε γενικό επίπεδο όσο και πιο ειδικά στα μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζεται η χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών Αρχικά, αναλύεται η μαθηματική γνώση και κατ' επέκταση η ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως αποτέλεσμα της χρήσης της τεχνολογίας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι μαθηματικές πρακτικές ως αποτέλεσμα της χρήσης της τεχνολογίας, καθώς και μοντέλα σχεδιασμού δραστηριοτήτων με τη χρήση της τεχνολογίας. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με μια σύνοψη του τι έχει παρουσιαστεί σε αυτό.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στον πληθυσμό και στο δείγμα της έρευνας, στα μέσα συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν, στην κωδικοποίηση των δεδομένων, στον σχεδιασμό των ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης, στη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας, και στις τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δυο μέρη με βάση τις απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, το πρώτο μέρος αφορά τη διασαφήνιση της έννοιας της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα), εξετάζοντας την επιβεβαίωση του Μοντέλου Σκέψης στα μαθηματικά και τις σχέσεις μεταξύ των ικανοτήτων του και περιγράφοντας τις ομάδες μαθητών με διαφορετική επίδοση ως προς τις ικανότητες αυτές. Το δεύτερο μέρος αφορά τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης (δυο τελευταία ερωτήματα), δίνοντας μια απάντηση σχετικά με το ρόλο των τεχνολογιών στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εξέταση διαφορών τόσο μεταξύ των μαθητών ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν, όσο και μεταξύ της επίδοσης των μαθητών αυτών στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο που αφορούσε την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων της εργασίας με βάση το θεωρητικό της πλαίσιο, όπου γίνεται προσπάθεια να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα σε συνάφεια και με άλλες ερευνητικές εργασίες. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται συζήτηση των περιορισμών της εργασίας.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η εργασία με βάση τα αποτελέσματά της, οι εφαρμογές των αποτελεσμάτων της εργασίας σε θεωρητικό, σε μεθοδολογικό και σε πρακτικό επίπεδο και οι εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες.

Εννοιολογικοί Ορισμοί

Πιο κάτω παρουσιάζονται ορισμοί των κυριότερων εννοιών της εργασίας, όπως προκύπτουν από τη βιβλιογραφία. Ο ορισμός που δίνεται για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά αποτελεί και λειτουργικός ορισμός, αφού παρουσιάζεται ξεκάθαρα ο τρόπος με τον οποίο έχει μετρηθεί στη συγκεκριμένη εργασία.

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Higher order thinking in mathematics). Στα πλαίσια της εργασίας χρησιμοποιείται ως ορισμός για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά ο ακόλουθος που έχει ως βάση του το Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) του Iowa Department of Education (1989). Σύμφωνα με αυτό η ανωτέρου επιπέδου σκέψη είναι μια πολυδιάστατη έννοια και περιγράφεται από τέσσερις ικανότητες που αλληλοσυσχετίζονται και εξαρτάται η μία από την άλλη. Συγκεκριμένα, ο συνδυασμός των πιο κάτω τεσσάρων ικανοτήτων είναι απαραίτητος για να αποκτήσει κάποιος ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: (α) «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», (β) «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά», (γ) «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και (δ) «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά». Οι τελευταίες τρεις αποτελούν ικανότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, αλλά είναι απαραίτητος ο συνδυασμός τους με τη βασική γνώση περιεχομένου για να μπορούν να εκδηλωθούν.

Βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά. Είναι οι γνώσεις και οι διαδικασίες που χρειάζεται να κατέχει έναν άτομο με βάση την ηλικία του για να μπορέσει να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και να ελέγχει και να ρυθμίζει τις γνώσεις του. Δεν αποτελεί απλώς ανάκληση μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών (Iowa Department of Education, 1989). Μπορεί να χαρακτηριστεί ως η επιφανειακή διαδικαστική και η επιφανειακά εννοιολογική γνώση, δηλαδή η γνώση αλγορίθμων, διαδικασιών, εννοιών και των σχέσεων τους σε επιφανειακό επίπεδο (Star, 2005).

Κριτική σκέψη στα μαθηματικά. Είναι η ικανότητα του ατόμου να αναδιοργανώνει τη βασική του μαθηματική γνώση περιεχομένου (Iowa Department of Education , 1989) χρησιμοποιώντας το λογικό συλλογισμό του (Jablonka, 2014). Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου), της σύνδεσης (χειρισμός σχέσεων μεταξύ όλων) και της αξιολόγησης (κρίση πληροφοριών με βάση κριτήρια) της βασικής του γνώση, παράγει την αναδιοργανώμενη γνώση (Balcaen & Klassen, 2008· Critical Thinking Consortium-TC[2], 2013· Iowa Department of Education, 1989·).

Δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά. Αποτελεί την ικανότητα του ατόμου να παράγει νέα γνώση (Ervynck, 1991· Iowa Department of Education, 1989), η οποία αφορά είτε τη δημιουργία μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης ιδέας (πρωτοτυπία) (Singh, 1987) είτε την εύρεση πολλών (ευχέρεια) και διαφορετικών λύσεων ή στρατηγικών για ένα πρόβλημα (ευελιξία) (Smith & Stein, 1998· Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000). Για να παραχθεί αυτή η νέα γνώση, το άτομο χρησιμοποιεί και επεκτείνει τη βασική του γνώση και την κριτική του σκέψη (π.χ., Haylock, 1997· Iowa Department of Education, 1989· Sheffield, 2003). Όμως, δεν αρκούν μόνο αυτά για την παραγωγή της νέας γνώσης (Meissner, 2005). Συγκεκριμένα, το άτομο μέσω της σύνθεσης πληροφοριών και της νοητικής δημιουργίας (διαίσθηση, νοερές εικόνες, έμπνευση) παράγει τη νέα γνώση (π.χ., Krulik & Rudnick, 1999· Sheffield, 2003). Οι ασκήσεις που βοηθούν τους μαθητές να εκφράσουν τη δημιουργική τους σκέψης στα μαθηματικά έχουν τη μορφή συνήθως πολλαπλών λύσεων (Leikin, 2009) και κατασκευής προβλήματος (Silver, 1997). Όσον αφορά την αξιολόγηση του δημιουργικού προϊόντος στην εργασία αυτή γίνεται με βάση τα πιο ευρέως χρησιμοποιημένα κριτήρια αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία, όπως υπολογίζονται από τη Leikin (2009). Η βαθμολογία που δίνεται σε κάθε ένα κριτήριο σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών όλου του δείγματος και βασίζεται στις προηγούμενες εμπειρίες τους και για αυτό στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιείται η σχετική δημιουργικότητα και όχι η απόλυτη (Leikin, 2009).

Σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Αποτελούν το συνδυασμό της βασικής γνώσης περιεχομένου, της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης που οδηγούν στην παραγωγή μιας σύνθεσης της αποδεκτής, αναδιοργανώμενης και παραγόμενης γνώσης (Iowa Department of Education, 1989). Ο συνδυασμός αυτός είναι φανερός στα μαθηματικά σε ασκήσεις άγνωστες για τον λύτη και έχουν τη μορφή μη συνηθισμένων προβλημάτων, προβλημάτων σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης. Δηλαδή, ο λύτης αναπτύσσει πρακτικές για να μπορέσει να αντιμετωπίσει την άγνωστη σε εκείνο κατάσταση αξιοποιώντας τη βασική του γνώση περιεχομένου και τις διαδικασίες της κριτικής και δημιουργικής του σκέψης (Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005).

Ψηφιακό περιβάλλον μάθησης (Digital learning environment). Το ψηφιακό περιβάλλον μάθησης ορίζεται ως ένας συνδυασμός μεθόδων που υποστηρίζονται από τη χρήση της τεχνολογίας και μπορούν να εφαρμοστούν για να υποστηρίξουν τη μάθηση και τη διδασκαλία (Wheeler, 2012).

Διερευνητική μάθηση (Inquiry based learning). Στη διερευνητική μάθηση, ο μαθητής είναι το επίκεντρο της μάθησης και καλείται να εργαστεί με παρόμοιους τρόπους όπως ένας μαθηματικός (Dorier & Maaß, 2014· Maaß & Artigue, 2013). Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής πρέπει να παρατηρεί φαινόμενα, να υποβάλει ερωτήσεις, να ψάξει μαθηματικούς τρόπους για επίλυση προβλημάτων (π.χ., να σχεδιάζει σχεδιαγράμματα, να υπολογίζει, να εντοπίζει μοτίβα και σχέσεις, να κάνει υποθέσεις και γενικεύσεις), να συνδέει καταστάσεις για ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και δομών, να ερμηνεύει και να αξιολογεί τις λύσεις του, καθώς και να τις εξηγεί με αποτελεσματικό τρόπο (Dorier & Maaß, 2014· Maaß & Artigue, 2013· NRC, 1996, 2000).

Ανοικτό ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης. Είναι ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης που περιλαμβάνει καταστάσεις λύσης προβλήματος που απαιτούν από τους μαθητές σύνθετες διαδικασίες σκέψης, δηλαδή απαιτούν για την επίλυσή τους συνδυασμό βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψη. Στο περιβάλλον αυτό χρησιμοποιούνται μη συνηθισμένα προβλήματα, προβλήματα σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης, όπου η λύση τους δεν είναι εμφανής και γνωστή στους μαθητές και έτσι αναγκάζονται να αναπτύξουν πρακτικές για να τα αντιμετωπίσουν. Γενικά σε αυτό το περιβάλλον, οι μαθητές δεν αναμένεται από την αρχή να φτάσουν στη λύση των προβληματισμών που περιλαμβάνει, αλλά μέσα από διαδικασίες διερεύνησης του περιβάλλοντος και των συνθηκών, καθώς και της αξιοποίησης της βασικής τους γνώσης και των διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης μπορούν να φτάσουν σε μια λύση (ορθή ή όχι). Το όνομα του το περιβάλλον αυτό το πήρε από τα λεγόμενα ανοικτά προβλήματα που με βάση τον ορισμό τους φαίνονται ότι ανταποκρίνονται σε αυτό που αναφέρεται πιο πάνω. Συγκεκριμένα, τα ανοικτά προβλήματα είναι αυτά που χαρακτηρίζονται ως πλούσια σε προκλήσεις προς τους μαθητές για να σκέφτονται και να προχωρούν πέραν από αυτό που αναμένεται και επιδέχονται ένα μεγάλο εύρος λύσεων ή προσεγγίσεων (Foong, 2000).

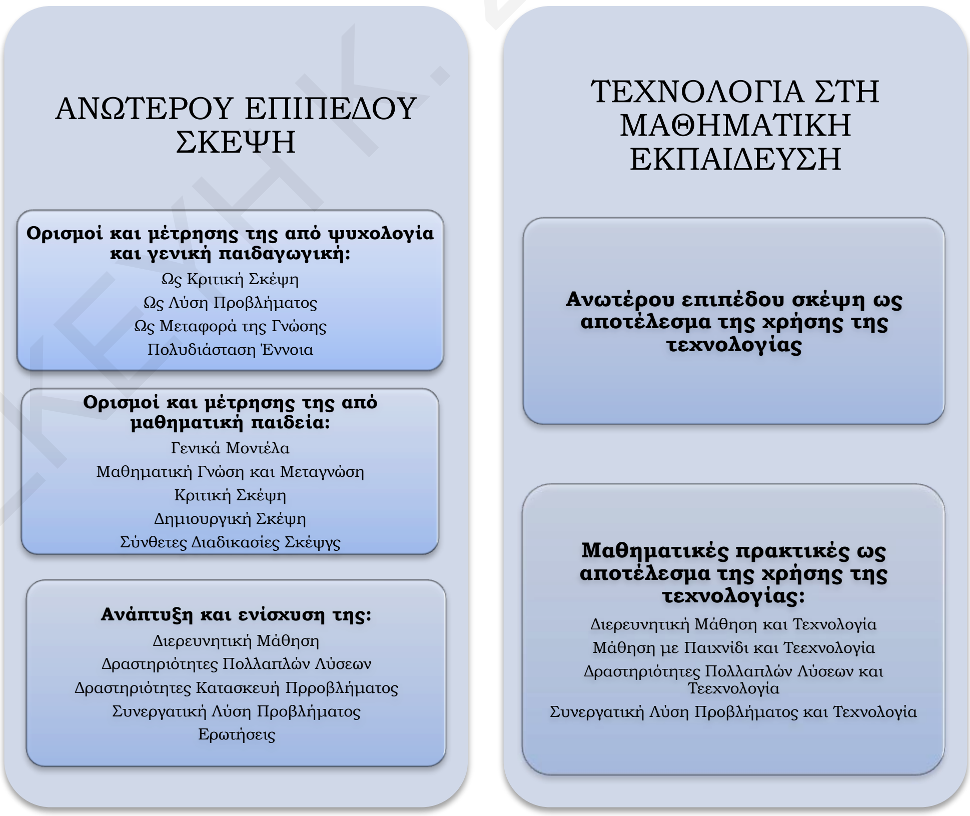
Καθοδηγούμενο ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης. Είναι ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης που αρχίζει με καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες που απαιτούν από τους μαθητές είτε τη χρήση διαδικασιών κριτικής σκέψης είτε τη χρήση διαδικασιών δημιουργικής σκέψης και οδηγούνται σταδιακά σε δραστηριότητες που απαιτούν σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή, οι μαθητές αρχικά εμπλέκονται σε δραστηριότητες στις οποίες καθοδηγούνται για το τι θα κάνουν ώστε να χρησιμοποιήσουν είτε τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της βασικής τους γνώσης για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση είτε τη σύνθεση πληροφοριών και τη νοητική δημιουργία για να δημιουργήσουν νέα γνώση. Προς το τέλος του μαθήματος οι μαθητές εμπλέκονται σε προβλήματα που απαιτούν συνδυασμό βασικής γνώσης και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Τα προβλήματα αυτά είναι μη συνηθισμένα, αφορούν σχεδιασμό λύσης και λήψης απόφασης και η λύση τους δεν είναι εμφανής και γνωστή στους μαθητές και έτσι αναγκάζονται να αναπτύξουν πρακτικές για να τα αντιμετωπίσουν. Είναι παρόμοια με τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στο ανοικτό περιβάλλον. Έτσι, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες με διαβαθμισμένο βαθμό δυσκολίας και ελευθερίας για λήψη απόφασης ως προς τις διαδικασίες που θα ακολουθήσουν. Αυτό το περιβάλλον μάθησης μοιάζει με αυτό που ονομάζεται από τους Jacobson, Kim, Miao, Shen and Chavez (2010) ως «Δομημένο προς ανοικτό περιβάλλον» (high-to-low structure).

Μικτό ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης. Είναι ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης που συνδυάζει πτυχές του ανοικτού περιβάλλοντος και του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος και για αυτό ονομάστηκε μικτό. Συγκεκριμένα, αρχίζει με μια κατάσταση λύσης προβλήματος που απαιτεί από τους μαθητές σύνθετες διαδικασίες σκέψης, δηλαδή απαιτεί για την επίλυσή του συνδυασμό βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Το πρόβλημα αυτό είναι μη συνηθισμένο και αφορά συνήθως σχεδιασμό λύσης ή λήψης απόφασης, όπου η λύση του δεν είναι εμφανής και γνωστή στους μαθητές. Δεν απαιτείται οι μαθητές να λύσουν το πρόβλημα αυτό επιτυχημένα, αλλά να αναπτύξουν πρακτικές για να το αντιμετωπίσουν. Ακολούθως, οι μαθητές εμπλέκονται σε καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες. Στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές καθοδηγούνται για το τι θα κάνουν ώστε να χρησιμοποιήσουν είτε τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της βασικής τους γνώσης για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση είτε τη σύνθεση πληροφοριών και τη νοητική δημιουργία για να δημιουργήσουν νέα γνώση. Σημειώνεται ότι ο βαθμός καθοδήγησης μειώνεται στην πορεία του μαθήματος. Προς το τέλος του μαθήματος οι μαθητές εμπλέκονται πάλι σε λύση προβλημάτων που απαιτούν σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Αυτό το περιβάλλον μάθησης μοιάζει με αυτό που ονομάζεται από τους Jacobson et al. (2010) ως «Ανοικτό προς δομημένο περιβάλλον» (low-to-high structure).

Κεφάλαιο ΙΙ

Ανασκόπηση Βιβλιογραφίας

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται εκτεταμένα η βιβλιογραφία που αφορά τους ορισμούς, τον τρόπο μέτρησης και ανάπτυξης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο σε γενικό επίπεδο όσο και πιο ειδικά στα μαθηματικά. Δηλαδή, παρουσιάζονται θεωρίες αρχίζοντας από τη ψυχολογία και τη γενική παιδαγωγική και καταλήγοντας στη μαθηματική παιδεία. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζεται η χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών. Αρχικά, αναλύεται η ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως αποτέλεσμα της χρήσης της τεχνολογίας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι μαθηματικές πρακτικές ως αποτέλεσμα της χρήσης της τεχνολογίας, στις οποίες περιλαμβάνονται και μοντέλα σχεδιασμού δραστηριοτήτων με τη χρήση της τεχνολογίας. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με μια σύνοψη του τι έχει παρουσιαστεί σε αυτό. Στο Διάγραμμα 2.1 δίνεται η διαγραμματική μορφή του θεωρητικού πλαισίου.



Διάγραμμα 2.1. Διαγραμματική μορφή του θεωρητικού πλαισίου

Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη

Η έννοια «ανωτέρου επιπέδου σκέψη» (higher order thinking) έχει δεχτεί πολλές ερμηνείες από διαφορετικές επιστημονικές περιοχές, οι οποίες δεν ταυτίζονται και η κάθε μια έχει τη βάση της στις ιδέες και στη φιλοσοφία της (Brookhart, 2010· Lewis & Smith, 1993). Έχει χαρακτηριστεί η προσπάθεια που γίνεται για να οριστεί η συγκεκριμένη έννοια ως ένας εννοιολογικός βάλτος (Cuban, 1984), καθώς και αιώνιο πρόβλημα (Haladyna, 1997). Αυτό γιατί δεν υπάρχει μια γενική αποδεκτή ταξινομία ή τυπολογία που να περιγράφει πλήρως την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Haladyna, 1997· Resnick, 1987). Πιο κάτω έχουν κατηγοριοποιηθεί οι ερμηνείες που δόθηκαν για την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης ως εξής: (α) αυτές που την ταυτίζουν με την κριτική σκέψη, (β) αυτές που την ταυτίζουν με τη λύση προβλήματος, (γ) αυτές που την ταυτίζουν με τη μεταφορά της γνώσης και (δ) αυτές που την περιγράφουν ως πολυδιάστατη έννοια.

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως κριτική σκέψη. Οι φιλόσοφοι και γενικά οι εκπρόσωποι των ανθρωπιστικών επιστημών ταυτίζουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με το λογικό συλλογισμό και την κριτική σκέψη (Lewis & Smith, 1993). Συγκεκριμένα, θεωρούν ότι είναι η ικανότητα του ατόμου να καθορίζει με τη λογική του τι πιστεύει και τι κάνει (Ennis, 1989, 2013). Χαρακτηρίζεται ως επιδέξια σκέψη που περιλαμβάνει τις ικανότητες του συλλογισμού, της διερεύνησης, της παρατήρησης, της περιγραφής, της σύγκρισης, της σύνδεσης και της εύρεσης της πολυπλοκότητας (Barahal, 2008).

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως λύση προβλήματος. Οι ψυχολόγοι και γενικά οι ερευνητές από τις θετικές επιστήμες ταυτίζουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με τη λύση προβλήματος, δηλαδή με την ικανότητα του ατόμου να λύνει σύνθετα, μη συνηθισμένα προβλήματα (Lewis & Smith, 1993). Εστιάζονται στη διαδικασία σκέψης και πώς αυτή η διαδικασία μπορεί να βοηθήσει τα άτομα να κατανοήσουν τις εμπειρίες τους, δίνοντας τους νόημα και δομή (Lewis & Smith, 1993). Χαρακτηριστικός είναι ορισμός των Nitko και Brookhart (2007) όπου αναφέρουν ότι οι μαθητές για να επιλύσουν ένα σύνθετο, μη συνηθισμένο πρόβλημα του οποίου η λύση δεν είναι εμφανής, πρέπει να χρησιμοποιήσουν μια ή περισσότερες διαδικασίες ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Αυτές τις διαδικασίες σκέψης τις ονομάζουν ικανότητες λύσης προβλήματος. Παράλληλα, αναφέρεται ότι η λύση προβλήματος είναι απαραίτητη για κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και αποτελεσματική επικοινωνία (Bransford & Stein, 1984).

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως μεταφορά της γνώσης. Μια άλλη ερμηνεία της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είναι ο χαρακτηρισμός της ως μεταφορά της γνώσης (Brookhart, 2010). Συγκεκριμένα, οι Anderson και Krathwohl (2001) αναφέρουν ότι δυο από τους πιο σημαντικούς εκπαιδευτικούς σκοπούς είναι η προώθηση της διατήρησης και της μεταφοράς της γνώσης. «Η διατήρηση της γνώσης απαιτεί από τους μαθητές να θυμούνται τι έχουν μάθει, ενώ η μεταφορά της γνώσης απαιτεί από τους μαθητές όχι μόνο να θυμούνται αλλά και να κατανοούν και να είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν αυτό που έχουν μάθει» (Anderson & Krathwohl, 2001, σελ. 63). Η ικανότητα της μεταφοράς της γνώσης δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί και οι γνωστικοί ψυχολόγοι συμφωνούν στο ότι σπάνια μπορεί να εκδηλωθεί αυθόρμητα (Willingham, 2007), άρα χρειάζεται κατάλληλη διδασκαλία. Επίσης, όταν συμβαίνει η ικανότητα μεταφορά της γνώσης δηλώνει μάθηση με νόημα. Έτσι, η ανωτέρου επιπέδου σκέψη αποκτάται όταν οι μαθητές είναι ικανοί να σχετίζουν τη μάθησή τους με άλλα στοιχεία πέρα από αυτά που έχουν διδαχθεί (Brookhart, 2010).

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη: Πολυδιάστατη έννοια. Οι Lewis και Smith (1993) αναφέρουν ότι η λογική σκέψη, η κριτική σκέψη, η λύση προβλήματος και η μεταφορά της γνώσης αποτελούν απαραίτητες ικανότητες για την κατανόηση της έννοιας «ανωτέρου επιπέδου σκέψη», αλλά δεν είναι αρκετές και ικανές για την εννοιολογική της κατανόηση. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι η έννοια αυτή είναι πολυδιάστατη και περιλαμβάνει και άλλες ικανότητες, όπως η δημιουργική σκέψη και η ικανότητα λήψης απόφασης. Με βάση αυτό, ορίζουν ότι:

> Η ανωτέρου επιπέδου σκέψη συμβαίνει όταν ένα άτομο παίρνει τις νέες πληροφορίες και τις πληροφορίες που έχει ήδη στη μνήμη του και τις αλληλοσχετίζει ή αναδομεί και επεκτείνει τις πληροφορίες αυτές ώστε να εκπληρώσει ένα σκοπό ή να βρει δυνατές απαντήσεις σε μια σύνθετη κατάσταση (Lewis & Smith, 1993, σελ. 136).

Παρόμοια και η Resnick (1987) ορίζει ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη είναι μη αλγοριθμική και ταυτόχρονα σύνθετη όπου δεν είναι εύκολα προσβάσιμη, απαιτεί την παραγωγή πολλαπλών και πρωτότυπων λύσεων, περιλαμβάνει κρίσεις και ερμηνείες οι οποίες δεν είναι αναμενόμενες, χρησιμοποιεί πολλαπλά κριτήρια αξιολόγησης, εντοπίζει νόημα και δομή σε σύνθετες και «ακατάστατες» συνθήκες, είναι αυτορυθμιζόμενη και χρειάζεται προσπάθεια από το άτομο για να την αναπτύξει. Επιπρόσθετα, η Brookhart (2010) τονίζει ότι οι ορισμοί που δόθηκαν για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως κριτική σκέψη, ως λύση προβλήματος και ως μεταφορά της γνώσης έχουν επικαλύψεις και για αυτό χρειάζεται μια πιο ευρεία, πολυδιάστατη προσέγγισή της. Ένα μοντέλο που παρουσιάζει την πολυδιάστατη φύση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είναι το Μοντέλο Σκέψης του Iowa Department of Education (1989), το οποίο θα παρουσιαστεί αναλυτικά πιο κάτω και θα συζητηθεί η σχέση του με προσεγγίσεις μελέτης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model). Το Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) (Iowa Department of Education, 1989), ορίζει ότι για να θεωρείται ότι κάποιος έχει αναπτύξει ανωτέρου επιπέδου σκέψη, πρέπει να συνδυάζει γνώση περιεχομένου (content/basic thinking), κριτική σκέψη (critical thinking), δημιουργική σκέψη (creative thinking) και σύνθετες διαδικασίες σκέψης (complex thinking processes) (βλέπε Διάγραμμα 2.2). Αυτά τα τέσσερα στοιχεία αλληλοσχετίζονται και εξαρτάται το ένα από το άλλο. Αυτό το μοντέλο δεν δείχνει πώς λειτουργεί το μυαλό ή με ποιο τρόπο οι νοερές διαδικασίες αναπτύσσονται σε ένα άτομο. Αποτελεί ένα χάρτη της «περιοχής» της σκέψης, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από εκπαιδευτικούς για να διδάξουν διαδικασίες σκέψης ή από μαθητές για να μάθουν διαδικασίες σκέψης. Τονίζεται ότι δεν θεωρείται ο μόνος δυνατός παιδαγωγικός χάρτης, αλλά προσφέρει ένα οργανωμένο πλαίσιο που συνδυάζει διάφορες προσεγγίσεις της σκέψης παρουσιάζοντας μια εκτενής και αναλυτική προσέγγιση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και ταυτόχρονα αποτελεί διαχειρίσιμη, δηλαδή μπορεί να μετρηθεί και να παρατηρηθεί (Iowa Department of Education, 1989). Υπογραμμίζεται ότι βασική παραδοχή του μοντέλου αυτού είναι ότι οι δεξιότητες/ ικανότητες σκέψης μπορούν να αναπτυχθούν και να ενισχυθούν σε όλους τους μαθητές από το δημοτικό.

Η ονομασία του μοντέλου περιλαμβάνει τη λέξη “integrated” με σκοπό να τονίσει ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη δεν αποτελεί απλώς μια συλλογή από διακριτές δεξιότητες/διαδικασίες, αλλά αποτελεί ένα διαδραστικό σύστημα όπου περιλαμβάνει δυναμικούς και ρευστούς συνδυασμούς διαφορετικών νοερών διαδικασιών για διάφορους σκοπούς (Iowa Department of Education, 1989). Το διάγραμμα 2.2 αποτελεί την αναπαράσταση του Μοντέλου Σκέψης στο οποίο φαίνονται ξεκάθαρα οι διαφορετικές διαστάσεις του και οι σχέσεις μεταξύ τους. Το κεντρικό τρίγωνο παρουσιάζει τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, που είναι βασικό κομμάτι της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και αποτελεί το σημείο που διασταυρώνονται οι άλλες διαστάσεις. Οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης χαρακτηρίζονται από ένα υψηλότερο βαθμό πολυπλοκότητας σε σχέση με τι άλλες τρεις πτυχές του μοντέλου. Γύρω από το τρίγωνο υπάρχουν τρεις ελλείψεις που απεικονίζουν τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη και τη δημιουργική σκέψη, οι οποίες υποστηρίζουν και αλληλεπιδρούν με τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης.

Τα βέλη και οι ανοικτές κορυφές του τριγώνου απεικονίζουν την αλληλεπίδραση μεταξύ τους και το ότι δεν υπάρχουν απόλυτα όρια μεταξύ των διαφόρων πτυχών της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Για παράδειγμα, όταν ένα άτομο σκέφτεται κριτικά ή δημιουργικά, συχνά χρησιμοποιεί τη βασική του γνώση για να ανακαλέσει πληροφορίες. Παράλληλα, όμως ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, συχνά ισχύει ότι για να μάθει κάποιος την αποδεκτή γνώση χρειάζεται να εμπλακεί σε δραστηριότητες όπου πρέπει να σκεφτεί κριτικά ή δημιουργικά (Iowa Department of Education, 1989). Πιο κάτω θα αναλυθεί εκτεταμένα η κάθε διάσταση του Μοντέλου Σκέψης. Είναι σημαντικό να τονιστεί εδώ ότι στον οδηγό που περιγράφει το μοντέλο αυτό υποστηρίζεται ότι οι τρεις διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είναι η κριτική, η δημιουργική και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αλλά για να μπορούν να εκδηλωθούν αυτές οι διαστάσεις χρειάζονται τη γνώση περιεχομένου.

Διάγραμμα 2.2. Μοντέλο Σκέψης. Πάρθηκε από το “A guide to developing higher order thinking across the curriculum,” του Iowa Department of Education, 1989, σελ. 43. Πνευματικά δικαιώματα 1989 στο Iowa Department of Education.

Η βασική γνώση περιεχομένου είναι τόσο η ακαδημαϊκή γνώση που διδάσκεται στα σχολεία όσο και η γνώση των κοινωνικών συμβάσεων, γενικών γεγονότων και πρακτικών δεξιοτήτων που χρειάζεται ένα άτομο για να επιβιώσει στην κοινωνία και για να σκεφτεί σε ένα ανώτατο επίπεδο σκέψης, δηλαδή κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα (Iowa Department of Education, 1989). Δεν αποτελεί μόνο ανάκληση γνώσης, αλλά περιλαμβάνει τις δεξιότητες και τα μοτίβα συμπεριφοράς που σχηματίζουν τη βάση της μάθησης και της αποτελεσματικής σκέψης που ονομάζεται μεταγνώση (Iowa Department of Education, 1989). Δηλαδή, θεωρείται ότι η βασική αυτή γνώση δεν περιλαμβάνει μόνο ακαδημαϊκή γνώση περιεχομένου και γνώση της κοινωνίας που χρειάζεται κάποιος για να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα, αλλά περιλαμβάνει εκείνες τις δεξιότητες που βοηθούν τον άτομο να αρχίσει να έχει επίγνωση της γνώσης του και της χρήσης αυτής της επίγνωσης για έλεγχο των πράξεων του (Marzano, 1988).

Η κριτική σκέψη αποτελεί την ικανότητα αναδιοργάνωσης της γνώσης, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης (analyzing), της σύνδεσης (connecting) και της αξιολόγησης (evaluating) της αποδεκτής γνώσης (Iowa Department of Education, 1989). Η διαδικασία της ανάλυσης περιλαμβάνει την κατανόηση και το χειρισμό σχέσεων μέρους/όλου. Δηλαδή, αποτελεί την ανάλυση μιας ολότητας σε επιμέρους κομμάτια με σκοπό την κατανόησή της. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων αναγνώρισης και συμπλήρωσης μοτίβων, ταξινόμησης αντικειμένων με κοινά χαρακτηριστικά, εντοπισμού των περιορισμών μιας κατάστασης και εύρεσης της κύριας ιδέας/νοήματος.

Από την άλλη η διαδικασία της σύνδεσης αναφέρεται στον εντοπισμό, χειρισμό και κατασκευή σχέσεων μεταξύ όλων (ή αντικειμένων στο ίδιο επίπεδο ανάλυσης). Η διαδικασία της σύνδεσης βασίζεται στη διαδικασία της ανάλυσης, αφού για να γίνει σύνδεση μεταξύ όλων, χρειάζεται η ανάλυσή τους σε επιμέρους κομμάτια/ιδιότητες. Συγκεκριμένα, η διαδικασία σύνδεσης μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων εύρεσης ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ διαφόρων αντικειμένων, λογικής σκέψης, παραγωγικού συλλογισμού, επαγωγικού συλλογισμού και προσδιορισμού αιτιατών σχέσεων.

Η διαδικασία της αξιολόγησης αναφέρεται στην ικανότητα κρίσης γεγονότων και πληροφοριών με βάση κριτήρια και όχι αντιλήψεις. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων αξιολόγησης πληροφοριών σχετικά με την ακρίβεια τους και τη σχετικότητά τους με βάση το δοσμένο σκοπό, προσδιορισμού κριτηρίων, εντοπισμού προτεραιοτήτων, αναγνώρισης λαθών και τεκμηρίωσης (Iowa Department of Education, 1989).

Η δημιουργική σκέψη περιλαμβάνει την παραγωγή νέας γνώσης, χρησιμοποιώντας και επεκτείνοντας την αποδεκτή και την αναδιοργανώμενη γνώση (Iowa Department of Education, 1989). Συγκεκριμένα, η δημιουργική γνώση είναι η νέα γνώση που προέρχεται από τη χρήση των διαδικασιών της σύνθεσης (synthesizing), της νοητικής δημιουργίας (imagining) και της επεξεργασίας (elaborating) (Iowa Department of Education, 1989). Η διαδικασία της σύνθεσης μπορεί να χαρακτηριστεί ως η διαδικασία της ανάλυσης στη δημιουργική σκέψη. Αυτό γιατί περιλαμβάνει το χειρισμό σχέσεων μέρους/όλου.

Συγκεκριμένα, η διαδικασία της σύνθεσης αναφέρεται στην ικανότητα σύνθεσης κομματιών για τη δημιουργία μιας νέας οντότητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων αναλογικής σκέψης (εύρεσης σχέσεων μεταξύ δυο ανόμοιων πραγμάτων), σύνοψης κύριων ιδεών από ένα σύνθετο σώμα πληροφοριών, ανάπτυξης εξηγήσεων/υποθέσεων και κατάστρωσης μιας λογικής πορείας εργασίας.

Η διαδικασία της νοητικής δημιουργίας φαίνεται να ταιριάζει απόλυτα με την λέξη «δημιουργικότητα», όπου ο στόχος είναι πέραν από τον πραγματικό και οι ιδέες δεν περιορίζονται από κανόνες της λογικής και της μέτρησης. Συγκεκριμένα, η νοητική δημιουργία αποτελεί πηγή νέων ιδεών η οποία μπορεί να προέλθει μέσω δραστηριοτήτων:
(α) παραγωγής πολλών ιδεών, ώστε να υπάρχει ένα μεγάλο σώμα υλικού για να το επεξεργαστεί το άτομο και να καταλήξει σε μια νέα ιδέα
(β) πρόβλεψης (αναφέρεται στη διαδικασία ανάλυσης των γεγονότων/πληροφοριών του σήμερα, ώστε το άτομο να εξηγήσει και να προβλέψει τι θα συμβεί στο μέλλον)
(γ) εικασίας (αναφέρεται στη διαδικασία συλλογισμού όπου το άτομο απαντάει στην ερώτηση τι θα συνέβαινε εάν, χωρίς απαραίτητα να δώσει λογικές απαντήσεις όπως στις δραστηριότητες πρόβλεψης)
(δ) οπτικοποίησης (αναφέρεται στη διαδικασία συλλογισμού με νοερές εικόνες με σκοπό τη μεταγενέστερη επικοινωνία)
(ε) διαίσθησης (αναφέρεται στην ανάδυση νέων ιδεών σαν αναλαμπή).

Η διαδικασία της επεξεργασίας αναφέρεται στην ανάπτυξη μιας ιδέας, χτίζοντας και βελτιώνοντας αυτή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων επέκτασης, προσθέτοντας λεπτομέρειες σε μια συγκεκριμένη έννοια, τροποποίησης, μεταφοράς και εφαρμογής αρχών και συμπερασμάτων από ένα περιεχόμενο σε ένα άλλο, παραγωγής διαφορετικών ιδεών και συγκεκριμενοποίησης γενικών/αφηρημένων ιδεών (Iowa Department of Education, 1989).

Όπως φαίνεται πολλές από τις διαδικασίες της δημιουργικής σκέψης βασίζονται σε διαδικασίες και δεξιότητες της κριτικής σκέψης. Σημαντικό να τονιστεί ότι όλες τις διαδικασίες της δημιουργικής σκέψης είναι προσβάσιμες σε μαθητές μικρών ηλικιών με εξαίρεση αυτών της πρόβλεψης και των υποθέσεων, οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν με τη διδασκαλία (Iowa Department of Education, 1989).

Στο κέντρο του διαγράμματος του Μοντέλου Σκέψης (Διάγραμμα 2.2) βρίσκονται οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Αποτελούν το συνδυασμό της βασικής γνώσης περιεχομένου και των διαδικασιών της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης που οδηγούν στην παραγωγή μιας σύνθεσης αποδεκτής, αναδιοργανώμενης και παραγόμενης γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, το Μοντέλο Σκέψης ορίζει ως σύνθετες διαδικασίες σκέψης τη λύση προβλήματος, το σχεδιασμό και τη λήψη απόφασης. Αυτές συνδυάζουν με διάφορους τρόπους και με διαφορετικό βαθμό εμβάθυνσης τις διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Η λύση προβλήματος αναφέρεται στη διαδικασία χρήσης συστηματικών μεθόδων για την επίτευξη ενός στόχου. Ο σχεδιασμός αναφέρεται στη δημιουργία μιας κατάστασης ή ενός πλαισίου ή ενός προϊόντος για την επίτευξη κάποιου σκοπού. Η λήψη απόφασης ορίζεται ως η ικανότητα επιλογής της κατάλληλης λύσης ή διαδικασίας ανάμεσα σε μια ομάδα από εναλλακτικές λύσεις/διαδικασίες.

Με βάση το Jonassen (2000) το Μοντέλο Σκέψης θεωρείται το πιο αναλυτικό, εκτενές και χρήσιμο μοντέλο γνωστικών διαδικασιών που υπάρχει για την περιγραφή της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Όμως, υποστηρίζεται από κάποιους ότι περιέχει πολλές πληροφορίες οι οποίες χρειάζονται πολύ χρόνο από τους εκπαιδευτικούς να τις κατανοήσουν και να προσπαθήσουν να τις προωθήσουν στην τάξη τους (π.χ., Nesbitt-Hawes, 2005).

Γενικά, το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί: (α) στο σχεδιασμό κλειδών παρατήρησης διδασκαλίας (π.χ., Iowa Department of Education, 1989· Slangen et al., 2008), (β) στο σχεδιασμό ερωτηματολογίων για αξιολόγηση προγραμμάτων / περιβαλλόντων μάθησης ως προς την ανάπτυξη των διαστάσεων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (π.χ., Jonassen, 2000· Lima, Koehler, & Spiro, 2004), (γ) στο σχεδιασμό ερωτήσεων για συνέντευξη με σκοπό τη διερεύνηση των αντιλήψεων των συμμετεχόντων σχετικά με το αν η εμπλοκή τους σε συγκεκριμένα προγράμματα βοήθησε στην ανάπτυξη των διαδικασιών της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (π.χ., Lima et al., 2004) και (δ) στην περιγραφή των γνωστικών διαδικασιών των μαθητών καθώς δουλεύουν σε περιβάλλοντα μάθησης (π.χ., Pitta-Pantazi et al., 2013α· Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2011).

Παρόμοια με το Μοντέλο Σκέψης, οι Swartz, Fischer και Parks (1998) ορίζουν πέντε περιοχές της σκέψης: (α) την κριτική σκέψη η οποία περιλαμβάνει δεξιότητες αξιολόγησης λογικών ιδεών, (β) την δημιουργική σκέψη η οποία περιλαμβάνει δεξιότητες παραγωγής ιδεών, (γ) την ταξινόμηση και την κατανόηση, (δ) τη λήψη απόφασης και (ε) τη λύση προβλήματος. Οι τρεις πρώτες αποτελούν δεξιότητες σκέψης, ενώ οι δυο τελευταίες διαδικασίες σκέψης. Γενικά, έχουν προταθεί παρόμοιες προσεγγίσεις ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης σε σχέση με την πολυδιάστατη φύση της.

Μέτρηση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Η Resnick (1987) αναφέρει ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη μπορεί να αναγνωριστεί όταν συμβαίνει, άρα χρειάζονται κατάλληλα εργαλεία μέτρησής της τα οποία να την αναδεικνύουν.

Με βάση την Brookhart (2010) ο σχεδιασμός εργαλείου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης πρέπει να βασίζεται σε τρεις αρχές: (α) να γίνεται χρήση εισαγωγικού υλικού ή να επιτρέπεται στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν πηγές, με τρόπο που να έχουν πρόσβαση σε κάτι που θα τους προκαλεί να σκεφτούν, (β) να δίνεται καινούριο υλικό, το οποίο οι μαθητές να μην έχουν εργαστεί σε αυτό προηγουμένως. Η χρήση καινούριου υλικού δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να σκεφτούν και όχι απλώς να ανακαλέσουν αυτά που έμαθαν στην τάξη. Αλλά είναι σημαντικό να μην ταυτίσουν οι μαθητές ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη είναι κάτι που δεν έχουν ξαναδεί στη ζωή τους και (γ) να είναι διακριτό στο εργαλείο ότι δεν υπάρχει ταύτιση της δυσκολίας με την ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Δηλαδή, ότι ο βαθμός δυσκολίας και το επίπεδο σκέψης αποτελούν δυο διαφορετικά χαρακτηριστικά, το οποίο επιτρέπει τη χρήση ερωτήσεων και ασκήσεων ανωτέρου επιπέδου σκέψης σε όλους τους μαθητές όλων των βαθμίδων.

Τα εργαλεία μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης που έχουν αναπτυχθεί έχουν διάφορες μορφές: (α) επιλογής- που περιλαμβάνει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης και σειροθέτησης, (β) παραγωγής- που περιλαμβάνει ερωτήσεις μικρών απαντήσεων, συγγραφή εκθέσεων και δοκίμιο επίδοσης και (γ) εξήγησης- που περιλαμβάνει την καταγραφή των λόγων επιλογής μιας απάντησης ή της παραγωγής μιας απάντησης (King et al., 1998). Επίσης, υπάρχουν τα εργαλεία που εξετάζουν μόνο μια διαδικασία της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, όπως ορίζεται στο Μοντέλο Σκέψης: κριτική σκέψη (California Critical Thinking Skills Test: Facione, 1990, Cornell Critical Thinking Test: Ennis & Millman, 2005, Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal: Watson & Glaser, 2002), δημιουργική σκέψη (Torrance Test of Creative Thinking: Torrance, 1974), καθώς και τα εργαλεία που εξετάζουν δυο ή περισσότερες διαδικασίες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (π.χ., Thinking skills test of the University of Cambridge International Examinations, το οποίο αξιολογεί την κριτική σκέψη και την ικανότητα λύσης προβλήματος: Butterworth & Thwaites, 2005, 2013). Δεν έχει εντοπιστεί εργαλείο μέτρησης που να εξετάζει και τις τέσσερις διαδικασίες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, όπως ορίζονται στο Μοντέλο Σκέψης. Όμως, σε πρόσφατο βιβλίο αξιολόγησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στην τάξη από την Brookhart (2010) έχουν επισημανθεί οι διαφορετικές διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης που πρέπει να δίνονται έμφαση στην τάξη (ανάλυση, αξιολόγηση, δημιουργία, λογικός συλλογισμός, κρίση και κριτική σκέψη, δημιουργικότητα και δημιουργική σκέψη). Γίνεται σε αυτό εκτενής ανάλυση του τρόπου με τον οποίο θα πρέπει να σχεδιάζονται ασκήσεις που απαιτούν ανωτέρου επιπέδου σκέψη, ώστε η σκέψη των μαθητών και η ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού να είναι ξεκάθαρη.

Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται προσεγγίσεις μελέτης της ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και των διαστάσεων της, όπως ορίζονται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989). Παράλληλα, γίνεται σύγκριση των προσεγγίσεων αυτών με το Μοντέλο Σκέψης.

Οι ορισμοί που δόθηκαν για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, ομαδοποιούνται ως εξής: (α) αυτοί που δίνουν έμφαση στα χαρακτηριστικά των ικανοτήτων των μαθητών που εκφράζουν ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, (β) αυτοί που περιγράφουν δραστηριότητες που απαιτούν ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και (γ) αυτοί που περιγράφουν χαρακτηριστικά διδασκαλίας που προωθεί την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Ικανότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Όσον αφορά ορισμούς της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά με έμφαση στα χαρακτηριστικά των ικανοτήτων των μαθητών έχουν δοθεί αρκετοί, οι οποίοι είτε περιλαμβάνουν μια διάσταση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είτε δυο ή περισσότερες, όπως αυτές ορίστηκαν στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989). Οι Raudenbush, Rowan και Cheong (1993) ορίζουν ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά δεν περιλαμβάνει μόνο τη γνώση γενικών μοτίβων και αρχών των μαθηματικών, αλλά και την ικανότητα κατανόησης και εφαρμογής σχέσεων μεταξύ μοτίβων και αρχών. Αυτές οι ικανότητες περιλαμβάνουν καλή τεκμηρίωση, άριστη γνώση περιεχομένου και εννοιολογική κατανόηση (Peterson, 1988· Zohar & Dori, 2003). Η English (2010, 2011) αναφέρει ότι βασικά χαρακτηριστικά της μάθησης σύνθετων ικανοτήτων στα μαθηματικά αποτελούν οι ικανότητες κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Δηλαδή, οι ικανότητες των μαθητών να κατασκευάζουν ιδέες και διαδικασίες τις οποίες να περιγράφουν, να εξηγούν, να συγκρίνουν, να αξιολογούν και να τεκμηριώνουν, καθώς και οι ικανότητες τους να δημιουργούν πολλαπλές αναπαραστάσεις τις οποίες να χρησιμοποιούν για να κάνουν προβλέψεις. Επίσης, η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά περιλαμβάνει την ικανότητα των ατόμων να έχουν επίγνωση των αδυναμιών τους ως λύτες προβλημάτων και να ελέγχουν και να ρυθμίζουν τις προσπάθειες τους για λύση προβλήματος (Lester & Kehle, 2003· Lesh & Zawojewski, 2007).

Πρόσφατα το Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση Μαθητών (PISA: Programme for International Student Assessment), όρισε ότι η μαθηματική εγγραμματοσύνη:

> είναι η ικανότητα του ατόμου να διαμορφώνει καταστάσεις, να χρησιμοποιεί και να ερμηνεύει μαθηματικά σε ποικιλία πλαισίων. Περιλαμβάνει ακόμη το μαθηματικό συλλογισμό και τη χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθάει τα άτομα να αναγνωρίσουν το ρόλο των μαθηματικών στον κόσμο και να διατυπώνουν κρίσεις και αποφάσεις που χρειάζονται για να είναι ενεργά εμπλεκόμενοι και στοχασμένοι πολίτες (OECD, 2013, σελ. 25).

Υπογραμμίζεται ότι πρέπει η εκπαίδευση των μαθητών να περιλαμβάνει την αξιοποίηση των μαθηματικών διαδικασιών της διατύπωσης μαθηματικών καταστάσεων, της χρήσης μαθηματικών εννοιών, γεγονότων, διαδικασιών και συλλογισμού και της ερμηνείας, εφαρμογής και αξιολόγησης μαθηματικών αποτελεσμάτων (OECD, 2013). Δηλαδή, διαδικασίες που με βάση το Μοντέλο Σκέψης αποτελούν διαδικασίες ανωτέρου επιπέδου σκέψης.

Εντοπίστηκαν, ακόμη στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, ερευνητές και διεθνείς αξιολογήσεις στα μαθηματικά που έχουν περιγράψει τις ικανότητες ανωτέρου επιπέδου στα μαθηματικά σε σχέση με τη διάκρισή τους από τις ικανότητες χαμηλού επιπέδου. Ο Wilson (1971) χρησιμοποιώντας την ταξινομία των Bloom, Englehart, Furst, Hill, και Krathwohl (1956) όρισε τέσσερα επίπεδα αξιολόγησης γνωστικής συμπεριφοράς:
(α) ικανότητα υπολογισμού: περιλαμβάνει τη γνώση συγκεκριμένων αποτελεσμάτων, τη γνώση ορολογίας και την ικανότητα εφαρμογής αλγορίθμου
(β) ικανότητα κατανόησης: περιλαμβάνει τη γνώση εννοιών, τη γνώση αρχών, κανόνων και γενικεύσεων, τη γνώση μαθηματικής δομής, την ικανότητα μετατροπής των δεδομένων ενός προβλήματος από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, την ικανότητα ακολουθίας ενός συλλογισμού και την ικανότητα ανάγνωσης και ερμηνείας ενός προβλήματος
(γ) ικανότητα εφαρμογής: περιλαμβάνει την ικανότητα επίλυσης συνηθισμένων προβλημάτων (routine problems), την ικανότητα σύγκρισης, την ικανότητα ανάλυσης δεδομένων και την ικανότητα αναγνώρισης μοτίβων και συμμετριών
(δ) ικανότητα ανάλυσης: περιλαμβάνει την ικανότητα επίλυσης μη συνηθισμένων προβλημάτων (non-routine problems), την ικανότητα ανακάλυψης σχέσεων, την ικανότητα κατασκευής αποδείξεων και της κριτικής τους και την ικανότητα παραγωγής και εγκυροποίησης γενικεύσεων.

Οι ικανότητες υπολογισμού και κατανόησης θεωρούνται χαμηλού επιπέδου, ενώ οι ικανότητες εφαρμογής και ανάλυσης είναι ανωτέρου επιπέδου (Wilson, 1971).

Το PISA με βάση τα αποτελέσματα των δεκαπεντάχρονων μαθητών που συμμετείχαν στις αξιολογήσεις του 2003, του 2006 και του 2009 (OECD, 2013), όρισε έξι επίπεδα που περιγράφουν τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών με βάση το βαθμό μαθηματικής εγγραμματοσύνης. Συγκεκριμένα, στο επίπεδο ένα, που είναι το κατώτερο επίπεδο, οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ερωτήσεις που είναι οικείες σε αυτούς με όλες τις απαραίτητες πληροφορίες να δίνονται ξεκάθαρα. Στο επίπεδο δυο, οι μαθητές μπορούν να ερμηνεύσουν και να αναγνωρίσουν καταστάσεις σε πλαίσια και να εξάγουν εμφανής συμπέρασμα. Στο επίπεδο τρία οι μαθητές μπορούν να εκτελέσουν τις διαδικασίες που τους δίνονται, επιλέγοντας και εφαρμόζοντας απλές στρατηγικές λύσης προβλήματος και αναπαραστάσεις από διάφορες πηγές. Επιπρόσθετα, σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές μπορούν να παρουσιάσουν τις ερμηνείες, τα αποτελέσματα και το συλλογισμό τους αλλά όχι σε εκτενές επίπεδο. Στο επίπεδο τέσσερα οι μαθητές μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά με ξεκάθαρα μοντέλα σύνθετων καταστάσεων, που μπορεί να περιλαμβάνουν περιορισμούς και να επιλέξουν και να εφαρμόσουν διάφορες αναπαραστάσεις συνδέοντας τις ταυτόχρονα με πτυχές των σύνθετων καταστάσεων. Ακόμη, στο επίπεδο τέσσερα οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν με βάση τις ερμηνείες και τις απόψεις τους. Στο επίπεδο πέντε οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν και να επεξεργαστούν μοντέλα για σύνθετες καταστάσεις προσδιορίζοντας τους περιορισμούς τους, καθώς και να επιλέξουν, να συγκρίνουν και να αξιολογήσουν κατάλληλες στρατηγικές λύσης προβλήματος για να αντιμετωπίσουν τις σύνθετες καταστάσεις. Ακόμη, οι μαθητές μπορούν σε αυτό το επίπεδο να εργάζονται στρατηγικά, με οργανωμένη και αναπτυγμένη σκέψη και να αναστοχάζονται σχετικά με την εργασία τους και να την επεξηγούν. Στο επίπεδο έξι, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν, να γενικεύσουν και να χρησιμοποιήσουν πληροφορίες από τις διερευνήσεις τους και τα μοντέλα που δημιούργησαν για σύνθετες προβληματικές καταστάσεις. Ακόμη, οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο συνδέουν διάφορες πληροφορίες και αναπαραστάσεις, καθώς μεταφράσουν τη μια αναπαράσταση στην άλλη με ευελιξία. Επίσης, οι μαθητές αυτοί χαρακτηρίζονται από ανωτέρου επιπέδου σκέψη και συλλογισμό, αναπτύσσοντας νέες προσεγγίσεις και στρατηγικές για να αντιμετωπίσουν τη νέα προβληματική κατάσταση. Παράλληλα, επεξηγούν με ακρίβεια την εργασία τους και αναστοχάζονται για την καταλληλότητα της για αντιμετώπιση της προβληματικής κατάστασης.

Δραστηριότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Οι Senk, Beckmann και Thompson (1997) ορίζουν ότι οι δραστηριότητες που προωθούν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, δεν χρειάζονται κάποιο αλγόριθμο που έχουν διδαχθεί οι μαθητές, αλλά απαιτούν τεκμηρίωση συλλογισμού και περισσότερες από μια λύσεις. Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM) (1989) ταύτισε την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με τη λύση μη συνηθισμένων προβλημάτων (non-routine problems), τα οποία απαιτούν μια ή περισσότερες κατάλληλες λύσεις και δεν αφορούν την εφαρμογή ενός αλγόριθμου που ήδη γνωρίζουν. Οι Stein και Lane (1996) παρουσίασαν μια λίστα από χαρακτηριστικά που πρέπει να έχουν μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν υψηλού επιπέδου γνωστικές διαδικασίες με έμφαση στο κάνω μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες αυτές πρέπει να απαιτούν σύνθετη και μη αλγοριθμική σκέψη (π.χ., μη προβλέψιμη πορεία), αυτοέλεγχο και αυτορρύθμιση της γνωστικής διαδικασίας, γνωστική προσπάθεια, εξερεύνηση και κατανόηση της φύσης των μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών ή σχέσεων, αξιολόγηση της σχετικής τους γνώσης και εμπειρίας και ανάλυση της δραστηριότητας, εξετάζοντας τους περιορισμούς της.

Χαρακτηριστικά διδασκαλίας ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Η διδασκαλία που δίνει έμφαση στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είναι άμεσα συνδεδεμένη με την βελτίωση της επίδοσης των μαθητών, αφού αποτελεί τη δεύτερη στη σειρά από πέντε παράγοντες που έχουν βρεθεί ότι συνεισφέρουν (National Center for Education Statistics, 1996). Σύμφωνα με το Foong (2000) υπάρχουν τρία χαρακτηριστικά της διδασκαλίας με σκοπό την ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά:
(α) οι μαθητές να εξηγούν, να υποθέτουν, να περιγράφουν μοτίβα και να επικοινωνούν τις ιδέες τους (δίνεται έμφαση στη χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και συλλογισμού)
(β) οι εκπαιδευτικοί ρωτούν τους μαθητές τους γιατί, τι και πώς-ερωτήσεις που απαιτούν περισσότερες από μια λέξεις ως απάντηση (δίνεται έμφαση από τον εκπαιδευτικό στην κατανόηση και στη σημασία)
(γ) οι μαθητές κάνουν επιλογές σχετικά με το ποια διαδικασία θα χρησιμοποιήσουν ή πώς θα εφαρμόσουν τη γνώση σε νέα και μη συνηθισμένα προβλήματα, ελέγχοντας τη διαδικασία και αξιολογώντας τη λύση τους (ενθαρρύνεται η αυτονομία του μαθητή και η ανεξάρτητη σκέψη).

Παρόμοια, και ο Protheroe (2007) υποστηρίζει ότι μια τάξη μαθηματικών πρέπει να έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ώστε να έχει ένα αποτελεσματικό περιβάλλον ενίσχυσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης: (α) να εμπλέκονται ενεργά οι μαθητές στο μάθημα κάνοντας μαθηματικά, (β) να λύνονται προβλήματα σύνθετα που προκαλούν τη σκέψη των μαθητών, (γ) να υπάρχει διαθεματικότητα, (δ) οι μαθητές να ενθαρρύνονται να επικοινωνούν τις μαθηματικές τους ιδέες, (ε) να γίνεται χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για επικοινωνία μαθηματικών ιδεών και (στ) να γίνεται χρήση εποπτικών μέσων.

Όμως, διαπιστώνεται από έρευνες ότι είναι δύσκολο να εφαρμοστούν συνθήκες προώθησης ανωτέρου επιπέδου σκέψης στις τάξεις και πιο συγκεκριμένα ασκήσεις που είναι μαθηματικά πλούσιες και προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν, να συλλογιστούν και να λύνουν προβλήματα, ως αποτέλεσμα διάφορων παραγόντων της τάξης (π.χ., οι εκπαιδευτικοί απλοποιούν προβλήματα γιατί θεωρούν ότι δεν μπορούν οι μαθητές τους να τα σκεφτούν, δεν υπάρχει αρκετός χρόνος, υπάρχουν προβλήματα διαχείρισης τάξης) (Stein, Grover & Henningsen, 1996). Αυτό που παρατηρείται, όταν γίνεται προσπάθεια εισαγωγής της, είναι οι μαθητές να καταλήγουν να εφαρμόζουν τύπους και κανόνες χωρίς σύνδεση, νόημα ή κατανόηση και να χάνονται ευκαιρίες σκέψης και συλλογισμού (Smith Bill, & Hughes, 2008). Για αυτό χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να υποστηρίζει την εφαρμογή ασκήσεων ανωτέρου επιπέδου σκέψης δίνοντας κατάλληλη ενίσχυση στη σκέψη και στο συλλογισμό των μαθητών, δίνοντας τους κατάλληλο χρόνο (ούτε λίγο ούτε περισσότερο από όσο χρειάζονται), αναζητώντας από αυτούς επεξηγήσεις, καλώντας τους να ελέγχουν τη διαδικασία τους, κάνοντας συνδέσεις και επιλέγοντας ασκήσεις οι οποίες να χτίζουν στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών (Stein et al., 1996). Με βάση αυτό οι Boston και Smith (2009) υπογραμμίζουν ότι η επιλογή μαθηματικών ασκήσεων ανωτέρου επιπέδου σκέψης, θα πρέπει να συνοδεύεται από την κατάλληλη εφαρμογή τους, διατηρώντας τις γνωστικές τους απαιτήσεις, ώστε να υπάρχει η επίδραση στην μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Επομένως, οι ορισμοί που δίνονται στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη περιλαμβάνουν μία ή περισσότερες ικανότητες του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989). Εκείνο που φαίνεται ότι συμφωνούν στη βιβλιογραφία είναι ότι διαδικασίες κριτικής, δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης αποτελούν ενδείξεις ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Όμως, δεν δίνεται ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Παράλληλα, δεν έχει εντοπιστεί προσπάθεια στη βιβλιογραφία κατασκευής κατάλληλου και έγκυρου εργαλείου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά το οποίο να αξιολογεί την πολυδιάστατη φύση της, με βάση το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989).

Πιο κάτω παρουσιάζεται τι έχει γραφτεί στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας για τις διαστάσεις του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989): τη γνώση περιεχομένου και μεταγνώση, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Συγκεκριμένα, για κάθε μία διάσταση παρουσιάζονται οι ορισμοί και οι προσεγγίσεις της που δόθηκαν στη βιβλιογραφία, σχετικές έρευνες και η σχέση της με τις άλλες διαστάσεις. Η τελευταία παράγραφος που δίνεται σε κάθε διάσταση καταλήγει σε ένα λειτουργικό ορισμό της. Επίσης, γίνεται προσπάθεια συσχέτισής του με τον ορισμό που δίνεται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989).

Μαθηματική γνώση και μεταγνώση. Η γνώση έχει βρεθεί να αποτελεί σημαντικό στοιχείο για έκφραση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Tularam, 1994). Οι ερευνητές στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας διακρίνουν τη μαθηματική γνώση σε εννοιολογική κα διαδικαστική. Με τον όρο εννοιολογική γνώση ορίζεται ως το δίκτυο των γνώσεων πλούσιο σε σχέσεις, όπου οι σχέσεις μεταξύ των γνώσεων είναι το ίδιο σημαντικές με τις γνώσεις (Hiebert & Lefevre, 1986). Ενώ η διαδικαστική γνώση ορίζεται από τους ίδιους τους ερευνητές ως η γνώση των διαδικασιών, δηλαδή η γνώση της διαδικασίας, των βημάτων, των κανόνων για χρήση των συμβόλων και για λύση προβλήματος. Ο Star (2005) επέκτεινε αυτούς τους ορισμούς, ορίζοντας ότι τόσο η εννοιολογική γνώση όσο και η διαδικαστική γνώση έχουν δυο επίπεδα ως προς το είδος της ποιότητας της γνώσης: επιφανειακή και ενισχυμένη. Συγκεκριμένα, η επιφανειακή εννοιολογική γνώση ορίζεται ως το δίκτυο των γνώσεων που περιλαμβάνει σχέσεις, αλλά αυτές δεν είναι κατ’ ανάγκη πλούσιες και σε βάθος. Ενώ η ενισχυμένη εννοιολογική γνώση αναφέρεται σε δίκτυο γνώσεων με πλούσιες συνδέσεις μεταξύ των εννοιών, καθώς περιλαμβάνει και την ευέλικτη χρήση και την κριτική αξιολόγηση των εννοιών. Όσον αφορά την επιφανειακή διαδικαστική γνώση είναι η γνώση αλγόριθμων και διαδικασιών, ενώ η ενισχυμένη διαδικαστική γνώση αφορά την κατανόηση της γνώσης αλγόριθμων και διαδικασιών, την ευέλικτη χρήση τους και την κριτική αξιολόγησή τους. Ο Star (2005) υποστηρίζει ότι τα δυο είδη γνώσεων, εννοιολογική και διαδικαστική, είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, ενώ οι Baroody, Feil, και Johnson (2007) διαφωνούν με αυτό. Υποστηρίζουν ότι η ενισχυμένη διαδικαστική γνώση χρειάζεται και εννοιολογική γνώση, όπως και η ενισχυμένη εννοιολογική γνώση χρειάζεται διαδικαστική γνώση.

Η μεταγνωστική συμπεριφορά στα μαθηματικά αποτελεί ένδειξη ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Lesh & Zawojewski, 2007). Αρκετοί ερευνητές τη διακρίνουν από τη γνώση και τη χαρακτηρίζουν ως ανώτερή της. Για παράδειγμα, ο Schoenfeld (1992) περιγράφει τη μεταγνώση ως την ικανότητα του ατόμου να αυτορυθμίζεται και να ελέγχει τις γνωστικές του διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα, ο Schoenfeld (1992) αναφέρεται στη μεταγνώση ως το μηχανισμό που επιτρέπει στους λύτες να αναλύουν μακροσκελή και σύνθετα προβλήματα σε υπό-δραστηριότητες, να βάζουν σε σειρά προτεραιότητας τις δραστηριότητες αυτές και να τις εκτελούν. Παράλληλα υποστηρίζεται ότι θα πρέπει να διδάσκεται μαζί με τη γνώση. Αυτό γιατί βρέθηκε πιο αποτελεσματική η διδασκαλία στην οποία οι μεταγνωστικές διαδικασίες αναπτύσσονταν παράλληλα με την ανάπτυξη της κατανόησης μαθηματικών εννοιών (Lester, Garofalo & Kroll, 1989). Επίσης, σε έρευνα των Kramarksi, Mevarech και Arami (2002) βρέθηκε ότι οι μαθητές που εμπλάκηκαν σε διδασκαλία με έμφαση στη μεταγνώση σημείωσαν υψηλότερες επιδόσεις σε δοκίμιο γνώσεων από αυτούς που συμμετείχαν σε παραδοσιακή διδασκαλία, καθώς μπορούσαν να αναδιοργανώσουν τις πληροφορίες και να τεκμηριώσουν το συλλογισμό τους. Άρα, φαίνεται η μεταγνώση να σχετίζεται άμεσα με διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης.

Με βάση τους πιο πάνω ορισμούς που δίνονται στη μαθηματική παιδεία για την έννοια της μαθηματικής γνώσης και της μεταγνώσης φαίνεται ότι περιέχονται σε αυτούς και ικανότητες της κριτικής σκέψης και της δημιουργικής σκέψης. Συγκεκριμένα, η έννοια της ενισχυμένης διαδικαστικής γνώσης περιλαμβάνει την ικανότητα ευέλικτης χρήσης και κριτικής αξιολόγησής αλγορίθμων και διαδικασιών, που αποτελούν ικανότητες κριτικής σκέψης. Παρόμοια και η έννοια της ενισχυμένης εννοιολογικής γνώσης περιλαμβάνει την ευέλικτη χρήση και κριτική αξιολόγηση εννοιών που αποτελούν ικανότητες κριτικής σκέψης. Παράλληλα, όμως η ενισχυμένη εννοιολογική γνώση αποτελεί δίκτυο γνώσεων με πλούσιες και εις βάθος σχέσεις που η οικοδόμησή του χρειάζεται ικανότητες δημιουργικής σκέψης. Η ικανότητα της μεταγνώσης περιλαμβάνει τον έλεγχο και τη ρύθμιση του τι γνωρίζει κανείς. Δηλαδή, χρησιμοποιεί διαδικασίες ανάλυσης και αξιολόγησης μιας κατάστασης που αποτελούν διαδικασίες κριτικής σκέψης, καθώς και σύνθεσης πορείας λύσης που αποτελεί διαδικασία δημιουργικής σκέψης. Επομένως, στα πλαίσια της εργασίας αυτής και με βάση τον ορισμό που δόθηκε στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989), η βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά περιλαμβάνει την επιφανειακή διαδικαστική και την επιφανειακή εννοιολογική γνώση που χρειάζεται ένα άτομο να έχει κατακτήσει για να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και για να ελέγξει και να ρυθμίσει τις γνώσεις του. Η ενισχυμένη εννοιολογική και ενισχυμένη διαδικαστική γνώση για να εμφανιστεί σε ένα άτομο χρειάζονται διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης.

Κριτική σκέψη στα μαθηματικά. Η κριτική σκέψη αποτελεί μέρος των ικανοτήτων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και της αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών (Balcaen & Klassen, 2008). Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM) (1989) τονίζει τη σημαντικότητα της κριτικής σκέψης στη διδασκαλία των μαθηματικών, ορίζοντας την ως την καρδιά της διδασκαλίας αυτής και την ανάγκη για ενίσχυσή της. Ακόμη υποστηρίζεται ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά βοηθάει τους μαθητές να σκέφτονται και να κατανοούν εις βάθος, να έχουν περισσότερη ανεξαρτησία στο χειρισμό καταστάσεων, να έχουν περισσότερη αυτοπεποίθηση σχετικά με τη σκέψη τους, να ελέγχουν τη μάθησή τους και να έχουν ενισχυμένες τις μαθηματικές διαδικασίες της αναπαράστασης, της επικοινωνίας, της λύσης προβλήματος και του συλλογισμού (TC^2, 2013). Έχει διαπιστωθεί να μην δίνεται έμφαση σε αυτή στη συνηθισμένη μαθηματική τάξη, παρά μόνο εντοπίζονται προσπάθειες ενίσχυσής της σε ικανούς μαθητές (Balcaen & Klassen, 2008). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα σχετικά με τα στοιχεία που καθορίζουν την κριτική σκέψη σε διάφορα επιστημονικά πεδία, όπως τα μαθηματικά (Ennis, 1989).

Γενικά, με βάση τη Jablonka διαπιστώνεται (2014) ότι δεν υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για την κριτική σκέψη στα μαθηματικά, όπως στην εκπαιδευτική ψυχολογία. Παρατηρείται να υπάρχει, όμως, μια συμφωνία με τους εκπαιδευτικούς ψυχολόγους ως προς το ότι τα αποτελέσματα της κριτικής σκέψης αποτελούν τη βάση για λήψη απόφασης και επίλυσης προβλήματος (Jablonka, 2014). Συγκεκριμένα, οι Balcaen και Klassen (2008) αναφέρουν ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά περιλαμβάνει τη σκέψη που χρησιμοποιεί κάποιος στη λύση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς και τη χρήση κριτηρίων για λήψη λογικής απόφασης στην επιλογή κατάλληλων στρατηγικών, προσεγγίσεων και λύσεων. Παρόμοια, The Critical Thinking Consortium (TC^2) (2013) όρισε ότι «όταν οι μαθητές σκέφτονται κριτικά στα μαθηματικά, κάνουν λογικές αποφάσεις ή κρίσεις σχετικά με το τι κάνουν και σκέφτονται» (σελ. 1). Δηλαδή, οι μαθητές για να θεωρείται ότι σκέφτονται κριτικά στα μαθηματικά θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους κριτήρια για να πάρουν μια λογικά σκεπτόμενη απόφαση και όχι να μαντεύουν απλά ή να εφαρμόζουν έναν κανόνα χωρίς να αξιολογήσουν τη σχετικότητά του (TC^2, 2013). Συμπληρώνοντας σε αυτό, η Jablonka (2014) υποστηρίζει ότι η κριτική σκέψη δεν αφορά μόνο αξιολόγηση αυστηρών ορισμών και λογικής συνοχής δηλώσεων, αλλά περιλαμβάνει και ανεπίσημη λογική. Συνεπακόλουθα, η Jablonka (2014) δηλώνει ότι κριτική σκέψη στα μαθηματικά χωρίς λογικό συλλογισμό δεν μπορεί να υπάρχει. Η λογική σκέψη στα μαθηματικά εκδηλώνεται όταν το άτομο μπορεί να αναλύσει, να αξιολογήσει και να βελτιώσει παραδείγματα (TC^2, 2013). Συνοπτικά, η κριτική σκέψη είναι η σκέψη που αναλύει, συσχετίζει και αξιολογεί όλες τις πτυχές μιας κατάστασης ή προβλήματος (Krulik & Rudnick, 1999).

Η πλειονότητα των ερευνών που εντοπίστηκαν σχετικά με την κριτική σκέψη στα μαθηματικά, υιοθετούν ή προσαρμόζουν στοιχεία της κριτική σκέψης όπως ορίστηκαν από ερευνητές της γενικής παιδαγωγικής και της εκπαιδευτικής ψυχολογίας (π.χ., Ennis, 1989· Facione, 2015· Iowa Department of Education, 1989). Γενικά, παρατηρείται όπως επισημαίνουν οι Balcaen και Klassen (2008) οι περισσότερες έρευνες να περιορίζουν την έννοιας της κριτικής σκέψης ως μια μικρή συλλογή δεξιοτήτων και αυτό προκύπτει από την έλλειψη ενός συνοπτικού παιδαγωγικού μοντέλου κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι Applebaum και Leikin (2007) μελέτησαν την κριτική σκέψη μέσα από την ικανότητα του δείγματος τους να αναγνωρίσουν αντικρουόμενες πληροφορίες και μη συναφή δεδομένα σε μαθηματικές ασκήσεις. Άλλοι ερευνητές, όπως οι Elliott, Oty, McArthur και Clark (2001) και ο Chukwuyenum (2013) χρησιμοποίησαν ένα ευρέως αποδεκτό εργαλείο μέτρησης της κριτικής σκέψης, το Watson – Glaser Critical Thinking Appraisal για μέτρηση της κριτικής σκέψης του δείγματος τους. Σε μια άλλη έρευνα, οι Aizikovitsh και Amit (2008, 2009, 2011) συγκέντρωσαν και ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα για την κριτική σκέψη των μαθητών του δείγματος τους πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση σε πιθανότητες. Συγκεκριμένα, τα ποσοτικά δεδομένα προήλθαν από τη συμπλήρωση του Cornell Critical Thinking Test-Level Z. Όσον αφορά τα ποιοτικά δεδομένα προήλθαν από τις εργασίες, τα πρότζεκτ και τα διαγωνίσματα που συμπλήρωσαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Αυτά κάλυπταν συγκεκριμένες ικανότητες κριτικής σκέψης: ανάδυση υποθέσεων και ερωτήσεων, αξιολόγηση αξιοπιστίας πηγών, προσδιορισμός μεταβλητών, εξαγωγή συμπερασμάτων και αναζήτηση εναλλακτικών λύσεων.

Με βάση τα πιο πάνω, φαίνεται ότι οι διαστάσεις της κριτικής σκέψης που χρησιμοποιήθηκαν στα μαθηματικά να συνδέονται με τις διαδικασίες της κριτικής σκέψης που προτείνονται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989): ανάλυση, σύνδεση και αξιολόγηση, παρόλο που δεν έχει εντοπιστεί κατάλληλο και εγκυροποιημένο εργαλείο μέτρησης της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά.

Δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά. Η δημιουργικότητα αποτελεί βασικό στοιχείο του κάνω μαθηματικά (Pehkonen 1997). Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM) (2000) υποστηρίζει ότι η δημιουργική ικανότητα αναπτύσσει και ενισχύει τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι η μάθηση των μαθηματικών με κατανόηση σημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι ευέλικτοι λύτες προβλημάτων, όπου «θα πρέπει να προσεγγίζουν το ίδιο πρόβλημα από διάφορες μαθηματικές πτυχές ή να αναπαριστούν τα μαθηματικά με διάφορους τρόπους» (σελ. 5). Όμως, η μαθηματική δημιουργικότητα, παρόλη τη σημαντικότητά της, είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο, για αυτό είναι δύσκολο να οριστεί (Standler, 1998· Yushau, Mji & Wessels, 2003) και να μετρηθεί μέσω μίας λίστας με συγκεκριμένα και μεμονωμένα αντικείμενα (Meissner, 2008). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχει οριστεί με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους μέχρι σήμερα. Πολλοί ερευνητές συμφωνούν ότι δεν υπάρχει ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός για τη μαθηματική δημιουργικότητα και ως αποτέλεσμα δεν υπάρχει ούτε κοινός αποδεκτός τρόπος μέτρησής της (Mann, 2006· Sriraman, 2009). Αυτό οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει μια κοινή αποδεκτή θεωρία στη μαθηματική δημιουργικότητα.

Ο Ervynck (1991) αναφέρει ότι η δημιουργικότητα αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα της ανωτέρου επιπέδου μαθηματικής σκέψης και την περιγράφει ως τη διαδικασία δημιουργίας νέας γνώσης, «κάνοντας ένα βήμα προς νέα κατεύθυνση» (σελ. 42), συνθέτοντας υπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις ή ανακαλύπτοντας μη γνωστές σχέσεις μεταξύ των γνώσεων αυτών. Παρόμοια και ο Singh (1987) ταυτίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα με τη δημιουργία μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης ιδέας. Στην ίδια λογική είναι και ορισμός που δίνεται από τους Krulik και Rudnick (1999), οι οποίοι ορίζουν ότι η δημιουργική σκέψη είναι η πρωτότυπη και αναστοχαστική σκέψη που παράγει ένα σύνθετο προϊόν. Αυτό περιλαμβάνει σύνθεση ιδεών, παραγωγή νέων ιδεών και καθορισμός της αποτελεσματικότητάς τους. Μια άλλη περιγραφή της μαθηματικής δημιουργικότητας δίνεται από τους Levan-Waynberg και Leikin (2009) όπου την παρουσιάζουν ως την πράξη της σύνδεσης της υπάρχουσας γνώσης με τη μαθηματική διαίσθηση, φαντασία και έμπνευση, όπου το αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι μια αποδεκτή μαθηματική λύση. Ο Pehkonen (1997) υποστηρίζει ότι η δημιουργική σκέψη είναι συνδυασμός λογικής και αποκλίνουσας σκέψης που βασίζεται στη διαίσθηση, αλλά έχει συγκεκριμένο σκοπό. Οι Kwon, Park, και Park (2006) υποστηρίζουν ότι εκτός από την παραγωγή νέας γνώσης, η μαθηματική δημιουργικότητα περιλαμβάνει και την ικανότητα της ευέλικτης λύσης προβλήματος. Άλλοι ερευνητές ορίζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα ως μια γνωστική διαδικασία στα μαθηματικά που περιλαμβάνει την ικανότητα χειρισμού των μαθηματικών συμβόλων που οδηγεί στην εύρεση περισσότερων λύσεων ή στρατηγικών λύσης ενός προβλήματος (Smith & Stein, 1998· Stein et al., 2000).

Η μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να χαρακτηριστεί σχετική ή απόλυτη. Οι Leikin και Lev (2013) και Leikin (2009) θεωρούν ότι η δημιουργικότητα των μαθητών στο σχολείο είναι σχετική, αφού αυτή αξιολογείται με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και την επίδοση των άλλων μαθητών με παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Ενώ απόλυτη δημιουργικότητα χαρακτηρίζεται από υψηλές επιδόσεις ανάμεσα στο δημιουργικό πεδίο και αναγνωρίζεται η σημαντικότητά της από ευρέως αποδεκτούς επιστήμονες (π.χ., βραβείο Νόμπελ) (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

Οι πιο πάνω ορισμοί περιγράφουν τη μαθηματική δημιουργικότητα ως προϊόν και ως διαδικασία. Υπάρχουν, όμως, ορισμοί που προσανατολίζονται στο άτομο και στα χαρακτηριστικά του. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι ένα μαθηματικά δημιουργικό άτομο χαρακτηρίζεται από περιέργεια, διαίσθηση, επιμονή, αποδέχεται τις διαφορετικές απόψεις, είναι ανοικτός σε εμπειρίες, έχει μεγάλο εύρος ενδιαφερόντων και είναι ανεξάρτητος και ανοικτόμυαλος (π.χ., Klavir & Gorodetsky, 2009).

Υπάρχουν δυο κύριες προσεγγίσεις αναγνώρισης και κατά συνέπεια μέτρησής της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά, με βάση το Haylock (1987, 1997). Η πρώτη αναφέρεται στο προϊόν, ενώ η δεύτερη αφορά τη γνωστική διαδικασία που κάποιος εφαρμόζει σε μια μαθηματική δημιουργική άσκηση για να τη λύσει.

Όσον αφορά την πρώτη προσέγγιση αναγνώρισης και μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας, αρκετοί ερευνητές πρότειναν και εφάρμοσαν κριτήρια τα οποία αξιολογούν το δημιουργικό προϊόν στα μαθηματικά, αξιοποιώντας την ιδέα της αποκλίνουσας παραγωγής. Γενικά, φαίνεται ότι οι ερευνητές συμφωνούν ότι ένα δημιουργικό προϊόν μπορεί να αξιολογηθεί με κριτήρια, όπως: η ευχέρεια (fluency), η ευελιξία (flexibility), η πρωτοτυπία (originality), η επεξεργασία (elaboration) και η καταλληλότητα (appropriateness) (π.χ., Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013· Leikin 2009· Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013β· Silver, 1997· Tabach & Friedlander, 2013· Torrance, 1974). Η ευχέρεια ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής πολλών αποδεκτών ιδεών ή χρήσης πολλών ερμηνειών, μεθόδων λύσεων και απαντήσεων σε ένα πρόβλημα. Η ευελιξία ορίζεται ως η ικανότητα χρήσης διαφορετικών προσεγγίσεων για τη λύση και την επεξήγηση ενός προβλήματος ή η ικανότητα αντιμετώπισης μιας κατάστασης από διαφορετικές προοπτικές (Silver, 1997). Η πρωτοτυπία αναφέρεται στη δημιουργία νέας, μοναδικής και πρωτότυπης λύσης ή σπάνιας λύσης ανάμεσα σε μια ομάδα ιδεών (Haylock, 1987· Leikin, 2009· Leikin & Lev, 2007· Silver, 1997· Singh, 1987). Η επεξεργασία αναφέρεται στον αριθμό των λεπτομερειών που χρησιμοποιεί το άτομο για να επεκτείνει ή να βελτιώσει τη λύση του (Torrance, 1974) ή στη σαφήνεια και στην ποιότητα έκφρασης της σκέψης, συμπεριλαμβανομένου της χρήσης γραφικών παραστάσεων, σχεδίων, μοντέλων και λέξεων (Sheffield, 2000).

Με βάση τα πιο ευρέως χρησιμοποιημένα κριτήρια αξιολόγησης της δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία, η Leikin (2009) προτείνει έναν τρόπο υπολογισμού της μαθηματικής δημιουργικότητας που αξιοποιεί τη σχετική δημιουργικότητα σε ασκήσεις πολλαπλών λύσεων. Αυτό γιατί η λύση προβλήματος με πολλαπλούς τρόπους σχετίζεται άμεσα με την ατομική μαθηματική δημιουργικότητα (Ervynck, 1991· Silver, 1997). Η μέθοδος αυτή βαθμολόγησης των διαστάσεων της δημιουργικότητας σε ασκήσεις πολλαπλών λύσεων έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές έρευνες και έχει εγκυροποιηθεί (π.χ., Leikin, 2009· Levav-Waynberg & Leikin, 2013· Leikin & Lev, 2013· Tabach & Friedlander, 2013).

Η κάθε λύση που δίνει ο μαθητής σε ασκήσεις πολλαπλών λύσεων αξιολογείται σε σχέση με τις άλλες που έδωσε, ώστε να δοθεί βαθμός για την ευελιξία. Ο βαθμός της ευελιξίας διαφοροποιείται με βάση το βαθμό διαφορετικότητας της λύσης. Έτσι, ο βαθμός για την ευελιξία ορίζεται ως εξής: 10 παίρνει η πρώτη λύση που δίνει ο μαθητής και κάθε λύση από διαφορετική ομάδα στρατηγικών, ένα παίρνει κάθε λύση του μαθητή που χρησιμοποίησε στρατηγική που ήταν ίδια με προηγούμενή του λύση, αλλά είναι σε διαφορετική αναπαράσταση και 0.1 παίρνει κάθε λύση του μαθητή που χρησιμοποίησε στρατηγική που ήταν ίδια με προηγούμενή του λύση και έχει την ίδια αναπαράσταση με προηγούμενή του λύση. Ο συνολικός βαθμός της ευελιξίας υπολογίζεται ως το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για ευελιξία σε κάθε λύση που δίνεται από το μαθητή.

Η κάθε λύση που δίνει ο μαθητής σε ασκήσεις πολλαπλών λύσεων αξιολογείται και σε σχέση με τις λύσεις που έδωσε η ομάδα των μαθητών που αξιολογείται στην άσκηση, για να δοθεί βαθμός στην πρωτοτυπία. Ο βαθμός πρωτοτυπίας διαφοροποιείται με βάση το ποσοστό εμφάνισης της λύσης στο σύνολο των λύσεων της ομάδας των μαθητών. Έτσι, ο βαθμός πρωτοτυπίας ορίζεται ως εξής: 10 παίρνει η κάθε λύση του μαθητή που εμφανίζεται σε ποσοστό μικρότερο του 15% των λύσεων του πληθυσμού που αξιολογείται, δηλαδή η μη συνηθισμένη λύση, ένα παίρνει η κάθε λύση του μαθητή που εμφανίζεται σε ποσοστό μεταξύ του 15% και του 40% των λύσεων του πληθυσμού που αξιολογείται, δηλαδή η μερικώς μη συνηθισμένη λύση και 0.1 παίρνει η κάθε λύση που εμφανίζεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 40% των λύσεων του πληθυσμού που αξιολογείται, δηλαδή η συνηθισμένη λύση. Ο συνολικός βαθμός της πρωτοτυπίας είναι το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για την πρωτοτυπία σε κάθε λύση που δίνεται από το μαθητή.

Όσον αφορά το βαθμό δημιουργικότητας για κάθε λύση προκύπτει από το γινόμενο των δυο βαθμολογιών που δόθηκαν για τη συγκεκριμένη λύση στην ευελιξία και στην πρωτοτυπία, ώστε όταν κάποιος πάρει τον πιο υψηλό βαθμό και στις δυο διαστάσεις να έχει συνολικό βαθμό δημιουργικότητας για τη λύση του 100. Ο συνολικός βαθμός δημιουργικότητας προκύπτει από το άθροισμα της βαθμολογίας για δημιουργικότητα που δόθηκε σε κάθε λύση του μαθητή. Συνήθως στις έρευνες αξιοποιείται αυτός ο συνολικός βαθμός για τη δημιουργικότητα. Αλλά η Leikin (2009) επισήμανε ότι ο συνολικός βαθμός δημιουργικότητας υπολογίζεται και πολλαπλασιάζοντας την ευχέρεια (αριθμός ορθών λύσεων) με το συνολικό γινόμενο της ευελιξίας με την πρωτοτυπία. (Ο όρος «συνολικό» αναφέρεται στην αξιολόγηση όλων των λύσεων.)

Εκτός από το προϊόν, η μαθηματική δημιουργικότητα για να μπορεί να αναγνωριστεί και να μετρηθεί χρειάζεται τη διαδικασία με βάση το Haylock (1987, 1997).

Ο Hadamard (1945) αξιοποιώντας τις ιδέες του Poincare και το εννοιολογικό πλαίσιο του Walls (1926) για περιγραφή δημιουργικής διαδικασίας, δημιούργησε μια θεωρία από τέσσερα στάδια (Liljedahl, 2008, 2013). Αυτή η θεωρία αποτελεί την πιο εφικτή και λογική περιγραφή της διαδικασίας της μαθηματικής δημιουργίας (Liljedahl, 2013):

(i) Προετοιμασία (preparation): το άτομο σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζεται από μια προσπάθεια να επιλύσει το πρόβλημα βασιζόμενο στο ρεπερτόριο των εμπειριών του και των γνώσεων του και δίνει λανθασμένες απαντήσεις.

(ii) Επώαση (incubation): είναι η φάση κατά την οποία το άτομο εγκαταλείπει, για ένα διάστημα, την προσπάθεια εξεύρεσης της λύσης και ασχολείται με κάτι τελείως άσχετο. Το στάδιο της επώασης δεν είναι απαραίτητο.

(iii) Φωτισμός (illumination): αυτό το στάδιο σχετίζεται με την εύρεση της λύσης του προβλήματος. Η λύση εμφανίζεται ξαφνικά, ενορατικά.

(iv) Επαλήθευση (verification): αφορά την τεκμηρίωση της ορθότητας της λύσης που βρήκε το άτομο.

Μια άλλη προσέγγιση της δημιουργικής διαδικασίας στα μαθηματικά δίνεται από τον Ervynck (1991). Συγκεκριμένα, περιγράφει τρία επίπεδα μαθηματικής δημιουργικότητας. Το πρώτο επίπεδο, το ονομάζει τεχνικό στάδιο και αναφέρει ότι περιλαμβάνει κάποιου είδους πρακτικής εφαρμογής μαθηματικών κανόνων και διαδικασιών, όπου ο λύτης δεν έχει επίγνωση των θεωρητικών ευρημάτων. Το δεύτερο επίπεδο, το αλγοριθμικό, περιλαμβάνει μια αρχική επεξεργασία/εκτέλεση των μαθηματικών τεχνικών, μοντελοποιώντας την κατάσταση. Το τρίτο επίπεδο, το δημιουργικό, περιλαμβάνει την έκφραση της δημιουργικής σκέψης, όπου το άτομο μπορεί να πάρει μια μη αλγοριθμική απόφαση, η οποία έχει αποκλίνουσα μορφή, αλλά περιλαμβάνει μια επιλογή. Τα τρία επίπεδα του Ervynck (1991) φαίνεται να περιγράφουν επίπεδα της πρωτοτυπίας και όχι τόσο της ευχέρειας ή της ευελιξίας (Leikin & Lev, 2013).

Ένα άλλο μοντέλο που περιγράφει τη δημιουργική διαδικασία είναι των Treffinger, Isaksen και Stead-Dorval (2003, 2006). Συγκεκριμένα, στο μοντέλο αυτό ο μαθητής αρχικά κατανοεί την πρόκληση που έχει (αυτό μπορεί να γίνει είτε μέσω κατασκευής ευκαιριών, διερεύνησης δεδομένων και οριοθέτησης προβλημάτων). Ακολούθως, ο μαθητής παράγει πολλές, διαφορετικές και πρωτότυπες ιδέες για να λύσει την πρόκληση/πρόβλημα που έχει στη διάθεσή του. Έπειτα, διερευνά τρόπους όπου αναπτύσσει τις ιδέες για να τις εφαρμόσει αποτελεσματικά και να τις παρουσιάσει (ανάπτυξη λύσεων και αποδοχής). Τέλος, ο μαθητής αξιολογεί τη διαδικασία που ακολούθησε και σκέφτηκε, καθ' όλη τη διάρκεια (Treffinger et al., 2003, 2006).

Ένα άλλο μοντέλο το οποίο βοηθάει στην έκφραση δημιουργικών λύσεων είναι αυτό της Sheffield (2003). Συγκεκριμένα, αποτελεί ένα μη γραμμικό μοντέλο που αποτελείται από τις διαδικασίες: συσχέτισης, διερεύνησης, επικοινωνίας, αξιολόγησης και δημιουργίας. Ένας μαθητής μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε διαδικασία για να διερευνήσει δημιουργικά ένα πρόβλημα. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να ξεκινήσει συσχετίζοντας το πρόβλημα που θα λύσει με προβλήματα που έχει λύσει. Έπειτα να διερευνήσει το πρόβλημα και να αξιολογήσει κατά πόσο έχει απαντήσει το πρόβλημα και η απάντηση που έχει δώσει έχει νόημα. Ακολούθως, να παρουσιάσει τα αποτελέσματα που βρήκε και να δημιουργήσει νέες ερωτήσεις για να απαντήσει (Sheffield, 2003). Σημαντικό να τονιστεί ότι σε αυτό το μοντέλο, ο μαθητής δεν σταματά όταν βρει τη λύση, αφού αυτό που ακολουθεί περιλαμβάνει εις βάθος μελέτη μαθηματικών ιδεών και ανακάλυψη νέων εννοιών (Sheffield, 2003).

Και στα τέσσερα μοντέλα που έχουν περιγραφεί πιο πάνω υπάρχουν εμφανής στοιχεία χρήσης διαδικασιών κριτικής σκέψης, τα οποία είτε οδηγούν στην εκδήλωση της μαθηματικής δημιουργικότητας είτε αφορούν την αξιολόγηση του μαθηματικού δημιουργικού προϊόντος. Δηλαδή, η δημιουργική σκέψη για να εκδηλωθεί χρειάζεται την κριτική σκέψη, όπως δηλώθηκε και από τον ορισμό του Pehkonen (1997).

Εκτός από την κριτική σκέψη για να είναι κάποιος μαθηματικά δημιουργικός χρειάζεται να έχει επαρκής και ακριβής μαθηματική γνώση (Haylock, 1987, 1997) ώστε να παράγει μαθηματικά κατάλληλες λύσεις. Παρόμοια, και οι Leikin και Elgrabli (2015) υποστηρίζουν ότι:

> Οι δημιουργικές διαδικασίες στα μαθηματικά υποθέτουν την ανακάλυψη νέων μαθηματικών κατασκευασμάτων, ιδιοτήτων και κανονικοτήτων ώστε να επεκτείνουν τη μαθηματική γνώση σε νέο έδαφος. Για να γίνει αυτό χρειάζεται γνώση περιεχομένου των μαθηματικών και ικανότητα κριτικής αξιολόγησης του προϊόντος που ανακαλύπτεται ως προς το ότι αποτελεί κάτι νέο (σελ. 1024).

Δηλαδή, με βάση τα πιο πάνω υπάρχει μια συμφωνία στο ότι η δημιουργική σκέψη προβλέπεται από τη βασική γνώση και την κριτική σκέψη, αλλά δεν αρκούν μόνο αυτά (Meissner, 2005).

Όμως, υπάρχουν αντικρουόμενα και διαφορετικά αποτελέσματα σχετικά με τη σχέση μαθηματικής δημιουργικότητας και μαθηματικής ικανότητας. Από τη μια υπάρχουν οι έρευνες που έχουν δείξει ότι δεν υπάρχει σχέση (π.χ., Baran, Erdogan, & Çakmak, 2011). Από την άλλη, υπάρχουν έρευνες που έχουν βρει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της δημιουργικότητας (π.χ., Bahar & Maker, 2011· Kattou et al., 2013· Sak & Maker, 2006). Η σχέση αυτή διαφοροποιείται ανάλογα με την έρευνα, δηλαδή έχει βρεθεί ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι μέρος της μαθηματικής ικανότητας (Kattou et al., 2013), ότι η μαθηματική δημιουργικότητα προβλέπει την μαθηματική ικανότητα (Bahar & Maker, 2011) και ότι η μαθηματική ικανότητα εξηγεί τη μαθηματική δημιουργικότητα (Sak & Maker, 2006). Γενικά, θεωρείται ότι τα αντικρουόμενα και τα διαφορετικά αυτά αποτελέσματα οφείλονται στους διαφορετικούς ορισμούς και κατ' επέκταση στους διαφορετικούς τρόπους που γίνεται η μέτρηση τόσο της μαθηματικής ικανότητας όσο και της μαθηματικής δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα, έχει παρατηρηθεί ότι τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες που βρήκαν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι μέρος της μαθηματικής ικανότητας και ότι η μαθηματική δημιουργικότητα προβλέπει την μαθηματική ικανότητα, περιλαμβάνουν έργα τόσο κριτικής σκέψης όσο και σύνθετων διαδικασιών σκέψης (Bahar & Maker, 2011· Kattou et al., 2013). Ενώ τα έργα στην έρευνα που βρήκε ότι η μαθηματική ικανότητα προβλέπει τη μαθηματική δημιουργικότητα ήταν έργα κριτικής σκέψης και βασικής γνώσης περιεχομένου (Sak & Maker, 2006). Άρα, πιθανόν οι διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης όπως ορίζονται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) να εξηγούν τα διαφορετικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν πιο πάνω.

Επιπρόσθετα, η έρευνα στη μαθηματική δημιουργικότητα έχει δείξει ότι υπάρχουν διαφορετικές ομάδες ατόμων ως προς τη δημιουργικότητά τους σε συνδυασμό και με την επίδοσή τους σε μαθηματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, η έρευνα των Kattou et al. (2013) βρήκε ότι από τα δεδομένα των 359 μαθητών δημοτικού του δείγματος τους προκύπτουν τρεις ομάδες με βάση την επίδοση στο δοκίμιο των μαθηματικών και την συνολική βαθμολογία στα μαθηματικά δημιουργικά έργα. Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε τους μαθητές με υψηλή επίδοση και υψηλή δημιουργικότητα, η δεύτερη ομάδα περιλάμβανε τους μαθητές με μέση επίδοση και μέση δημιουργικότητα και η τρίτη ομάδα περιλάμβανε τους μαθητές με χαμηλή επίδοση και χαμηλή δημιουργικότητα. Την πρώτη και την τρίτη ομάδα της πιο πάνω έρευνας (Kattou et al., 2013) παρατήρησε και ο Haylock (1997) στη δική του ποιοτική έρευνα. Δηλαδή, εντόπισε ομάδα μαθητών με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και χαμηλή δημιουργική ικανότητα. Αυτή η ομάδα με βάση το Haylock (1997) προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική επίδοση δεν έχουν τη γνώση και τις δεξιότητες για να εκφράσουν δημιουργική σκέψη σε κατάλληλες δραστηριότητες. Παρόμοια και για την ομάδα μαθητών με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά και υψηλή δημιουργικότητα. Δηλαδή, υποστηρίζει ότι οι μαθητές για να μπορέσουν να έχουν υψηλή δημιουργικότητα χρειάζονται υψηλή επίδοση, αλλά υπάρχουν μαθητές με υψηλή επίδοση οι οποίοι έχουν χαμηλή επίδοση σε δημιουργικές ασκήσεις. Όπως βρήκε ο ίδιος ερευνητής μεταξύ των δυο αυτών ομάδων υπάρχουν σημαντικές διαφορές και συγκεκριμένα φαίνεται ότι η ομάδα με την υψηλή επίδοση και τη χαμηλή δημιουργικότητα να έχει χαμηλή αυτό-εικόνα και να διστάζει να προσεγγίσει τα μαθηματικά με ένα άλλο τρόπο, διαφορετικό από την παραδοσιακή προσέγγιση. Ο Pehkonen (1997) θεωρεί ότι η ομάδα των μαθητών με υψηλή επίδοση και χαμηλή δημιουργικότητα προκύπτει και από το γεγονός ότι γίνεται υπερβολική χρήση του αριστερού ημισφαιρίου από κανόνες και αλγορίθμους που μαθαίνονται με σειριακό τρόπο, με αποτέλεσμα να εμποδίζεται η ανάπτυξη της δημιουργικότητας που χρειάζεται και τη χρήση του δεξιού ημισφαιρίου.

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω για τη μαθηματική δημιουργικότητα, φαίνεται ότι υπάρχει σύνδεση με τις διαδικασίες της δημιουργικής σκέψης που προτείνονται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989): σύνθεσης πληροφοριών και νοητικής δημιουργίας (φαντασία, νοερές εικόνες). Η ικανότητα της επεξεργασίας που υπάρχει στον ορισμό της δημιουργικής σκέψης στο Μοντέλο Σκέψης δεν δίνεται ως ξεχωριστός όρος στους διάφορους ορισμούς και μοντέλα που αναφέρθηκαν πιο πάνω για τη μαθηματική δημιουργικότητα, αφού φαίνεται να αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των άλλων δυο ικανοτήτων.

Άρα, η δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά είναι η παραγωγή νέας γνώσης που προκύπτει μέσα από τη σύνθεση και τη νοητική δημιουργία της βασικής γνώσης περιεχομένου και της αναδιοργανώμενης γνώσης (προϊόν κριτικής σκέψης). Η νέα γνώση μπορεί να έχει τη μορφή μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης λύσης (πρωτοτυπία) ή πολλών (ευχέρεια) και διαφορετικών λύσεων (ευελιξία), ώστε να μπορεί να αξιολογηθεί. Όταν ενισχυθεί η δημιουργική σκέψη, μπορεί να ενισχυθεί και η κριτική σκέψη και η βασική γνώση περιεχομένου με βάση τα μοντέλα δημιουργικής διαδικασίας που παρουσιάστηκαν πιο πάνω (π.χ., Ervynck, 1991· Sheffield, 2003· Treffinger et al., 2003, 2006).

Σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Παρατηρήθηκε γενικά στη βιβλιογραφία μια διάσταση απόψεων σχετικά με τις σύνθετες διαδικασίες μαθηματικής σκέψης (Selden & Selden, 2005). Από τη μια υπάρχουν αυτοί που θεωρούν ότι αναφέρονται σε διαδικασίες που μόνο μαθητές πανεπιστημίου μπορούν να αναπτύξουν, αφού τις περιλαμβάνουν οι μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται (π.χ., Edwards, Dubinsky & McDonald, 2005) και από ότι την άλλη ότι αποτελούν διαδικασίες που πρέπει να αναπτυχθούν από το δημοτικό (π.χ., Harel & Sowder, 2005· Rasmussen et al., 2005). Όμως, πρακτικά φαίνεται ότι αυτές οι δυο «αντίθετες» απόψεις, να υποστηρίζουν η μια την άλλη. Για παράδειγμα, υποστηρίζεται ότι η αφαιρετική σκέψη είναι σύνθετη/ανωτέρου επιπέδου και παράλληλα ότι συμβαίνει σε θέματα όπως την αφηρημένη άλγεβρα που αποτελεί σύνθετο/ανωτέρου επιπέδου θέμα μαθηματικών και διδάσκεται σε μαθητές πανεπιστημίου (Selden & Selden, 2005).

Εκτός από τα πιο πάνω, έχουν εντοπιστεί στη βιβλιογραφία διάφορες προσεγγίσεις ορισμού των σύνθετων διαδικασιών μαθηματικής σκέψης. Δηλαδή, από τη μια εντοπίστηκαν ερευνητές που τις περιγράφουν ως ένα σύνολο από δεξιότητες και από την άλλη βρέθηκαν ερευνητές που τις ορίζουν ότι έχουν κάποια δομή, η οποία καθοδηγείται από κάποιες αρχές (Harel & Sowder, 2005). Ο Dreyfus (1991) ορίζει ως σύνθετες διαδικασίες της μαθηματικής σκέψης: τις διαδικασίες που περιλαμβάνονται στην αναπαράσταση (περιλαμβάνει τη διαδικασία της αναπαράστασης, τη μετάβαση από την μια αναπαράσταση στην άλλη, τη μετάφραση από τη μια στην άλλη και τη μοντελοποίηση) και στην αφαιρετική σκέψη (περιλαμβάνει τη γενίκευση, τη σύνθεση και την αφαίρεση). Από την άλλη, οι Harel και Sowder (2005) δεν έδωσαν συγκεκριμένες διαδικασίες που θεωρούνται σύνθετες στα μαθηματικά όπως ο Dreyfus (1991), αλλά πρότειναν ότι η μαθηματική σκέψη είναι σύνθετη, αν η ανάπτυξή της περιλαμβάνει τουλάχιστον μια συνθήκη επιστημολογικού εμποδίου (π.χ., ορίζεται από την ιστορία, είναι έγκυρη η έννοια για ένα πεδίο και όχι για άλλο). Κατά συνέπεια, το επίπεδο κατάκτησής της σύνθετης μαθηματικής σκέψης ορίζεται από το βαθμό που το άτομο ξεπερνά το εμπόδιο (Harel & Sowser, 2005). Παρόμοια, οι Rassmussen et al. (2005) όρισαν ότι η δραστηριότητα που απαιτεί σύνθετες διαδικασίες μαθηματικής σκέψης αφορά το χτίσιμο και την ανάπτυξη πρακτικών, που επιτυγχάνεται μέσω της διαδικασίας της κάθετης και οριζόντιας μαθηματικοποίησης, δηλαδή μέσω διαδικασιών εύρεσης μοτίβου, ομαδοποίησης, γενίκευσης, τεκμηρίωσης κτλ

Ένας άλλος όρος που εντοπίστηκε στη βιβλιογραφία και με βάση τον ορισμό του φαίνεται να υπάγεται στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά είναι η σύνθετη επίλυση προβλήματος (complex problem solving). Συγκεκριμένα:

> η σύνθετη επίλυση προβλήματος συμβαίνει για να ξεπεραστούν τα εμπόδια μεταξύ της δεδομένης κατάστασης και του στόχου με τη χρήση συμπεριφοριστικών και γνωστικών δραστηριοτήτων που απαιτούν πολλά βήματα. Η δεδομένη κατάσταση, ο στόχος και τα εμπόδια είναι σύνθετα, αλλάζουν δυναμικά κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλήματος και είναι αδιαφανή. Τα ακριβής χαρακτηριστικά της δεδομένης κατάστασης, του στόχου και των εμποδίων είναι άγνωστα για το λύτη. (Frensch & Funke, 1995, σελ. 18).

Στο Μοντέλο της Σκέψης ως σύνθετες διαδικασίες σκέψης ορίζονται η λύση προβλήματος, ο σχεδιασμός και η λήψη απόφασης. Αυτές οι τρεις διαδικασίες μοιάζουν με τα τρία είδη προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόγραμμα αξιολόγησης της λύσης προβλήματος PISA το 2003: διάγνωση και λήψη διορθωτικών μέτρων (trouble shooting), ανάλυση συστήματος και σχεδιασμός (system analysis and design) και λήψη απόφασης (decision making) (OECD, 2004). Στη διάγνωση και λήψη διορθωτικών μέτρων περιλαμβάνεται η κατανόηση των λειτουργιών και των δυσλειτουργιών ενός συστήματος και η εισήγηση για πιθανές λύσεις των δυσλειτουργιών. Η ανάλυση συστήματος και σχεδιασμός περιλαμβάνει την ανάλυση μιας σύνθετης κατάστασης, ώστε να εντοπιστεί η αιτία που προκάλεσε το πρόβλημα και να λυθεί ή να σχεδιαστεί ένα σύστημα το οποίο να έχει συγκεκριμένους στόχους. Στη λήψη απόφασης περιλαμβάνεται η κατανόηση μιας κατάστασης που αποτελείται από διάφορες προσεγγίσεις, η αναγνώριση περιορισμών και η απόφαση μεταξύ των διαφορετικών προσεγγίσεων.

Γενικά, μπορεί να λεχθεί με βάση τα πιο πάνω ότι οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά αποτελούν την ανάπτυξη πρακτικών οι οποίες βοηθούν τα άτομα να λύσουν την άγνωστη σε αυτούς κατάσταση που τους υποβλήθηκε, αξιοποιώντας τη βασική τους γνώση περιεχομένου και τις διαδικασίες της κριτικής και δημιουργικής του σκέψης (Frensch & Funke, 1995· Rasmussen et al., 2005).

Ανάπτυξη της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης

Έχουν προταθεί και μελετηθεί στη βιβλιογραφία πολλές θεωρίες και προσεγγίσεις για την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και των παραγόντων της (στη συγκεκριμένη εργασία ως παράγοντες της θεωρούνται αυτές που παρουσιάζονται στο μοντέλο Σκέψης του Iowa Department of Education (1989)) τόσο από τα πεδία της ψυχολογίας και της γενικής παιδαγωγικής όσο και από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, έχουν επιλεχθεί θεωρίες και προσεγγίσεις που αναφέρονται στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και των παραγόντων της στα μαθηματικά, αλλά δεν προέρχονται μόνο από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Κάποιες από αυτές χρησιμοποιήθηκαν σε άλλα πεδία έρευνας και υιοθετήθηκαν στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας. Οι προσεγγίσεις αυτές αποτελούν τη βάση στην οποία στηρίζεται η ανάπτυξη των τριών περιβαλλόντων μάθησης της εργασίας αυτής.

Γενικά δηλώνονται ως κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις ανάπτυξης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά: η διερευνητική μάθηση, η χρήση πολλαπλών λύσεων και η συζήτηση. Για παράδειγμα, σε μια πρόσφατη μετανάλυση των αποτελεσματικών διδακτικών προσεγγίσεων/στρατηγικών για την ενίσχυση της κριτικής σκέψης παρουσιάζονται ως οι δυο πιο επιτυχημένες στρατηγικές που ο συνδυασμός τους γίνεται ακόμη πιο αποτελεσματικός: η συζήτηση και η χρήση αυθεντικών προβλημάτων (Abrami, Bernard, Borokhovski, Waddington, Wade, & Persson, 2015). Επίσης, πρόσφατα η Leikin (2014) υποστήριξε με βάση τα ευρήματα των ερευνών της ότι ο συνδυασμός μαθηματικών διερευνήσεων και ασκήσεων με πολλαπλές λύσεις είναι ιδανικός για να διατηρεί το επίπεδο της μαθηματικής πρόκλησης στη μαθηματική τάξη και για να αντιληφθούν οι μαθητές διαφορετικών επιπέδων τις δυνατότητες τους. Πιο κάτω αναλύονται οι επιτυχημένες αυτές διδακτικές προσεγγίσεις.

Διερευνητική μάθηση. Στη διερευνητική μάθηση, ο μαθητής είναι το επίκεντρο της μάθησης και καλείται να εργαστεί με παρόμοιους τρόπους όπως ένας μαθηματικός (Maaß & Artigue, 2013). Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής πρέπει να παρατηρεί φαινόμενα, να υποβάλει ερωτήσεις, να ψάξει μαθηματικούς τρόπους για επίλυση προβλημάτων, να μοντελοποιεί και να μαθηματικοποιεί καταστάσεις, να αναζητεί πηγές και ιδέες, να αναλύει δεδομένα, να ερμηνεύει και να αξιολογεί λύσεις, να υποθέτει, να γενικεύει και να συνδέει καταστάσεις για ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και δομών (Artigue & Blomhøj, 2013· Maaß & Artigue, 2013· NRC, 1996, 2000). Αυτές οι διαδικασίες επιδρούν θετικά στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και ικανοτήτων, καθώς και στην ανάπτυξη διαδικασιών σκέψης για διερεύνηση (Artigue & Blomhøj, 2013). Παράλληλα, η διερευνητική μάθηση στα μαθηματικά έχει διπλό ρόλο, από τη μια να απαντάει σε ερωτήματα του πραγματικού κόσμου και από την άλλη να δημιουργεί μαθηματικά αντικείμενα (Artigue & Baptist, 2012).

Έχουν οριστεί τέσσερα επίπεδα διερευνητικής μάθησης: επιβεβαιωτική (confirmation inquiry), δομημένη (structured inquiry), καθοδηγούμενη (guided inquiry) και ανοικτή (open inquiry) (Banchi & Bell, 2008· Bell, Smetana, & Binns, 2005· Herron, 1971). Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός χρησιμοποιείται ευρέως στο πεδίο των φυσικών επιστημών. Η επιβεβαιωτική διερεύνηση αναφέρεται στη διερεύνηση όπου ο εκπαιδευτικός υποβάλλει το ερώτημα και τη διαδικασία, και μέρος του αποτελέσματος είναι γνωστό. Η δομημένη διερεύνηση αφορά και αυτή διερεύνηση όπου ο εκπαιδευτικός υποβάλει το ερώτημα και τη διαδικασία, αλλά τους δίνεται η ελευθερία να τεκμηριώσουν, να εξηγήσουν και να επικοινωνήσουν. Η καθοδηγούμενη διερεύνηση συμβαίνει όταν ο εκπαιδευτικός δίνει το ερώτημα και οι μαθητές θα πρέπει να βρουν ένα τρόπο να το διερευνήσουν. Στην ανοικτή διερευνητική μάθηση, οι μαθητές λειτουργούν ως ερευνητές. Δηλαδή, εντοπίζουν μόνοι τους το πρόβλημα, θέτουν μόνοι τους τα ερωτήματα που θα διερευνήσουν, σχεδιάζουν και εκτελούν τη διερεύνησή τους και παρουσιάζουν τα αποτελέσματά τους (Banchi & Bell, 2008). Γενικά, αυτές οι προσεγγίσεις στο πεδίο των φυσικών επιστημών έχουν διερευνηθεί και συγκριθεί ευρέως σε διάφορα θέματα. Για παράδειγμα, η καθοδηγούμενη διερεύνηση φαίνεται να υπερτερεί της δομημένης διερεύνησης (Bunterm et al., 2014), δηλαδή βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην καθοδηγούμενη διερεύνηση είχαν μεγαλύτερη βελτίωση στη γνώση περιεχομένου και στις διαδικασίες συλλογισμού. Από την άλλη, η ανοικτή διερεύνηση γενικά παρατηρείται να μην έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών (Mayer, 2004). Στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας κάποιοι από τους πιο πάνω όρους έχουν διαφορετική σημασία.

Η ανοικτή διερευνητική μάθηση στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας αναφέρεται στη χρήση ανοικτών καταστάσεων λύσης προβλήματος που προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν, να προχωρούν πέραν από αυτό που αναμένεται και να επιδέχονται ένα μεγάλο εύρος λύσεων ή προσεγγίσεων (Foong, 2000). Έρευνες έχουν δείξει ότι τα ανοικτά προβλήματα επιδρούν θετικά στην ενίσχυση της δημιουργικότητας ατόμων που εργάζονται συστηματικά με αυτά σε σχέση με την ομάδα ελέγχου (π.χ., Kwon et al., 2006).

Εκτός από τα πιο πάνω, οι Artigue και Blomhøj (2013) μέσα από μια ενδελεχή παρουσίαση διαφορετικών μορφών που παίρνει η διερευνητική μάθηση στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, υπογραμμίζουν ως βασικά στοιχεία της:

- τη χρήση πραγματικών προβλημάτων που σχετίζονται με την πραγματική ζωή των μαθητών και τη σύνδεσή τους με ερωτήματα και δραστηριότητες εκτός σχολείου
- την επιστημονική σχετικότητα των ερωτημάτων από μαθηματική πλευρά
- τη διδασκαλία της γνώσης όπως εκφράζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα
- την διάσταση της μοντελοποίησης της διερευνητικής διαδικασίας
- την πειραματική διάσταση των μαθηματικών
- την αυτονομία και την υπευθυνότητα που δίνεται στους μαθητές
- την ανάπτυξη ικανοτήτων λύσης προβλήματος και διαδικασιών σκέψης για διερεύνηση
- τη διαλογική αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου και μαθητή
- τη συνεργατική διάσταση της διερευνητικής μάθησης
- την κριτική και δημοκρατική διάσταση της διερευνητικής μάθησης

Όπως έχει ήδη επισημανθεί η διερευνητική μάθηση σχετίζεται με την ανάπτυξη ικανοτήτων λύσης προβλήματος και διαδικασιών σκέψης για διερεύνηση (Artigue & Blomhøj, 2013), τα οποία αποτελούν διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, η Rooney (2012) εφαρμόζοντας διερευνητική προσέγγιση στο μάθημα το μαθηματικών της παρατήρησε ότι βελτιώθηκε η διδασκαλία της και οι πρακτικές της, καθώς και οι μαθητές της φάνηκε να έχουν ενισχύσει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους (οι εργασίες των περισσότερων βρίσκονταν στο τέταρτο και στο πέμπτο επίπεδο της ταξινομίας του SOLO όταν αξιολογήθηκαν), να παίρνουν πρωτοβουλίες και να έχουν περισσότερο ενθουσιασμό σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Σε μια άλλη έρευνα των Chin, Lin, Chuang και Tuan (2007) βρέθηκε ότι η διερευνητική μάθηση ενισχύει τις μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών, αλλά δεν μπορεί να λεχθεί από τα ευρήματα της συγκεκριμένης εργασίας ότι η διερευνητική μάθηση στα μαθηματικά αποτελεί εγγύηση μεταγνωστικής ανάπτυξης. Ακόμη, ο Ferguson (2010) βρήκε ότι οι μαθητές Β' γυμνασίου που συμμετείχαν σε περιβάλλον διερευνητικής μάθησης βελτίωσαν την κατανόηση τους σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τους μαθητές που διδάχθηκαν με την παραδοσιακή διδασκαλία. Παρόμοια, και οι Markovitz και Sowder (1994) βρήκαν ότι οι μαθητές που συμμετείχαν σε μια τρίμηνη διδασκαλία με κύριο στοιχείο την εξερεύνηση σχέσεων μεταξύ αριθμών και πράξεων, ανάπτυξαν μια βαθύτερη κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, όπου οι διαφορές αυτές εξακολουθούσαν να υπάρχουν και έξι μήνες μετά τη παρέμβαση.

Εκτός από έρευνες που μελετούσαν τη διερευνητική μάθηση γενικά, υπάρχουν έρευνες που εξέτασαν την επίδραση συγκεκριμένων μορφών διερευνητικής μάθησης. Για παράδειγμα, η Boaler (1998α, 1998β, 2002) σύγκρινε δυο γυμνάσια της Αγγλίας για τρία χρόνια με ίδια δημογραφικά στοιχεία, αλλά προσέγγιζαν τη διδασκαλία των μαθηματικών τους με διαφορετικό τρόπο. Στο ένα σχολείο γινόταν χρήση μιας ανοικτής προσέγγισης στα μαθηματικά, ενώ στο άλλο μιας διαδικαστικής, βασισμένη σε δεξιότητες προσέγγιση. Συγκεκριμένα, η ανοικτή προσέγγιση περιλάμβανε πρότζεκτς, τα οποία ανάθετε ο εκπαιδευτικός στους μαθητές για να τα επιλύσουν σε ομαδικό επίπεδο για δυο-τρεις εβδομάδες, όπου θα έπρεπε μόνοι τους οι μαθητές να πάρουν αποφάσεις πώς θα εργαστούν, χωρίς να καθοδηγούνται στο κάθε τους βήμα.Η εισαγωγή των πρότζεκτ συνοδευόταν πάντα από μια συζήτηση, όπου ο εκπαιδευτικός ανίχνευε τη στήριξη που θα δώσει στους μαθητές και βεβαιωνόταν με την κατάλληλες ερωτήσεις τόσο στην ολομέλεια της τάξης και στις ομάδες, όσο και σε ατομικό επίπεδο ότι οι μαθητές κατάλαβαν τι έχουν να κάνουν. Ακόμη, στην ανοικτή αυτή προσέγγιση οι μαθητές επεξεργάζονταν σενάρια από τον πραγματικό κόσμο, δηλαδή σενάρια που τους αφορούσαν άμεσα (π.χ., να συλλέξουν δεδομένα για τα ενδιαφέροντα τους, να μελετήσουν μοτίβα που τους αρέσουν κτλ), καθώς οι εκπαιδευτικοί επέμεναν σε αυτό το περιβάλλον να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξηγούν και να δικαιολογούν τη σκέψη τους. Ενώ στη διαδικαστική προσέγγιση, οι μαθητές έλυναν ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου που συνοδεύονταν από μια μικρή διάλεξη του εκπαιδευτικού. Βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην ανοικτή προσέγγιση να έχουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις σε ασκήσεις μεταφοράς γνώσης σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στη διαδικαστική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, η Boaler (1998β) υποστηρίζει ότι οι μαθητές της διαδικαστικής προσέγγισης φάνηκε να αναπτύσσουν μια αδρανή γνώση την οποία με βάση τους ίδιους τους μαθητές δεν τη χρησιμοποιούν στον πραγματικό κόσμο, ενώ οι μαθητές της ανοικτής προσέγγισης ανάπτυξαν πιο ευέλικτες και χρήσιμες μορφές γνώσης που ήταν ικανοί να τις χρησιμοποιήσουν σε ένα εύρος καταστάσεων. Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξαν και οι ερευνητές του προγράμματος QUASAR (Brown, Stein & Forman, 1996· Silver, Smith & Nelson, 1995) στην Αμερική, οι οποίοι και αυτοί χρησιμοποίησαν μια πιο ανοικτή προσέγγιση διδασκαλίας, στην οποία καλούσαν τους μαθητές να μάθουν εκτός από αλγόριθμους και το πότε, το γιατί και το πώς να εφαρμόσουν τις διαδικασίες σε σύνθετα προβλήματα. Επιπρόσθετα, ο σχεδιασμός της ανοικτής προσέγγισης του QUASAR μοιάζει σε αρκετά σημεία με την ανοικτή προσέγγιση της Boaler (2002), αφού και οι δυο δίνουν έμφαση στη λύση προβλήματος και στην επιμονή για επεξήγηση και αιτιολόγηση, καθώς έχουν υψηλές προσδοκίες για όλα τα παιδιά. Τα δυο αυτά ερευνητικά αποτελέσματα, όπως επισημαίνει η Boaler (2002) έρχονται σε σύγκρουση με προηγούμενες έρευνες που θεωρούσαν ότι η ανοικτή προσέγγιση δεν ωφελεί.

Δραστηριότητες πολλαπλών λύσεων (Multiple solution tasks). Ένας από τους πιο αναγνωρισμένους τρόπους ενίσχυσης της δημιουργικής σκέψης, της νοερής ευελιξίας και ταυτόχρονα της εννοιολογικής κατανόησης είναι η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009· Leikin, 2009; Leikin & Levav-Waynberg, 2009· Schoenfeld, 1988). Η ευκαιρία που δίνεται στους μαθητές να λύσουν προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους τους οδηγεί να ανακαλύψουν διάφορους τρόπους πρόσβασης και χρήσης της μαθηματικής τους γνώσης (Dhombres, 1993). Η ανάπτυξη της επίγνωσης στους μαθητές ότι τα μαθηματικά προβλήματα μπορεί να έχουν πολλαπλές λύσεις και η ενθάρρυνση των μαθητών να δίνουν πολλαπλές λύσεις αυξάνει την ποιότητα των μαθημάτων στα μαθηματικά (Stigler & Hiebert, 1999).

Σε έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με την εξέταση της επίδρασης των δραστηριοτήτων πολλαπλών λύσεων στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών, έχει βρεθεί ότι ενώ αυξανόταν η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών στατιστικά σημαντικά, η πρωτοτυπία τους μειωνόταν ή έμενε η ίδια (Levav-Waynberg & Leikin, 2009, 2012). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι η παραγωγή πολλών λύσεων αποτελούσε εμπόδιο στην παραγωγή πρωτότυπης λύσης.

Δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων (Problem posing tasks). Η κατασκευή προβλήματος αποτελεί σημαντική ικανότητα στα μαθηματικά. Ορίζεται ως η δραστηριότητα στην οποία εμπλέκεται το άτομο που έχει ως στόχο την παραγωγή ενός νέου προβλήματος από ένα δοσμένο σύνολο συνθηκών (Silver, 1994). Αποτελεί μέρος της λύσης προβλήματος και η ποιότητα των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της επίδοσης στη λύση προβλήματος (Cai, 1998· Silver & Cai, 1996).

Παράλληλα, από τη φύση της η κατασκευή προβλήματος περιλαμβάνει και αναπτύσσει διαδικασίες κριτικής (Bonotto, 2013· Mestre, 2002) και δημιουργικής σκέψης (Silver, 1997· Silver & Cai, 2005· Siswono, 2010· Yuan & Sriraman, 2010). Συγκεκριμένα, ορίζεται ως διαδικασία που βασίζεται στη μαθηματική εμπειρία του ατόμου, για κατασκευή προσωπικών ερμηνειών συγκεκριμένων καταστάσεων και σύνθεση αυτών των ερμηνειών σε μαθηματικά προβλήματα που να έχουν νόημα (Stoyanova & Ellerton, 1996). Με βάση αυτόν τον ορισμό η Bonotto (2013), υποστηρίζει ότι η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί μια ευκαιρία για ερμηνεία και κριτική ανάλυση της πραγματικότητας, αφού οι μαθητές θα πρέπει να διακρίνουν σημαντικά δεδομένα από άσχετα δεδομένα, να ανακαλύψουν σχέσεις μεταξύ δεδομένων, να αποφασίσουν εάν οι πληροφορίες που έχουν στη διάθεσή τους είναι αρκετές για τη λύση του προβλήματος που θα κατασκευάσουν και να διερευνήσουν αν τα αριθμητικά δεδομένα είναι λογικά τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς την τιμή του αριθμού. Ενισχύοντας αυτό, ο Mestre (2002) χρησιμοποιώντας την κατασκευή προβλήματος ως εργαλείο για μελέτη γνωστικών διαδικασιών, επιβεβαιώνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνήσει τη μεταφορά εννοιών μεταξύ πλαισίων και να εντοπίσει τη γνώση, το συλλογισμό και την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών.

Συνεργατική λύση προβλήματος (Collaborative problem solving). Η συνεργατική λύση προβλήματος αποτελεί σημαντική δεξιότητα φοιτητικής και επαγγελματικής σταδιοδρομίας (Rosen & Foltz, 2014). Ορίζεται ως το κοινωνικό πλαίσιο που επιτρέπει στους μαθητές να λύνουν σύνθετα προβλήματα (Barron, 2000· Hmelo-Silver & DeSimone, 2013). Το Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση Μαθητών – PISA, το 2015, εξέτασε για πρώτη φορά τους δεκαπεντάχρονους μαθητές στη συνεργατική λύση προβλήματος. Τη δεξιότητα αυτή την περιγράφει ως την ικανότητα ενός ατόμου να εμπλέκεται αποτελεσματικά σε μια διαδικασία, όπου δυο ή περισσότερα άτομα προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα ανταλλάζοντας μεταξύ τους την κατανόηση τους και συνδυάζοντας τις γνώσεις, δεξιότητες και προσπάθειες τους για να βρουν τη λύση στο πρόβλημα (OECD, 2013). Επιπλέον, η συνεργατική λύση προβλήματος απαιτεί τη χρήση σύνθετων προβλημάτων, αφού επιτρέπουν πλούσια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών (Rosen & Foltz, 2014).

Υποστηρίζεται ότι σε κατάλληλες δομημένες δραστηριότητες συνεργασίας, οι μαθητές συμμετέχουν πιο ενεργά σε αυτές και αναπτύσσουν την κριτική τους σκέψη συνεχώς, αφού κρίνουν την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν από τους συμμαθητές τους και τον εκπαιδευτικό (Cooper, 1995· Gokhale, 1995). Επιπλέον, η συνεργασία αποτελεί μια από τις τρεις διδακτικές στρατηγικές με βάση τους Miri, David και Uri (2007) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Ακόμη, βρέθηκε ότι η συνεργατική λύση προβλήματος οδηγεί τους μαθητές σε ανωτέρου επιπέδου σκέψη στη στατιστική σε σχέση με τους μαθητές που εργάζονταν μόνοι τους (Watson, Collis, Callingham, & Moritz, 1995).

Χρήση κατάλληλων ερωτήσεων ενίσχυσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Questioning). Η χρήση κατάλληλων ερωτήσεων στην τάξη που οδηγούν στην επικοινωνία και στη συζήτηση μαθηματικών ιδεών αποτελεί εργαλείο που ενισχύει την κατανόηση των μαθητών (Way, 2008· Wood, 2002) και αναπτύσσει την κριτική τους σκέψη στα μαθηματικά (Widjaja, Dolk & Fauzan, 2010). Η Way (2008) χρησιμοποιώντας τις τέσσερις κατηγορίες ερωτήσεων του Badham (1994) προτείνει με ποιο τρόπο μπορούν να αξιοποιηθούν για ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου δεξιοτήτων στα μαθηματικά:
(α) οι αρχικές ερωτήσεις του μαθήματος θα πρέπει να είναι ανοικτές και να «προκαλούν» τους μαθητές να σκεφτούν (π.χ., τι σου θυμίζει; ποια παραδείγματα αυτού.. μπορείς να δώσεις; πώς μπορείς να κατατάξεις αυτά….; με πόσους τρόπους μπορείς να βρεις αυτό…; τι συμβαίνει όταν …; πόσα διαφορετικά… μπορείς να βρεις;)
(β) οι ερωτήσεις που ενισχύουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών θα πρέπει να υποβάλλονται με τρόπο που να βοηθούν τους μαθητές να συνδέουν στρατηγικές και έννοιες και να παρατηρούν μοτίβα και σχέσεις. Αυτό οδηγεί στο σχηματισμό ενός ισχυρού εννοιολογικού χάρτη. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να είναι προσεκτικός ώστε να μην μετατρέπει αυτές τις ερωτήσεις σε οδηγίες, όπου οι μαθητές δεν θα διερευνούν πλέον. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποβάλει τις ερωτήσεις: Τι είναι διαφορετικό; Τι είναι ίδιο; Πώς μπορείς να ομαδοποιήσεις αυτά…; Μπορείς να βρεις περισσότερα παραδείγματα; Μπορείς να δεις ένα μοτίβο; Να το εξηγήσεις. Πώς μπορεί αυτό το μοτίβο να σε βοηθήσει να βρεις την απάντηση; Τι θα ακολουθήσει μετά; Γιατί; Υπάρχει τρόπος να καταγράψεις αυτό που βρήκες ώστε να σε βοηθήσει να βρεις και άλλα μοτίβα; Τι θα συμβεί εάν…;

(γ) οι ερωτήσεις αξιολόγησης θα πρέπει να στοχεύουν στο να ενθαρρύνουν τους μαθητές να δικαιολογούν τι, πώς και γιατί το λύνουν. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποβάλει τις ερωτήσεις: Τι έχεις ανακαλύψει; Πώς το βρήκες; Γιατί σκέφτηκες αυτό; Τι σε έκανε να αποφασίσεις να κάνεις αυτό τον τρόπο; Τι σε κάνει να νιώθεις αυτοπεποίθηση ότι αυτό που βρήκες είναι το ορθό;

(δ) οι ερωτήσεις συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης στο τέλος του μαθήματος που επιτρέπουν την παρουσίαση και σύγκριση στρατηγικών και λύσεων, θα πρέπει να δίνουν ευκαιρίες για αναστοχασμό και συνειδητοποίηση των μαθηματικών ιδεών και σχέσεων, καθώς να ενθαρρύνουν τους μαθητές να αξιολογούν τις εργασίες τους και να αναγνωρίζουν και να εκτιμούν τη σκέψη των άλλων. Για παράδειγμα, τέτοιες ερωτήσεις μπορεί να είναι: Ποιος έχει την ίδια απάντηση/μοτίβο/ομαδοποίηση με αυτό; Ποιος έχει διαφορετική λύση; Όλοι έχετε ίδια αποτελέσματα; Γιατί/γιατί όχι; Πώς βρήκατε όλες τις απαντήσεις; Πώς το γνωρίζεις ότι είναι όλες; Σκέφτηκες κάποιο άλλο τρόπο για να το κάνεις αυτό; Νομίζεις βρήκες την καλύτερη λύση; Ποιες νέες ερωτήσεις/προβλήματα έχεις σκεφτεί;

Παρόμοιο πλαίσιο ερωτήσεων προτάθηκε και από τους Fraivillig, Murphy και Fuson (1999), το οποίο ονόμασαν Ενίσχυση της Σκέψης των μαθητών (Advancing Children’s Thinking, ACT). Το πλαίσιο αυτό αποτελείται από τρία στοιχεία: ανάδυση των μεθόδων των μαθητών, υποστήριξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών και επέκταση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Έχει βρεθεί ότι οι εκπαιδευτικοί δίνουν περισσότερη έμφαση στις ερωτήσεις που ενισχύουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών και όχι τόσο στις αρχικές ερωτήσεις ανάδυσης της μαθηματικής σκέψης και στις ερωτήσεις στο τέλος του μαθήματος για επέκταση της μαθηματικής σκέψης (Fraivillig et al., 1999), οι οποίες είναι εξίσου σημαντικές για ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών.

Σύνοψη

Στο πρώτο μέρος της βιβλιογραφικής ανασκόπησης έχει γίνει εκτενής αναφορά στη μελέτη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Αρχικά, παρουσιάστηκαν οι διάφορες προσεγγίσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης από το πεδίο της φιλοσοφίας, της ψυχολογίας και της γενικής παιδαγωγικής, όπου ταύτιζαν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με μια διάσταση. Ακολούθως, τεκμηριώθηκε η ανάγκη για ύπαρξη μιας πολυδιάστατης προσέγγισης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, η οποία να περιλαμβάνει σε ένα πλαίσιο όλες τις διαστάσεις της. Ένα τέτοιο πλαίσιο, το οποίο έχει αναλυθεί εκτενώς σε αυτή τη βιβλιογραφική ανασκόπηση είναι το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989). Αυτό αποτελεί τη βάση της εξέτασης του σκοπού της εργασίας αυτής. Ακολούθως, έγινε αναφορά στις αρχές που πρέπει να βασίζεται ένα εργαλείο μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, στις μορφές εργαλείων μέτρησης της που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία και καταλήγει στην έλλειψη εργαλείων μέτρησης της πολυδιάστατης προσέγγισής της. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε πιο εξειδικευμένα η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, έγινε αναφορά στους ορισμούς που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, οι οποίοι κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Ακολούθως, για κάθε μια διάσταση του Μοντέλου Σκέψης παρουσιάστηκαν οι ορισμοί και ο τρόπος μέτρησής της στα μαθηματικά, τόσο ως προϊόν όσο και ως διαδικασία και γινόταν προσπάθεια σύνδεσης της βιβλιογραφίας αυτής με το Μοντέλο Σκέψης, ώστε να προκύψουν οι λειτουργικοί ορισμοί για κάθε μια διάσταση. Διαπιστώθηκε γενικά ότι δεν υπάρχει ένας ξεκάθαρος ορισμός και έναν κατάλληλο εργαλείο μέτρησης της πολυδιάστατης φύσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Τέλος, το μέρος αυτό της βιβλιογραφικής ανασκόπησης ολοκληρώθηκε με παρουσίαση διδακτικών προσεγγίσεων και στρατηγικών που έχει τεκμηριωθεί η συμβολή τους στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης με ερευνητικά αποτελέσματα. Όμως, ένα σημαντικό εργαλείο που βοηθάει στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και που δεν έχει αναφερθεί στο πρώτο μέρος της βιβλιογραφίας είναι η τεχνολογία. Στο δεύτερο μέρος της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που ακολουθεί θα αναλυθεί εκτενώς ο ρόλος της στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας με ιδιαίτερη αναφορά στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά.

Τεχνολογία στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Η χρήση των εργαλείων στα μαθηματικά δεν αποτελεί κάτι νέο (Goos, 2012), αφού έχει τις ρίζες της στην ιστορία των μαθηματικών (Laborde & Sträßer, 2010). Με την πάροδο των αιώνων και ειδικά το τελευταίο αιώνα έχει γίνει πιο έντονη η ιδέα ότι η διδασκαλία των μαθηματικών για να βελτιωθεί χρειάζεται να αξιοποιεί εργαλεία (Bartolini Bussi, Taimina, & Isoda, 2010). Χαρακτηριστική είναι και η επισήμανση στο 34^{ο} Διεθνές βιβλίο της Εθνικής Ένωσης Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών στην Αμερική που εκδόθηκε το 1973 ότι η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να αξιοποιεί τη χρήση μηχανών, εποπτικών μέσων, μοντέλων, παιχνιδιών και παζλς (Berger, 1973). Από τότε υπάρχει μια ραγδαία εξέλιξη των τεχνολογικών εργαλείων στη μαθηματική εκπαίδευση και κατά συνέπεια έχει αναπτυχθεί έναν έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από τη χρήση τους.

Γενικά, υπάρχει συμφωνία στο ότι η τεχνολογία αλλάζει τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (Olive et al., 2010), δίνοντας πρόσβαση σε νέες αντιλήψεις μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών (Olive & Makar, 2010). Επιπρόσθετα, οι αλλαγές που συμβαίνουν, οι οποίες είναι πιο σύνθετες από τις αναμενόμενες, αρχικά είναι πιο γενικές (π.χ., επηρεάζει τα κίνητρα για μάθηση) και έπειτα ακολουθούν αλλαγές στη μαθηματική γνώση (Assude, Buteau, & Forgasz, 2010).

Ο όρος «τεχνολογία», με βάση το Freiman (2014), ταυτίζεται με τον όρο «νέες τεχνολογίες» και αναφέρεται στο πιο εξέχων, πρόσφατο και μοντέρνο εργαλείο, κατάλληλο στη διδασκαλία των μαθηματικών και συνοδεύεται από τους όρους «ηλεκτρονικός υπολογιστή», «λογισμικό» και «επικοινωνία της τεχνολογίας» (Laborde & Sträßer, 2010). Ένας άλλος όρος που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία είναι η «ψηφιακή τεχνολογία» που αναφέρεται σε ένα μεγάλο εύρος συσκευών, συμπεριλαμβανομένου και τεχνικού εξοπλισμού και λογισμικών στον υπολογιστή (όχι μόνο εκπαιδευτικού χαρακτήρα) (Clark-Wilson, Oldknow, & Sutherland, 2011). Από την άλλη ο όρος «Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας» αναφέρεται σε μια ποικιλία εκπαιδευτικών λογισμικών και εφαρμογιδίων, συμπεριλαμβανομένου λογιστικών φύλλων, επεξεργαστή κειμένου, διαδίκτυο κτλ (Freiman, 2014). Δυο μορφές τεχνολογικών εργαλείων που έχουν αναπτυχθεί στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας και αξιοποιούνται στη συγκεκριμένη εργασία είναι τα μαθηματικά εφαρμογίδια και τα λογισμικά δυναμικής δισδιάστατης γεωμετρίας (π.χ., Geogebra, Euclidraw, Cabri, Geometers Sketchpad, Logo). Τα μαθηματικά εφαρμογίδια αποτελούν διαδραστικά περιβάλλοντα, τα οποία υπάρχουν στο διαδίκτυο και αποτελούν την οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικειμένου που δίνει δυνατότητες για κατασκευή της μαθηματικής γνώσης (Moyer, Bolyard & Spikell, 2002). Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας αποτελούν εργαλεία κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή, τα οποία χαρακτηρίζονται δυναμικά λόγω της δυνατότητας του συρσίματος του σχήματος και της διατήρησης των γεωμετρικών του σχέσεων (Jones, Mackrell & Stevenson, 2010).

Πιο κάτω αρχικά θα παρουσιαστούν αποτελέσματα της χρήσης της τεχνολογίας σχετικά με την ανάπτυξη διαστάσεων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Ακολούθως, θα αναλυθούν οι τρόποι με τους οποίους έχει διαπιστωθεί ερευνητικά ότι χρησιμοποιείται η τεχνολογία στη διδασκαλία των μαθηματικών και στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά.

Ανωτέρου επιπέδου σκέψη ως αποτέλεσμα της χρήσης νέων τεχνολογιών. Ο Jonassen (2000) χρησιμοποιώντας το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989), υποστηρίζει ότι η τεχνολογία μπορεί να αναπτύξει και να ενισχύσει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα ο Jonassen (2000) αναφέρει ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους σε έναν κατάλληλο περιβάλλον που υποστηρίζεται από τη χρήση νέων τεχνολογιών, το οποίο περιλαμβάνει στοχευμένες με πολλαπλά στάδια διαδικασίες, όπως ο σχεδιασμός κατάστασης, η λήψη απόφασης και η λύση προβλήματος. Συγκεκριμένα, ο Jonassen (2000) αξιοποιώντας τις διαστάσεις του Μοντέλου Σκέψης, αξιολόγησε διάφορα τεχνολογικά εργαλεία σχετικά με το κατά πόσο μπορούν να προσφέρουν ευκαιρίες για χρήση ικανοτήτων κριτικής σκέψης, δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Μια μορφή εργαλείων που αξιολόγησε και χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι οι μικρόκοσμοι. Με βάση την ανάλυση του υποστήριξε ότι οι μικρόκοσμοι (π.χ., λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας) προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες για κριτική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης παρά για δημιουργική σκέψη. Επίσης, οι μικρόκοσμοι υποστηρίζουν τη μάθηση και απλών και σύνθετων δεξιοτήτων μέσω δραστηριοτήτων λύσης προβλήματος, περιλαμβάνουν ευκαιρίες εξερεύνησης και διερεύνησης όπου οι μαθητές μαθαίνουν κάνοντας (Papert, 1980) και προωθούν την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση.

Εκτός από το Jonassen (2000), το Μοντέλο Σκέψης έχει χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές του πεδίου της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Για παράδειγμα, οι Michko, Lin και Park (2003) αξιοποίησαν τις ικανότητες της κριτικής σκέψης: ανάλυση, σύνδεση και αξιολόγηση, για να αναλύσουν τις δυνατότητες που προσφέρει ένα συγκεκριμένο λογισμικό. Ο Slangen και οι συνεργάτες του (2008) από την άλλη, χρησιμοποίησαν το Μοντέλο Σκέψης για να δημιουργήσουν μια κλείδα παρατήρησης και να διερευνήσουν το είδος της σκέψης που χρησιμοποιούσαν μαθητές Β΄ Γυμνασίου καθώς εργάζονταν σε συγκεκριμένο μικρόκοσμο. Βρέθηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν περισσότερο ικανότητες αξιολόγησης, αντί ικανότητες σύνθεσης, σύνδεσης και ανάλυσης. Όμως, υπογραμμίζουν ότι χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση του είδους της σκέψης που χρησιμοποιούν οι μαθητές ενώ εργάζονται σε διάφορους μικρόκοσμους και λογισμικά.

Όσον αφορά στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας, έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση της τεχνολογίας βοηθά:

(i) στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών (π.χ., Heid & Blume, 2008· Tall et al., 2008)

(ii) στην ανάπτυξη της κριτική σκέψης στα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα στη σύγκριση και στη σύνδεση αναπαραστάσεων (π.χ., Dalton & Hegedus, 2013· Pitta-Pantazi et al., 2013α), στη διατύπωση υποθέσεων (π.χ., Fahlgren &

Brunstrom, 2014), στην έκφραση γενικεύσεων και πιο συγκεκριμένα γενικών κανόνων για σχηματικά μοτίβα (π.χ., Noss et al., 2009)

(iii) στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης, όπως για παράδειγμα στην εύρεση πολλαπλών και πρωτότυπων λύσεων σε ένα πρόβλημα (π.χ., Kordaki, 2014· Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2011)

(iv) στην ανάπτυξη σύνθετων διαδικασιών σκέψης, όπως για παράδειγμα στην επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης, σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης (π.χ., Jonassen, 2000· Mousoulides, 2013).

Εκτός από τα πάνω, έχει βρεθεί ότι η τεχνολογία αλλάζει τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Για παράδειγμα, η έρευνα των Budak και Roy (2013) βρήκε ότι ένας μαθητής που εργάστηκε σε μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες περιλάμβαναν αλγεβρικά προβλήματα τόσο στο χαρτί όσο και σε περιβάλλον τεχνολογίας, να χρησιμοποιεί στο χαρτί μόνο μη οπτικές στρατηγικές, ενώ στο περιβάλλον της τεχνολογίας να αξιοποιεί και οπτικές και μη οπτικές στρατηγικές. Σε μια άλλη έρευνα βρέθηκε ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί μαθηματικών (με πλούσιες εμπειρίες από μαθήματα μαθηματικών) που εργάστηκαν σε δραστηριότητες σχετικά με παραγωγούς τόσο στο χαρτί όσο και σε περιβάλλον τεχνολογίας, να χρησιμοποιούν μόνο τον αναλυτικό τους συλλογισμό στο χαρτί, ενώ στο περιβάλλον τεχνολογίας ήταν ικανοί να χρησιμοποιούν και πρακτικό και δημιουργικό συλλογισμό (όπως ορίζονται στη θεωρία της επιτυχημένης ευφυΐας του Sternberg) (Zembat, 2008). Όμως, κάποια από τα υποκείμενα της έρευνας αυτής δεν κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν στο περιβάλλον της τεχνολογίας πρακτικό και δημιουργικό συλλογισμό, αλλά μόνο αναλυτικό, αφού πιθανόν να μάθαιναν από την τεχνολογία και όχι με την τεχνολογία (Zembat, 2008). Παρόμοια, η έρευνα των Koyuncu, Akyuz και Cakiroglu (2014) βρήκε ότι οι δυο υποψήφιοι εκπαιδευτικοί που εργάζονταν σε τέσσερα γεωμετρικά προβλήματα τόσο στο χαρτί όσο και σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές. Δηλαδή, στο χαρτί χρησιμοποιούσαν περισσότερο αλγεβρικές στρατηγικές, ενώ στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιούσαν στρατηγικές που βασίζονταν σε γεωμετρικές σχέσεις και αποτελούσε ένδειξη βαθύτερης κατανόησης του προβλήματος. Σε παρόμοιο αποτέλεσμα κατέληξε και η έρευνα των Tabaghi και Sinclair (2013), όπου βρήκε ότι οι μαθητές σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιούν δυναμική σύνθετη γεωμετρική σκέψη, σε αντίθεση με τη βιβλιογραφία που υποδεικνύει ότι οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν αναλυτική αριθμητική σκέψη για να λύσουν προβλήματα γραμμικής άλγεβρας. Γενικά, παρατηρείται ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές σε περιβάλλον τεχνολογίας, οι οποίες είναι και πιο σύνθετες.

Έχει βρεθεί, ακόμη, σε μετανάλυση ερευνών σχετικά με την επίδραση της τεχνολογίας στη μαθηματική επίδοση ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει μεγαλύτερη επίδραση στη βελτίωση της μαθηματικής επίδοσης μαθητών δημοτικού από ότι μαθητών μέσης εκπαίδευσης (Li & Ma, 2010). Όμως, παράλληλα στη βιβλιογραφία εντοπίζονται έρευνες με θετικά αποτελέσματα επίδρασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής επίδοσης και της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Όμως, υπάρχουν και έρευνες που δείχνουν ότι η τελική επίδοση των μαθητών που εργάστηκαν σε ψηφιακό περιβάλλον δεν διέφερε στατιστικά σημαντικά από την τελική επίδοση των μαθητών που δεν εργάστηκαν σε ψηφιακό περιβάλλον. Για παράδειγμα, οι Drijvers, Doorman, Kirschner, Hoogveld, και Boon (2014) βρήκαν ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε μεταπειραματικά δοκίμια μεταξύ των μαθητών πειραματικής ομάδας που συμμετείχαν για πέντε μαθήματα των 50 λεπτών σε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης και των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Η πειραματική ομάδα εργάστηκε σε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης όπου έλυναν γραμμικές εξισώσεις και εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Βασικό χαρακτηριστικό του ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης ήταν η ανατροφοδότηση που έδινε, η χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων και η διαβάθμιση ως προς τη δυσκολία των εξισώσεων που έδινε στους μαθητές να λύσουν. Οι ερευνητές διατύπωσαν τέσσερις ερμηνείες των μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων. Η πρώτη ερμηνεία αφορά στο ότι θεωρούν ότι οι εκπαιδευτικοί επηρέασαν τα αποτελέσματα, αφού δίδασκαν ταυτόχρονα και ομάδα ελέγχου και πειραματική και έτσι πιθανόν να μετέφεραν τα θετικά της μίας διδασκαλίας στην άλλη. Η δεύτερη ερμηνεία των αποτελεσμάτων αφορά στο ότι το ψηφιακό περιβάλλον μάθησης θεωρείται εύκολο μέσο για τους μαθητές σε σύγκριση με την επίλυση ασκήσεων στα εγχειρίδια και δεν κατέβαλαν την ίδια γνωστική προσπάθεια όπως οι μαθητές της ομάδας ελέγχου. Η τρίτη ερμηνεία αφορά στο ότι η ανατροφοδότηση που δινόταν στο ψηφιακό περιβάλλον μάθησης αφορούσε τη στρατηγική που χρησιμοποιούσε ο μαθητής και όχι αν η διαδικασία ήταν ορθή. Τέλος, η μη πρόσβαση από όλους τους μαθητές στη χρήση υπολογιστών στην τάξη στην πειραματική ομάδα επηρέαζε την ομαλή διεξαγωγή του σχεδιασμένου μαθήματος και πιθανόν να έχει και αυτό συμβολή στα αποτελέσματα της εργασίας.

Παρόμοια και σε έρευνα τους οι Tabach et al. (2008) βρήκαν ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο μεταπειραματικό δοκίμιο μεταξύ των μαθητών της πειραματικής ομάδας που για ένα χρόνο σε συστηματική βάση στο μάθημα της άλγεβρας χρησιμοποιούσαν την τεχνολογία και των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Όμως, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας στο μεταπειραματικό δοκίμιο είχαν υψηλότερο μέσο όρο από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Παρόλα αυτά, εντοπίστηκαν διαφορές ως προς την επίδοση και τον τρόπο εργασίας των αδύνατων μαθητών στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, οι αδύνατοι μαθητές της πειραματικής ομάδας μπόρεσαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο να εκφράσουν κάποια γενικά μοτίβα αλγεβρικά, ενώ οι αδύνατοι μαθητές της ομάδας ελέγχου δεν μπόρεσαν να το κάνουν αυτό, απλώς έδιναν κάποιες άσχετες αριθμητικές απαντήσεις. Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε οι μαθητές της πειραματικής ομάδας να εμπλέκονταν ενεργά στο μάθημα ανεξάρτητα από το επίπεδο των μαθηματικών τους ικανοτήτων, να έχουν θέληση να συνεργαστούν και να συζητούν τις ιδέες τους στην τάξη, να προβαίνουν σε γενικεύσεις, να οργανώνουν με τον δικό τους τρόπο τα δεδομένα στο λογιστικό φύλλο, να ελέγχουν την ορθότητα των απαντήσεων τους και να αναπτύσσουν και διαδικαστική και εννοιολογική κατανόηση, αφού η επίλυση εξισώσεων σε λογιστικό φύλλο απαιτεί τη συζήτηση πτυχών των εξισώσεων και του τι σημαίνει να λύνεις εξισώσεις (Tabach & Friedlander, 2006). Παράλληλα, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές της πειραματικής ομάδας όταν κλήθηκαν να κατασκευάσουν ερωτήσεις για ένα πλαίσιο που τους τέθηκε, έδωσαν σύνθετες ερωτήσεις οι οποίες περιλάμβαναν νέα στοιχεία, ενώ αυτό παρατηρήθηκε μόνο από το 30% των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Δηλαδή, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας ήταν πιο δημιουργικοί σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου.

Μαθηματικές πρακτικές ως αποτέλεσμα της χρήσης νέων τεχνολογιών. Η τεχνολογία από μόνη της δεν μπορεί να έχει επίδραση τόσο στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης όσο και στην ανάπτυξη των διαστάσεων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Οι Heid και Blume (2008) υπογραμμίζουν ότι η επίδραση της τεχνολογίας στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών είναι αποτέλεσμα ενός εύρους από διάφορους συνδυασμούς μεταξύ των δυνατοτήτων των τεχνολογικών εργαλείων, τις δράσεις του εκπαιδευτικού και των μαθητών, της φύσης και της οργάνωσης του αναλυτικού προγράμματος και του μαθηματικού περιεχομένου.

Ένα πολύ γενικό πλάνο καθορισμού προσεγγίσεων της χρήσης των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει προταθεί από τους Confrey και Maloney (2007). Συγκεκριμένα, η πρώτη προσέγγιση παρουσιάζει ότι οι νέες τεχνολογίες χρησιμοποιούνται ως πηγές για εξάσκηση και εφαρμογή, όταν ήδη οι μαθητές διδαχθούν τις έννοιες και τις δεξιότητες χωρίς τεχνολογία. Η δεύτερη προσέγγιση αφορά την εισαγωγή των νέων τεχνολογιών για καλύτερη απεικόνιση μοτίβων και υποστήριξη κατανόησης μαθηματικών εννοιών. Η τρίτη προσέγγιση αναφέρεται στη χρήση των νέων τεχνολογιών από την αρχή της διδασκαλίας, αφού χωρίς αυτές δεν μπορούν να διδαχθούν οι νέες μαθηματικές έννοιες, ενώ η τέταρτη προσέγγιση αφορά τη χρήση νέων τεχνολογιών ως εργαλεία για λύση προβλημάτων, εφαρμογών και δραστηριοτήτων μοντελοποίησης.

Οι Drijvers, Boon και Reeuwijk (2010) έχουν προτείνει μια διαφορετική κατανομή των χρήσεων των νέων τεχνολογιών που αφορά τη διδασκαλία και τη μάθηση της άλγεβρας. Ο Drijvers (2015) επέκτεινε αυτή γενικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, οι διδακτικές λειτουργικές χρήσεις των νέων τεχνολογιών είναι τρεις με βάση τους πιο πάνω ερευνητές: (α) ως εργαλείο για εκτέλεση μαθηματικών διαδικασιών που μπορούν να γίνουν και με το χέρι (π.χ., εκτέλεση πράξεων ρουτίνας), (β) ως εργαλείο για εξάσκηση δεξιοτήτων, αξιοποιώντας τη δυνατότητα των τεχνολογιών για άμεση ανατροφοδότηση και έλεγχο και (γ) ως εργαλείο για ανάπτυξη και ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης. Η τρίτη λειτουργία αποτελεί και την πιο σύνθετη, αφού συνδυάζει τη χρήση των αναπαραστάσεων της τεχνολογίας και των τεχνικών της με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης (Drijvers et al., 2010). Παρόμοιες λειτουργικές χρήσεις αναφέρθηκαν και από τους Doerr και Zangor (2000) για τις γραφικές υπολογιστικές μηχανές (εργαλείο υπολογισμού, εργαλείο μετασχηματισμού, εργαλείο συλλογής δεδομένων και ανάλυσης, εργαλείο αναπαράστασης, εργαλείο ελέγχου), αλλά παράλληλα επισήμαναν και το ρόλο του μαθητή που αξιοποιεί τις συγκεκριμένες χρήσεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γραφικές υπολογιστικές μηχανές ως εργαλείο εκτέλεσης πράξεων, οι ίδιοι θα αξιολογήσουν το αποτέλεσμα, θα το εκτιμήσουν και θα το στρογγυλοποιήσουν. Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τις γραφικές υπολογιστικές μηχανές ως εργαλείο ελέγχου, οι μαθητές θα επιβεβαιώσουν τις υποθέσεις τους. Δηλαδή, οι Doerr και Zangor (2000) υποστηρίζουν ότι οι δυνατότητες των νέων τεχνολογιών δεν είναι τίποτα και δεν έχουν αξία αν δεν συνδυαστούν με τις δράσεις των μαθητών.

Παρόμοιοι τρόποι χρήσης των νέων τεχνολογιών έχουν αναφερθεί και από τους Goos, Galbraith, Renshaw και Geiger (2003), οι οποίοι χρησιμοποίησαν τις μεταφορές: ειδικός (master), υπηρέτης (servant), συνεργάτης (partner) και επέκταση του ατόμου (extension of self), για να περιγράψουν το πώς οι νέες τεχνολογίες μετασχηματίζουν τους ρόλους στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι οι νέες τεχνολογίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ειδικοί, όταν η γνώση του μαθητή και του εκπαιδευτικού είναι περιορισμένη και εξαρτώνται από τη χρήση των νέων τεχνολογιών, για να εξάγουν συμπεράσματα. Ενώ οι νέες τεχνολογίες χαρακτηρίζονται ως υπηρέτες, όταν χρησιμοποιούνται απλώς για εκτέλεση πράξεων και διαδικασιών που γίνονται και στο χαρτί, χωρίς να αλλάζουν τις δραστηριότητες που γίνονται στις παραδοσιακές τάξεις των μαθηματικών. Όταν οι νέες τεχνολογίες θεωρούνται συνεργάτες (partner), αφορούν εκείνες τις συνθήκες που η χρήση τους δημιουργεί νέες δραστηριότητες ή νέες τρόπους προσέγγισης των υφιστάμενων δραστηριοτήτων για ανάπτυξη της κατανόησης. Τέλος, οι νέες τεχνολογίες χαρακτηρίζονται ως επέκταση του ατόμου (extension of self) όταν ενσωματώνονται αρμονικά στις πρακτικές της μαθηματικής τάξης.

Η Pea (1987) χρησιμοποίησε τους όρους ενίσχυση (amplifier) και αναδιοργάνωση (reorganizer), για να περιγράψει τον τρόπο χρήσης της τεχνολογίας. Η ερευνήτρια επισημαίνει ότι κάποιες χρήσεις της τεχνολογίας είναι ενισχυτικές, αφού αποδέχονται τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος και στοχεύουν στην ενίσχυσή τους. Ενώ κάποιες άλλες χρήσεις της τεχνολογίας χαρακτηρίζονται ως αναδιοργανώμενες, αφού αλλάζουν τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος και τους αντικαθιστούν με άλλους ή και ακόμη προσθέτουν κάποιους.

Όμως, ο Sherman (2011) στη διδακτορική του διατριβή που μελέτησε τη σχέση του τρόπου χρήσης τεχνολογικών εργαλείων με το επίπεδο σκέψης που αναπτύσσουν οι μαθητές, βρήκε ότι αυτό που επηρεάζει περισσότερο την ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά με τη χρήση της τεχνολογίας φαίνεται να είναι οι πρακτικές που χρησιμοποιούνται στην τάξη παρά οποιαδήποτε χρήση των τεχνολογικών εργαλείων. Παρόμοια και οι Pierce και Stacey (2010) δεν θεώρησαν ότι το μόνο παιδαγωγικό χαρακτηριστικό της χρήσης της τεχνολογίας είναι οι δυνατότητες και τρόπος χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων, αλλά και η διάταξη της τάξης και η διδασκαλία του περιεχομένου σε σχέση με την τεχνολογία. Συγκεκριμένα, οι Pierce και Stacey (2010) οργάνωσαν σε τρία μη ιεραρχικά επίπεδα τις παιδαγωγικές χρήσεις της τεχνολογίας, που αφορούν τη σκέψη του εκπαιδευτικού για:
(α) τις δραστηριότητες που θα θέσει στους μαθητές του, δηλαδή η τεχνολογία χρησιμοποιείται για να αλλάξει τις μαθηματικές δραστηριότητες και βασίζεται στα χαρακτηριστικά της σχετικά με τη βελτίωση της ταχύτητας και της ακρίβειας στη συμπλήρωση αλγορίθμων, καθώς και την πρόσβαση σε μαθηματικές αναπαραστάσεις που προηγουμένως δεν ήταν προσβάσιμες. Συγκεκριμένα, η ταχύτητα και η ακρίβεια που προσφέρεται από την τεχνολογία δίνει πρόσβαση σε πραγματικά δεδομένα που η επεξεργασία τους με το χαρτί και το μολύβι ήταν χρονοβόρα και οδηγούσε σε λάθος υπολογισμούς. Επίσης, η τεχνολογία υποστηρίζει τη μάθηση δεξιοτήτων που γίνονται με το χαρτί και το μολύβι (π.χ., επίλυση εξισώσεων) μέσω της άμεσης ανατροφοδότησης που παρέχει και δεν δίνει απλώς τη λύση. Ακόμη, τεχνολογικά εργαλεία προσφέρουν τη δυνατότητα για εξερεύνηση κανονικοτήτων και μεταβολών. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των τεχνολογικών εργαλείων που σχετίζεται με την ταχύτητα και την ακρίβεια τους είναι οι προσομοιώσεις οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να επεξεργαστούν και να

παρουσιάσουν πολλά δεδομένα με ένα οργανωμένο τρόπο σε περιβάλλον λογιστικών φύλλων ή λογισμικών δυναμικής στατιστικής ή ακόμη να οπτικοποιήσουν γεωμετρικά προβλήματα για τα κατανοήσουν σε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Τέλος, τα τεχνολογικά εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα ευέλικτης μετάβασης και ταυτόχρονα σύνδεσης μεταξύ γεωμετρικών, αριθμητικών, γραφικών και συμβολικών αναπαραστάσεων. Αυτές όλες οι παιδαγωγικές χρήσεις της τεχνολογίας έχουν ήδη ειπωθεί προηγουμένως στις διάφορες ταξινομίες που παρουσιάστηκαν.

(β) τον τρόπο αλληλεπίδρασής του με τους μαθητές στην τάξη, δηλαδή η τεχνολογία χρησιμοποιείται για να αλλάξει την κοινωνική δυναμική της τάξης σε σχέση με την παραδοσιακή, όπου πλέον ο δάσκαλος διευκολύνει και δεν διδάσκει και ο μαθητής έχει ενεργό ρόλο στη μάθησή του. Συγκεκριμένα, ο μαθητής χρησιμοποιώντας την τεχνολογία αναπτύσσει εννοιολογική και βαθύτερη κατανόηση που βασίζεται στους αναστοχασμούς του κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας (περιλαμβάνει διατύπωση υποθέσεων και διερεύνηση). Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι προσέγγισης οι οποίες δίνουν έμφαση στο ενεργό ρόλο του μαθητή και κυμαίνονται από αυτές που χαρακτηρίζονται ως ανοικτές και δίνουν πολλές επιλογές στο μαθητή για να επιλέξει μέχρι αυτές που βάζουν περιορισμούς. Επιπρόσθετα, η τεχνολογία ως γνωστικό εργαλείο επιτρέπει την εξωτερίκευση των εσωτερικών νοερών αναπαραστάσεων του μαθητή, όπου αυτό οδηγεί στην επικοινωνία και στη συζήτησή τους (Zbiek et al., 2007).

(γ) τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών, δηλαδή η τεχνολογία «προκαλεί ή υποστηρίζει την αλλαγή ή τη δημιουργία νέων στόχων και διδακτικών προσεγγίσεων στο μάθημα των μαθηματικών και δίνει στους μαθητές νέες οπτικές του περιεχομένου που διδάσκονται» (Pierce & Stacey, 2010, σελ. 10). Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός μπορεί εσκεμμένα να υπογραμμίζει τους περιορισμούς ή τις ανωμαλίες της τεχνολογίας για να προκαλέσει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών, ώστε να ανακαλύψουν τις πραγματικές και εμφανής διαφορές μεταξύ της μηχανής και των ιδανικών μαθηματικών. Αυτό δίνει τη δυνατότητα για πλούσιες και σε βάθος μαθηματικές συζητήσεις, αφού οι μαθητές θεωρούν ότι η τεχνολογία χαρακτηρίζεται από μαθηματική ακρίβεια. Επιπρόσθετα, η τεχνολογία προσφέρει τη δυνατότητα προσέγγισης του μαθήματος των μαθηματικών με τρόπο που να αναπτύσσει μεταγνωστικές δεξιότητες και ανωτέρου επιπέδου σκέψη, αλλάζοντας την ισορροπία για διδασκαλία δεξιοτήτων, εννοιών και εφαρμογών.

Γενικά, φαίνεται ότι υπάρχει συμφωνία στο ότι η τεχνολογία από μόνη της δεν επιδρά σε θετικά αποτελέσματα, αλλά χρειάζεται να αξιοποιηθεί κατάλληλα σε σχέση με το μαθητή, το δάσκαλο, τη μαθηματική δραστηριότητα και το περιεχόμενο, αλλά και στις σχέσεις μεταξύ τους (Zbiek et al., 2007). Μέχρι στιγμής, πιο πάνω έχει αναλυθεί ο ρόλος της τεχνολογίας στην αλλαγή της μαθηματικής δραστηριότητας, μέσω των δυναμικών της αναπαραστάσεων, της μαθηματικής ακρίβειας που τη χαρακτηρίζει και της γνωστικής ακρίβειας (δηλαδή να ανταποκρίνεται στις απαντήσεις του μαθητή). Επιπρόσθετα, πιο πάνω έχει παρουσιαστεί με ποιο τρόπο οι μαθητές χρησιμοποιούν τη τεχνολογία για να εμπλακούν σε μαθηματική δραστηριότητα, προσδίδοντας της διαφορετικές χρήσεις, όπως αυτές έχουν περιγραφεί από τους Goos et al. (2003), τους Doerr et al. (2000). Αυτό που δεν έχει αναλυθεί μέχρι στιγμής είναι ο ρόλος της τεχνολογίας στη σχέση μαθητών και μαθηματικής δραστηριότητας και στις πρακτικές του εκπαιδευτικού (συμπεριλαμβανομένου της οργάνωσης της τάξης και της μαθηματικής δραστηριότητας και κατά συνέπεια της διδασκαλίας). Αυτά θα αναλυθούν πιο κάτω.

Διερευνητική μάθηση και τεχνολογία. Οι Artigue και Baptist (2012) υπογραμμίζουν τη σημαντικότητα της χρήσης της τεχνολογίας στη διερευνητική μάθηση στα μαθηματικά, αφού οι δυνατότητες τεχνολογικών εργαλείων ενισχύουν τη διερεύνηση στα μαθηματικά δίνοντας νέες ευκαιρίες για ανάπτυξη κατάλληλων εκπαιδευτικών στρατηγικών. Αλλά παράλληλα τονίζουν ότι η χρήση της τεχνολογίας δεν μπορεί από μόνη της και αυτόματα να ενισχύσει τη διερευνητική διάσταση της διδασκαλίας και των πρακτικών μάθησης (Artigue & Baptist, 2012). Χρειάζονται κατάλληλοι τρόποι αξιοποίησης της.

Δυο είδη δραστηριοτήτων που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία ως κατάλληλες για διερευνητική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον είναι οι εξερευνητικές (exploratory) και οι εκφραστικές (expressive) δραστηριότητες (Zbiek et al., 2007), οι οποίες προήλθαν από το διαχωρισμό των Bizz και Ogborn (1989): εξερευνητική μαθηματική μοντελοποίηση (επεξεργασία μοντέλου που δημιούργησε κάποιος άλλος) και εκφραστική μαθηματική μοντελοποίηση (δημιουργία μοντέλου από τους μαθητές). Οι εξερευνητικές ψηφιακές δραστηριότητες αποτελούν εκείνες τις διερευνητικές δραστηριότητες στις οποίες δίνεται στους μαθητές η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν. Μπορεί να είναι δομημένες (π.χ., “Πάτησε αυτό το κουμπί. Τι συμβαίνει; Γιατί συμβαίνει;”) ή ημιδομημένες (π.χ., “Εξέτασε τη σχέση αυτή χρησιμοποιώντας ένα τρίγωνο, ένα τετράπλευρο και ένα πεντάγωνο.”) ή λιγότερο δομημένες δραστηριότητες (π.χ., οι μαθητές χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο εργαλείο, δημιουργούν τα δικά τους παραδείγματα για μια συγκεκριμένη μαθηματική οντότητα ή σχέση) (Zbiek et al., 2007). Από την άλλη, οι εκφραστικές ψηφιακές δραστηριότητες αποτελούν διερευνητικές δραστηριότητες όπου οι μαθητές αποφασίζουν ποιες διαδικασίες να χρησιμοποιήσουν για να τις επιλύσουν. Μπορεί να είναι «κλειστές» (π.χ., την επιλογή ενός εργαλείου για εκτέλεση ενός υπολογισμού) ή λιγότερες «κλειστές» (π.χ., τη δημιουργία μιας γραφικής παράστασης για λύση μιας εξίσωσης) ή ανοικτές δραστηριότητες (π.χ., τη δημιουργία ενός παιχνιδιού)

(Zbiek et al., 2007). Οι δυο αυτές δραστηριότητες αποτελούν δραστηριότητες που απαιτούν υψηλού επιπέδου γνωστικές διαδικασίες, όπως ορίζονται από τους Stein και Lane (1996). Επιπρόσθετα, τονίζεται από τους Zbiek et al. (2007) ότι μπορεί μια εξερευνητική δραστηριότητα να μετατραπεί σε εκφραστική όταν ο μαθητής ακολουθώντας τις οδηγίες μπορεί να δημιουργήσει κάτι νέο. Όμως, παράλληλα υπογραμμίζεται από αποτελέσματα ερευνών ότι η εκφραστική δραστηριότητα μπορεί να μην οδηγήσει στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα, αφού δίνοντας την ελευθερία στους μαθητές να επιλέξουν τι θα κάνουν και πώς θα το κάνουν, να ξεφύγουν από τις μαθηματικές ιδέες που στόχευε ο εκπαιδευτικός και το αναλυτικό πρόγραμμα. Αποτελεί το λεγόμενο παράδοξο (play paradox) των Hoyles και Noss (1992), όπου οι ίδιοι οι ερευνητές σε άλλη δημοσίευσή τους υποστήριξαν ότι αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί και να διατηρηθεί η μορφή της εκφραστικής δραστηριότητας χωρίς να μετατραπεί σε εξερευνητική, καλώντας τους μαθητές να αναστοχάζονται για τις πράξεις τους (Noss & Hoyles, 1996).

Δυο μοντέλα σχεδιασμού αλληλουχίας παιδαγωγικών δραστηριοτήτων στο πεδίο της χρήσης της τεχνολογίας στα μαθηματικά είναι το επιστημικό μοντέλο του Leung, (2011) και το μοντέλο εξερεύνησης, εξήγησης και γενίκευσης των Fahlgren και Brunstrom (2014). Και τα δυο αυτά μοντέλα χρησιμοποιούν το πεδίο της γεωμετρίας και κατ' επέκταση τη δυναμική γεωμετρία. Ο Leung (2011) προτείνει τρεις γενικές κατηγορίες δραστηριοτήτων σε ένα μάθημα με τη χρήση της τεχνολογίας, ώστε οι μαθητές να ενισχύσουν τις ικανότητες τους για εξερεύνηση, επανανακάλυψη και επεξήγηση μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιώντας το τεχνολογικό εργαλείο. Συγκεκριμένα, σε αρχικό στάδιο, οι μαθητές καλούνται να αποκτήσουν οικειότητα με το εργαλείο. Στη συνέχεια εμπλέκονται σε δραστηριότητες όπου καλούνται να παρατηρήσουν, να καταγράψουν, να ξανά-κατασκευάσουν μοτίβα, δηλαδή γενικά να δώσουν νόημα στη χρήση του εργαλείου. Σε τρίτο στάδιο οι μαθητές μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων καλούνται να αναπτύξουν επιχειρήματα, δηλαδή να βρουν έναν τρόπο να παρουσιάσουν αυτά που βρήκαν προηγουμένως. Παρόμοια και οι Fahlgren και Brunstrom (2014) όρισαν πέντε είδη δραστηριοτήτων, την εξερεύνηση του εργαλείου και τη διατύπωση υποθέσεων, τον έλεγχο υποθέσεων και την εξήγηση γιατί η υπόθεσή τους είναι ορθή ή λανθασμένη και τέλος τη γενίκευση, χρησιμοποιώντας την απόδειξη. Γενικά τα δυο αυτά μοντέλα μοιάζουν. Η μόνη διαφορά τους είναι η διατύπωση των υποθέσεων στην αρχή του δεύτερου μοντέλου, ενώ στο πρώτο μοντέλο αποτελεί μέρος της τελευταίας δραστηριότητας. Γενικά και τα δυο μοντέλα περιλαμβάνουν διαδικασίες διερεύνησης σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και έχουν ως στόχο οι μαθητές να αναπτύξουν διαδικασίες ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Από την εφαρμογή του μοντέλου εξερεύνησης, εξήγησης και γενίκευσης των Fahlgren και Brunstrom (2014) φάνηκε ότι οι μαθητές μπορούσαν να αποδεικνύουν χρησιμοποιώντας το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, να εξερευνούν και να εξηγούν τις γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες πολύ πιο συχνά από ότι αναμενόταν, καθώς και να αναστοχάζονται σχετικά με τα συμπεράσματά τους. Αλλά κάποιες δραστηριότητες του μοντέλου δεν είναι απόλυτα διακριτές μεταξύ τους και για αυτό παρατηρήθηκε να γίνονταν ταυτόχρονα από τους μαθητές. Αυτά τα δυο μοντέλα ακολουθίας δραστηριοτήτων μπορούν να χαρακτηριστούν ότι περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά της καθοδηγούμενης διερευνητικής μάθησης.

Ο Bokhove και οι συνεργάτες του (Bokhove, 2013, 2014· Bokhove & Drijvers, 2012) έχουν εφαρμόσει μια διαφορετική ακολουθία δραστηριοτήτων σε ψηφιακό περιβάλλον. Συγκεκριμένα, με βάση το ότι παρεμβάσεις που δεν λαμβάνουν υπόψη την εργαζόμενη μνήμη είναι αναποτελεσματικές, σχεδίασαν και εφάρμοσαν μια παρέμβαση όπου στην αρχή του μαθήματος αφού καλέσουν τους μαθητές να λύσουν μια άσκηση σχετική με τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, τους προκαλούν να σκεφτούν (το ονομάζουν κρίση) με μια άσκηση που δεν έχουν ξαναδεί και είναι δύσκολη ή αδύνατη να λυθεί με τις δεξιότητες και τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές τη δεδομένη στιγμή, για αυτό ο γνωστικός φόρτος είναι μεγάλος. Ακολούθως, για να ξεπεράσουν αυτή την «κρίση» και ταυτόχρονα για να μειώνεται ο γνωστικός φόρτος, το ψηφιακό περιβάλλον στο οποίο εργάζονται οι μαθητές αξιολογεί την εργασία τους και δίνει ανατροφοδότηση. Στην αρχή αυτή η ανατροφοδότηση αφορά κάθε στάδιο εργασίας των μαθητών, μετά ακολουθούν παρόμοιες ασκήσεις με αυτή της «κρίσης» που οι μαθητές επιλέγουν σε ποιο στάδιο χρειάζεται ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του αποτελέσματος τους. Τέλος, οι μαθητές συμπληρώνουν μια άσκηση στο χαρτί ως τελική αξιολόγηση, όπου δεν υπάρχει κάποιο είδος ανατροφοδότησης. Τα αποτελέσματα των ερευνών του Bokhove και των συνεργατών του (Bokhove, 2013, 2014· Bokhove & Drijvers, 2012) έχουν δείξει θετική επίδραση της συγκεκριμένης ακολουθίας δραστηριοτήτων στην ανάπτυξη της αλγεβρικής ικανότητας μαθητών Γ΄ Λυκείου, μειώνοντας τον αριθμό των προσπαθειών που χρειάζονται για να λύσουν μια άσκηση.

Ελάχιστες έρευνες έχουν βρεθεί οι οποίες να συγκρίνουν ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό τεκμηριώνεται και από τους de Jong, Hendrikse και van der Meij (2010) οι οποίοι παρατήρησαν ότι ενώ στο πεδίο των φυσικών επιστημών τα τελευταία χρόνια ευρήματα δείχνουν ότι η διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας με τη χρήση της τεχνολογίας είναι αποτελεσματική, η αντίστοιχη έρευνα στη μαθηματική παιδεία είναι δυσεύρετη. Σε έρευνα των Eysink et al. (2009) βρέθηκε ότι οι προσεγγίσεις που ενεργοποιούσαν τη συμμετοχή μαθητών Α΄ και Β΄

Λυκείου, είτε δίνοντας εξηγήσεις είτε διερευνώντας μια κατάσταση μέσω πειράματος, βοηθούσαν τους μαθητές να σημειώσουν υψηλότερες επιδόσεις σε μεταπειραματικά δοκίμια εξέτασης εννοιολογικής, διαδικαστικής και διαισθητικής γνώσης στη θεωρία των πιθανοτήτων σε σχέση με τις προσεγγίσεις όπου οι μαθητές απλώς παρακολουθούσαν το περιβάλλον στον υπολογιστή. Δηλαδή, βρέθηκαν οι επιδόσεις των μαθητών σε μεταπειραματικά δοκίμια στη θεωρία των πιθανοτήτων να είναι υψηλότερες στις διερευνητικές προσεγγίσεις σε σχέση με τις προσεγγίσεις διαλεκτικής μορφής. Αλλά τονίζεται ότι δεν είναι και τόσο αποτελεσματική η χρήση μόνο πειράματος ή μόνο επεξήγησης ως μορφή διερεύνησης και για αυτό χρειάζεται συνδυασμός. Παρόμοια και οι εργασίες του Bakker και των συνεργατών του (Bakker, 2004· Bakker & Hoffmann, 2005) βρήκαν ότι η χρήση της τεχνολογίας βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν στατιστικό συλλογισμό, διερευνώντας πραγματικά δεδομένα. Αλλά τονίζεται από το Drijvers (2015) ότι η τεχνολογία και η διερεύνηση εδώ δουλεύουν λόγω του ότι συνδυάζονται με συζητήσεις, εργασίες στο χαρτί, με μαθηματικές πρακτικές και γενικά με κατάλληλο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Όμως, ποιο είναι το κατάλληλο εκπαιδευτικό πλαίσιο και πιο συγκεκριμένα η μορφή διερευνητικής μάθησης (δομημένη ή ελεύθερη ή ημιδομημένη) για να έχει θετικά αποτελέσματα η χρήση της τεχνολογίας;

Οι Fathurrohman, Porter και Worthy (2014) σύγκριναν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή ενός καθοδηγούμενου ψηφιακού περιβάλλοντος, ενός μη καθοδηγούμενου ψηφιακού περιβάλλοντος και της τυπικής διδασκαλίας σε τάξη πρωτοετών φοιτητών, που διδάσκονταν συστήματα αρίθμησης, συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις. Γενικά δεν βρέθηκαν στατιστικές διαφορές στο γνωστικό τομέα των συστημάτων αρίθμησης και στις συναρτήσεις. Αλλά βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις γραφικές παραστάσεις και συγκεκριμένα φάνηκε να έχει τη χαμηλότερη επίδοση η ομάδα που συμμετείχε στο μη καθοδηγούμενο περιβάλλον. Παρόμοια και οι Rasmussen και Kwon (2007) βρήκαν ότι οι μαθητές που εργάστηκαν σε μια καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση στηριγμένη στο μοντέλο της Ρεαλιστικής Εκπαίδευσης σημείωσαν υψηλότερα αποτελέσματα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου και είχαν ενδείξεις εννοιολογικής γνώσης. Στην ίδια γραμμή αποτελεσμάτων βρίσκονται και αυτά της έρευνας των Erbas και Yenmez (2011). Οι μαθητές του δείγματος τους (Στ΄ δημοτικού) που διερευνούσαν σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας τις ιδιότητες πολυγώνων, την ομοιότητα και την ισότητα σε πολύγωνα ακολουθώντας καθοδηγούμενη διερεύνηση βελτίωσαν στατιστικά σημαντικά την επίδοσή τους σχετικά με την ισότητα και την ομοιότητα πολυγώνων και σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις σε σύγκριση με την ομάδα που είχε διδαχθεί με την τυπική διδασκαλία. Σε μια άλλη έρευνα των McCraw και Grant (2005) οι οποίοι σχεδίασαν και σύγκριναν δυο παρεμβάσεις οι οποίες είχαν στόχο να δώσουν ευκαιρίες στους μαθητές να μάθουν μαθηματικά αναγνωρίζοντας μοτίβα και εντοπίζοντας σχέσεις. Οι οδηγίες της μιας παρέμβασης συγκεκριμενοποιούσαν στους μαθητές τι θα διερευνήσουν και πώς θα το κάνουν το οποίο οδηγούσε τους μαθητές να χρησιμοποιούν παρόμοιες μεθόδους και να κάνουν παρόμοιες υποθέσεις (π.χ., δίνονταν ακριβείς οδηγίες με ποιο τρόπο να κατασκευάσουν οι μαθητές παραλληλόγραμμο στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και ακολούθως καλούνταν να κάνουν μετρήσεις, για να διερευνήσουν τις ιδιότητες του και να διατυπώσουν και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους σχετικά με τη σχέση του μεγέθους των πλευρών του με το μέγεθος των γωνιών του). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη συγκεκριμένη παρέμβαση ήταν να απλοποιεί τις οδηγίες, για να βοηθήσει τους μαθητές να απαντήσουν. Ενώ οι οδηγίες της δεύτερης παρέμβασης έδιναν την ελευθερία στους μαθητές να αποφασίσουν τι θα διερευνήσουν και με ποιο τρόπο το οποίο οδηγούσε στη χρήση ποικιλίας μεθόδων και υποθέσεων (π.χ., καλούνταν οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα τετράπλευρο και να διερευνήσουν τις ιδιότητες του και ποιες από αυτές διατηρούνται σε άλλα είδη τετραπλεύρων). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη συγκεκριμένη παρέμβαση ήταν να προβληματίζει τους μαθητές σχετικά με τις οδηγίες και να χειρίζεται κατάλληλα τη συζήτηση των αποτελεσμάτων των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης. Αυτό που καταλήγουν τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής, είναι ότι παρόλο που και η πρώτη παρέμβαση έχει θετικά αποτελέσματα, η δεύτερη παρέμβαση προσφέρει πλούσιες ευκαιρίες μάθησης. Φαίνεται από τα πιο πάνω, ότι χρειάζεται να βρεθεί μια ισορροπία μεταξύ καθοδήγησης και ελευθερίας σε ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (de Jong, 2006), για αυτό απαιτούνται και άλλες έρευνες που θα εξετάσουν διαφορετικά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης τα οποία να είναι καλά ορισμένα.

Μάθηση με παιχνίδι και τεχνολογία. Τα παιχνίδια με τη χρήση της τεχνολογίας έχουν σημαντική επίδραση στις γνωστικές δεξιότητες των μαθητών (Mitchell & Savill-Smith, 2004). Οι ίδιοι ερευνητές υπέθεσαν ότι τα παιχνίδια με τη χρήση της τεχνολογίας μπορούν να περιλαμβάνουν μαθηματικές έννοιες που δύσκολα μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν με απτά υλικά. Υπάρχουν δυο προσεγγίσεις σχετικά με τις έρευνες της μάθησης με το παιχνίδι σε περιβάλλον τεχνολογίας: η μια προσέγγιση αφορά αυτές που αναθέτουν στους μαθητές να κατασκευάζουν παιχνίδια για να μάθουν μαθηματικά και η άλλη προσέγγιση αφορά αυτές που καλούν τους μαθητές να παίζουν παιχνίδια για να μάθουν μαθηματικά (Kafai, 2006).

Η διαδικασία κατασκευής παιχνιδιών σε ψηφιακό περιβάλλον αποτελεί ένα διαδραστικό και δυναμικό περιβάλλον μάθησης που προωθεί την αυτόνομη μάθηση, την ανάπτυξη κινήτρων για μάθηση και τη διατήρηση της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών σε πλούσια περιεχόμενα και αυθεντικές ασκήσεις σύνθεσης και κατασκευής (Robertson & Howells, 2008· Smeets, 2005). Έχει βρεθεί ότι η συμμετοχή μαθητών σε τέτοια διαδικασία ενισχύει την ικανότητα επεξήγησης, την ικανότητα υπολογισμού κα τη δημιουργική σκέψη (π.χ., Habgood, Ainsworth & Benford, 2005· Kafai, 2006). Ακόμη, οι Akcaoglu και Koehler (2014) βρήκαν ότι η διαδικασία κατασκευής παιχνιδιών αποτελεί περιεχόμενο για διδασκαλία δεξιοτήτων ανωτέρου επιπέδου σκέψης.

Όσον αφορά τη διαδικασία εμπλοκής σε ψηφιακά παιχνίδια, ο Hsiao (2007) υποστηρίζει ότι μέσω αυτής της διαδικασίας οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες, όπως η λύση προβλήματος, ο παραγωγικός συλλογισμός, οι υπολογισμοί και η ευελιξία στη χρήση χρημάτων για να κατακτήσουν τα μαθηματικά. Επίσης, βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετέχουν σε ψηφιακά παιχνίδια θεωρούν τα μαθηματικά ότι έχουν νόημα (Sedighian & Sedighian, 1996) και εμπλέκονται ενεργά σε αυτά γιατί τους αρέσουν, έστω και αν είναι σύνθετες δραστηριότητες (Squire, 2003). Ακόμη, οι Huang, Huang και Wu (2014) βρήκαν ότι οι μαθητές που συμμετείχαν σε ψηφιακά παιχνίδια με διαγνωστική ανατροφοδότηση (δηλαδή αν έκαναν λάθος τους δινόταν από το παιχνίδι κάποια βοήθεια ως προς το είδος του λάθους που έκαναν, ώστε να το διορθώσουν) να έχουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερη επίδοση από μαθητές που συμμετείχαν σε ψηφιακά παιχνίδια χωρίς διαγνωστική ανατροφοδότηση (απλώς τους δινόταν από το παιχνίδι η ανατροφοδότηση αν έχουν δώσει ορθή ή λανθασμένη απάντηση). Όμως, όπως επισημαίνεται από τα ευρήματα της εργασίας των Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen και Köller (2013) για να έχει η εμπλοκή των μαθητών σε ψηφιακά παιχνίδια τα πιο πάνω αποτελέσματα πρέπει αυτά να προσφέρουν κατάλληλες εμπειρίες μάθησης.

Δραστηριότητες πολλαπλών λύσεων και τεχνολογία. Οι δραστηριότητες πολλαπλών λύσεων, όπως έχει επισημανθεί προηγουμένως, αποτελούν κατάλληλα έργα για ενίσχυση και αναγνώριση πτυχών της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, όπως της δημιουργικής σκέψης και της εννοιολογικής κατανόησης (π.χ., Leikin, 2009· Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Κατάλληλα τεχνολογικά εργαλεία μπορούν να προσφέρουν ευκαιρίες για κατασκευή ποικιλίας διαφορετικών, συνδεόμενων και δυναμικών συστημάτων αναπαράστασης (White & Pea, 2011), τα οποία μπορούν να οδηγήσουν στη κατασκευή πολλαπλών στρατηγικών για λύση μιας δραστηριότητας (Kordaki & Balomenou, 2006) και στην ανάπτυξη της γνώσης και δεξιοτήτων λύσης προβλήματος (Jonassen, Carr, & Yueh, 1998). Για παράδειγμα, η Kordaki (2014) βρήκε ότι οι διαφορετικές στρατηγικές που δόθηκαν από τους δεκατετράχρονους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα της οφείλονταν κυρίως στις λειτουργίες του τεχνολογικού εργαλείου. Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της Kordaki (2014) είναι ότι χρειάζεται να παρακινούνται οι μαθητές για να δώσουν περισσότερες και διαφορετικές λύσεις σε ένα πρόβλημα με τη χρήση του τεχνολογικού εργαλείου.

Συνεργατική λύση προβλήματος και τεχνολογία. Γενικά έρευνες έχουν δείξει ότι η συνεργατική λύση προβλήματος σε περιβάλλον υπολογιστή αποτελεί σημαντικό παράγοντα ενίσχυσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Η συνεργατική λύση προβλήματος σε ψηφιακό περιβάλλον αποτελεί δημιουργική διαδικασία, αφού αξιοποιεί τη φαντασία των συμμετεχόντων (Charles & Shumar, 2007). Ακόμη, οι συμμετέχοντες στη συνεργατική λύση προβλήματος σε ψηφιακό περιβάλλον φαίνεται να απολαμβάνουν τη συμμετοχή τους και να χαρακτηρίζονται από επιμονή να λύσουν τη συγκεκριμένη δραστηριότητα (Charles & Shumar, 2007). Δηλαδή, χαρακτηρίζονται από προδιάθεση έκφρασης ανωτέρου επιπέδου σκέψης.

Όμως, η συνεργατική λύση προβλήματος σε ψηφιακό περιβάλλον, παρόλο που μπορεί να εφαρμόζεται κατάλληλα από τον εκπαιδευτικό και να χρησιμοποιείται η κατάλληλη άσκηση για την προώθησή της, να μην είναι αποτελεσματική στη μάθηση και να παρατηρούνται στην τάξη παραδείγματα μη συνεργατικής εργασίας (Kotsopoulos, 2010). Συγκεκριμένα, σε έρευνα της Kotsopoulos (2010) παρατηρήθηκε μαθητές να λαμβάνουν λιγότερη υποστήριξη από τους συνεργάτες τους κατά τη διαδικασία της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος και μάλιστα όποιες προσπάθειες συνεργασίας καταβάλλονταν από αυτούς τους μαθητές εμποδίζονταν από ένα ή περισσότερα μέλη της ομάδας. Δηλαδή, παρατήρησε φαινόμενα αποκλεισμού κάποιων μαθητών.

Ο συνδυασμός των πιο πάνω προσεγγίσεων συνθέτουν αυθεντικό περιβάλλον μάθησης (Herrington & Oliver, 2000). Συγκεκριμένα, θεωρούνται ως χαρακτηριστικά του αυθεντικού περιβάλλοντος μάθησης η διερεύνηση καταστάσεων από την πραγματική ζωή, η λύση σύνθετων προβλημάτων, η λύση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους, η συνεργατική μάθηση, η ενθάρρυνση για αναστοχασμό και ο «περιορισμένος» ρόλος του εκπαιδευτικού.

Σύνοψη

Στο δεύτερο αυτό μέρος της βιβλιογραφίας αναλύθηκε εκτενώς ο ρόλος της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, αρχικά έγινε παρουσίαση των όρων που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά με την τεχνολογία. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν αποτελέσματα ερευνών σχετικά με την επίδραση της χρήσης νέων τεχνολογιών στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και των διαστάσεων της με βάση το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education,

1989) τόσο σε γενικό επίπεδο όσο και πιο εξειδικευμένα στα μαθηματικά. Στη συνέχεια αναλύθηκαν οι τρόποι με τους οποίους χρησιμοποιείται η τεχνολογία στη διδασκαλία των μαθηματικών, αρχίζοντας από γενικά πλαίσια που συνόψιζαν διάφορες χρήσεις της τεχνολογίας. Ακολούθως, τεκμηριώθηκε η ανάγκη για μελέτη των πρακτικών που χρησιμοποιούνται στην τάξη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη χρήση της τεχνολογίας εκτός από τον τρόπο χρήσης της με βάση τις δυνατότητες της. Στη συνέχεια αναλύθηκαν εκτενώς διάφορες τέτοιες πρακτικές που θεωρούνται ότι συνθέτουν αυθεντικό περιβάλλον μάθησης (Herrington & Oliver, 2000). Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν θεωρίες που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη της διερευνητικής μάθησης με τη χρήση της τεχνολογίας και σχετικές έρευνες οι οποίες είναι ελάχιστες και σε αυτές υπογραμμίζεται η ανάγκη για εξέταση ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με διαφορετικό βαθμό καθοδήγησης. Επίσης, παρουσιάστηκαν προσεγγίσεις και έρευνες σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση με το παιχνίδι, σε δραστηριότητες πολλαπλών λύσεων και στη συνεργατική επίλυση προβλήματος. Γενικά, υπογραμμίζεται η ανάγκη για περισσότερες έρευνες σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της εργασίας ήταν η παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου μοντέλου ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και η εξέταση του πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξή της σε μαθητές δημοτικού σχολείου και συγκεκριμένα σε μαθητές Στ΄δημοτικού. Για να εξεταστεί ο σκοπός αυτός, ακολουθήθηκε κατάλληλος ερευνητικός σχεδιασμός ο οποίος περιγράφεται στο κεφάλαιο αυτό. Συγκεκριμένα, περιγράφεται το δείγμα της έρευνας, τα μέσα συλλογής δεδομένων, η κωδικοποίηση των δεδομένων, ο σχεδιασμός των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης, η διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας και οι τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων.

Καθορισμός Πληθυσμού - Δείγμα της Έρευνας

Καθορισμός πληθυσμού της έρευνας. Με βάση το σκοπό της έρευνας, ο πληθυσμός της είναι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου και συγκεκριμένα μαθητές Στ΄ δημοτικού. Η επιλογή των μαθητών δημοτικού σχολείου ως πληθυσμό της έρευνας αποτελεί καινοτομία της έρευνας, αφού οι παιδαγωγοί τα τελευταία χρόνια δίνουν έμφαση στο ότι χρειάζεται να εισαχθούν στα αναλυτικά προγράμματα του δημοτικού σύνθετα προβλήματα και διαδικασίες (π.χ., Jaconbson & Wilensky, 2006· Lesh, 2006). Αυτό γιατί φαίνεται ότι η εισαγωγή τους στη μέση εκπαίδευση δεν έχει τα αναμενόμενα αποτελέσματα (Jacobson & Wilensky, 2006). Άρα, χρειάζεται να βρεθούν τρόποι για αποτελεσματική χρήση σύνθετων προβλημάτων και διαδικασιών από το δημοτικό σχολείο (English, 2008β, 2010β). Επίσης, η επιλογή μαθητών Στ΄ δημοτικού έγινε σκόπιμα, αφού με βάση το Piaget στην ηλικία αυτή αρχίζουν να μεταβαίνουν από το στάδιο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών στο στάδιο των τυπικών λογικών ενεργειών, δηλαδή το παιδί αρχίζει να σκέφτεται λογικά για αφηρημένες έννοιες (στάδιο τυπικών λογικών ενεργειών) και όχι μόνο για αντικείμενα και γεγονότα (στάδιο συγκεκριμένων λογικών ενεργειών) και η ανάπτυξη των γνωστικών του ικανοτήτων αρχίζει να αποκρυσταλλώνεται (Drijvers et al., 2016). Άρα, επιλέχθηκαν για πληθυσμό της έρευνας αυτής μαθητές Στ΄ δημοτικού αφού θεωρείται ότι μπορούν να αναπτύξουν δεξιότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης, αλλά ταυτόχρονα χρειάζονται να αναπτυχθούν τρόποι διδασκαλίας για ενίσχυσή τους.

Για να εξεταστούν τα πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα σχετικά με τη διασαφήνιση της έννοιας της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, 802 μαθητές

Στ΄ δημοτικού (11,5 - 12 χρονών) συμπλήρωσαν το *Δοκίμιο της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* (λεπτομερής περιγραφή του δίνεται στα *Μέσα Συλλογής Δεδομένων*). Η επιλογή του δείγματος αυτού ήταν ευκαιριακή, αφού οι 802 μαθητές προήλθαν με βάση την ευκολία πρόσβασης της ερευνήτριας σε εκπαιδευτικούς και σχολεία της Κύπρου. Συγκεκριμένα, οι 802 μαθητές (386 αγόρια και 416 κορίτσια) προήλθαν από 52 τμήματα Στ΄ τάξης 33 δημοτικών σχολείων της Κύπρου. Αναλυτικά, οι 419 μαθητές (196 αγόρια και 223 κορίτσια) φοιτούσαν σε 12 δημοτικά σχολεία της πόλης και επαρχίας Λευκωσίας, οι 116 μαθητές (51 αγόρια και 65 κορίτσια) φοιτούσαν σε πέντε δημοτικά σχολεία της πόλης και επαρχίας Λεμεσού, οι 112 μαθητές (58 αγόρια και 54 κορίτσια) φοιτούσαν σε εννέα δημοτικά σχολεία της πόλης και επαρχίας Λάρνακας, οι 123 μαθητές (67 αγόρια και 56 κορίτσια) φοιτούσαν σε έξι δημοτικά σχολεία της πόλης και επαρχίας Πάφου και οι 32 μαθητές (14 αγόρια και 18 κορίτσια) φοιτούσαν σε ένα δημοτικό σχολείο της επαρχίας Αμμοχώστου.

Για να εξεταστούν τα υπόλοιπα δυο ερευνητικά ερωτήματα, που αφορούσαν την επίδραση των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης στη μάθηση των μαθητών, 85 μαθητές από τους 802 συμμετείχαν σε διδασκαλία που βασίστηκε σε αυτά τα περιβάλλοντα. Το δείγμα αυτό αποτελεί ευκαιριακό αφού προήλθαν με βάση το ενδιαφέρον των ιδίων και των γονιών τους να συμμετέχουν σε 15 μαθήματα των 90 λεπτών που προσφέρθηκαν στο εργαστήριο της Διδακτικής των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου εκτός σχολικού χρόνου. Τα μαθήματα αυτά διεξάγονταν μια φορά την εβδομάδα (Παρασκευή απόγευμα ή Σάββατο πρωί) κατά τους μήνες: Φεβρουάριος 2015-Ιούνιος 2015. Οι 85 μαθητές (41 αγόρια και 44 κορίτσια) προέρχονταν από 22 δημοτικά σχολεία της πόλης και επαρχίας Λευκωσίας και κατανεμήθηκαν σε εφτά ομάδες των 10-14 μαθητών ανάλογα με την μέρα και την ώρα που τους βόλευε να παρακολουθήσουν το μάθημα. Συγκεκριμένα, 25 μαθητές συμμετείχαν στο ανοικτό ψηφιακό περιβάλλον μάθησης (8 αγόρια και 17 κορίτσια) οι οποίοι ήταν κατανεμημένοι σε δυο ομάδες των 14 και των 11 μαθητών αντίστοιχα, 26 μαθητές συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο ψηφιακό περιβάλλον μάθησης (12 αγόρια και 14 κορίτσια) οι οποίοι ήταν κατανεμημένοι σε δυο ομάδες των 13 μαθητών και 34 μαθητές συμμετείχαν στο μικτό ψηφιακό περιβάλλον (21 αγόρια και 13 κορίτσια) οι οποίοι ήταν κατανεμημένοι σε τρεις ομάδες των 10, 12 και 12 μαθητών αντίστοιχα. Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει το δείγμα της έρευνας.

Σημειώνεται ότι τόσο οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα όσο και οι γονείς τους είχαν ενημερωθεί σχετικά με το σκοπό και το περιεχόμενο της και τους είχε τονιστεί ότι η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική και μπορούσαν να αποσυρθούν οποιαδήποτε στιγμή το επιθυμούσαν. Είχε εξασφαλιστεί η γραπτή συγκατάθεσή των γονιών για τη συμμετοχή των παιδιών τους, καθώς και η σχετική άδεια διεξαγωγής έρευνας από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου.

Πίνακας 3.1

Δείγμα Έρευνας

	Ερευνητικά Ερωτήματα				
	$1^{ο}$, $2^{ο}$, $3^{ο}$	$4^{ο}$, $5^{ο}$			
		Σύνολο	Ανοικτό	Καθοδηγούμενο	Μικτό
Σύνολο	802	85	25	26	34
Αγόρια	386	41	8	12	21
Κορίτσια	416	44	17	14	13

Εκπαιδευτικό υπόβαθρο των υποκειμένων της έρευνας. Οι 802 μαθητές του δείγματος (στους οποίους συμπεριλαμβάνονται και οι 85 μαθητές που συμμετείχαν στα ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης στην πρώτη τους μέτρηση-συμπλήρωση του Δοκιμίου) με βάση τα έργα των διδακτικών εγχειριδίων που διδάχθηκαν τόσο στις προηγούμενες τάξεις όσο και αυτά που διδάσκονταν κατά την περίοδο της χορήγησης του Δοκιμίου (τέλος Οκτωβρίου 2014 – αρχές Φεβρουαρίου 2015) αναμενόταν να γνωρίζουν τα εξής: (i) αξία θέσης ψηφίου ακέραιων και δεκαδικών αριθμών, (ii) έννοια κλάσματος, ποσοστού, λόγου, αναλογίας, (iii) σύγκριση μεγέθους αριθμών ακέραιων, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών, (iv) ιδιότητες αριθμών: άρτιοι, περιττοί, πρώτοι, σύνθετοι, τετράγωνοι, τρίγωνοι αριθμοί, (v) εκτέλεση του αλγόριθμου των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους, δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς, (vi) εκτίμηση αποτελέσματος πράξεων με ακέραιους αριθμούς, (vii) προτεραιότητα πράξεων, (viii) αναγνώριση δισδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, (ix) αναγνώριση σχέσεων εγκλεισμού τετραπλεύρων, (x) είδη τριγώνων, (xi) έννοια περιμέτρου και εμβαδού σχημάτων (ορθογωνίου, τετραγώνου, παραλληλογράμμου, τριγώνου) και υπολογισμός τους, (xii) περιγραφή, συμπλήρωση, επέκταση και επεξήγηση κανόνα αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων, (xiii) χρήση αλγεβρικών εκφράσεων για αναπαράσταση αθροιστικών και πολλαπλασιαστικών σχέσεων, (xiv) ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων (κυρίως ραβδογραμμάτων-ελάχιστη χρήση γραμμικών γραφικών παραστάσεων) και (xv) λύση προβλημάτων ρουτίνας (λεκτικά προβλήματα) και διαδικασίας (χρήση στρατηγικών: λογική σκέψη, κάνω πίνακα, κάνω σχέδιο, βρίσκω μοτίβο, ανάδρομη πορεία, οργανωμένος κατάλογος, δοκιμή και έλεγχος, απλοποίηση προβλήματος). Σημειώνεται ότι τα διδακτικά εγχειρίδια που διδάχθηκαν οι μαθητές του δείγματος έδιναν έμφαση στη λύση προβλήματος, στην εκτίμηση και σε κάποιες πτυχές της διερευνητικής μάθησης (ανακάλυψη, επικοινωνία) (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης, 2003). Τα εγχειρίδια αυτά δεν σχεδιάστηκαν με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Κύπρου (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου κ.ά, 2010) και τη φιλοσοφία διδασκαλίας του (διερευνητική μάθηση με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργικότητα).

Με βάση τις πιο πάνω προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών αναπτύχθηκαν: το δοκίμιο εξέτασης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθηματικών και τα ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, αφού για να μπορούν να εκφράσουν και να ενισχύσουν την κριτική, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης αντίστοιχα, οι μαθητές χρειάζονται να κατέχουν βασική μαθηματική γνώση περιεχομένου (Iowa Department of Education, 1989· Tularam, 1994). Επιπρόσθετα, με βάση τη φιλοσοφία διδασκαλίας των εγχειριδίων που διδάχθηκαν στο σχολείο οι 85 μαθητές που συμμετείχαν στα ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης, μπορεί να ισχυριστεί κάποιος ότι τα αποτελέσματα της παρέμβασης δεν επηρεάζονται σε σημαντικό βαθμό από τον τρόπο διδασκαλίας που δέχονταν στο σχολείο.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Στα πλαίσια της έρευνας αυτής έγινε συλλογή ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων. Όμως, για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας αυτής χρησιμοποιήθηκαν μόνο τα ποσοτικά δεδομένα.

Ποσοτικά δεδομένα. Τα ποσοτικά δεδομένα της έρευνας αυτής αποτελούν οι επιδόσεις των μαθητών στο *Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά*. Συγκεκριμένα, για την απάντηση των τριών πρώτων ερευνητικών ερωτημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα από τη συμπλήρωση του *Δοκιμίου* των 802 μαθητών. Η συλλογή των δεδομένων αυτών έγινε κατά τη διάρκεια της περιόδου: τέλος Οκτωβρίου 2014 – αρχές Φεβρουαρίου 2015.

Για την απάντηση του τέταρτου, και του πέμπτου ερευνητικού ερωτήματος χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα από τη συμπλήρωση του *Δοκιμίου* των 85 μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης, τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος των μαθημάτων αυτών. Τα δεδομένα από την αρχική μέτρηση των 85 μαθητών συμπεριλαμβάνονται στα δεδομένα των 802 μαθητών και πάρθηκαν στις αρχές του Φεβρουαρίου 2015 και τα δεδομένα από την τελική μέτρηση λήφθηκαν στις 29/30 Μαΐου 2015 και στις 4/5 Ιουνίου 2015 ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχαν οι μαθητές (δηλαδή τέλος Μαΐου 2015 - αρχές Ιουνίου 2015).

Συνολικά, οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους 120 λεπτά για τη συμπλήρωση του *Δοκιμίου*. Ο χρόνος αυτός δεν ήταν συνεχόμενος, αλλά μοιραζόταν σε δυο ή τρεις διαφορετικές μέρες με διάστημα μίας εβδομάδας η μία από την άλλη, ώστε να περιοριστεί η επίδραση του παράγοντα κούραση και να καταγράφονται οι πραγματικές ικανότητες των μαθητών. Έγινε προσπάθεια τα έργα που αφορούσαν τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, που ήταν και τα πιο σύνθετα, να δοθούν μετά τα έργα της βασικής γνώσης, κριτικής και δημιουργικής σκέψης, ώστε να έχουν θετική προδιάθεση οι μαθητές για να συμπληρώσουν όλα τα έργα του *Δοκιμίου*. Αυτό γιατί υποστηρίζεται ότι η επιτυχία στη λύση προβλήματος, δημιουργεί αισθήματα ικανοποίησης και απόλαυσης της διαδικασίας λύσης προβλήματος, που ανάλογα με το βαθμό που βιώνονται από τους μαθητές καθορίζουν εάν ασχοληθούν με τη λύση πιο σύνθετων προβλημάτων, το μέγεθος της προσπάθειας που θα καταβάλουν και το χρόνο που θα αφιερώσουν σε αυτή (Bandura, 1997). Επίσης, σημειώνεται ότι η σειρά των έργων του *Δοκιμίου* διαφοροποιήθηκε μεταξύ της αρχικής και της τελικής μέτρησης, ώστε να περιοριστεί η επίδραση του παράγοντα μνήμης από την προηγούμενή τους λύση και του παράγοντα κούρασης.

Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά. Το *Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά (Δοκίμιο)* αποτελεί το εργαλείο μέτρησης των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά για τους σκοπούς της εργασίας αυτής. Αναπτύχθηκε με τρόπο που να αποτελείται από έργα που αφορούν την κάθε μια ικανότητα του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) για την περιγραφή της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά: τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση), τη δημιουργική σκέψη (σύνθεση, νοητική δημιουργία) και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Τα 18 έργα του *Δοκιμίου* αφορούν διάφορες μαθηματικές έννοιες από τις πέντε ενότητες περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος (αριθμοί, μέτρηση, γεωμετρία, άλγεβρα, στατιστική-πιθανότητες).

Στο Παράρτημα Α δίνεται το *Δοκίμιο*. Κάτω από κάθε έργο δίνεται ο κωδικός της μεταβλητής που χρησιμοποιείται στα πλαίσια της εργασίας αυτής και η πηγή από την οποία λήφθηκε το έργο και τροποποιήθηκε με τρόπο που να ανταποκρίνεται στους μαθητές Στ΄ δημοτικού της Κύπρου. Ο αριθμός των έργων (18) είναι διαφορετικός από τον αριθμό των μεταβλητών (32), αφού τρία έργα είχαν περισσότερα από ένα διακριτά ερωτήματα που θεωρήθηκαν διακριτές μεταβλητές (ένα έργο της βασικής γνώσης και ένα έργο της κριτικής σκέψης) και τα έργα της δημιουργικής σκέψης αξιολογήθηκαν με τρεις διακριτούς βαθμούς, άρα για κάθε έργο αντιστοιχούσαν τρεις μεταβλητές (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία). Ο τρόπος παρουσίασή των έργων στο Παράρτημα Α είναι όπως δόθηκε στους 802 μαθητές (στην τελική μέτρηση των 85 μαθητών διαφοροποιήθηκε η σειρά των έργων όπως αναφέρθηκε πιο πάνω) σε τέσσερα διακριτά τεστ: βασικής γνώσης (έξι έργα - επτά μεταβλητές), κριτικής σκέψης (τέσσερα έργα - εννέα μεταβλητές), δημιουργικής σκέψης (τέσσερα έργα – 12 μεταβλητές) και σύνθετες διαδικασίες σκέψης (τέσσερα έργα – τέσσερις μεταβλητές).

Γενικά, τα έργα που αξιοποιήθηκαν στο *Δοκίμιο* για κριτική, δημιουργική και σύνθετη σκέψη έχουν χαρακτηριστικά δραστηριοτήτων που απαιτούν υψηλού επιπέδου γνωστικές διαδικασίες (Stein & Lane, 1996). Αυτό γιατί οι τρεις αυτές ικανότητες (κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης) είναι ικανότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (π.χ., Balcaen & Klassen, 2008· English, 2010α, 2011· Ervynck, 1991· Iowa Department of Education, 1989). Η βασική γνώση χρειάζεται για να εκδηλωθούν οι ικανότητες αυτές, για αυτό και συμπεριλήφθηκαν ως έργα στο *Δοκίμιο* αυτό που περιγράφει τις ικανότητες για ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (π.χ., Iowa Department of Education, 1989· Peterson, 1988· Tularam, 1994 · Zohar & Dori, 2003). Περισσότερες λεπτομέρειες για την επιλογή των έργων για κάθε μία ικανότητα που περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά παρουσιάζονται πιο κάτω.

Έργα βασικής γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά. Τα έργα που αφορούν τη βασική γνώση περιεχομένου επιλέχθηκαν με βάση τον ορισμό που κατέληξε η εργασία αυτή από τη βιβλιογραφία τόσο της γενικής εκπαίδευσης όσο και της μαθηματικής παιδείας. Δηλαδή, τα έργα αυτά αναπτύχθηκαν ώστε να εξετάσουν γνώσεις και διαδικασίες που χρειάζεται να κατέχει ένας μαθητής Στ΄ δημοτικού για να μπορεί να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και να ελέγχει και να ρυθμίζει τις γνώσεις του. Τα έργα αυτά δεν καλούν τους μαθητές να ανακαλέσουν τις γνώσεις και τις διαδικασίες που γνωρίζουν αλλά να δείξουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική τους κατανόηση σε αυτές σε επιφανειακό επίπεδο.

Συγκεκριμένα, το πρώτο έργο αφορά αναγνώριση τριγώνων (Β1) ανάμεσα σε σχήματα που αποτελούν παραδείγματα και μη παραδείγματα τριγώνου (δεν πληρούν όλες τις κρίσιμες ιδιότητες) που αναγνωρίζονται διαισθητικά ή όχι με βάση ερευνητικά αποτελέσματα (π.χ., Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008· Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011). Για παράδειγμα, το ισόπλευρο τρίγωνο θεωρείται παράδειγμα τριγώνου (πρωτοτυπικό) που αναγνωρίζεται διαισθητικά (και άμεσα) χωρίς αξιολόγηση του (Hershkowitz, 1990), ενώ το σκαληνό τρίγωνο είναι παράδειγμα τριγώνου μη διαισθητικό. Από την άλλη μη παράδειγμα τριγώνου είναι αυτό που είναι ανοικτό, έρχεται σε σύγκρουση με την ιδιότητα του κλειστού σχήματος και είναι μη διαισθητικό (Tsamir et al., 2008). Το έργο αυτό εξετάζει κατά πόσο οι μαθητές κατανόησαν τις κρίσιμες ιδιότητες του τριγώνου. Με παρόμοια λογική αναπτύχθηκε και το έργο που αφορά την αναγνώριση ορθογωνίων (Β2), το οποίο εξετάζει εκτός από την κατανόηση των κρίσιμων ιδιοτήτων του ορθογωνίου και την κατανόηση της σχέσης ότι το τετράγωνο είναι ορθογώνιο. Συγκεκριμένα, καλούνται οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα ορθογώνια ανάμεσα σε παραδείγματα (συμπεριλαμβανομένου και τετραγώνων) και μη παραδείγματα ορθογωνίων που αναγνωρίζονται διαισθητικά ή όχι. Τα περισσότερα παραδείγματα και μη παραδείγματα ορθογωνίων λήφθηκαν από έρευνες (Burger & Shaughnessy, 1986· Clements & Battista, 1992).

Το τρίτο έργο αφορά σύγκριση μεγέθους αριθμών (Β3). Συγκεκριμένα, δίνονται τρία ζευγάρια αριθμών και καλούνται οι μαθητές να τα συγκρίνουν (ένα ζευγάρι ακέραιων αριθμών και δυο ζευγάρια δεκαδικών αριθμών). Η επιλογή αυτών δεν είναι τυχαία, αφού αποτελούν συχνές παρανοήσεις μαθητών σχετικά με την σύγκριση ακέραιων και δεκαδικών αριθμών (π.χ., εφαρμογή κανόνων ακεραίων αριθμών σε δεκαδικούς: όσο περισσότερα ψηφία έχει τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός) και παράλληλα εξετάζεται η κατανόηση των μαθητών σχετικά με το μηδέν σε διαφορετικές θέσεις σε ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς (Resnick et al., 1989).

Το τέταρτο έργο αφορά την εξέταση της ικανότητας των μαθητών να απαντούν σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος (Β4). Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκαν ερωτήσεις που να ανταποκρίνονται στα δυο πρώτα επίπεδα κατανόησης δεδομένων γραφικών παραστάσεων του Curcio (2010): την ανάγνωση δεδομένων και την ανάγνωση μεταξύ των δεδομένων. Δηλαδή, η πρώτη ερώτηση αφορά απλώς ανάγνωση των δεδομένων του ραβδογράμματος, ενώ η δεύτερη και η τρίτη ερώτηση καλούν τους μαθητές να ερμηνεύσουν τα δεδομένα και να κάνουν συγκρίσεις ποσοτήτων (ανάγνωση μεταξύ των δεδομένων). Δεν αναπτύχθηκε ερώτηση για το τρίτο επίπεδο κατανόησης δεδομένων γραφικών παραστάσεων: ανάγνωση πέρα των δεδομένων, αφού η απάντηση σε τέτοιου είδους ερωτήσεις απαιτούν διαδικασίες κριτικής, δημιουργικής σκέψης ακόμη και σύνθετων διαδικασιών σκέψης, αφού καλούν τους μαθητές να προβλέπουν καταστάσεις με βάση τα δεδομένα ή να βγάζουν συμπεράσματα αξιοποιώντας όχι μόνο τα δεδομένα του γραφήματος.

Το πέμπτο έργο αφορά επίλυση προβλήματος αφαίρεσης τριψήφιων αριθμών με δομή σύγκρισης (Β5). Αποτελεί ένα πρόβλημα ρουτίνας που οι μαθητές Στ΄ δημοτικού έρχονται σε επαφή με αυτό από τη Δ΄ δημοτικού. Εξετάζει την ικανότητά τους να κατανοούν τόσο το λεκτικό όσο και τη δομή ενός προβλήματος ρουτίνας, να εκτελούν ορθά μια πράξη αφαίρεσης, καθώς και να δίνουν μια ολοκληρωμένη απάντηση η οποία δίνει ένδειξη της κατανόησης του τι βρήκαν με το αποτέλεσμα της αφαίρεσης.

Το έκτο έργο εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να υπολογίζουν την περίμετρο (Β6) και το εμβαδόν (Β7) δυο διαφορετικών σχημάτων και να χρησιμοποιούν κατάλληλα τις μονάδες μέτρησης. Η περίμετρος και το εμβαδόν αποτελούν δυο έννοιες που συγχύζουν συχνά οι μαθητές (π.χ., Kidman, 1997) και για αυτό επιλέχθηκαν τα δυο συγκεκριμένα σχήματα. Το πρώτο σχήμα απαιτεί από τους μαθητές την εφαρμογή των τύπων που έμαθαν για την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου, ενώ το δεύτερο είναι πιο σύνθετο σχήμα που απαιτεί την κατανόηση της έννοιας της περιμέτρου και του εμβαδού για τον υπολογισμό τους.

Έργα κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Η επιλογή των έργων μέτρησης της κριτικής σκέψης βασίστηκε και αυτή στον ορισμό που κατέληξε η εργασία με βάση τη βιβλιογραφία. Δηλαδή, επιλέχθηκαν μαθηματικά έργα που απαιτούν από τους μαθητές να χρησιμοποιούν τις διαδικασίες της ανάλυσης (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου), της σύνδεσης (χειρισμός σχέσεων μεταξύ όλων) και της αξιολόγησης (κρίση πληροφοριών με βάση κριτήρια) της βασικής τους γνώσης, για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση (Balcaen & Klassen, 2008· Iowa Department of Education, 1989· TC^2, 2013). Σημαντικό να αναφερθεί εδώ ότι τα έργα που χρησιμοποιούν διαδικασίες σύνδεσης και αξιολόγησης, χρειάζονται ταυτόχρονα και διαδικασίες ανάλυσης (Iowa Department of Education, 1989). Επιπρόσθετα, έγινε προσπάθεια να περιληφθούν έργα τριών μορφών: πολλαπλής επιλογής, μικρής απάντησης και επεξήγησης, αφού αυτές οι μορφές παρουσιάζονται συχνότερα σε διάφορα δοκίμια εξέτασης της κριτικής σκέψης (π.χ., California Critical Thinking Skills Test: Facione, 1990· Cornell Critical Thinking Test: Ennis & Millman, 2005· Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal: Watson & Glaser, 2002).

Συγκεκριμένα, το πρώτο έργο (Κ4) κριτικής σκέψης του *Δοκιμίου* προέρχεται από τη συλλογή έργων που εξετάζουν δεξιότητες σκέψης του Cambridge (Butterworth & Thwaites, 2005, 2013), το οποίο τροποποιήθηκε κατάλληλα χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα από πληθυσμούς χωριών της Κύπρου. Σε αυτό το έργο πολλαπλής επιλογής οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν ομοιότητες μεταξύ δυο μορφών αναπαράστασης δεδομένων: του πίνακα τιμών και του ραβδογράμματος, ώστε να απαντήσουν στο ερώτημα. Δηλαδή, να επιλέξουν το ραβδόγραμμα που δείχνει τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα. Εξετάζεται η ικανότητα τους να συνδέσουν τις αναπαραστάσεις του έργου, κάνοντας συγκρίσεις μεταξύ των δυο διαφορετικών αναπαραστάσεων (πίνακα τιμών και ραβδόγραμμα) και παράλληλα εντοπίζοντας ομοιότητες και διαφορές τόσο μεταξύ των τεσσάρων ραβδογραμμάτων που δίνονται ως επιλογές όσο και μεταξύ των αριθμών του πίνακα.

Το δεύτερο έργο (Κ5) κριτικής σκέψης του *Δοκιμίου* προέρχεται και αυτό από τη συλλογή έργων που εξετάζουν δεξιότητες σκέψης του Cambridge (Butterworth & Thwaites, 2005, 2013). Είναι ένα έργο πολλαπλής επιλογής, το οποίο τροποποιήθηκε ώστε να μπορεί να λυθεί από μαθητές Στ΄ δημοτικού (απλοποιήθηκαν κάποιες επιλογές του). Σε αυτό το έργο οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν το κατάλληλο συμπέρασμα που προκύπτει από τα λεκτικά δεδομένα που δίνονται. Απαιτείται από τους μαθητές χρησιμοποιώντας τη λογική τους να συγκρίνουν τα δεδομένα που έχουν, τόσο μεταξύ τους όσο και με τα πιθανά συμπεράσματα, και να βρουν σύνδεση .

Το τρίτο έργο (Κ6) κριτικής σκέψης του *Δοκιμίου* είναι σύντομης απάντησης και προέρχεται η ιδέα του από τους Gavin, Belkin, Spinelli, και Marie (2001), όπου και τροποποιήθηκε ώστε να είναι κατανοητό στους μαθητές Στ΄ δημοτικού. Συγκεκριμένα, το έργο αυτό απαιτεί από τους μαθητές να συγκρίνουν όλα τα γεωμετρικά σχήματα της κάθε ομάδας μεταξύ τους, να βρουν την κοινή τους ιδιότητα και να την καταγράψουν. Η κοινή ιδιότητα απαιτείται να μην βασίζεται μόνο σε οπτικά χαρακτηριστικά των σχημάτων, αλλά και στις σχέσεις των μερών των σχημάτων και στις σχέσεις ταξινόμησης/εγκλεισμού, αφού οι μαθητές Στ΄ δημοτικού αναμένεται να έχουν κατακτήσει το επίπεδο 1 και 2 της γεωμετρικής σκέψης: ολικό και αναλυτικό και να βρίσκονται στο επίπεδο 3 της άτυπης παραγωγικής σκέψης (Battista, 2007). Υπάρχουν τρία διαφορετικά ερωτήματα για το τρίτο έργο. Το πρώτο και το δεύτερο ερώτημα αποτελούνται από μία ομάδα σχημάτων και οι μαθητές εστιάζονται στα σχήματα μόνο της ομάδας που δίνεται ώστε να βρουν τη σύνδεση μεταξύ τους και να δώσουν απάντηση. Ενώ το τρίτο ερώτημα είναι πιο σύνθετο, αφού αποτελείται από τρεις ομάδες σχημάτων που η μια είναι υποσύνολο της άλλης. Έτσι οι μαθητές σε αυτό το ερώτημα δεν έχουν μόνο να συγκρίνουν τα σχήματα της κάθε ομάδας μεταξύ τους, αλλά και με τα σχήματα των άλλων ομάδων ώστε να βρουν τι είναι αυτό που διακρίνει τα σχήματα της κάθε ομάδας και είναι σε διαφορετικές ομάδες αλλά ταυτόχρονα είναι υποσύνολο της άλλης ομάδας. Συνοψίζοντας, τα τρία πρώτα έργα Κ4, Κ5 και Κ6 απαιτούν από τους μαθητές να χρησιμοποιούν διαδικασίες σύνδεσης της βασικής τους γνώσης, για να τα επιλύσουν.

Το τέταρτο έργο κριτικής σκέψης του *Δοκιμίου* αφορά την αναγνώριση, συμπλήρωση και αξιολόγηση μοτίβων. Συγκεκριμένα, αποτελείται από έξι διακριτά ερωτήματα ως προς τη διαδικασία κριτικής σκέψης που απαιτούν για την ορθή απάντησή τους. Δηλαδή, τα τρία πρώτα απαιτούν τη χρήση διαδικασιών ανάλυσης, ενώ τα υπόλοιπα τρία απαιτούν τη χρήση διαδικασιών αξιολόγησης. Όλα τα ερωτήματα είναι σύντομης απάντησης, ενώ το τέταρτο (Κ7) και το έκτο (Κ8) ερώτημα απαιτούν και επεξήγηση. Το έργο αυτό σχεδιάστηκε από τους Friel, Arbaugh, Pugalee, Watanabe, και Smith (2009) με σκοπό την ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στα μαθηματικά και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος, στα πλαίσια της σειράς Navigations. Το πρώτο ερώτημα (Κ1) καλεί τους μαθητές να συνεχίσουν ένα γεωμετρικό μοτίβο. Οι μαθητές για να μπορούν να ανταποκριθούν στην οδηγία της άσκησης, χρειάζεται να αναλύσουν τους τρεις πρώτους όρους του μοτίβου τόσο σχετικά με τον αριθμό των τετραγώνων (άσπρων και μαύρων) που αποτελούνται όσο και τον τρόπο διάταξή τους. Ακολούθως, χρειάζεται να αναλύσουν πόσο και πώς αλλάζουν αυτά τα δυο σε κάθε όρο του μοτίβου. Δηλαδή, οι μαθητές χρειάζονται να κατανοήσουν και να χειριστούν σχέσεις μέρους/όλου (ικανότητα ανάλυσης) για να μπορούν να βρουν το τέταρτο όρο στο γεωμετρικό μοτίβο. Παρόμοια διαδικασία σκέψης χρησιμοποιούν, και στο δεύτερο ερώτημα (Κ2) και στο τρίτο ερώτημα (Κ2). Συγκεκριμένα, οι μαθητές στο δεύτερο ερώτημα (Κ2) καλούνται να συμπληρώσουν τρία αριθμητικά μοτίβα που προκύπτουν από το γεωμετρικό μοτίβο του πρώτου ερωτήματος (άσπρα τετράγωνα: άρτιοι αριθμοί-2ν+6, μαύρα τετράγωνα: ν, συνολικός αριθμός τετραγώνων: 3ν+6), αναλύοντας τη διαφορά των όρων που είναι γνωστά σε αυτούς, ενώ στο τρίτο ερώτημα (Κ3) καλούνται να επεκτείνουν τα δυο μοτίβα από τα τρία μοτίβα για να βρουν την απάντηση στο ερώτημα. Δηλαδή, στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές έχοντας ως δεδομένο τον αριθμό των μαύρων τετραγώνων (του πιο απλού μοτίβου σε σχέση με τα τρία και το οποίο ο αριθμός του είναι ίσος με τη θέση του) καλούνται να βρουν τον αντίστοιχο αριθμό άσπρων τετραγώνων, επεκτείνοντας ταυτόχρονα τα δυο μοτίβα. Τα υπόλοιπα τρία ερωτήματα (Κ7, Κ8, Κ9) απαιτούν από τους μαθητές να αξιολογήσουν δοσμένο αριθμό αν ανήκει ή όχι σε ένα από τα τρία μοτίβα του έργου και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους, είτε λεκτικά (Κ7 και Κ8) είτε αριθμητικά (Κ9). Δηλαδή, οι μαθητές στα ερωτήματα τέσσερα (Κ7) και έξι (Κ8) απαιτείται να τεκμηριώνουν την απάντησή τους με συγκεκριμένη λεκτική αιτιολόγηση που αναφέρεται σε γενίκευση του μοτίβου με βάση επαναληπτικό (recursive) συλλογισμό ή με ρητή (explicit) γενίκευση (Lannin, 2005). Ενώ στο έργο Κ9 οι μαθητές απαιτείται να τεκμηριώσουν την απάντησή τους με την εύρεση των όρων των μοτίβων (άσπρων και μαύρων τετραγώνων), αξιολογώντας τις πληροφορίες που έχουν μπροστά τους σχετικά με τους κανόνες των μοτίβων και τους όρους που έχουν ήδη συμπληρώσει. Δηλαδή με βάση το συνολικό αριθμό τετραγώνων (30) που τους δίνεται αναμένεται να σκεφτούν ότι σίγουρα τα μαύρα τετράγωνα είναι περισσότερα από πέντε και τα άσπρα τετράγωνα περισσότερα από 16, αφού το 30 αποτελεί όρο του μοτίβου που είναι μεγαλύτερος από αυτό που βρήκαν στο πέμπτο όρο (21). Επίσης, μπορεί να σκεφτούν πόσα πολλαπλάσια του τρία υπάρχουν από το 21 μέχρι το 30 και αναλόγως να επεκτείνουν τα άλλα δυο μοτίβα ή ακόμη να αναζητούν συνδυασμούς άρτιων αριθμών (αφού τα άσπρα τετράγωνα είναι σίγουρα μοτίβο άρτιων αριθμών και για να υπάρχει άθροισμα άρτιος αριθμός, τότε και ο αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι άρτιος) που έχουν αποτέλεσμα 30 και ικανοποιούν τις συνθήκες που αναφέρονται πιο πάνω (μέγεθος του κάθε αριθμού των μοτίβων).

Έργα δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά. Τα τέσσερα έργα δημιουργικής σκέψης του *Δοκιμίου* απαιτούν πολλαπλές λύσεις και το ένα από αυτά περιλαμβάνει και κατασκευή ερωτήσεων (Δ1). Η επιλογή έργων πολλαπλών λύσεων και έργων κατασκευής προβλήματος/ερώτηση βασίστηκε στο ότι σημαντικός αριθμός ερευνητών τα χαρακτηρίζει ως κατάλληλα εργαλεία μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας (π.χ., Leikin & Lev, 2007· Silver, 1997). Παράλληλα, έχει βρεθεί ότι όταν καλούνται οι μαθητές να δώσουν πολλές και διαφορετικές λύσεις σε μια άσκηση, εκφράζουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη δημιουργική τους σκέψη σε σχέση με τις απαντήσεις που δίνουν στην ίδια άσκηση χωρίς να ενθαρρύνονται για πολλαπλές λύσεις (Kordaki, 2014). Επιπρόσθετα, έγινε προσπάθεια στο να υπάρχουν και σχηματικά (Δ3) και λεκτικά έργα (Δ1, Δ2, Δ4), ώστε να υπάρχει συμφωνία με αρχές που διέπουν το σχεδιασμό γνωστών δοκιμίων εξέτασης δημιουργικότητας (για παράδειγμα Torrance, 1974). Ακόμη, τα μαθηματικά έργα που επιλέχθηκαν ανταποκρίνονται στον ορισμό που κατέληξε η εργασία με βάση τη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, τα δημιουργικά έργα της εργασίας αυτής απαιτούν παραγωγή νέας γνώσης (Ervynck, 1991· Iowa Department of Education, 1989) που προκύπτει μέσα από τη σύνθεση και τη νοητική δημιουργία (διαίσθηση, νοερές εικόνες, έμπνευση) της βασικής γνώσης περιεχομένου και της αναδιοργανώμενης γνώσης (προϊόν κριτικής σκέψης) (π.χ., Haylock, 1997· Iowa Department of Education, 1989· Krulik & Rudnick, 1999· Sheffield, 2003). Η νέα γνώση μπορεί να έχει τη μορφή μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης λύσης (πρωτοτυπία) ή πολλών (ευχέρεια) και διαφορετικών λύσεων (ευελιξία), ώστε να μπορεί να αξιολογηθεί (π.χ., Singh, 1987· Smith & Stein, 1998· Stein et al., 2000). Άρα, τα έργα της δημιουργικής σκέψης του *Δοκιμίου* διακρίνονται σε δυο κατηγορίες: αυτά που απαιτούν τη χρήση των διαδικασιών της σύνθεσης (οι ιδέες προέρχονται από συστηματικό πλάνο εργασίας) και αυτά που απαιτούν τη χρήση των διαδικασιών της νοητικής δημιουργίας (οι ιδέες προέρχονται ως αναλαμπή/έμπνευση). Ταυτόχρονα τα έργα αυτά καλούν τους μαθητές να δώσουν πολλές, διαφορετικές και λύσεις που δεν σκέφτηκε κάποιος άλλος (πρωτότυπες), ώστε να καλύπτουν τις διαφορετικές μορφές νέας γνώσης. Με βάση αυτό δικαιολογείται και η επιλογή της εργασίας να θεωρήσει ότι οι διαδικασίες της επεξεργασίας περιλαμβάνονται ήδη στις άλλες δυο κατηγορίες διαδικασιών και έτσι δεν αποτελούν μέρος διακριτής κατηγορίας διαδικασιών της δημιουργικής σκέψης, όπως ορίζεται στο Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989). Δηλαδή, η διαδικασία εύρεσης διαφορετικών λύσεων χρειάζεται τη διαδικασία της επεξεργασίας και αυτό απαιτείται σε όλα τα δημιουργικά έργα του *Δοκιμίου*.

Τα δυο πρώτα δημιουργικά έργα του *Δοκιμίου* (Δ1 και Δ2) απαιτούν τη χρήση των διαδικασιών της σύνθεσης για την παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων απαντήσεων. Δηλαδή, απαιτούν από τους μαθητές τη κατάστρωση ενός συστηματικού πλάνου εργασίας ώστε να καταγράψουν με βάση τις γνώσεις που διαθέτουν και τις δεξιότητες κριτικής σκέψης μεγάλο αριθμό απαντήσεων, που να αφορούν διαφορετικές κατηγορίες/στρατηγικές και να προκύπτουν και πρωτότυπες απαντήσεις, που δεν σκέφτηκε κάποιος άλλος. Συγκεκριμένα, το πρώτο έργο (Δ1) καλεί τους μαθητές να γράψουν όσες περισσότερες και διαφορετικές ερωτήσεις μπορούν με βάση το ραβδόγραμμα που δίνεται. Οι μαθητές αναμένεται αρχικά να διαβάσουν τα δεδομένα του διπλού ραβδογράμματος και να τα συγκρίνουν μεταξύ τους (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου) και έτσι να προσδιορίσουν την κύρια ιδέα του ραβδογράμματος (χρήση διαδικασίας της ανάλυσης της κριτικής σκέψης). Ακολούθως, να σκεφτούν ποια είδη ερωτήσεων που γνωρίζουν μπορούν να θέσουν με βάση τα δεδομένα (δηλαδή να συγκρίνουν τα δεδομένα με τα είδη ερωτήσεων που γνωρίζουν-χρήση διαδικασίας της σύνδεσης της κριτικής σκέψης) και να συνθέσουν τις πρώτες τους ερωτήσεις. Μετά τις πρώτες ερωτήσεις οι μαθητές αναμένεται είτε να καταγράφουν ερωτήσεις με ένα συστηματικό τρόπο είτε να γράφουν τυχαία ερωτήσεις ανεξαρτήτου δυσκολίας και δομής. Στον Πίνακα Β1 του Παραρτήματος Β δίνεται ένα παράδειγμα απάντησης μαθητή που φαίνεται αυτός ο συστηματικός τρόπος καταγραφής ερωτήσεων στο έργο Δ1.

Το δεύτερο έργο που χρησιμοποιεί διαδικασίες σύνθεσης (Δ2) είναι αυτό που καλεί τους μαθητές να συνθέσουν μαθηματικές προτάσεις με αποτέλεσμα 24. Οι μαθητές αναμένεται με παρόμοιο τρόπο εργασίας με το έργο Δ1 να συνθέσουν τις μαθηματικές προστάσεις. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναμένεται αρχικά να κατανοήσουν το τι ζητά η ερώτηση του έργου (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου) και να ανατρέξουν στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους σχετικά με τις τέσσερις πράξεις με ακέραιους, δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς ώστε να αποφασίσουν από πού θα ξεκινήσουν για να καταγράψουν πολλές και διαφορετικές μαθηματικές προτάσεις (χρήση διαδικασίας της αξιολόγησης της κριτικής σκέψης). Έτσι προκύπτουν οι πρώτες μαθηματικές τους προτάσεις. Ακολούθως, οι μαθητές αναμένεται να καταγράψουν και άλλες πράξεις είτε ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο πλάνο εργασίας είτε με τυχαίο τρόπο. Στον Πίνακα Β1 του Παραρτήματος Β δίνεται απάντηση μαθητή στο έργο Δ2 που φαίνεται ένας συστηματικός τρόπος καταγραφής των μαθηματικών προτάσεων.

Τα τρίτο και το τέταρτο έργο της δημιουργικής σκέψης του *Δοκιμίου* (Δ3 και Δ4), απαιτούν τη χρήση των διαδικασιών της νοητικής δημιουργίας για την παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων λύσεων. Αυτό που διακρίνει τα έργα αυτά από αυτά της σύνθεσης είναι ότι η παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων λύσεων δεν ακολουθεί μια συγκεκριμένη πορεία λύσης, αλλά προέρχεται από νοερές διαδικασίες. Το έργο Δ3 χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα του Haylock (1997) και σύμφωνα με τον ερευνητή μπορεί να αναδυθεί μέσω αυτού η αποκλίνουσα σκέψη των μαθητών. Συγκεκριμένα, καλεί τους μαθητές να κατασκευάσουν όσα περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορούν με εμβαδόν 2 cm^2. Δηλαδή, οι μαθητές αναμένεται έχοντας ως βάση τη γνώση της έννοιας του εμβαδού (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου) να δημιουργήσουν σχήματα με συγκεκριμένο εμβαδόν. Η ιδέα κάθε απάντησης αναμένεται να προέρχεται από τον τρόπο χειρισμού και ανάλυσης του σχήματος που δημιουργεί αρχικά ο μαθητής στο χαρτί είτε περιστρέφοντάς το είτε σπάζοντας το σε μικρότερα σχήματα και μετακινώντας αυτά (χρήση διαδικασία της ανάλυσης της κριτικής σκέψης). Η απάντηση εδώ έρχεται ως έμπνευση με τη χρήση νοερών διαδικασιών και δεν μπορεί να περιγραφεί ως κατάληξη μιας συγκεκριμένης πορείας λύσης. Ένα τέτοιο παράδειγμα απάντησης μαθητή στο έργο Δ3 δίνεται στον Πίνακα Β1 του Παραρτήματος Β.

Το έργο Δ4 προέρχεται από τη συλλογή ασκήσεων του NRICH (enriching mathematics) (sets of four numbers: https://nrich.maths.org/2660). Το έργο αυτό καλεί τους μαθητές να δημιουργήσουν όσες περισσότερες και διαφορετικές ομάδες τεσσάρων αριθμών με κοινό χαρακτηριστικό μπορούν, χρησιμοποιώντας τους δοσμένους αριθμούς. Τονίζεται ότι χρειάζεται να γράφουν το κοινό χαρακτηριστικό των αριθμών, δίνοντας έτσι όνομα στην ομάδα τους. Ο τρόπος σκέψης που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να επιλύσουν το συγκεκριμένο έργο είναι παρόμοιος με το έργο Δ3. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αρχικά χρειάζεται να κατανοήσουν τις οδηγίες του έργου (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου), ώστε να αντιληφθούν ποιες προϋπάρχουσες γνώσεις τους χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος (μοτίβα / ιδιότητες αριθμών). Δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διαδικασία με την οποία αναδύονται οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους, αλλά έρχονται στο μυαλό τους ως αναλαμπή. Όταν έρθει στο μυαλό τους η ιδέα (προϋπάρχουσα γνώση) προσπαθούν να δουν αν ταιριάζει με τους αριθμούς που τους δίνονται (π.χ., σκέφτονται τους άρτιους αριθμούς και ελέγχουν κατά πόσο οι αριθμοί που τους δόθηκαν περιλαμβάνουν άρτιους αριθμούς) (χρήση διαδικασίας της ανάλυσης και της σύνδεσης της κριτικής σκέψης). Ένα παράδειγμα απάντησης μαθητή στο έργο Δ4 παρουσιάζεται στον Πίνακα Β1 του Παραρτήματος Β, όπου φαίνεται ότι οι ιδέες των απαντήσεων του μαθητή δεν προέρχονται ως αποτέλεσμα μίας συγκεκριμένης πορείας λύσης, αλλά ως έμπνευση από τη χρήση νοερών διαδικασιών.

Έργα σύνθετων διαδικασιών σκέψης στα μαθηματικά. Όσον αφορά τα έργα που απαιτούν σύνθετες διαδικασίες σκέψης, η επιλογή τους βασίστηκε στο να απαιτούν για την επίλυση τους συνδυασμό βασικής γνώσης και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης (Butterworth & Thwaites, 2005, 2013· Iowa Department of Education, 1989). Έγινε προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν μη συνηθισμένα προβλήματα, προβλήματα σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης, όπου η λύση τους δεν είναι εμφανής και γνωστή στο μαθητή. Έτσι αναγκάζεται ο μαθητής να αναπτύξει πρακτικές για να τα αντιμετωπίσει, χρησιμοποιώντας τη βασική του γνώση περιεχομένου και τις διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης (Rasmussen et al., 2005). Συνολικά στο *Δοκίμιο* υπάρχουν τέσσερα έργα σύνθετων διαδικασιών σκέψης, τα οποία τρία από τα τέσσερα (Σ2, Σ3, Σ4) είναι από τη συλλογή έργων που εξετάζουν δεξιότητες σκέψης του Cambridge (Butterworth & Thwaites, 2005, 2013) και το ένα έργο Σ1 προέρχεται από τα έργα που δόθηκαν στο πρόγραμμα αξιολόγησης PISA το 2003 (OECD, 2006). Και τα τέσσερα έχουν τροποποιηθεί ώστε να μπορούν να λυθούν από μαθητές Στ΄ δημοτικού της Κύπρου. Η επιλογή των έργων από αυτές τις δυο πηγές δεν είναι τυχαία, αφού υποστηρίζουν ότι τα έργα τους απαιτούν σύνθετες διαδικασίες σκέψης.

Στο πρώτο έργο (Σ1) σύνθετων διαδικασιών σκέψης του *Δοκιμίου* οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν με πειστικό τρόπο ότι η δασκάλα μπορεί να κάνει και λάθος για το συμπέρασμά της. Δηλαδή, καλούνται να συνθέσουν ένα ή περισσότερα πειστικά επιχειρήματα με σκοπό να δείξουν ότι η δασκάλα κάνει λάθος (πρόβλημα σχεδιασμού). Για να γίνει αυτό πρέπει να διαβάσουν, να ερμηνεύσουν και να αναλύσουν τις πληροφορίες που δίνονται στο ραβδόγραμμα σχετικά με τον αριθμό μαθητών της κάθε ομάδας που έχουν συγκεκριμένους βαθμούς στα μαθηματικά (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου). Ακολούθως, να συγκρίνουν τις πληροφορίες αυτές μεταξύ τους με ένα ή περισσότερα κριτήρια (π.χ., τον αριθμό των ατόμων από κάθε ομάδα που πήραν βαθμό μεγαλύτερο του 50, τον αριθμό των ατόμων από κάθε ομάδα που πήραν τις υψηλότερες βαθμολογίες) και να τις αξιολογήσουν (χρήση διαδικασίας της σύνδεσης και της αξιολόγησης της κριτικής σκέψης), ώστε να συνθέσουν ένα πειστικό μαθηματικό επιχείρημα (χρήση διαδικασίας της σύνθεσης της δημιουργικής σκέψης). Αλλά ταυτόχρονα μπορεί οι μαθητές ως αναλαμπή/έμπνευση (χρήση της διαδικασίας της νοητικής δημιουργίας της δημιουργικής σκέψης) να χρησιμοποιήσουν το μέσο όρο με τρόπο που να δείξουν ότι ισχύει το αντίθετο από αυτό που υποστηρίζει η δασκάλα (ότι οι μαθητές της Ομάδας Α έχουν καλύτερα αποτέλεσμα από αυτούς της Ομάδας Β). Για να γίνει αυτό θα πρέπει να επεξεργαστούν τις βαθμολογίες με τρόπο ώστε να ορίζουν ότι τη μεγαλύτερη βαθμολογία σε κάθε εύρος την παίρνουν μαθητές της ομάδας Α και τη χαμηλότερη της ομάδας Β. Με λίγα λόγια η επιτυχής επίλυση του έργου αυτού χρειάζεται την επιτυχής χρήση τόσο της βασικής γνώσης περιεχομένου όσο και των διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης.

Το δεύτερο έργο (Σ2) σύνθετων διαδικασιών σκέψης του *Δοκιμίου* αποτελεί ένα μη συνηθισμένο πρόβλημα λογικής σκέψης με δεδομένα από την καθημερινή ζωή. Συγκεκριμένα, αξιοποιεί την ιδέα της βαθμολόγησης των αποτελεσμάτων των αγώνων στους ομίλους του ευρωπαϊκού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου και καλεί τους μαθητές να απαντήσουν σε τρία ερωτήματα. Για την απάντηση των ερωτημάτων αυτών, οι μαθητές χρειάζεται αρχικά να κατανοήσουν τα λεκτικά δεδομένα και τα δεδομένα του πίνακα που δίνονται (χρήση της βασικής γνώσης περιεχομένου). Ακολούθως, για να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα, όπου θα πρέπει να συμπληρώσουν τον αριθμό των νικητήριων αγώνων, τον αριθμό των χαμένων αγώνων και τον αριθμό των αγώνων με ισοπαλία για κάθε ομάδα, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν διαδικασίες της κριτικής σκέψης. Συγκεκριμένα, χρειάζεται να βρουν τη σύνδεση των βαθμών που πήραν οι ομάδες, τον αριθμό των παιχνιδιών που έχουν γίνει και των μονάδων που δίνονται σε κάθε νικητήριο αγώνα ή σε ισοπαλία. Στο δεύτερο ερώτημα που θα πρέπει να βρουν τα αποτελέσματα των τεσσάρων αγώνων που έχουν γίνει, απαιτείται εκτός από διαδικασίες κριτικής σκέψης και διαδικασίες δημιουργικής σκέψης. Αυτό γιατί θα πρέπει να κάνουν επαναλαμβανόμενες υποθέσεις σχετικά με τον αριθμό των τερμάτων που έβαλε η κάθε ομάδα σε κάθε παιχνίδι και να τις αξιολογούν ταυτόχρονα, ώστε να ικανοποιούνται τα δεδομένα που δίνονται για όλες τις ομάδες σχετικά με τον αριθμό των τερμάτων που έβαλε και δέχτηκε η κάθε ομάδα. Στη συνέχεια, το τρίτο ερώτημα καλεί τους μαθητές να γράψουν ποιες δυο ομάδες θα προκριθούν στους 16 και να εξηγήσουν. Η ορθή επίλυση αυτού του ερωτήματος χρειάζεται συστηματικό τρόπο καταγραφής όλων των περιπτώσεων που προκύπτουν από τις διαφορετικές εκβάσεις των δυο τελευταίων αγώνων του ομίλου που αποτελούν άγνωστα τα αποτελέσματά τους (χρήση διαδικασίας της σύνθεσης της δημιουργικής σκέψης). Με βάση αυτή τη συστηματική καταγραφή, ο μαθητής αναμένεται να αξιολογήσει τα δεδομένα που δίνει αυτή η καταγραφή και να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα (χρήση διαδικασίας της αξιολόγησης της κριτικής σκέψης). Το συμπέρασμα αυτό θα το γράψει κατάλληλα ώστε να εξηγεί την απάντησή του (χρήση διαδικασίας της σύνθεσης της δημιουργικής σκέψης). Με λίγα λόγια είναι εμφανής και σε αυτό το πρόβλημα ότι απαιτείται χρήση τόσο της βασικής γνώσης όσο και των διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης για την επιτυχή επίλυσή του.

Το τρίτο έργο (Σ3) σύνθετων διαδικασιών σκέψης του *Δοκιμίου* αφορά και αυτό επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος, όπως και το έργο Σ2. Η επιτυχής επίλυσή του απαιτεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη βασική τους γνώση για την περίμετρο, το εμβαδόν και τις πράξεις αριθμών και διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Δηλαδή, οι μαθητές αναμένεται να συνδέσουν το κούρεμα του γρασιδιού με την έννοια του εμβαδού και την περίφραξη με την έννοια της περιμέτρου (χρήση διαδικασίας της σύνδεσης της κριτικής σκέψης). Ακολούθως, να υπολογίσουν το εμβαδόν και την περίμετρο του κάθε κήπου και να προσπαθήσουν να βρουν τη σύνδεση των αριθμών αυτών με τις τιμές χρέωσης που δίνονται. Η ιδέα της εύρεσης σχέσης μεταξύ των τριών τιμών μπορεί να έρθει ως έμπνευση στο μαθητή (χρήση διαδικασίας της νοητικής δημιουργίας της δημιουργικής σκέψης) ή από τη δοκιμή πολλών ιδεών. Τέλος, αναμένεται να τεκμηριώσουν τη λύση που βρήκαν (χρήση διαδικασίας της αξιολόγησης της κριτικής σκέψης).

Το τέταρτο έργο (Σ4) σύνθετων διαδικασιών του *Δοκιμίου* αφορά πρόβλημα λήψης απόφασης με βάση δεδομένα σε πίνακα και η επιτυχή επίλυσή του, όπως και στα προηγούμενα έργα (Σ1, Σ2, Σ3) απαιτεί τη χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Συγκεκριμένα, απαιτείται οι μαθητές να κατανοήσουν πρώτα τι ζητά το πρόβλημα και ποια είναι τα δεδομένα του (χρήση βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασίας της ανάλυσης της κριτικής σκέψης). Ακολούθως, χρειάζεται οι μαθητές να κατανοήσουν τα δεδομένα του πίνακα και με ποιο τρόπο συνδέονται με το ερώτημα του έργου (χρήση διαδικασίας της σύνδεσης της κριτικής σκέψης). Με βάση την κατανόησή τους αυτή, αναμένεται για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος ότι οι μαθητές θα σκεφτούν να εργαστούν με ένα συστηματικό τρόπο (χρήση διαδικασίας της σύνθεσης της δημιουργικής σκέψης). Δηλαδή, να ομαδοποιήσουν τα άτομα που δίνονται στο πρόβλημα με βάση τις ηλικίες τους (αφού οι τιμές που ισχύουν στο ζωολογικό κήπο είναι με βάση την ηλικία των ατόμων) και να βρουν το ποσό που θα πληρώσουν όλοι μαζί για την είσοδο τους στο ζωολογικό κήπο με βάση τις επιλογές που δίνονται στον πίνακα. Τέλος, αναμένεται να συγκρίνουν τα ποσά που θα βρουν και να παρουσιάσουν την μικρότερη δυνατή τιμή.

Σε αυτό το μέρος του κεφαλαίου της μεθοδολογίας παρουσιάστηκε με λεπτομέρεια το σκεπτικό που αναπτύχθηκε το *Δοκίμιο της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης* με σκοπό την τεκμηρίωση της επιλογής των έργων για τη μέτρηση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Ακολουθεί η περιγραφή του τρόπου διόρθωσης των έργων του *Δοκιμίου*.

Διόρθωση των έργων του Δοκιμίου. Ο τρόπος διόρθωσης των έργων του δοκιμίου παρουσιάζεται πιο κάτω με βάση την ικανότητα που εξετάζουν (βασική γνώση, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη, σύνθετες διαδικασίες σκέψης). Σε όλα τα έργα, εκτός από τα έργα δημιουργικότητας, δόθηκαν βαθμολογίες από τέσσερα μέχρι μηδέν, με τέσσερα την υψηλότερη βαθμολογία που δηλώνει την πλήρης ορθή απάντηση στο έργο και με μηδέν την πλήρης λανθασμένη απάντηση. Οι ενδιάμεσες βαθμολογίες προέκυψαν από το διαφορετικό βαθμό ορθότητας της απάντησης και κατανόησης της έννοιας ή χρήσης της διαδικασίας σκέψης που απαιτείται για κάθε έργο. Στα έργα δημιουργικότητας η διόρθωση βασίστηκε στις διαστάσεις της ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, όπως αναφέρεται και πιο κάτω, με διαφορετικό εύρος τιμών. Για σκοπούς σύγκρισης και χρήσης των διαστάσεων αυτών στη συγκεκριμένη εργασία μετατράπηκαν σε βαθμολογίες από μηδέν μέχρι τέσσερα, αξιοποιώντας το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση.

Διόρθωση έργων βασικής γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά. Η βαθμολόγηση των έργων της βασικής γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά έλαβε υπόψη όχι μόνο την ορθότητα της απάντησης που δίνεται, αλλά και αυτά που χρειάζονται για πλήρη κατανόηση της μαθηματικής έννοιας που εξετάζεται σε κάθε έργο. Στα έργα αναγνώρισης σχημάτων (Β1 και Β2) η βαθμολογία βασίστηκε στην επιλογή και στη μη επιλογή παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, διαισθητικών ή όχι (που αναγνωρίζονται άμεσα ή όχι), των δυο σχημάτων. Στο έργο σύγκρισης μεγέθους αριθμών (Β3) δόθηκε το μεγαλύτερο βάρος της βαθμολογίας (από τα τέσσερα) στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών σε σχέση με τη σύγκριση ακέραιων αριθμών, αφού όπως επεξηγήθηκε προηγουμένως αποτελούν πιο συχνά λάθη στους μαθητές λόγω μη επαρκής κατανόησης των δεκαδικών αριθμών. Στο έργο με την απάντηση ερωτήσεων σχετικά με την κατανόηση δεδομένων σε ραβδόγραμμα (Β4) δόθηκε το μεγαλύτερο βάρος στη βαθμολόγηση των ερωτήσεων που αφορούν το δεύτερο επίπεδο κατανόησης δεδομένων του Curcio (1987, 2010), δηλαδή στην ερώτηση (β) και (γ). Στο έργο που αφορούσε την επίλυση προβλήματος τριψήφιων αριθμών με δομή σύγκρισης (Β5) ο μαθητής έλαβε την υψηλότερη βαθμολογία όταν παρουσίαζε την ορθή πράξη, το ορθό αποτέλεσμα και ολοκληρωμένη απάντηση στο πρόβλημα, αλλά ταυτόχρονα δόθηκαν μισές μονάδες σε λανθασμένο αποτέλεσμα, αλλά με ολοκληρωμένη απάντηση και ορθή πράξη. Σε παρόμοια λογική είναι η βαθμολογία που δόθηκε στα έργα υπολογισμού περιμέτρου και εμβαδού σχημάτων (Β6 και Β7). Συγκεκριμένα, ο μαθητής πήρε την υψηλότερη βαθμολογία όταν έδωσε ορθή απάντηση συνοδευόμενη με ορθές μονάδες μέτρησης, αλλά ταυτόχρονα δόθηκαν μισές μονάδες σε λανθασμένη απάντηση που προερχόταν από τη χρήση ορθού τρόπου υπολογισμού. Στο Παράρτημα Γ, δίνονται στον Πίνακα Γ1 αναλυτικά ο τρόπος αξιολόγησης των έργων της βασικής γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά.

Διόρθωση έργων κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Η βαθμολόγηση των έργων της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά έλαβε υπόψη όχι μόνο την ορθότητα της απάντησης που δίνεται, αλλά και το βαθμό που χρησιμοποιείται η διαδικασία της κριτικής σκέψης που εξετάζεται (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση). Στα έργα πολλαπλής επιλογής Κ4 και Κ5 (έργα σύνδεσης) δόθηκε η υψηλότερη βαθμολογία στην επιλογή της ορθής απάντησης, αλλά δόθηκαν και μισές μονάδες στην επιλογή των λανθασμένων απαντήσεων που προκύπτουν από την προσπάθεια χρήσης διαδικασιών σύνδεσης. Δηλαδή, οι μισές μονάδες δόθηκαν σε επιλογές που ο μαθητής φαίνεται ότι έκανε μια προσπάθεια να συνδέσει τα δεδομένα που του δίνονταν, αλλά όχι όλα. Η βαθμολογία στο έργο Κ6 προέκυψε από το άθροισμα των βαθμολογιών των τριών ερωτημάτων. Οι υψηλότερες βαθμολογίες στα δυο πρώτα ερωτήματα δόθηκαν όταν η απάντηση προερχόταν από την επεξεργασία και τη συσχέτιση των ιδιοτήτων όλων των σχημάτων της κάθε ομάδας και παρουσιαζόταν σε τυπική ορολογία, ενώ οι χαμηλότερες βαθμολογίες δόθηκαν σε απαντήσεις που απλώς αναγνώρισαν τα σχήματα που υπήρχαν σε κάθε ομάδα. Μισές μονάδες δόθηκαν σε απαντήσεις που φαίνεται ότι οι μαθητές προσπαθούσαν να βρουν τη σύνδεση των σχημάτων, χρησιμοποιώντας άτυπη ορολογία και οπτικά χαρακτηριστικά. Στο τρίτο ερώτημα η υψηλότερη βαθμολογία δόθηκε στην ορθή αναγνώριση των σχέσεων εγκλεισμού μεταξύ των συνόλων των σχημάτων, ενώ η χαμηλότερη βαθμολογία δόθηκε σε απαντήσεις που δεν περιλάμβαναν καθόλου σχέσεις μεταξύ των συνόλων παρά μόνο αναγνώριση της γενικής κατηγορίας. Μισές μονάδες δόθηκαν σε απαντήσεις που φαίνεται ότι οι μαθητές αναγνώριζαν ορθές σχέσεις μεταξύ κάποιων συνόλων. Στα έργα Κ1, Κ2 και Κ3 που αφορούσαν συμπλήρωση μοτίβων (έργα ανάλυσης), η ορθή απάντηση έπαιρνε όλες τις μονάδες, ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις αξιολογήθηκαν σε ποιο βαθμό ανταποκρίνονταν στην κατανόηση του κάθε μοτίβου. Τέλος, όσον αφορά τα έργα της αξιολόγησης και τεκμηρίωσης μοτίβων (Κ7, Κ8 και Κ9) η βαθμολογία βασιζόταν εκτός από την ορθότητα της απάντησης και στο βαθμό γενίκευσης των κανόνων των μοτίβων. Συγκεκριμένα, η υψηλότερη βαθμολογία στα Κ7 και Κ8 δόθηκε σε απαντήσεις που αναγνώρισα ότι ο αριθμός που δινόταν δεν άνηκε στα μοτίβα, αλλά ταυτόχρονα περιλάμβαναν ρητές γενικεύσεις μοτίβων, ενώ η χαμηλότερη βαθμολογία δόθηκε σε απαντήσεις που έστω και αν αναγνώρισα ότι αριθμός που δινόταν δεν άνηκε στα μοτίβα, δεν περιλάμβαναν κάποιο είδος γενίκευσης των μοτίβων. Στο έργο Κ9 δόθηκαν όλες οι μονάδες στην ορθή απάντηση, αλλά δόθηκαν μισές μονάδες σε απαντήσεις που υπήρχαν ενδείξεις ότι οι μαθητές κατανόησαν τον κανόνα των μοτίβων. Στο Παράρτημα Γ, δίνονται στον Πίνακα Γ2 αναλυτικά ο τρόπος αξιολόγησης των έργων της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά.

Διόρθωση έργων δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά. Στα έργα της δημιουργικής σκέψης η βαθμολόγηση βασίστηκε στα τρία γνωστικά της χαρακτηριστικά: ευχέρεια (αριθμός ορθών απαντήσεων), ευελιξία (αριθμός διαφορετικών απαντήσεων) και πρωτοτυπία (μοναδικές, μη τυπικές/συμβατικές λύσεις). Επιλέχθηκαν οι τρεις από τους τέσσερις παράγοντες που ορίζει ο Guilford's (1956) (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία) για δυο λόγους. Πρώτον, είναι δύσκολο να υπάρχει αξιοπιστία στην επεξεργασία. Δεύτερον, στα δημιουργικά έργα που αξιοποιήθηκαν ήταν δύσκολο να προσδιοριστούν διάφορα επίπεδα λύσεων ως προς την επεξεργασία. Παρόμοια και ο Torrance (1974) δεν χρησιμοποίησε το κριτήριο της επεξεργασίας για αξιολόγηση των λεκτικών έργων του, παρά μόνο των σχηματικών έργων. Επιπρόσθετα, η Leikin (2009) και ο Silver (1997) δεν χρησιμοποίησαν το κριτήριο της επεξεργασίας για να αξιολογήσουν τη δημιουργικότητα.

Όσον αφορά τον τρόπο αξιολόγησης των τριών διαστάσεων ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία ακολουθήθηκε η κωδικοποίηση της Leikin (2009). Όπως έχει αναφερθεί και στο κεφάλαιο της Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης, η μέθοδος υπολογισμού της Leikin (2009), έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές έρευνες και έχει εγκυροποιηθεί (π.χ., Leikin, 2009· Leikin & Lev, 2013· Levav-Waynberg & Leikin, 2013· Tabach & Friedlander, 2013).

Με βάση την κωδικοποίηση της Leikin (2009) για τις διαστάσεις ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας, χρειάστηκε να μελετηθούν και να καταγραφούν όλες οι λύσεις που δόθηκαν από τους μαθητές του δείγματος της εργασίας για κάθε δημιουργικό έργο. Έτσι, προέκυψαν για κάθε έργο κατηγορίες απαντήσεων, αλλά και υποκατηγορίες απαντήσεων. Στο Παράρτημα Β δίνεται για κάθε δημιουργικό έργο οι κατηγορίες και οι υποκατηγορίες των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος μαζί με δείγματα απαντήσεων (βλέπε Πίνακα Β2, Πίνακα Β3, Πίνακας Β4 και Πίνακα Β5 που αντιστοιχούν στα δημιουργικά έργα: Δ1, Δ2, Δ3 και Δ4). Το σκεπτικό που δημιουργήθηκαν οι κατηγορίες απαντήσεων σε κάθε έργο βασίζεται στη διαφορετικότητα τόσο της ιδέας που χρησιμοποιούν αλλά και του βαθμού συνθετότητάς τους. Συγκεκριμένα, στο έργο Δ1 (Κατασκευή Ερωτήσεων) οι κατηγορίες προέκυψαν τόσο από τα τρία επίπεδα κατανόησης δεδομένων γραφικών παραστάσεων του Curcio (2010): ανάγνωση δεδομένων, ανάγνωση μεταξύ των δεδομένων και ανάγνωση πέρα των δεδομένων, όσο και από τις διαφορετικές κατηγορίες ερωτήσεων προσθετικής (ομαδοποίησης, σύγκρισης, αλλαγής) και πολλαπλασιαστικής δομής (σύγκρισης, λόγου) (π.χ., Fuson, 1992· Greer, 1992). Κάποιες κατηγορίες διακρινόταν σε υποκατηγορίες με βάση τον αριθμό των πράξεων που απαιτούσαν για την επίλυσή τους οι ερωτήσεις, το είδος των δεδομένων που χρησιμοποιούσαν (φύλο, μεταφορικά μέσα) και τη θέση του άγνωστου (τελική ποσότητα/διαφορά ή ποσότητες που ομαδοποιούνται/συγκρίνονται). Στο έργο Δ2 (Κατασκευή Μαθηματικών Προτάσεων με αποτέλεσμα 24) οι κατηγορίες προέκυψαν από τις τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) και το σύνολο των αριθμών (ακέραιοι, δεκαδικοί, κλασματικοί αριθμοί, αρνητικοί αριθμοί) που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές στις μαθηματικές τους προτάσεις, αλλά και από το συνδυασμών αυτών. Οι υποκατηγορίες τους προέκυπταν κυρίως από τον διαφορετικό αριθμό πράξεων που περιλάμβανε μια μαθηματική πρόταση. Στο έργο Δ3 οι κατηγορίες προέκυψαν με βάση το είδος των σχημάτων και των συνδυασμών τους που χρησιμοποιούσαν για να δημιουργήσουν ένα μεγαλύτερο σχήμα με εμβαδόν 2 cm^2. Στο έργο Δ4 οι κατηγορίες προέκυψαν από το είδος του μοτίβου που ακολουθούν οι τέσσερις αριθμοί, την ιδιότητα των τεσσάρων αριθμών και το είδος της σχέσης των τεσσάρων αριθμών.

Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων που έδωσε ο μαθητής σε κάθε έργο αποτελεί το συνολικό βαθμό της ευχέρειας του για το αντίστοιχο έργο. Για να υπολογιστεί η ευελιξία και η πρωτοτυπία της κάθε ορθής απάντησης που έδωσε ο μαθητής σε κάθε έργο αξιολογήθηκε σε σχέση με τις άλλες απαντήσεις που έδωσε, αλλά και σε σχέση με αυτές που έδωσε το σύνολο των μαθητών του δείγματος αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο βαθμός ευελιξίας της κάθε απάντησης οριζόταν ως εξής με βάση την κωδικοποίηση της Leikin (2009):

- 10 έπαιρνε η πρώτη απάντηση του μαθητή και κάθε απάντηση από διαφορετική κατηγορία απαντήσεων
- ένα έπαιρνε κάθε απάντηση του μαθητή που άνηκε στην ίδια κατηγορία απαντήσεων με προηγούμενή του απάντηση, αλλά αφορούσε διαφορετική υποκατηγορία
- 0.1 έπαιρνε κάθε απάντηση του μαθητή που άνηκε στην ίδια κατηγορία και υποκατηγορία απαντήσεων με προηγούμενή του λύση

Ο συνολικός βαθμός της ευελιξίας σε κάθε έργο υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για ευελιξία σε κάθε απάντηση του μαθητή. Όσον αφορά το βαθμό πρωτοτυπίας της κάθε απάντησης υπολογίστηκε με βάση το ποσοστό εμφάνισης της κατηγορίας της στο δείγμα της εργασίας. Συγκεκριμένα,

- 10 έπαιρνε η κάθε απάντηση του μαθητή που η κατηγορία της εμφανίστηκε σε ποσοστό μικρότερο του 15% του δείγματος
- ένα έπαιρνε η κάθε απάντηση του μαθητή που η κατηγορία της εμφανίστηκε σε ποσοστό μεταξύ του 15% και του 40% του δείγματος
- 0.1 έπαιρνε η κάθε απάντηση που η κατηγορία της εμφανίστηκε σε ποσοστό μεγαλύτερο του 40% του δείγματος

Στον Πίνακα Β6 του Παραρτήματος Β παρουσιάζεται ο βαθμός πρωτοτυπίας της κάθε κατηγορίας απαντήσεων που υπολογίστηκε με βάση την κωδικοποίηση της Leikin (2009). Ο συνολικός βαθμός της πρωτοτυπίας υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας που δόθηκε για την πρωτοτυπία σε κάθε απάντηση του μαθητή.

Για σκοπούς σύγκρισης και χρήσης των διαστάσεων της ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας στη συγκεκριμένη εργασία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μετατράπηκαν σε βαθμολογίες από μηδέν μέχρι τέσσερα, αξιοποιώντας το μέσο όρο της κάθε διάστασης και την τυπική απόκλιση της. Δηλαδή, όταν η συνολική βαθμολογία του μαθητή σε μία διάσταση ήταν:

- μεγαλύτερη ή ίση με το άθροισμα του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης έπαιρνε τέσσερα
- μικρότερη του αθροίσματος του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης αλλά μεγαλύτερη ή ίση με το μέσο όρο έπαιρνε τρία
- μικρότερη του μέσου όρου και μεγαλύτερη ή ίση με τη διαφορά του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης έπαιρνε δυο
- μικρότερη από τη διαφορά του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης έπαιρνε ένα

Διόρθωση έργων σύνθετων διαδικασιών σκέψης στα μαθηματικά. Η βαθμολόγηση των έργων των σύνθετων διαδικασιών σκέψης στα μαθηματικά έλαβε υπόψη όχι μόνο την ορθότητα της απάντησης που δίνεται, αλλά και το βαθμό που συσχετίζονταν η βασική γνώση, η κριτική σκέψη και η δημιουργική σκέψη. Συγκεκριμένα, στο έργο Σ1 την υψηλότερη βαθμολογία πήραν οι απαντήσεις που παρουσίαζαν ένδειξη ότι είχαν προβεί σε συσχετίσεις των δεδομένων του διπλού ραβδογράμματος και υποστήριζαν την ορθή απάντηση και τη χαμηλότερη βαθμολογία οι απαντήσεις που έδιναν απλώς μια παρατήρηση ή υποστήριζαν τη λανθασμένη απάντηση. Στο έργο Σ2 την υψηλότερη βαθμολογία πήραν οι απαντήσεις που συμπλήρωσαν ορθά τους πίνακες και ταυτόχρονα παρουσίασαν ένα συστηματικό πλάνο εργασίας και συσχετισμούς για απάντηση του τρίτου ερωτήματος, ενώ τη χαμηλότερη βαθμολογία πήραν απαντήσεις που δεν συμπλήρωσαν ορθά τους πίνακες και στο τρίτο ερώτημα δεν υπήρχαν ενδείξεις ότι προσπάθησαν να κάνουν διάφορους συσχετισμούς, παρά μόνο παρατηρήσεις. Στο Σ3 την υψηλότερη βαθμολογία πήραν οι απαντήσεις που κατάφεραν να βρουν τη σχέση μεταξύ των δεδομένων και να την ελέγξουν ότι ισχύει και τη χαμηλότερη βαθμολογία πήραν απαντήσεις που περιλάμβαναν τουλάχιστον κάποια κατανόηση των δεδομένων (ότι αφορούσε το πρόβλημα εύρεση εμβαδού / περιμέτρου). Τέλος, στο Σ4 την υψηλότερη βαθμολογία πήραν οι απαντήσεις που συνδύαζαν και κατανόηση των δεδομένων που δίνονταν αλλά και συστηματικό τρόπο εργασίας και τη χαμηλότερη βαθμολογία πήραν οι απαντήσεις που παρουσίαζαν μερική κατανόηση των δεδομένων και έλλειψη συστηματικού τρόπου εργασίας.

Ποιοτικά δεδομένα. Τα ποιοτικά δεδομένα που συλλέχτηκαν στα πλαίσια της έρευνας της εργασίας αποτελούν οι καταγραφές των διαδικασιών μάθησης των 85 μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, ενώ εργάζονταν σε αυτά. Χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα εργαλεία:

(α) Καταγραφή της εργασίας των μαθητών στον υπολογιστή μέσω του λογισμικού "Screen Recorder" και ταυτόχρονα ηχογράφηση της συνομιλίας των μαθητών είτε με τον ερευνητή/εκπαιδευτικό είτε με άλλους μαθητές καθώς εργάζονταν στις μαθηματικές δραστηριότητες που τους ανατέθηκαν.

(β) Ηχογράφηση της συζήτησης που γίνεται στην ολομέλεια της τάξης.

(γ) Φύλλα εργασίας με μαθηματικές δραστηριότητες.

(δ) Αρχεία των μαθητών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, στα οποία φαίνεται η εργασία τους όπου η δραστηριότητα το απαιτούσε.

(ε) Παρατήρηση της εργασίας των μαθητών από μια ερευνήτρια (θεατή-συμμετοχική παρατήρηση) και καταγραφή σημειώσεων σχετικά με τους παράγοντες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (δεν έγινε συστηματική καταγραφή για όλους τους μαθητές αλλά σε αυτούς που ήταν πιο έντονη η χρήση των ικανοτήτων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά).

Σημειώνεται ότι τα δεδομένα αυτά δεν αξιοποιήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας αυτής.

Σχεδιασμός Ψηφιακών Περιβαλλόντων Διερευνητικής Μάθησης

Η περιγραφή του σχεδιασμού των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης βασίζεται στους πιο κάτω άξονες: (α) μαθηματικό περιεχόμενο και κατά συνέπεια μαθησιακοί στόχοι, (β) οργάνωση και διαχείριση της εργασίας στην τάξη, (γ) φιλοσοφία χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων και επεξήγηση του τρόπου επιλογής τους και (δ) δομή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Οι πιο πάνω άξονες προήλθαν κυρίως από το συνδυασμό των πιο κάτω ερευνητικών σχεδιασμών και διαπιστώσεων. Οι Tabach et al. (2008) στην περιγραφή του ερευνητικού τους σχεδιασμού για εντατικά περιβάλλοντα μάθησης άλγεβρας υποστηριζόμενα από νέες τεχνολογίες αναφέρουν: το περιεχόμενο του, τη μαθηματική προσέγγιση του περιεχομένου, τις προσδοκώμενες μαθηματικές διαδικασίες σκέψης, τις δυνατότητες των τεχνολογικών εργαλείων που είχαν επιλεγεί για χρήση στα μαθήματα, την οργάνωση της τάξης και τις κοινωνικό-μαθηματικές νόρμες. Παρόμοιοι άξονες σε πιο συνοπτική μορφή χρησιμοποιήθηκαν από τους Pierce και Stacey (2010) στο παιδαγωγικό τους χάρτη για παρουσίαση του τρόπου χρήσης της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών: (α) δυνατότητες τεχνολογικών εργαλείων, (β) οργάνωση και διαχείριση της εργασίας στην τάξη και (γ) μαθηματικό περιεχόμενο. Σε παρόμοιους παράγοντες κατέληξε πρόσφατα ο Drijvers (2015) όταν προσπάθησε, μέσω της σύνοψης έξι ερευνών σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση, να ορίσει τρεις σημαντικούς παράγοντες στους οποίους βασίζεται η απάντηση στο γιατί η χρήση των νέων τεχνολογιών στη μαθηματική εκπαίδευση έχει επιφέρει θετικά αποτελέσματα ή όχι: ο σχεδιασμός (που περιλαμβάνει βασικά τις δυνατότητες και τον τρόπο χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων, το σχεδιασμό των μαθηματικών δραστηριοτήτων και της διδασκαλίας γενικά), ο ρόλος του εκπαιδευτικού (πώς οργανώνει τη μάθηση στην τάξη) και το εκπαιδευτικό περιεχόμενο (περιλαμβάνει μαθηματικές έννοιες και συναισθήματα).

Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης που σχεδιάστηκαν αφορούν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και κατά συνέπεια έχουν τους ίδιους μαθησιακούς στόχους, έχουν την ίδια οργάνωση και διαχείριση της εργασίας στην τάξη (δηλαδή ο ρόλος του εκπαιδευτικού και ο τρόπος εργασίας των μαθητών θα είναι ο ίδιος) και αξιοποιούν με την ίδια φιλοσοφία τα τεχνολογικά εργαλεία. Όμως, διαφέρουν ως προς τη δομή τους, δηλαδή η φιλοσοφία της δόμησης των δραστηριοτήτων τους είναι διαφορετική και κατά συνέπεια οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται. Τα στοιχεία αυτά θα παρουσιαστούν αναλυτικά πιο κάτω.

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, οι δραστηριότητες των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης αφορούν τις ίδιες μαθηματικές έννοιες που προέρχονται από τις πέντε ενότητες περιεχομένου του Αναλυτικού Προγράμματος της Κύπρου: Αριθμοί, Μέτρηση, Γεωμετρία, Άλγεβρα και Στατιστική-Πιθανότητες (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου κ.ά., 2010) και έχουν ως σκοπό την ανάπτυξη των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά. Άρα, οι μαθησιακοί στόχοι και των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης είναι οι ίδιοι. Η οργάνωση των μαθημάτων ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο τους παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2. Στον Πίνακα Δ1 του Παραρτήματος Δ δίνεται για κάθε μάθημα οι μαθησιακοί του στόχοι.

Πίνακας 3.2

Οργάνωση των Μαθημάτων ως προς το Μαθηματικό τους Περιεχόμενο

Μάθημα	Μαθηματικό περιεχόμενο
1 (1Χ40΄)	Επαναλαμβανόμενα μοτίβα
2 (2Χ40΄)	Αξία θέση ψηφίου – Σύγκριση αριθμών
3 (2Χ40΄)	Εκτίμηση
4 (4Χ40΄)	Ευελιξία στις πράξεις-Νοεροί υπολογισμοί
5 (2Χ40΄)	Αλγεβρικές εκφράσεις
6 (3Χ40΄)	Αναπτυσσόμενα μοτίβα – Γενικός τύπος
7 (3Χ40΄)	Ιδιότητες αριθμών
8 (2Χ40΄)	Οπτικοποίηση – Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων
9 (3Χ40΄)	Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων
10 (5Χ40΄)	Περίμετρος & εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων
11 (1Χ40΄)	Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων

Ως προς τον τρόπο οργάνωσης και διαχείρισης της εργασίας στην τάξη, οι μαθητές δούλευαν ο καθένας σε έναν υπολογιστή, αλλά συχνά προτρέπονταν να συνεργάζονται με το διπλανό τους στις διάφορες δραστηριότητες που τους ανατέθηκαν. Στα τελευταία μαθήματα οι μαθητές από μόνοι τους, πριν να τους ανατεθεί, συνεργάζονταν με το διπλανό τους. Θεωρείται ότι η συνεργατική λύση προβλήματος σε ψηφιακό περιβάλλον αποτελεί δημιουργική διαδικασία, αφού αξιοποιεί τη φαντασία των συμμετεχόντων (Charles & Shumar, 2007). Ακόμη, έρευνες έχουν δείξει ότι οι συμμετέχοντες στη συνεργατική λύση προβλήματος σε ψηφιακό περιβάλλον φαίνεται να απολαμβάνουν τη συμμετοχή τους και να χαρακτηρίζονται από επιμονή να λύσουν τη συγκεκριμένη δραστηριότητα (Charles & Shumar, 2007).

Σε κάθε μάθημα οι μαθητές ακολουθούσαν οδηγίες που δίνονταν σε φύλλα εργασίας (διαφορετικά σε κάθε ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης) (βλέπε παράδειγμα στο Παράρτημα Ε, ΣΤ και Ζ αντίστοιχα για ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό) και συμπλήρωναν γραπτές απαντήσεις, όπου ήταν αναγκαίο, αφού οι περισσότερες δραστηριότητες γίνονταν στον υπολογιστή. Κάθε μάθημα περιλάμβανε προβληματισμούς που προέκυπταν από τα εφαρμογίδια που χρησιμοποιούνταν (περισσότερες λεπτομέρειες για τη δομή και τη φιλοσοφία των προβληματισμών που τέθηκαν σε κάθε περιβάλλον θα δοθούν στη συνέχεια). Η διδάσκουσα έθετε στην ολομέλεια της τάξης τους προβληματισμούς χρησιμοποιώντας το διαδραστικό πίνακα για προβολή σε μορφή παρουσίασης και ακούγονταν αρχικές απόψεις μαθητών, όπου προσφερόταν ανάλογα με τον προβληματισμό. Ακολούθως, οι μαθητές εργάζονταν με το τεχνολογικό εργαλείο που τους καλούσε η διδάσκουσα με βάση τον προβληματισμό και συμπλήρωναν όπου κρινόταν τις απαντήσεις στα ερωτήματα των φύλλων εργασίας. Όταν ολοκληρώνονταν ένας προβληματισμός, γινόταν μια μικρή συζήτηση στην τάξη, ώστε οι μαθητές να είχαν τη δυνατότητα να παρουσιάσουν στην ολομέλεια της τάξης τα αποτελέσματά τους, να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις και συγκρίσεις μεταξύ των διαφόρων λύσεων και να ανταλλάξουν ιδέες και εμπειρίες με τα άλλα παιδιά. Γενικά, κατά την εργασία των μαθητών στους υπολογιστές η εκπαιδευτικός/ερευνήτρια επέμβαινε σε περιπτώσεις που χρειάζονταν διευκρίνιση σε δραστηριότητα. Ταυτόχρονα, η εκπαιδευτικός μαζί με μια ερευνήτρια περιφέρονταν μεταξύ των μαθητών και καθώς εργάζονταν αυτοί, τους καλούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, να υποθέσουν, να περιγράψουν αυτό που παρατηρούσαν, να αξιολογήσουν τη λύση τους, καθώς και να βρουν και άλλες λύσεις (όπου ήταν εφικτό). Δηλαδή, χρησιμοποιούσαν ερωτήσεις που ενισχύουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών και ερωτήσεις αξιολόγησης με βάση το μοντέλο ερωτήσεων της Way (2008). Η στήριξη του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές (scaffolding) έχει βρεθεί να έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση τους σε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης (Clements et al., 2008), καθώς και η χρήση ερωτήσεων που οδηγούν στην επικοινωνία και στη συζήτηση μαθηματικών ιδεών αποτελεί εργαλείο που ενισχύει την κατανόηση των μαθητών (Way, 2008· Wood, 2002) και αναπτύσσει την κριτική σκέψη στα μαθηματικά (Widjaja et al., 2010). Για αυτό η εκπαιδευτικός στα συγκεκριμένα περιβάλλοντα μάθησης στήριζε τους μαθητές όπου έκρινε αναγκαίο, χωρίς να περιορίζει την αυτονομία τους. Συγκεκριμένα, με βάση τους Clements et al. (2008) ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να εστιάζει την προσοχή των μαθητών σε συγκεκριμένες πτυχές, να επιμένει στη χρήση ορθής μαθηματικής ορολογίας και να προκαλεί τους μαθητές να σκεφτούν και να κάνουν συνδέσεις, όταν εργάζονται σε περιβάλλοντα με τη χρήση νέων τεχνολογιών. Αυτά αποτελούν στοιχεία της διερευνητικής διδασκαλίας που ενισχύουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Ως προς την φιλοσοφία αξιοποίησης της τεχνολογίας, και στα τρία περιβάλλοντα μάθησης κυριαρχούσε η αρχή της «μάθησης με την τεχνολογία» (Jonassen et al., 2003) και όχι μάθηση από την τεχνολογία, δηλαδή θεωρήθηκε ότι η τεχνολογία αποτελεί συνεργάτης και επέκταση των μαθητών όπου ενσωματώνεται αρμονικά στις πρακτικές της μαθηματικής τάξης (Goos et al., 2003). Επίσης, η αξιοποίηση της τεχνολογίας στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα βασίστηκε στο ότι η μάθηση με τη χρήση νέων τεχνολογιών επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές γνωρίζουν το πώς και το γιατί χρησιμοποιούν τις λειτουργίες του λογισμικού στη μάθηση των μαθηματικών (Goos & Soury-Lavergne, 2010). Δηλαδή, οι μαθητές εμπλέκονταν σε δραστηριότητες, όπου ταυτόχρονα μάθαιναν τις λειτουργίες του λογισμικού/εφαρμογιδίου (πώς) και τη σύνδεση της δραστηριότητας με τη μαθηματική έννοια (γιατί). Επιπρόσθετα, η τεχνολογία χρησιμοποιήθηκε τόσο ως εργαλείο ενίσχυσης (amplification) μιας κατάστασης (π.χ., διερεύνηση διαφορετικών δεδομένων σε λίγο χρονικό διάστημα) όσο και ως εργαλείο αναδιοργάνωσης (reorganization) (π..χ., χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για παρουσίαση αποτελεσμάτων) (Pea, 1987). Ταυτόχρονα η τεχνολογία χρησιμοποιήθηκε τόσο ως εργαλείο για εξάσκηση δεξιοτήτων, αξιοποιώντας τη δυνατότητα των τεχνολογιών για άμεση ανατροφοδότηση και έλεγχο όσο και ως εργαλείο για ανάπτυξη και ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης (Drijvers, 2015). Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκαν μαθηματικά εφαρμογίδια και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας που έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να διερευνούν δεδομένα και να τα παρουσιάζουν με διαφορετικούς τρόπους, να παρατηρούν καταστάσεις και να εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές, να εξασκούνται σε δεξιότητες, να μαθαίνουν από την ανατροφοδότηση που δίνουν, να δίνουν λύσεις σε μια κατάσταση μέσω παιχνιδιού, να δίνουν πολλές λύσεις σε ένα πρόβλημα, να κατασκευάζουν πολλαπλές στρατηγικές για λύση ενός προβλήματος και να κατασκευάζουν προβλήματα (BECTA, 2009· Drijvers, 2015· Kordaki & Balomenou, 2006· Pierce & Stacey, 2010). Αυτοί οι τρόποι χρήσης της τεχνολογίας δεν είναι τυχαίοι, αλλά έρευνες έχουν δείξει τη θετική τους επίδραση στην κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές, στην ενίσχυση της δημιουργικής τους σκέψης, στην ανάπτυξη του κριτικού τους συλλογισμού, στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων και γενικά στην ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους στα μαθηματικά (π.χ., Akcaoglu & Koehler, 2014· Huang et al., 2014· Hsiao, 2007· Kolovou et al., 2013·Kordaki, 2014· Kordaki & Balomenou, 2006· Tabach et al., 2008). Ταυτόχρονα, σημειώνεται ότι έρευνες έχουν δείξει ότι αυτοί οι τρόποι χρήσης της τεχνολογίας ενισχύουν το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση των μαθηματικών και κατά συνέπεια τη θέληση τους για ενεργό συμμετοχή τους (π.χ., Huang et al., 2014· Tabach & Friedlander, 2006).

Όμως, τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης διαφέρουν ως προς τη δομή τους και κατά συνέπεια στις δραστηριότητες που εμπλέκουν τους μαθητές, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.1. Δηλαδή, διαφέρουν ως προς το πότε και με ποιο τρόπο δίνουν στους μαθητές (δομημένα ή λιγότερα δομημένα) την ελευθερία να αποφασίζουν από μόνοι τους ποια ικανότητα ανωτέρου επιπέδου σκέψης να χρησιμοποιήσουν για να λύσουν τις δραστηριότητες που περιλαμβάνουν. Επισημαίνεται, ότι μπορεί οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται σε κάθε περιβάλλον να είναι διαφορετικές αλλά απαιτούν τη χρήση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη (Μοντέλο Σκέψης, Iowa

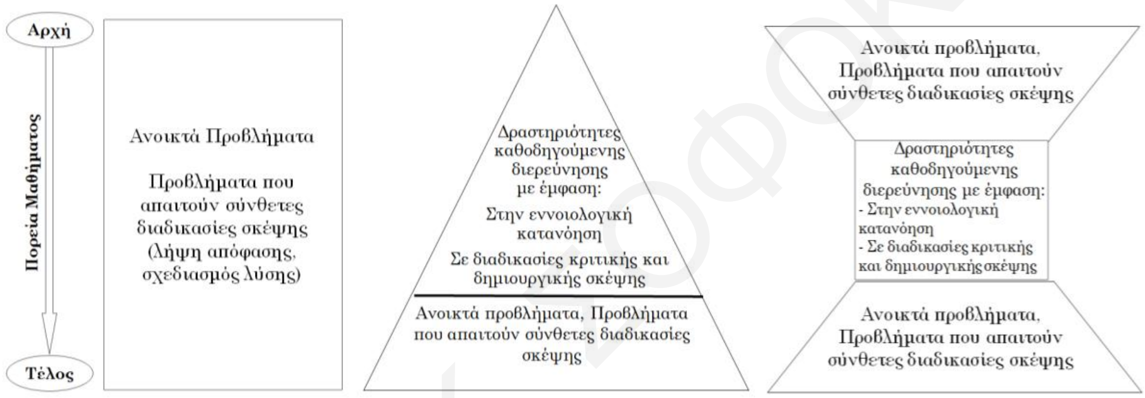
Department of Education, 1989). Ακόμη, τα τρία περιβάλλοντα μάθησης διέπονται από τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής μάθησης, όπου ο μαθητής είναι το επίκεντρο της μάθησης και καλείται να εργαστεί με παρόμοιους τρόπους όπως ένας μαθηματικός (Maaß & Artigue, 2013). Πιο συγκεκριμένα, σε ένα τέτοιο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης ο μαθητής παρατηρεί φαινόμενα, υποβάλει ερωτήσεις, ψάχνει μαθηματικούς τρόπους για επίλυση προβλημάτων, ερμηνεύει και να αξιολογεί λύσεις, γενικεύει και συνδέει καταστάσεις για ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και δομών (Maaß & Artigue, 2013· NRC, 1996, 2000). Πιο κάτω παρουσιάζεται αναλυτικά τι περιλάμβανε το κάθε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης:

1. Το ένα περιβάλλον μάθησης είναι το *Ανοικτό Περιβάλλον (βλέπε Διάγραμμα 3.1α)*, το οποίο περιελάμβανε μόνο καταστάσεις λύσης προβλήματος που απαιτούσαν από τους μαθητές σύνθετες διαδικασίες σκέψης, δηλαδή απαιτούσαν για την επίλυσή τους συνδυασμό βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Χρησιμοποιήθηκαν μη συνηθισμένα προβλήματα, προβλήματα σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης, όπου η λύση τους δεν ήταν εμφανής και γνωστή στους μαθητές και έτσι αναγκάζονταν να αναπτύξουν πρακτικές για να τα αντιμετωπίσουν. Γενικά σε αυτό το περιβάλλον, οι καταστάσεις επίλυσης προβλήματος που εμπλέκονταν οι μαθητές δεν αναμενόταν από την αρχή να φτάσουν στη λύση τους, αλλά μέσα από διαδικασίες διερεύνησης του περιβάλλοντος και των συνθηκών, καθώς και της αξιοποίησης της βασικής τους γνώσης και των διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης μπορούσαν να φτάσουν σε μια λύση (ορθή ή όχι). Το όνομα του το περιβάλλον αυτό το πήρε από τα λεγόμενα ανοικτά προβλήματα που με βάση τον ορισμό τους φαίνονται ότι ανταποκρίνονται σε αυτό που αναφέρεται πιο πάνω. Συγκεκριμένα, τα ανοικτά προβλήματα είναι αυτά που χαρακτηρίζονται ως πλούσια σε προκλήσεις προς τους μαθητές για να σκέφτονται και να προχωρούν πέραν από αυτό που αναμένεται και επιδέχονται ένα μεγάλο εύρος λύσεων ή προσεγγίσεων (Foong, 2000).
2. Το δεύτερο περιβάλλον είναι το *Καθοδηγούμενο Περιβάλλον* (*βλέπε Διάγραμμα 3.1β*) το οποίο άρχιζε με καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες που απαιτούσαν από τους μαθητές είτε τη χρήση διαδικασιών κριτικής σκέψης είτε τη χρήση διαδικασιών δημιουργικής σκέψης και καθοδηγείτο σταδιακά σε δραστηριότητες που απαιτούσαν σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή, οι μαθητές αρχικά εμπλέκονταν σε δραστηριότητες στις οποίες καθοδηγούνταν για το τι θα κάνουν ώστε να χρησιμοποιήσουν είτε τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της βασικής τους γνώσης για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση

είτε τη σύνθεση πληροφοριών και τη νοητική δημιουργία για να δημιουργήσουν νέα γνώση. Προς το τέλος του μαθήματος οι μαθητές εμπλέκονταν σε προβλήματα που απαιτούσαν συνδυασμό βασικής γνώσης και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Τα προβλήματα αυτά ήταν μη συνηθισμένα, αφορούσαν σχεδιασμό λύσης και λήψης απόφασης και η λύση τους δεν ήταν εμφανής και γνωστή στους μαθητές και έτσι αναγκάζονταν να αναπτύξουν πρακτικές για να τα αντιμετωπίσουν. Δηλαδή, τα προβλήματα αυτά ήταν ίδιας φιλοσοφίας με αυτά που αξιοποιήθηκαν στο *Ανοικτό Περιβάλλον* και στα περισσότερα μαθήματα αξιοποιήθηκαν και τα αντίστοιχα του *Ανοικτού Περιβάλλοντος* στην ολοκλήρωση του μαθήματος. Δηλαδή, στο περιβάλλον αυτό οι μαθητές εμπλέκονταν σε δραστηριότητες με διαβαθμισμένο βαθμό δυσκολίας και ελευθερίας για λήψη απόφασης ως προς τις διαδικασίες που θα ακολουθήσουν. Αυτό το περιβάλλον μάθησης μοιάζει με αυτό που ονομάζεται από τους Jacobson et al. (2010) ως «Δομημένο προς ανοικτό περιβάλλον» (high-to-low structure). Επίσης, αξιοποίησε όπου ταίριαζε με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο την αλληλουχία δραστηριοτήτων που πρότεινε ο Leung (2011) (επιστημικό μοντέλο) και οι Fahlgren και Brunstrom (2014) (μοντέλο εξερεύνησης, εξήγησης και γενίκευσης).

3. Το τρίτο περιβάλλον συνδυάζει τα προηγούμενα και για αυτό ονομάστηκε *Μικτό Περιβάλλον* (βλέπε Διάγραμμα 3.1γ). Συγκεκριμένα, το περιβάλλον αυτό άρχιζε με μια κατάσταση λύσης προβλήματος που απαιτούσε από τους μαθητές σύνθετες διαδικασίες σκέψης, δηλαδή απαιτούσε για την επίλυσή του συνδυασμό βασικής γνώσης περιεχομένου και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Το πρόβλημα αυτό ήταν μη συνηθισμένο και αφορούσε συνήθως σχεδιασμό λύσης ή λήψης απόφασης, όπου η λύση του δεν ήταν εμφανής και γνωστή στους μαθητές. Δεν απαιτείτο οι μαθητές να λύσουν το πρόβλημα αυτό επιτυχημένα, αλλά να αναπτύξουν πρακτικές για να το αντιμετωπίσουν. Στα περισσότερα μαθήματα που αναπτύχθηκαν αξιοποιήθηκαν οι αντίστοιχες καταστάσεις προβλήματος του *Ανοικτού Περιβάλλοντος* (δηλαδή τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην αρχή του ανοικτού περιβάλλοντος στο αντίστοιχο μαθηματικό περιεχόμενο). Ακολούθως, οι μαθητές εμπλέκονταν σε καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες. Στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές καθοδηγούνταν για το τι θα κάνουν ώστε να χρησιμοποιήσουν είτε τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της βασικής τους γνώσης για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση είτε τη σύνθεση πληροφοριών και τη νοητική δημιουργία για να δημιουργήσουν νέα γνώση. Σημειώνεται ότι ο βαθμός καθοδήγησης μειωνόταν στην πορεία του

μαθήματος. Οι περισσότερες από αυτές τις δραστηριότητες ήταν ίδιες με το *Καθοδηγούμενο Περιβάλλον*, αλλά η καθοδήγηση σε κάποιες από αυτές ήταν σε λιγότερο βαθμό σε σύγκριση με το καθοδηγούμενο περιβάλλον. Προς το τέλος του μαθήματος οι μαθητές εμπλέκονταν πάλι σε λύση προβλημάτων που απαιτούσαν σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Αυτό το περιβάλλον μάθησης μοιάζει με αυτό που ονομάζεται από τους Jacobson et al. (2010) ως «Ανοικτό προς δομημένο περιβάλλον» (low-to-high structure). Επίσης, αυτό το περιβάλλον φαίνεται να αξιοποιεί πτυχές της προσέγγισης που χρησιμοποίησε ο Bokhove (Bokhove, 2013, 2014· Bokhove & Drijvers, 2012) ως προς το ότι εμπλέκει τους μαθητές αρχικά με μία κατάσταση που τους προκαλεί «κρίση» και μπορεί να τους «οδηγήσει σε λάθος» απάντηση.



(α) Ανοικτό (β) Καθοδηγούμενο (γ) Μικτό

Διάγραμμα 3.1. Διαγραμματική μορφή της δομής των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης.

Σχεδιάστηκαν μαθήματα 28 σαρανταλέπτων για κάθε ένα ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης, οργανωμένα σε 11 μαθήματα με βάση το μαθηματικό περιεχόμενό τους.

Οι διαφορές και οι ομοιότητες των τριών αυτών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης φαίνονται πιο ξεκάθαρα στο παράδειγμα που ακολουθεί στον Πίνακα 3.3. Στο παράδειγμα του Πίνακα 3.3, φαίνεται ότι για το μαθηματικό περιεχόμενο του εμβαδού και της περιμέτρου σχημάτων τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης είχαν τους ίδιους στόχους. Με βάση τη διατύπωση των στόχων αυτών επιδιώκονταν εκτός από την ενίσχυση της γνώσης σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων, και η ενίσχυση διαδικασιών κριτικής σκέψης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση), δημιουργικής σκέψης (σύνθεση, νοητική δημιουργία) και σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Όσον αφορά τα ψηφιακά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε ψηφιακό περιβάλλον ήταν τα ίδια, εκτός από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην αρχική δραστηριότητα του κάθε περιβάλλοντος. Υπογραμμίζεται ότι παρόλο που αξιοποιήθηκαν τα ίδια εφαρμογίδια με την ίδια φιλοσοφία χρήσης τους στο μάθημα (οι μαθητές μέσω των μαθηματικών δραστηριοτήτων μάθαιναν και τη λειτουργία των εφαρμογιδίων), οι μαθηματικοί προβληματισμοί που τέθηκαν με βάση τα εφαρμογίδια διέφεραν ώστε να ανταποκρίνεται στη φιλοσοφία δόμησης των δραστηριοτήτων του κάθε περιβάλλοντος. Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον οι μαθητές αντιμετώπισαν ανοικτά προβλήματα, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον οι μαθητές έλυσαν προβλήματα με διαβαθμισμένο βαθμό δυσκολίας και καθοδήγησης και στο μικτό περιβάλλον οι μαθητές ενώ αρχικά αντιμετώπισαν ανοικτό πρόβλημα, ακολούθως έλυσαν προβλήματα με διαβαθμισμένο βαθμό δυσκολίας και καθοδήγησης.

Ολοκληρώνοντας το μέρος αυτό, σημειώνεται ότι τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης θεωρούνται ότι συνθέτουν αυθεντικό περιβάλλον μάθησης (Herrington & Oliver, 2000). Αυτό γιατί περιλαμβάνουν διερεύνηση καταστάσεων από την πραγματική ζωή, λύση σύνθετων προβλημάτων, λύση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους, συνεργατική μάθηση, ενθάρρυνση για αναστοχασμό και «περιορισμένο» ρόλο εκπαιδευτικού που αποτελούν χαρακτηριστικά του αυθεντικού περιβάλλοντος μάθησης.

Πίνακας 3.3

Ανάλυση Παραδείγματος Ανοικτού, Καθοδηγούμενου και Μικτού Ψηφιακού Περιβάλλοντος Διερευνητικής Μάθησης

	Ανοικτό Περιβάλλον (Παράρτημα Ε)	***Καθοδηγούμενο Περιβάλλον (Παράρτημα ΣΤ)***	***Μικτό Περιβάλλον (Παράρτημα Ζ)***
Στόχοι	Οι μαθητές: 1. Να εκτιμούν και να υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων. 2. Να διερευνούν ισοδύναμα σχήματα και να εξετάζουν σε ποιες περιπτώσεις έχουν και την ίδια περίμετρο. 3. Να λύνουν προβλήματα λήψης απόφασης και σχεδιασμού σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων.		
Τεχνολογικό Εργαλείο	Εφαρμογίδιο 1: Party Designer Εφαρμογίδιο 2: *Area Builder* Εφαρμογίδιο 3: *Fido's Flower Bed (Perimeter and Area)* Εφαρμογίδιο 4: *Home styler*	Εφαρμογίδιο 3 και 4 Εφαρμογίδιο 5: *Perimeter Shape Game* Εφαρμογίδιο 6: *Area Shape Game* Εφαρμογίδιο 7: *Office Paintball* Εφαρμογίδιο 8: *Zoo Designer*	Εφαρμογίδια 1, 2, 3 και 4
Δόμηση Δραστηριοτήτων στα Μαθήματα *Περιέργεια/ Πρόκληση του ενδιαφέροντος - Αρχική δραστηριότητα*	Επίλυση ανοικτών προβληματισμών: ▪ Κατασκευή ορθογωνίων με συγκεκριμένο εμβαδόν και περίμετρο σε πλαίσιο με συγκεκριμένες διαστάσεις (εφαρμογίδιο 1). ▪ Σχεδιασμός σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν και περίμετρο (εφαρμογίδιο 2).	Επίλυση καθοδηγούμενων προβληματισμών που απαιτούσαν διαδικασίες κριτικής και δημιουργικής σκέψης και όχι συνδυασμό τους: ▪ Επιλογή σχημάτων με δοσμένο περίμετρο (εφαρμογίδιο 5) και εμβαδόν (εφαρμογίδιο 6). ▪ Αξιολόγηση ενός αριθμού εάν δείχνει την περίμετρο ή το εμβαδόν δοσμένου σχήματος (εφαρμογίδιο 7) ▪ Σχεδιασμός ορθογωνίων (i) με συγκεκριμένο εμβαδόν, (ii) με συγκεκριμένη περίμετρο και (iii) με συγκεκριμένη περίμετρο και εμβαδόν (εφαρμογίδιο 8).	Επίλυση ανοικτών προβληματισμών: ▪ Κατασκευή ορθογωνίων με συγκεκριμένο εμβαδόν και περίμετρο σε πλαίσιο με συγκεκριμένες διαστάσεις (εφαρμογίδιο 1). ▪ Σχεδιασμός σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν και περίμετρο (εφαρμογίδιο 2). (Ίδιο με το *Ανοικτό Περιβάλλον*)

Πορεία δραστηριοτήτων	Επίλυση ανοικτών προβληματισμών (εφαρμογίδιο 3): ▪ Αξιολόγηση της ορθότητας δηλώσεων που αφορούσαν την έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού σχημάτων και τεκμηρίωση της απάντησής τους.	Καθοδηγούμενη διερεύνηση (εφαρμογίδιο 3): 1. Σχεδιασμός όσων περισσότερων σχημάτων (κήπων) μπορούν που να έχουν εμβαδόν 8 m^2 και προσδιορισμός αυτού με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη περίμετρο. 2. Αξιολόγηση της ορθότητας της πρότασης «Όλα τα σχήματα με εμβαδόν 36 m^2, έχουν την ίδια περίμετρο»→ μελέτη και έλεγχος της ορθότητας της πρότασης μέσω των δοσμένων σχημάτων του εφαρμογιδίου και εύρεση αυτού με τη μικρότερη περίμετρο. 3. Σχεδιασμός ορθογώνιων σχημάτων με εμβαδόν 12 m^2 και 16 m^2 και συμπλήρωση πίνακα. Ακολούθως, μελέτη του πίνακα και εύρεση των σχημάτων των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους. 4. Σχεδιασμός διαφορετικών ορθογωνίων που έχουν περίμετρο 24 m και συμπλήρωση πίνακα. Ακολούθως, μελέτη του πίνακα και εύρεση του ορθογωνίου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. 5. Λύση προβληματισμού που αποτελεί εφαρμογή της λύσης της δραστηριότητας 4.	Καθοδηγούμενη διερεύνηση (εφαρμογίδιο 3): 1. Σχεδιασμός όσων περισσότερων σχημάτων (κήπων) μπορούν που να έχουν εμβαδόν 8 m^2 και προσδιορισμός αυτού με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη περίμετρο. 2. Αξιολόγηση της ορθότητας της πρότασης «Όλα τα σχήματα με εμβαδόν 36 m^2, έχουν την ίδια περίμετρο»→ μελέτη και έλεγχος της ορθότητας της πρότασης μέσω των δοσμένων σχημάτων του εφαρμογιδίου και εύρεση αυτού με τη μικρότερη περίμετρο. 3. Σχεδιασμός διαφορετικών ορθογωνίων, των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους. 4. Σχεδιασμός όλων των ορθογωνίων με περίμετρο 24 m και εύρεση αυτού που έχει το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν. 5. Λύση προβληματισμού που αποτελεί εφαρμογή της λύσης της δραστηριότητας 4.
Ολοκλήρωση του Μαθήματος	Επίλυση ανοικτού προβλήματος που απαιτεί χρήση σύνθετων διαδικασιών σκέψης (χρήση εφαρμογιδίου 4). ▪ Κατασκευή ενός σπιτιού με ένα όροφο σε οικόπεδο 100 m^2 ▪ Ορισμός κριτηρίων για κατασκευή του καλύτερου σπιτιού και τιμής πώλησης.		
Τελική Αξιολόγηση	Επίλυση ανοικτού προβλήματος που απαιτεί χρήση σύνθετων διαδικασιών σκέψης (χρήση όποιου εφαρμογιδίου θέλουν): ✓ Εις βάθος κατανόηση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού. ✓ Εύρεση σχέσεων		

Διαδικασία Εκτέλεσης της Έρευνας

Ο σχεδιασμός και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας αξιοποιεί τη δομή εργασίας του παραδοσιακού διδακτικού σχεδιασμού ADDIE (Analysis, Design, Development, Implementation and Evaluation) (Kelly, Baek, Lesh & Bannan-Ritland, 2008). Οι φάσεις διεξαγωγής της έρευνας παρουσιάζονται στο πιο κάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 3.2) και αναλύονται στη συνέχεια εκτενέστερα.

Α' φάση
(Ανάλυση)

- Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας--> εντοπισμός του προβλήματος, καθορισμός του σκοπού και των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας.

Β' φάση
(Σχεδιασμός & Ανάπτυξη)

- Σχεδιασμός του εργαλείου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (*Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά)* και διόρθωσή του μετά από πιλοτική χορήγησή έργων του σε 74 μαθητές.
- Σχεδιασμός των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης και διόρθωσή τόσο του περιεχομένου τους για να αντπαοκρίνονται στο σκοπό τους όσο και των οδηγιών για να ανταποκρίνονται σε μαθητές Στ' δημοτικού. Πιλοτική εφαρμογή καθοδηγούμενου ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης.

Γ' φάση
(Εφαρμογή)

- Χορήγηση του *Δοκιμίου Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* σε 802 μαθητές κατά την περίοδο: τέλος Οκτωβρίου 2014 - αρχές Φεβρουαρίου 2015. Η χορήγηση σε κάθε τμήμα Στ' δημοτικού είχε διάρκεια τρεις σαραντάλεπτες περιόδους.
- Εφαρμογή των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης - 85 μαθητές συμμετείχαν σε 15 μαθήματα των 90 λεπτών κατά την περίοδο 13 Φεβρουαρίου 2015 μέχρι 6 Ιουνίου 2015.
- Χορήγηση του *Δοκιμίου Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* στους 85 μαθητές στα τρία πρώτα και στα δυο τελευταία μαθήματα (συνολική διάρκεια κάθε χορήγησης 120 λεπτά).
- Ο χρόνος διδασκαλίας ήταν 28 σαραντάλεπτα.
- Συλλογή των ποσοτικών και των ποιοτικών δεδομένων της έρευνας

Δ' φάση
(Αξιολόγηση)

- Αξιολόγηση των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας (κωδικοποίηση και επεξεργασία με κατάλληλες τεχνικές ανάλυσης) για απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας.

Διάγραμμα 3.2. Δομή του σχεδιασμού της έρευνας και διαδικασία διεξαγωγής της.

Πρώτη φάση. Η πρώτη φάση της έρευνας περιλάμβανε την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για εντοπισμό του προβλήματος. Με βάση την ανάλυση του προβλήματος, διατυπώθηκε ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Ακολούθως, έγινε εκτεταμένη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, ώστε να γραφτεί το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας. Το θεωρητικό πλαίσιο αποτελεί τη βάση για τη δεύτερη φάση της έρευνας που αφορά το σχεδιασμό και την ανάπτυξη των εργαλείων που χρειάζονται για την εξέταση των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας.

Δεύτερη φάση. Η δεύτερη φάση της έρευνας περιλάμβανε το σχεδιασμό (i) του εργαλείου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και (i) των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης με στόχο την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά.

Ο σχεδιασμός του εργαλείου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (*Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά)* έγινε με βάση σχετικές έρευνες και διεθνείς εξετάσεις δεξιοτήτων σκέψης. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το σχεδιασμό του εργαλείου δόθηκαν ήδη προηγουμένως. Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού (και πριν την τελική εκδοχή του *Δοκιμίου*) έγινε πιλοτική χορήγησή κάποιων έργων του Δοκιμίου σε 74 μαθητές Στ΄ Δημοτικού κατά τη σχολική χρονιά 2012-2013 με στόχο τον έλεγχο σαφήνειας των οδηγιών των ασκήσεων και του χρόνου που χρειάζονταν για να συμπληρωθούν από μαθητές Στ΄ δημοτικού.

Με βάση αυτά τα δεδομένα αποφασίστηκαν να γίνουν κάποιες αλλαγές στο *Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά*. Για ευκολότερη παρουσίαση των αλλαγών, γίνεται αναφορά σε αυτές που έγιναν σε κάθε ομάδα έργων που αντιστοιχούσε σε κάθε μια ικανότητα που περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, λόγω χρονικού περιορισμού σε κάποιες ασκήσεις που έλεγχαν τη βασική γνώση περιεχομένου αφαιρέθηκαν οι αιτιολογήσεις που καλούνταν οι μαθητές να γράψουν για να εξηγήσουν με ποιο τρόπο σκέφτηκαν για να δώσουν την απάντηση (π.χ., στην άσκηση Β1-αναγνώριση τριγώνων- και Β2-αναγνώριση ορθογωνίων- οι μαθητές καλούνταν να γράψουν γιατί τα σχήματα που σημείωσαν είναι τρίγωνα και ορθογώνια αντίστοιχα και στην άσκηση Β3-σύγκριση του μεγέθους των αριθμών- οι μαθητές καλούνταν να γράψουν γιατί η απάντηση που έδωσαν είναι ορθή). Επίσης, οι ασκήσεις που αφορούσαν τη βασική γνώση περιεχομένου περιορίστηκαν σε επτά αφαιρώντας αυτές που εξέταζαν την ίδια μαθηματική γνώση (π.χ., αντί να υπάρχουν έξι συγκρίσεις μεγέθους αριθμών περιορίστηκαν σε τρεις ή αντί να υπάρχουν ασκήσεις για αναγνώριση όλων των σχημάτων περιορίστηκαν σε δυο: τρίγωνα και ορθογώνια), ώστε ο χρόνος που χρειαζόταν να επιλυθούν να μην ξεπερνούσε τα 20 λεπτά. Όσον αφορά το μέρος του δοκιμίου για την κριτική σκέψη στα μαθηματικά, έγιναν τρεις βασικές αλλαγές. Πρώτον, αφαιρέθηκαν ασκήσεις που αφορούσαν την ίδια δεξιότητα κριτικής σκέψης. Για παράδειγμα υπήρχαν δυο ασκήσεις για αναγνώριση και συμπλήρωση μοτίβων (ικανότητα ανάλυσης), τρεις ασκήσεις επιλογής συμπεράσματος με βάση δεδομένα (ικανότητα σύνδεσης) και δυο ασκήσεις διατύπωσης κανόνα αξιολογώντας αριθμό αν ανήκει σε μοτίβο (ικανότητα αξιολόγησης) και επιλέχθηκε σε κάθε περίπτωση η άσκηση που ήταν πιο κατανοητή η οδηγία της στους περισσότερους μαθητές. Δεύτερον, αφαιρέθηκε μία άσκηση λόγω μη κατανόησης των οδηγιών από τους μαθητές. Τρίτον διορθώθηκε η οδηγία του έργου Κ6 (ονομασία ομάδας σχημάτων), ώστε να είναι κατανοητό στους μαθητές τι θα πρέπει να κάνουν και απλοποιήθηκε ως έργο (δηλαδή τα πρώτα δυο ερωτήματα διαμορφώθηκαν ώστε να αφορούν μια ομάδα σχημάτων, ενώ προηγουμένως το καθένα είχε από δυο ομάδες σχημάτων ξένες μεταξύ τους). Οι αλλαγές αυτές αποσκοπούσαν τόσο στην καλύτερη κατανόηση των έργων από τους μαθητές του δείγματος όσο και στο να περιοριστεί ο χρόνος συμπλήρωσης αυτών των έργων στα 30 λεπτά . Όσον αφορά τις ασκήσεις της δημιουργικής σκέψης δεν έγιναν κάποιες αλλαγές σε αυτές. Αυτό γιατί τα περισσότερα έργα ή παρόμοια έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες στην Κύπρο (Κάττου, 2013· Kontoyianni, 2014· Pitta-Pantazi et al., 2013β, 2014) και ταυτόχρονα βοήθησε η εμπειρία της ερευνήτριας στη διόρθωση αλλά και στη χορήγηση τέτοιων έργων σε μαθητές Στ΄ δημοτικού. Τέλος, όσον αφορά τα έργα που εξέταζαν σύνθετες διαδικασίες σκέψης αφαιρέθηκε ένα έργο που δεν ήταν κατανοητό στους μαθητές. Ακόμη, στα πλαίσια της φάσης αυτής, το δοκίμιο όπως προέκυψε μετά τις πιο πάνω αλλαγές εξετάστηκε προσεκτικά τόσο από ερευνητές ειδικούς με το θέμα για έλεγχο της εγκυρότητας περιεχομένου του όσο και από εκπαιδευτικούς για τελικό έλεγχο του βαθμού κατανόησης των οδηγιών από μαθητές Στ΄ δημοτικού.

Ακόμη, η δεύτερη φάση της έρευνας περιλάμβανε το σχεδιασμό των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης. Συνολικά σχεδιάστηκαν μαθήματα 28 σαρανταλέπτων για κάθε ένα περιβάλλον, που αντιστοιχούσαν σε έντεκα μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (βλέπε Πίνακα 3.2 και Παράρτημα Δ). Περισσότερες λεπτομέρειες για το σχεδιασμό τους, δόθηκαν προηγουμένως στο κεφάλαιο αυτό. Αφού ολοκληρώθηκαν τα μαθήματα αυτά, δόθηκαν κάποια σε εκπαιδευτικούς για έλεγχο κατανόησης των οδηγιών από μαθητές και έγινε έλεγχος της ανταπόκρισης των μαθημάτων για το σκοπό που σχεδιάστηκαν (τόσο στη δομή που αναφέρονται όσο και στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά) από την επιβλέπουσα καθηγήτρια. Ακολούθως, έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις. Ακόμη, εφαρμόστηκε ένα καθοδηγούμενο περιβάλλον διερευνητικής μάθησης με τη χρήση του λογισμικού SimCalc (Pitta-Pantazi et al., 2013α· Σοφοκλέους & Πίττα-Πανταζή, 2014) και διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές χρειάζονται περισσότερο χρόνο σε κάποιες δραστηριότητες και το ότι σε κάποιες δραστηριότητες είναι αρκετό οι μαθητές να αποθηκεύουν την εργασία τους στον υπολογιστή και να μην τη μεταφέρουν στο χαρτί. Επιπρόσθετα, φάνηκε ότι η εργασία σε ζευγάρια λειτουργεί και φαίνεται ο τρόπος σκέψης των μαθητών.

Τρίτη φάση. Η τρίτη φάση της έρευνας αφορά την εφαρμογή/την υλοποίηση της έρευνας. Κατά την σχολική χρονιά 2014-2015 εξασφαλίστηκε η σχετική άδεια διεξαγωγής έρευνας σε σχολεία της Κύπρου από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου. Η εφαρμογή της έρευνας έγινε σε δυο μέρη. Το πρώτος μέρος αφορούσε τη συλλογή δεδομένων για τη διασαφήνιση της έννοιας της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, εξασφαλίστηκε πρόσβαση σε δημοτικά σχολεία σε όλες τις επαρχίες της ελεύθερης Κύπρου (δόθηκαν αναλυτικά δεδομένα για τα υποκείμενα της έρευνας προηγουμένως) και γραπτές συγκαταθέσεις γονιών για συμμετοχή των παιδιών τους στην έρευνα και χορηγήθηκε σε αυτούς το *Δοκίμιο*. Συνολικά για τη συμπλήρωση του *Δοκιμίου* οι μαθητές χρειάζονταν 120 λεπτά (υπήρχαν μαθητές που ολοκλήρωναν τη συμπλήρωσή του σε λιγότερο χρόνο και παρακινούνταν από την ερευνήτρια να ξαναδούν τις λύσεις τους). Συνήθως η χορήγηση γινόταν σε δυο μέρες με διάστημα η μια από την άλλη το πολύ μιας εβδομάδας, όπου τη μια μέρα οι μαθητές συμπλήρωναν τα έργα βασικής γνώσης περιεχομένου, κριτικής σκέψης και δημιουργικής σκέψης σε ένα ογδοντάλεπτο και την άλλη μέρα συμπλήρωναν τα έργα σύνθετων διαδικασιών σκέψης σε ένα σαραντάλεπτο. Το μέρος αυτός της έρευνας έγινε κατά το διάστημα τέλος Οκτωβρίου 2014 μέχρι αρχές Φεβρουαρίου 2015.

Το δεύτερος μέρος της έρευνας αφορούσε τη συλλογή δεδομένων σχετικά με το ρόλο των νέων τεχνολογιών στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για αυτό δόθηκαν προσκλήσεις που απευθύνονταν σε γονείς σε διάφορα σχολεία της επαρχίας Λευκωσίας, οι οποίες αφορούσαν την ενημέρωση για διεξαγωγή δωρεάν μαθημάτων στα μαθηματικά με τη χρήση της τεχνολογίας για ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Συνολικά ενδιαφέρθηκαν να παρακολουθήσουν τα μαθήματα 120 μαθητές, όπου οι 85 από αυτούς συμπλήρωσαν το *Δοκίμιο* τόσο στην αρχική και όσο και στην τελική μέτρηση και συμμετείχαν σε όλα τα μαθήματα (15 συναντήσεις των 90 λεπτών). Η εύρεση μαθητών με ενδιαφέρον και κίνητρα για συμμετοχή σε τέτοια μαθήματα, αποτελεί παράγοντα αποτελεσματικής χρήσης των νέων τεχνολογιών στη μάθηση των μαθηματικών (π.χ., Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010· Pierce, Stacey, & Barkatsas, 2007· Reed, Drijvers & Kirschner, 2010).

Κάθε μαθητής που συμμετείχε στα ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης είχε το δικό του ηλεκτρονικό υπολογιστή, ώστε να εξασφαλιστεί ότι όλοι οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στο μάθημα. Πριν την έναρξη του μαθήματος, ενεργοποιείτο από την ερευνήτρια σε όλους τους υπολογιστές το εργαλείο καταγραφής της εργασίας στον υπολογιστή και της ομιλίας του μαθητή (screen recorder) και σταματούσε η λειτουργία του με το τέλος του μαθήματος. Υπήρχε πάντα ανοικτή σε κάθε υπολογιστή ιστοσελίδα σε ένα εξυπηρετητή διαδικτύου με τους συνδέσμους των εφαρμογιδίων που χρησιμοποιούνταν σε κάθε μάθημα, ώστε να μεγιστοποιείται ο διδακτικός χρόνος. Καθώς εργάζονταν στον ηλεκτρονικό υπολογιστή η διδάσκουσα/ερευνήτρια και μια ερευνήτρια καλούσαν τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, να υποθέσουν, να περιγράψουν αυτό που παρατηρούν, να αξιολογήσουν τη λύση τους, καθώς και να βρουν και άλλες λύσεις. Σε κάποιες δραστηριότητες ενθαρρύνονταν οι μαθητές να συνεργαστούν μεταξύ τους, ώστε να γίνεται η καταγραφή της συνομιλίας τους (και κατ'επέκταση του τρόπου σκέψης τους). Γενικά έγινε προσπάθεια να καταγράφουν τη σκέψη τους οι μαθητές και το συμπέρασμά τους, όπου ήταν εφικτό και χρήσιμο. Σημειώνεται ότι δόθηκε χρόνος στους μαθητές (στο σύνολο 120 λεπτά) τόσο στα πρώτα τρία μαθήματα όσο και στα δυο τελευταία, για να συμπληρώσουν το *Δοκίμιο* για την αρχική και την τελική τους μέτρηση αντίστοιχα.

Τέταρτη φάση. Στην τέταρτη φάση της έρευνας, έγινε η κωδικοποίηση των ποσοτικών δεδομένων του δείγματος ώστε να είναι δυνατή η επεξεργασία τους με κατάλληλες τεχνικές ανάλυσης δεδομένων, για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Δηλαδή, σε αυτή τη φάση γίνεται αξιολόγηση των δεδομένων της έρευνας, ώστε να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα που εντοπίστηκε από τη βιβλιογραφία και το οποίο αφορά το ρόλο των νέων τεχνολογιών στην ανάπτυξη και στην ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο.

Τεχνικές Ανάλυσης Δεδομένων

Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, χρησιμοποιήθηκαν και ποσοτικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων. Ο Πίνακας 3.4 παρουσιάζει συνοπτικά τις τεχνικές ανάλυσης δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για την απάντηση του κάθε ερευνητικού ερωτήματος της εργασίας, καθώς και το μέσο συλλογής δεδομένων και το δείγμα της εργασίας από όπου προέρχονται τα δεδομένα.

Πίνακας 3.4

Τεχνικές Ανάλυσης Δεδομένων με βάση τα Ερευνητικά Ερωτήματα

Ερευνητικό Ερώτημα	Μέσα Συλλογής Δεδομένων - Δείγμα	Τεχνική Ανάλυσης Δεδομένων
1. Επιβεβαιώνεται η δομή του Μοντέλου της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) στα μαθηματικά με βάση εμπειρικά δεδομένα μαθητών Στ΄δημοτικού;	▪ Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά - Μέτρηση των 802 μαθητών	Επιβεβαιωτική Παραγοντική Ανάλυση (CFA: Confirmatory Factor Analysis) → Εξέταση του βαθμού προσαρμογής των δεδομένων των 802 μαθητών στη δομή του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989), όπως αυτό διαμορφώθηκε κατάλληλα με βάση τη βιβλιογραφία για να περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (βλέπε Διάγραμμα 4.1 στο Κεφάλαιο IV).
2. Σε ποιο βαθμό οι επιδόσεις των μαθητών Στ΄ δημοτικού στη βασική γνώση, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργική σκέψη ερμηνεύουν την επίδοσή τους στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά και με ποιο τρόπο;	▪ Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά - Μέτρηση των 802 μαθητών	Ανάλυση Latent Path → Εξέταση μοντέλων σχετικά την άμεση ή έμμεση επίδραση της βασικής γνώσης, της κριτικής σκέψης και της δημιουργικής στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά.
3. Ποιες είναι οι ομάδες μαθητών Στ΄ δημοτικού διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους στα μαθηματικά;	▪ Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά - Μέτρηση των 802 μαθητών	Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (Latent Class Analysis) → Εντοπισμό ομάδων με παρόμοια συμπεριφορά (ομάδες διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους στα μαθηματικά) - Επιβεβαίωση των διαφορών μεταξύ των ομάδων μέσω της χρήσης της Ανάλυσης Διακύμανσης μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (ANOVA) και Πολυμεταβλητής Ανάλυσης Διακύμανσης (MANOVA). Χρήση τεχνικών περιγραφικής στατιστικής για περιγραφή της συμπεριφοράς των ομάδων διαφορετικής επίδοσης στο *Δοκίμιο*.

Πίνακας 3.4 (συνέχεια)

Ερευνητικό Ερώτημα	Μέσα Συλλογής Δεδομένων - Δείγμα	Τεχνική Ανάλυσης Δεδομένων
4. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά τόσο ως προς το σύνολό της όσο και ως προς τις ικανότητες που την περιγράφουν με βάση την αντίστοιχη αρχική τους επίδοση; Αν ναι, με ποιο τρόπο;	▪ Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά – Αρχική και Τελική Μέτρηση των 85 μαθητών	- Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) και Πολυμεταβλητή Ανάλυση Συνδιακύμανσης (MANCOVA) μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (ο τύπος περιβάλλοντος μάθησης) → Έλεγχος διαφορών μεταξύ των ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης στην τελική μέτρηση (τόσο στο σύνολο όσο και στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη) με συνδιακυμαίνουσα (covariate) την αρχική μέτρηση, αφού ελεγχθεί με Ανάλυση Διακύμανσης (ANOVA) και Πολυμεταβλητή Ανάλυση Διακύμανσης (MANOVA) μίας ανεξάρτητης μεταβλητής η μη ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών στην αρχική μέτρηση. - Χρήση τεχνικών περιγραφικής στατιστικής για περιγραφή τόσο της αλλαγής στην τελική μέτρηση από την αρχική σε κάθε ομάδα μαθητών που συμμετείχε στα τρία περιβάλλοντα μάθησης όσο της διαφοράς μεταξύ των ομάδων αυτών στην αλλαγή αυτή.

Πίνακας 3.4 (συνέχεια)

Ερευνητικό Ερώτημα	Μέσα Συλλογής Δεδομένων - Δείγμα	Τεχνική Ανάλυσης Δεδομένων
5. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά των μαθητών με ίδια ή διαφορετική επίδοση τόσο ως προς το σύνολό της όσο και ως προς τις ικανότητες που την περιγράφουν με βάση την αντίστοιχη αρχική τους επίδοση; Αν ναι, με ποιο τρόπο;	▪ Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά – Αρχική και Τελική Μέτρηση των 85 μαθητών	- Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) και Πολυμεταβλητή Ανάλυση Συνδιακύμανσης (MANCOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών (ο τύπος περιβάλλοντος μάθησης και η ομάδα επίδοσης)→ Έλεγχος διαφορών στην τελική μέτρηση (τόσο στο σύνολο όσο και στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη) με συνδιακυμαίνουσα (covariate) την αρχική μέτρηση μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν, αφού ελεχθεί με Ανάλυση Διακύμανσης (ANOVA) και Πολυμεταβλητή Ανάλυση Διακύμανσης (MANOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών η μη ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών στην αρχική μέτρηση. - Χρήση τεχνικών περιγραφικής στατιστικής για περιγραφή τόσο της αλλαγής στην τελική μέτρηση από την αρχική σε κάθε ομάδα μαθητών που προκύπτει με βάση το τύπο περιβάλλοντος που συμμετείχε και την ομάδα επίδοσης που άνηκε όσο και της διαφοράς μεταξύ των ομάδων αυτών στην αλλαγή αυτή.

Με βάση τον Πίνακα 3.4, για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Geiser, 2010· Muthén & Muthén, 1998) και το στατιστικό πακέτο SPSS, ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, για την απάντηση των τριών πρώτων ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας έγινε χρήση τεχνικών Γραμμικών Δομικών Μοντέλων Εξισώσεων (Linear Structural Equation Modeling techniques) και της Λανθάνουσας Ανάλυσης Κατηγοριών (Latent Class Analysis) στο λογισμικό δομικής ανάλυσης Mplus και των τεχνικών περιγραφικής, επαγωγικής και συσχετιστικής στατιστικής στο στατιστικό πακέτο SPSS. Για την απάντηση του τέταρτου και του πέμπτου ερευνητικού ερωτήματος της εργασίας έγινε επίσης χρήση τεχνικών περιγραφικής και επαγωγικής στατιστικής στο στατιστικό πακέτο SPSS.

Οι τεχνικές Γραμμικών Μοντέλων Δομικών Εξισώσεων (Structural Equation Modeling techniques) που αξιοποιήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας αυτής για την απάντηση του πρώτου και του δεύτερου ερευνητικούς ερωτήματος είναι η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (CFA: Confirmatory Factor Analysis) και η ανάλυση latent path αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, μέσω της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης εξετάστηκε ο βαθμός προσαρμογής των δεδομένων των 802 μαθητών από το *Δοκίμιο της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* στη δομή του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) που διαμορφώθηκε κατάλληλα με βάση τη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας ώστε να αφορά τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Περισσότερες λεπτομέρειες για το προτεινόμενο μοντέλο δίνονται στο Κεφάλαιο IV της εργασίας αυτής. Η επιλογή της συγκεκριμένης ανάλυσης έναντι της διερευνητικής παραγοντικής ανάλυσης στο SPSS είναι φανερό ότι έγινε λόγω του είναι γνωστή η δομή μοντέλου που ερευνάται. Η ανάλυση latent path χρησιμοποιήθηκε για να εξεταστούν μοντέλα σχετικά με την άμεση ή έμμεση επίδραση της βασικής γνώσης, της κριτικής σκέψης και της δημιουργικής σκέψης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά (όπου με βάση τη βιβλιογραφία ισχύει ότι η κριτική σκέψη προβλέπεται από τη βασική γνώση, η δημιουργική σκέψη προβλέπεται από την κριτική σκέψη και τη βασική γνώση και ο συνδυασμό αυτών των τριών προβλέπει τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης). Η επιλογή της ανάλυσης latent path και όχι παλινδρομικής ανάλυσης οφείλεται στο ότι επιτρέπει την εξέταση και έμμεσων επιδράσεων εκτός από άμεσων επιδράσεων (Geiser, 2010), καθώς και γενικά πιο σύνθετων μοντέλων πρόβλεψης. Κάθε ένα από αυτά τα μοντέλα εκτιμήθηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (normal theory maximum likelihood methods-ML). Η μέθοδος της ML επιλέχθηκε γιατί δεν απαιτεί πολύ μεγάλο δείγμα (Demetriou, Kyriakides, & Avraamidou, 2003). Για έλεγχο της προσαρμογής των δεδομένων στα διάφορα μοντέλα που εξετάστηκαν τόσο μέσω της χρήσης της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης όσο και μέσω της ανάλυσης latent path, χρησιμοποιήθηκαν πέντε δείκτες (Geiser, 2010· Marcoulides & Schumacker, 1996):

(α) ο δείκτης Comparative Fit Index, *CFI*, του οποίου η τιμή πρέπει να είναι μεγαλύτερη του .95 για να θεωρείται καλή προσαρμογή, (β) ο δείκτης Tucker-Lewis Index (*TLI*) του οποίου η τιμή πρέπει να είναι μεγαλύτερη του .95 για να θεωρείται καλή προσαρμογή, (γ) ο λόγος x^2/df, του οποίου η τιμή για να θεωρείται καλή προσαρμογή πρέπει να είναι μικρότερη του 1.96. Σημειώνεται ότι θεωρείται ότι ο λόγος αυτός δεν πρέπει να είναι στατιστικά σημαντικός, αλλά σε μεγάλο αριθμό δείγματος παρατηρείται να είναι σχεδόν πάντα στατιστικά σημαντικός (Bentler & Bonett, 1980· Hooper, Coughlan, & Mullen, 2008), (δ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, *RMSEA* του οποίου η τιμή για να θεωρείται καλή προσαρμογή πρέπει να είναι μικρότερη του .05 και (ε) ο δείκτης Standardized Root Mean Square Residual (*SRMR*) του οποίου η τιμή για να θεωρείται καλή προσαρμογή πρέπει να είναι μικρότερη του .05.

Για εντοπισμό ομάδων διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά για την απάντηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος, χρησιμοποιήθηκε η Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (latent class analysis) (LCA). Η ανάλυση αυτή εντοπίζει άτομα με παρόμοια συμπεριφορά με βάση μοτίβα που παρατηρούνται στα δεδομένα τους (Berlin, Williams, & Parra, 2014· Geiser, 2010· Marcoulides & Schumacker, 1996). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις επιδόσεις των μαθητών στα έργα του *Δοκιμίου* εφαρμόστηκε η ανάλυση αυτή για τέσσερα διαδοχικά μοντέλα (δυο, τριών, τεσσάρων και πέντε ομάδων), αφού προτιμάτε όσο το δυνατόν λιγότερες ομάδες (Geiser, 2010). Για έλεγχο της προσαρμογής των δεδομένων στα τέσσερα μοντέλα εξετάστηκε κατά πόσο υπήρχε επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood αρκετές φορές. Αφού παρουσιάστηκε επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood για κάθε μοντέλο υπολογίστηκε η πιθανότητα του κάθε μαθητή να ανήκει σε κάθε ομάδα. Η πιθανότητα αυτή αποτελεί την πιθανότητα του γεγονός να επιλεχθεί τυχαία ένα άτομο από μια ομάδα και να παρουσιάζει τη συμπεριφορά της συγκεκριμένης ομάδας (Berlin et al., 2014· Muthén, 2008). Ακολούθως, για εύρεση του καλύτερου μοντέλου που περιγράφει τα δεδομένα της εργασίας, έγινε σύγκριση των τιμών AIC και BIC του κάθε μοντέλου, καθώς και της εντροπίας τους. Το μοντέλο με τις μικρότερες τιμές AIC και BIC και τη μεγαλύτερη τιμή εντροπίας θεωρείται το καλύτερο. Ακόμη, χρησιμοποιήθηκε για πιο ξεκάθαρη εικόνα σχετικά με το καλύτερο μοντέλο, ο έλεγχος Bootstrap LR Difference Test (TECH14 output) για σύγκριση μεταξύ δυο διαδοχικών μοντέλων και προσδιορισμός αυτού που διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το άλλο και θεωρείται καλύτερο. Αλλά γενικά σημειώνεται ότι πέρα από τους στατιστικούς ελέγχους, ο ερευνητής επιλέγει αυτό τον αριθμό ομάδων που έχει νόημα με βάση τα δεδομένα του και τη θεωρία (Geiser, 2010).

Εκτός από τις πιο πάνω αναλύσεις για την απάντηση των τριών πρώτων ερευνητικών ερωτημάτων, έγινε χρήση και τεχνικών παραμετρικής στατιστικής. Συγκεκριμένα, έγινε χρήση τεχνικών περιγραφικής στατιστικής (μέσος όρος, τυπική απόκλιση, μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τιμές λοξότητας και κύρτωσης, ποσοστά) για περιγραφή της συμπεριφοράς τόσο ολόκληρου του δείγματος όσο και των ομάδων διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Επίσης, έγινε χρήση της επαγωγικής στατιστικής και πιο συγκεκριμένα (α) του ελέγχου *t* για εξαρτημένα δείγματα (Paired-samples T test) για έλεγχο στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών του δείγματος στις ικανότητες του προτεινόμενου μοντέλου, (β) της Ανάλυσης Διακύμανσης μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (ANOVA) για επιβεβαίωση στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης που προέκυψαν από την Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (Latent Class Analysis) στη συνολική τους επίδοση στο *Δοκίμιο* και (γ) της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης Διακύμανσης (MANOVA) για επιβεβαίωση στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης που προέκυψαν από την Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (Latent Class Analysis) στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η επιλογή της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης Διακύμανσης (MANOVA) βασίζεται στο ότι θεωρείται πιο κατάλληλη με πιο ισχυρά αποτελέσματα έναντι οποιαδήποτε άλλης μονοδιάστατης ανάλυσης που μπορούσε να γίνει με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας (Field, 2009), αφού το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (Stevens, 2002).

Παρόμοια, για την απάντηση του τέταρτου και του πέμπτου του ερευνητικού ερωτήματος που αφορούν την εξέταση της επίδρασης των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτά τα περιβάλλοντα, χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές παραμετρικής στατιστικής, αφού οι απαντήσεις του δείγματος που συμμετείχε στα τρία περιβάλλοντα μάθησης ακολουθούν κανονική κατανομή (βλέπε περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο IV). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές περιγραφικής στατιστικής (μέσος όρος, τυπική απόκλιση, ποσοστά) για περιγραφή της αλλαγής της επίδοσης μεταξύ της αρχικής και τελικής μέτρησης. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η επαγωγική στατιστική και συγκεκριμένα: (α) η Ανάλυση Διακύμανσης (ANOVA) μίας και δυο ανεξάρτητων μεταβλητών για έλεγχο της μη ύπαρξης διαφορών στη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο τόσο μεταξύ των ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (τέταρτο ερευνητικό ερώτημα) όσο και μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (πέμπτο ερευνητικό ερώτημα), (β) η Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) μίας και δυο ανεξάρτητων μεταβλητών για εξέταση στατιστικά σημαντικών διαφορών στη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με συνδιακυμαίνουσα (covariate) την συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο τόσο μεταξύ των ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (τέταρτο ερευνητικό ερώτημα) όσο και μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (πέμπτο ερευνητικό ερώτημα) , (γ) η Πολυμεταβλητή Ανάλυση Διακύμανσης (MANOVA) μίας και δυο ανεξάρτητων μεταβλητών για έλεγχο μη ύπαρξης στατιστικά σημαντικών διαφορών στην επίδοση στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο προπειραματικό δοκίμιο τόσο μεταξύ των ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (τέταρτο ερευνητικό ερώτημα) όσο και μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (πέμπτο ερευνητικό ερώτημα) και (δ) η Πολυμεταβλητή Ανάλυση Συνδιακύμανσης (MANCOVA) μίας και δυο ανεξάρτητων μεταβλητών για εξέταση στατιστικά σημαντικών διαφορών στην επίδοση στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο μεταπειραματικό δοκίμιο με συνδιακυμαίνουσα (covariate) την αντίστοιχη αρχική μέτρηση (προπειραματικό δοκίμιο) τόσο μεταξύ των ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (τέταρτο ερευνητικό ερώτημα) όσο και μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (πέμπτο ερευνητικό ερώτημα). Σημειώνεται ότι η επιλογή πολυμεταβλητής ανάλυσης βασίζεται στο ότι θεωρείται πιο κατάλληλη με πιο ισχυρά αποτελέσματα έναντι οποιαδήποτε άλλης μονοδιάστατης ανάλυσης που μπορούσε να γίνει με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας (Field, 2009), αφού το μέγεθος του δείγματος είναι μεγαλύτερο από το α+1, όπου α ο αριθμός μετρήσεων που λήφθηκε από το δείγμα, δηλαδή είναι μεγαλύτερο από 12 (Stevens, 2002). Επίσης, η επιλογή διεξαγωγής των αναλύσεων: ANCOVA και MANCOVA αντί ANOVA και MANOVA αντίστοιχα κρίθηκε αναγκαία αφού παρουσιάζουν πιο ξεκάθαρη εικόνα της επίδρασης της πειραματικής διαδικασίας στην εξαρτημένη μεταβλητή, ασκώντας αυστηρό πειραματικό έλεγχο αφαιρώντας την επίδραση μεταβλητών που πιθανόν να επηρεάζουν την επίδραση εξαρτημένη μεταβλητή (Field, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας, όπως αυτά προέκυψαν από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων της με βάση το σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Ο σκοπός της εργασίας ήταν διπλός. Αρχικά, επιδιωκόταν να παρουσιαστεί ένα ολοκληρωμένο μοντέλο ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και έπειτα να διερευνηθεί το πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξή της σε μαθητές Στ΄ δημοτικού. Για αυτό, στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων 802 μαθητών στο *Δοκίμιο της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά*. Η ανάλυση αυτή δίνει απαντήσεις στα πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η επιβεβαίωση με εμπειρικά δεδομένα από μαθητές Στ΄ δημοτικού του Μοντέλου Σκέψης (Integrated Thinking Model) του Iowa Department of Education (1989) για τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εξέταση των σχέσεων μεταξύ των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Το πρώτο αυτό μέρος ολοκληρώνεται με την ανάλυση των χαρακτηριστικών των ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά που εντοπίστηκαν.

Το δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αυτού αφορά τον τρόπο που οι νέες τεχνολογίες επιδρούν στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις των δεδομένων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης (85 μαθητές) στο προπειραματικό και μεταπειραματικό δοκίμιο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Οι αναλύσεις αυτές δίνουν απαντήσεις στα υπόλοιπα δυο ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας.

Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Όπως έχει ήδη αναφερθεί πιο πάνω, το πρώτο μέρος του σκοπού της εργασίας αφορά την παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου μοντέλου ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Το μοντέλο αυτό θα αξιοποιηθεί για την εξέταση του δεύτερου μέρους του σκοπού της εργασίας σχετικά με το πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για αυτό στο μέρος αυτό παρουσιάζεται αρχικά το προτεινόμενο μοντέλο για την περιγραφή της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Έπειτα, εξετάζεται η αξιοπιστία των δεδομένων του *Δοκιμίου* και αναλύονται στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τις μεταβλητές του προτεινόμενου μοντέλου, τα οποία δίνουν ενδείξεις προσαρμογής των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο. Ακολούθως, παρουσιάζεται η επιβεβαίωση του μοντέλου με εμπειρικά δεδομένα και στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τους παράγοντες του μοντέλου. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν την απάντηση στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας αυτής:

1. Επιβεβαιώνεται η δομή του Μοντέλου της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) στα μαθηματικά με βάση εμπειρικά δεδομένα μαθητών Στ΄δημοτικού;

Προτεινόμενο μοντέλο για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Το προτεινόμενο μοντέλο για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά έχει ως βάση του το θεωρητικό Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) του Iowa Department of Education (1989). Σύμφωνα με αυτό η ανωτέρου επιπέδου σκέψη είναι μια πολυδιάστατη έννοια και περιγράφεται από τέσσερις ικανότητες που αλληλοσχετίζονται και εξαρτάται η μια από την άλλη. Συγκεκριμένα, οι τέσσερις ικανότητες είναι: (α) «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», (β) «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά», (γ) «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και (δ) «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά». Οι ικανότητες αυτές με βάση τον ορισμό τους αποτελούν παράγοντες που έχουν διαφορετική δομή, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.1 και περιγράφεται αναλυτικά πιο κάτω. Σημειώνεται ότι ο κάθε ένας από τους παράγοντες αυτούς εξηγούν τη διακύμανση των αντίστοιχων μεταβλητών του *Δοκιμίου Μέτρησης της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* (βλέπε Μεθοδολογία).

Η ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά» αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που εξηγεί τη διακύμανση επτά μεταβλητών, οι οποίες αφορούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που χρειάζεται να κατέχει ένας μαθητής Στ΄ δημοτικού για να μπορεί να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και να ελέγχει τις γνώσεις τους. Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στα Β1 – Β7 αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά» (όπου Β1: αναγνώριση τριγώνων, Β2: αναγνώριση ορθογωνίων, Β3: σύγκριση μεγέθους αριθμών, Β4: απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος, Β5: επίλυση προβλήματος αφαίρεσης τριψήφιων αριθμών με δομή σύγκρισης, Β6: υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων και Β7: υπολογισμός εμβαδού σχημάτων).

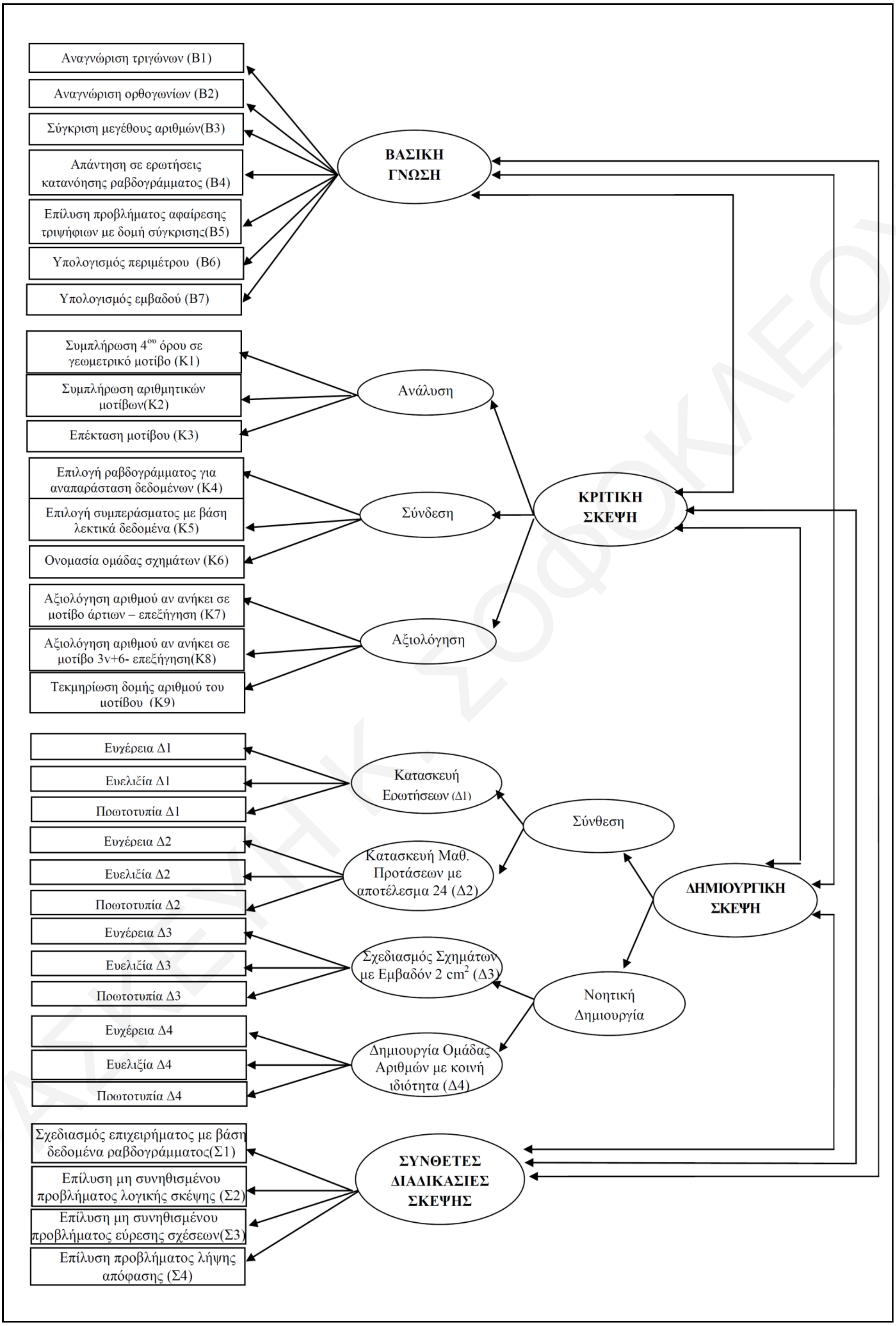
Η ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά» αποτελεί παράγοντα δευτέρας τάξης που ορίζεται από τρεις παράγοντες πρώτης τάξης. Οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης με βάση το θεωρητικό μοντέλο Integrated Thinking Model (Iowa Department of Education, 1989) είναι: «Ανάλυση», «Σύνδεση» και «Αξιολόγηση». Ο παράγοντας πρώτης τάξης «Ανάλυση» εξηγεί τη διακύμανση τριών μεταβλητών που περιλαμβάνουν την κατανόηση και το χειρισμό σχέσεων μέρους/όλου μέσω της αναγνώρισης, συμπλήρωσης και επέκτασης γεωμετρικών και αριθμητικών μοτίβων. Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στα Κ1 – Κ3 αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Ανάλυση» (όπου Κ1: συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο, Κ2: συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων και Κ3: επέκταση αριθμητικού μοτίβου). Ο παράγοντας πρώτης τάξης «Σύνδεση» εξηγεί τη διακύμανση τριών μεταβλητών που αφορούν την εύρεση και την κατασκευή σχέσεων μεταξύ όλων χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της σύγκρισης, της λογικής σκέψης και του επαγωγικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στα Κ4 – Κ6 αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Σύνδεση» (όπου Κ4: επιλογή κατάλληλου ραβδογράμματος για αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων που δίνονται σε πίνακα, Κ5: επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα και Κ6: ονομασία ομάδας σχημάτων). Ο παράγοντας πρώτης τάξης «Αξιολόγηση» εξηγεί τη διακύμανση τριών μεταβλητών που περιλαμβάνουν την κρίση και τον έλεγχο πληροφοριών με βάση κριτήρια. Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στα Κ7 – Κ9 αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Αξιολόγηση» (όπου Κ7: αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων αριθμών-επεξήγηση κανόνα, Κ8: αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο με γενικό κανόνα 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα και Κ9: τεκμηρίωση της δομής δοσμένου αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6).

Η ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» αποτελεί παράγοντα τρίτης τάξης που ορίζεται από δυο παράγοντες δευτέρας τάξης: «Σύνθεση» και «Νοητική Δημιουργία». Ο καθένας από αυτούς τους παράγοντες εξηγείται από δυο παράγοντες πρώτης τάξης. Ο παράγοντας «Σύνθεση» αποτελείται από τους παράγοντες: "Κατασκευή ερωτήσεων" και "Κατασκευή μαθηματικών προτάσεων με αποτέλεσμα 24", δηλαδή τις δημιουργικές ασκήσεις (Δ1 και Δ2 αντίστοιχα) που απαιτούν από τους μαθητές να συνθέσουν πληροφορίες και να καταγράψουν τις λύσεις τους με συστηματικό τρόπο ώστε να παράγουν πολλές, διαφορετικές και πρωτότυπες λύσεις. Ο παράγοντας «Νοητική Δημιουργία» αποτελείται από τους παράγοντες "Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2" και "Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα", δηλαδή τις δημιουργικές ασκήσεις

(Δ3 και Δ4 αντίστοιχα) που η παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων λύσεων βασίζεται στην ανάδυση τους ως αναλαμπή ή στη χρήση νοερών διαδικασιών και όχι στη χρήση οργανωμένου πλάνου εργασίας. Ο καθένας από τους παράγοντες πρώτης τάξης εξηγούν τη διακύμανση τριών μεταβλητών που αφορούν τις τρεις διαστάσεις βαθμολόγησης της κάθε άσκησης: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Σημαντικό να τονιστεί ότι ενώ το θεωρητικό μοντέλο Integrated Thinking Model (Iowa Department of Education, 1989) ορίζει τρεις παράγοντες πρώτης τάξης για τη «Δημιουργική Σκέψη»: «Σύνθεση», «Νοητική Δημιουργία» και «Επεξεργασία», στα πλαίσια της εργασίας αυτής θεωρείται ότι η «Επεξεργασία» υπάρχει ήδη στον τρόπο βαθμολόγησης των έργων των παραγόντων «Σύνθεση» και «Νοητική Δημιουργία». Δηλαδή, ο βαθμός που δίνεται στη διάσταση της ευελιξίας για κάθε άσκηση περιλαμβάνει την ικανότητα της επεξεργασίας, αφού υπολογίστηκαν οι διαφορετικές ιδέες που προέκυπταν από τις ήδη δοσμένες ιδέες του μαθητή, καθώς και η επανάληψη μιας ιδέας που δινόταν με διαφορετικό τρόπο.

Η ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά» αποτελεί παράγοντα πρώτης τάξης που εξηγεί τη διακύμανση τεσσάρων μεταβλητών, οι οποίες αφορούν την επίλυση έργων που απαιτούν τη χρήση δεξιοτήτων και γνώσεων βασικής, κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Αυτά τα έργα έχουν τη μορφή λήψης απόφασης, σχεδιασμού λύσης και λύσης μη συνηθισμένων προβλημάτων. Συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στα Σ1-Σ4 αποτελούν δείκτες του παράγοντα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά» (όπου Σ1: σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα διπλού ραβδογράμματος, Σ2: επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης, Σ3: επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων με βάση δεδομένα και Σ4: επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης με βάση δεδομένα σε πίνακα).

Με βάση τα πιο πάνω, όπως έχει αναφερθεί ήδη, οι τέσσερις παράγοντες του προτεινόμενου μοντέλου που αντιστοιχούν στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, έχουν διαφορετική δομή. Συγκεκριμένα, η βασική γνώση και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης αποτελούν παράγοντες πρώτης τάξης, ενώ η κριτική και η δημιουργική σκέψη αποτελούν παράγοντες ανώτερης τάξης. Επίσης, σημειώνεται ότι το προτεινόμενο μοντέλο παρουσιάζει τη μία σχέση μεταξύ των τεσσάρων ικανοτήτων που δίνεται στον ορισμό, αυτή της αλληλεπίδρασης και αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Η δεύτερη σχέση σχετικά με τις αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ των ικανοτήτων αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και εξετάζεται στη συνέχεια του κεφαλαίου.



Διάγραμμα 4.1. Προτεινόμενο μοντέλο για τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σχετικά με την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου, κρίνεται αναγκαίο να ελεγχθεί η αξιοπιστία των δεδομένων του *Δοκιμίου Μέτρησης της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης*, των οποίων η προσαρμογή θα εξεταστεί στο προτεινόμενο μοντέλο. Επίσης, θεωρείται σημαντικό να παρουσιαστούν στοιχεία περιγραφικής και συσχετιστικής στατιστικής των μεταβλητών του *Δοκιμίου*, αφού δίνονται ενδείξεις σχετικά με την προσαρμογή των δεδομένων στο μοντέλο.

Αξιοπιστία. Για να εξεταστεί η εσωτερική αξιοπιστία του δοκιμίου μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή *α* (Cronbach *α*) τόσο για όλες τις επιδόσεις των μαθητών στα έργα του δοκιμίου (δηλαδή για όλες τις μεταβλητές του προτεινόμενου μοντέλου) όσο και για τις επιδόσεις τους που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τους τέσσερις παράγοντες του προτεινόμενου μοντέλου: βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά, κριτική σκέψη στα μαθηματικά, δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά και σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Ο Πίνακας 4.1 δίνει τις τιμές αυτές.

Πίνακας 4.1

Εσωτερική Αξιοπιστία του Δοκιμίου Μέτρησης της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά

	Συντελεστής Αξιοπιστίας *α* (Cronbach *α*)
Συνολικό Δοκίμιο	.90
Βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά	.74
Κριτική σκέψη στα μαθηματικά	.75
Δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά	.87
Σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά	.71

Με βάση τον Πίνακα 4.1 οι τιμές του συντελεστή *α* (Cronbach *α*) τόσο για το σύνολο του *Δοκιμίου* όσο και για τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών στους τέσσερις παράγοντες ήταν μεγαλύτερες του .70. Οι τιμές αυτές θεωρούνται ικανοποιητικές (Cronbach, 1990). Σημειώνεται, ακόμη, ότι οι τιμές του συντελεστή *α* για το σύνολο του *Δοκιμίου* και για την ομαδοποίηση των μεταβλητών που αφορά τη δημιουργική σκέψη ήταν μεγαλύτερες του .85. Αυτές χαρακτηρίζονται ως μέτριες προς υψηλές (Murphy & Davidshofer, 2001). Επίσης, βρέθηκε ότι αφαιρώντας οποιαδήποτε μεταβλητή δεν παρατηρείται κάποια αύξηση της τιμής του συντελεστή *α* (Cronbach *α*) τόσο για το σύνολο του *Δοκιμίου* όσο και για τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών στους τέσσερις παράγοντες. Αυτό που παρατηρείται είναι η μείωση του συντελεστή αξιοπιστίας *α* όταν αφαιρεθεί οποιαδήποτε μεταβλητή τόσο για το σύνολο του *Δοκιμίου* όσο και για τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών στους τέσσερις παράγοντες. Αυτό θεωρείται ότι αποτελεί ένδειξη καταλληλότητας των μεταβλητών για μέτρηση του κάθε παράγοντα.

Στοιχεία περιγραφικής και συσχετικής στατιστικής για τις μεταβλητές του *Δοκιμίου*. Στους πίνακες που ακολουθούν δίνονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής (μέσος όρος, τυπική απόκλιση, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή) του *Δοκιμίου Μέτρησης της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά* για κάθε μία μεταβλητή του. Για σκοπούς παρουσίασης δίνονται τα στοιχεία αυτά ξεχωριστά για κάθε παράγοντα του Προτεινόμενου Μοντέλου που αντιστοιχεί σε μία από τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Γενικά οι επιδόσεις των μαθητών σε όλες τις μεταβλητές του *Δοκιμίου* ακολουθούν κανονική κατανομή, αφού οι απόλυτες τιμές της λοξότητας και της κύρτωσής τους είναι μικρότερες από την τιμή δυο και στις περισσότερες περιπτώσεις πλησιάζουν το μηδέν (George & Mallery, 2010).

Στον Πίνακα 4.2 δίνονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των επτά μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Βασική Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά με βάση το προτεινόμενο μοντέλο.

Πίνακας 4.2

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής των Επιδόσεων των Μαθητών στις Μεταβλητές που Αποτελούν Δείκτες του Παράγοντα Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά

Μεταβλητή	Μέσος Όρος ($\bar{X}$)	Τυπική Απόκλιση (*SD*)	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Β1: Αναγνώριση τριγώνων	2.64	.86	.50	4
Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων	2.03	.50	1.20	4
Β3: Σύγκριση μεγέθους αριθμών	3.49	.90	0	4
Β4: Απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης ραβδογράμματος	3.65	.76	0	4
Β5: Επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με δομή σύγκρισης	3.39	1.16	0	4
Β6: Υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων	2.83	1.28	0	4
Β7: Υπολογισμός εμβαδού σχημάτων	2.38	1.30	0	4

Με βάση τον Πίνακα 4.2, οι μέσοι των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Βασική Γνώση Περιεχομένου κυμαίνονται από 2.03 μέχρι 3.65 με μέγιστη τιμή το τέσσερα. Οι τιμές των τυπικών τους αποκλίσεων χαρακτηρίζονται μικρές, πράγμα που δείχνει ότι δεν αποκλίνουν οι τιμές του δείγματος από το μέσο όρο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές του δείγματος είχαν υψηλότερο μέσο όρο που πλησίαζε τη μέγιστη τιμή (τέσσερα) στις ασκήσεις που αφορούσαν σύγκριση μεγέθους αριθμών ($\bar{X}$ =3.49, SD=.90), απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος ($\bar{X}$ =3.65, SD=.76) και στην επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με δομή σύγκρισης ($\bar{X}$ =3.39, SD=1.16). Στις ασκήσεις αυτές η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε ορθή απάντηση και σε κάποιες περιπτώσεις μερικώς ορθή απάντηση. Εκτός από τις ασκήσεις αυτές που φάνηκε ότι η πλειοψηφία του δείγματος μπορούσε να λύσει ορθά, υπήρχαν και οι ασκήσεις που η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε μερικώς ορθή απάντηση και έτσι δεν έπαιρνε όλες τις μονάδες αλλά τις μισές και για αυτό ο μέσος όρος τους ήταν χαμηλότερος. Αυτές οι ασκήσεις αφορούσαν αναγνώριση σχημάτων, περίμετρο και εμβαδόν σχημάτων. Στην αναγνώριση τριγώνων φάνηκε ότι όλοι οι μαθητές του δείγματος μπόρεσαν να αναγνωρίσουν δυο παραδείγματα και μη παραδείγματα τριγώνου που ήταν άμεσα αναγνωρίσιμα σε αυτούς, αφού η ελάχιστη τιμή που πήραν ήταν .50. Όμως, μόνο ένα μέρος των μαθητών (11%) κατάφερε να αναγνωρίσει όλα τα παραδείγματα και μη παραδείγματα τριγώνου, ενώ σχεδόν οι μισοί μαθητές (47%) δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν ένα με δυο παραδείγματα και μη παραδείγματα τριγώνου που θεωρούνται ότι δεν είναι άμεσα αναγνωρίσιμα. Όσον αφορά στην αναγνώριση των ορθογωνίων μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των μαθητών (3.77%) αναγνώρισε όλα τα παραδείγματα και μη παραδείγματα ορθογωνίου. Ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των μαθητών (71.86%) δεν αναγνώρισε τα τετράγωνα ως παραδείγματα ορθογωνίου, αλλά αναγνώρισε όλα τα υπόλοιπα παραδείγματα και μη παραδείγματα ορθογωνίου. Όσον αφορά την επίδοση των μαθητών σχετικά με τον υπολογισμό περιμέτρου και εμβαδού δυο σχημάτων, παρατηρήθηκε να έχουν υψηλότερο μέσο όρο στην εύρεση περιμέτρου ($\bar{X}$ =2.83, *SD*=1.28) σε σύγκριση με την εύρεση εμβαδού σχημάτων ($\bar{X}$ =2.38, *SD*=1.30). Συγκεκριμένα, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές υπολόγισαν ορθά την περίμετρο και το εμβαδόν των δυο σχημάτων. Επίσης, ένα ποσοστό των μαθητών ενώ έδωσε λάθος απάντηση, χρησιμοποίησε ορθό τρόπο για υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού των δυο σχημάτων (24.62% και 38.69% αντίστοιχα). Γενικά παρατηρείται οι μαθητές του δείγματος να είχαν πολύ ικανοποιητική βασική γνώση περιεχομένου, με κάποιες δυσκολίες σε έργα γεωμετρίας και μέτρησης.

Στον Πίνακα 4.3 δίνονται τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των εννέα μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Κριτική Σκέψη με βάση το προτεινόμενο μοντέλο.

Πίνακας 4.3

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής των Επιδόσεων των Μαθητών στις Μεταβλητές που Αποτελούν Δείκτες των Υπό-Παραγόντων της Κριτικής Σκέψης στα Μαθηματικά

Μεταβλητή	Μέσος Όρος ($\overline{X}$)	Τυπική Απόκλιση (*SD*)	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Ανάλυση				
Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο	3.10	1.51	0	4
Κ2: Συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων	3.60	.86	0	4
Κ3: Επέκταση αριθμητικού μοτίβου	3.00	1.62	0	4
Σύνδεση				
Κ4: Επιλογή ραβδογράμματος για αναπαράσταση δεδομένων	3.28	1.35	0	4
Κ5: Επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα	3.22	1.30	0	4
Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων	1.51	.99	0	3.67
Αξιολόγηση				
Κ7: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων - επεξήγηση κανόνα	2.19	1.58	0	4
Κ8: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα	1.29	1.39	0	4
Κ9: Τεκμηρίωση της δομής αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6	2.30	1.82	0	4

Με βάση τον Πίνακα 4.3, οι μέσοι όροι των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Κριτική Σκέψη κυμαίνονται από 1.29 μέχρι 3.60 με μέγιστη τιμή το 4 (εκτός στο έργο Κ6). Οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων σε όλες τις μεταβλητές εκτός από δυο (Κ6 και Κ8) χαρακτηρίζονται μικρές, πράγμα που δείχνει ότι δεν αποκλίνουν οι τιμές του δείγματος από το μέσο όρο. Πιο συγκεκριμένα, οι μέσοι όροι των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του υπό-παράγοντα της Κριτικής Σκέψης: Ανάλυση πλησιάζουν τη μέγιστη τιμή (τέσσερα) ($\overline{X}_{K1}$=3.10, $\overline{X}_{K2}$=3.60, $\overline{X}_{K3}$=3.00), δηλαδή οι περισσότεροι μαθητές μπόρεσαν και συμπλήρωσαν ορθά τόσο το γεωμετρικό μοτίβο (74.21%) όσο και τα αριθμητικά μοτίβα (76.22%), καθώς και επέκτειναν ορθά αριθμητικό μοτίβο (72.07%). Όσον αφορά τους μέσους όρους των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του υπό-παράγοντα: Σύνδεση, οι δυο από τους τρεις πλησιάζουν τη μέγιστη τιμή (τέσσερα) ($\overline{X}_{K4}$=3.28 και $\overline{X}_{K5}$=3.22), ενώ ο ένας ήταν πολύ χαμηλότερος ($\overline{X}_{K6}$=1.51). Δηλαδή, οι περισσότεροι μαθητές μπόρεσαν και σύνδεσαν τα δεδομένα που δίνονταν στα έργα Κ4 και

K5 και βρήκαν την ορθή απάντηση, ενώ φάνηκε να δυσκολεύονταν οι μαθητές στο έργο K6 που αφορούσε ονομασία ομάδων σχημάτων που δίνονταν. Όσον αφορά τους μέσους όρους των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του υπό-παράγοντα: Αξιολόγηση, είναι χαμηλότεροι σε σχέση με τους μέσους όρους των μεταβλητών των άλλων υπό-παραγόντων ($\overline{X}_{K7}=2.19$, $\overline{X}_{K8}=1.29$, $\overline{X}_{K9}=2.30$). Συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των μαθητών μπόρεσε να αξιολογήσει ορθά αν ο αριθμός που δινόταν άνηκε στο μοτίβο (76.78% για το K7: άρτιοι αριθμοί και 61.51% για το K8: μοτίβο 3ν+6), αλλά υπήρχε διαφοροποίηση στη βαθμολογία τους ως προς το βαθμό γενίκευσης που έκαναν. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που έδωσαν ρητή γενίκευση και έπαιρναν όλες τις μονάδες ήταν περισσότεροι στο έργο K7 (30.69%) σε σύγκριση με το K8 (11.07%). Παρόμοια, οι μαθητές που έδωσαν αιτιολόγηση με γενίκευση του μοτίβου με βάση επαναληπτικό συλλογισμό ή με βάση το σχήμα που έπαιρναν μισές μονάδες ήταν περισσότεροι στο έργο K7 (περίπου 30%) σε σύγκριση με το K8 (περίπου 20%). Τέλος στο έργο K9 οι μισοί μαθητές μπόρεσαν να βρουν την ορθή απάντηση (από πόσα μαύρα και άσπρα τετράγωνα αποτελείτο ο αριθμός 30 με βάση τα μοτίβα που δίνονταν), ενώ 15.60% των μαθητών φάνηκε να κατανόησε τα μοτίβα, αλλά δεν έδωσε ορθή απάντηση.

Ο Πίνακας 4.4 παρουσιάζει τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των επιδόσεων των μαθητών στις μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Δημιουργική Σκέψη. Συγκεκριμένα, δίνονται τα στοιχεία για κάθε μία διάσταση βαθμολόγησης της δημιουργικότητας για κάθε έργο (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία). Οι διαστάσεις αυτές όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο ΙΙΙ της Μεθοδολογίας, αξιολογήθηκαν με βάση την κωδικοποίηση της Leikin (2009). Η κωδικοποίηση της Leikin (2009) έδωσε μεγάλο εύρος τιμών και έτσι για να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των διαστάσεων μετατράπηκαν σε βαθμολογίες από μηδέν μέχρι τέσσερα, αξιοποιώντας το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση της κάθε διάστασης σε κάθε έργο (βλέπε επεξήγηση στο Κεφάλαιο ΙΙΙ της Μεθοδολογίας).

Πίνακας 4.4

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής των Επιδόσεων των Μαθητών στις Μεταβλητές που Αποτελούν Δείκτες των Υπό-Παραγόντων της Δημιουργικής Σκέψης στα Μαθηματικά

Μεταβλητή	Μέσος Όρος ($\bar{X}$)	Τυπική Απόκλιση (*SD*)	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Σύνθεση				
Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων				
Ευχέρεια Δ1	2.49	1.05	0	4
Ευελιξία Δ1	2.30	1.10	0	4
Πρωτοτυπία Δ1	1.71	.95	0	4
Δ2: Κατασκευή Μαθηματικών Προτάσεων με αποτέλεσμα 24				
Ευχέρεια Δ2	2.42	.85	0	4
Ευελιξία Δ2	2.45	.92	0	4
Πρωτοτυπία Δ2	1.95	.81	0	4
Νοητική Δημιουργία				
Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2				
Ευχέρεια Δ3	2.32	1.09	0	4
Ευελιξία Δ3	2.43	1.15	0	4
Πρωτοτυπία Δ3	1.82	1.14	0	4
Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα				
Ευχέρεια Δ4	1.97	1.42	0	4
Ευελιξία Δ4	1.99	1.46	0	4
Πρωτοτυπία Δ4	1.44	1.18	0	4

Με βάση τον Πίνακα 4.4 οι μαθητές είχαν τη χαμηλότερη επίδοση σε όλες τις διαστάσεις στο έργο Δ4 (δημιουργία ομάδας τεσσάρων αριθμών με κοινή ιδιότητα) σε σύγκριση με τα άλλα δημιουργικά έργα ($\bar{X}_{\text{Ευχέρεια}}$=1.97, $\bar{X}_{\text{Ευελιξία}}$=1.99 και $\bar{X}_{\text{Πρωτοτυπία}}$=1.44). Επίσης, στο έργο Δ4 παρατηρείται ότι οι τυπικές αποκλίσεις να μην είναι μικρές, όπως στα άλλα δημιουργικά έργα, άρα υπάρχει κάποια απόκλιση από το μέσο όρο. Μεταξύ των διαστάσεων σε όλα τα έργα τη χαμηλότερη βαθμολογία είχε η διάσταση της πρωτοτυπίας. Ενώ ο μέσος όρος των διαστάσεων της ευχέρειας και της ευελιξίας ήταν σχεδόν ο ίδιος.

Ο Πίνακας 4.5 παρουσιάζει τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των επιδόσεων των μαθητών στις μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης στα μαθηματικά. Τα στοιχεία αυτά δείχνουν ότι οι μέσοι όροι των μαθητών σε αυτές τις ασκήσεις ήταν χαμηλότεροι σε σύγκριση με αυτούς των μεταβλητών των άλλων παραγόντων. Οι τυπικές αποκλίσεις τους δεν ήταν μικρές (εκτός από το έργο Σ2), άρα φαίνεται να υπάρχει μια απόκλιση των τιμών του δείγματος από το μέσο όρο, δηλαδή υπήρχε μια διαφοροποίηση μεταξύ του δείγματος στις ασκήσεις αυτές ως προς την επίδοσή τους.

Πίνακας 4.5

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής των Επιδόσεων των Μαθητών στις Μεταβλητές που Αποτελούν Δείκτες του Παράγοντα των Σύνθετων Διαδικασιών Σκέψης στα Μαθηματικά

Μεταβλητή	Μέσος Όρος ($\overline{X}$)	Τυπική Απόκλιση (*SD*)	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Σ1: Σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα ραβδογράμματος	1.33	1.24	0	4
Σ2: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης	1.78	.96	0	4
Σ3: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων	.62	.78	0	4
Σ4: Επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης	1.20	1.50	0	4

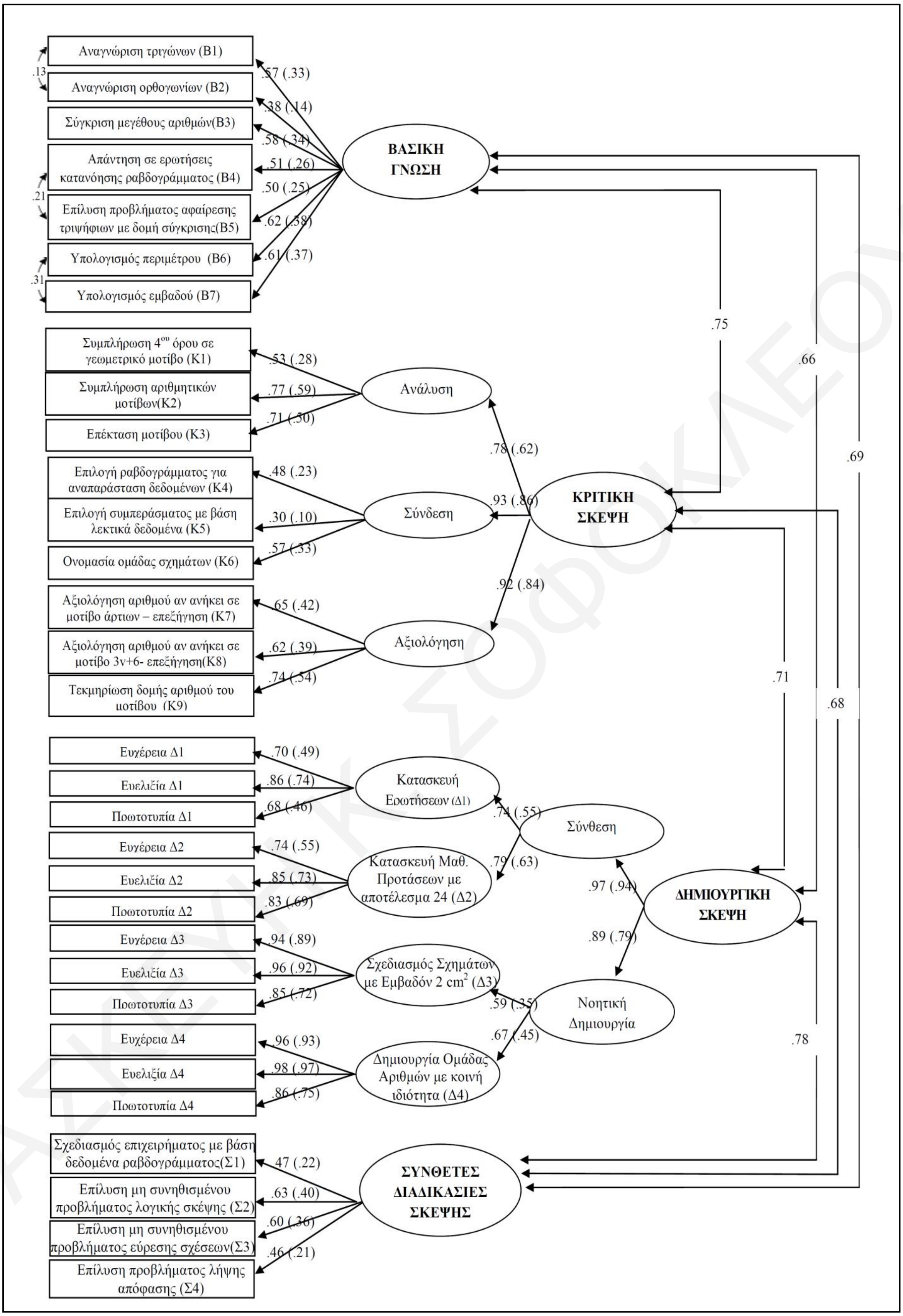
Με βάση τον Πίνακα 4.5 οι μαθητές είχαν το πιο ψηλό μέσο όρο στο έργο Σ2 ($\overline{X}$ =1.78, *SD*=.96) και το πιο χαμηλό μέσο όρο στο έργο Σ3 ($\overline{X}$ =.62, *SD*=.78). Μια πιο προσεκτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, δείχνει ότι μόνο τέσσερις μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν ορθά όλα τα ερωτήματα του έργου Σ2 που αφορούσε την κατανόηση δεδομένων σχετικά με αγώνες ποδοσφαίρου, συμπλήρωση αποτελεσμάτων τους και πρόβλεψη αποτελέσματος με βάση δεδομένα. Αλλά υπήρχε ένα μέρος των μαθητών (44%) που κατάφερε να πάρει τις μισές μονάδες στο έργο αυτό, συμπληρώνοντας ορθά κάποια αποτελέσματα που ζητούσε το πρόβλημα. Από την άλλη στο έργο Σ3 που αφορούσε την κατανόηση δεδομένων σχετικά με την περίμετρο, το εμβαδόν κήπων και τη χρέωσή τους και την εύρεση σχέσεων μεταξύ αυτών, μόνο οκτώ μαθητές βρήκαν την ορθή σχέση μεταξύ αυτών και το 13.72% των μαθητών προσπάθησε να βρει μια σχέση μεταξύ αυτών και πήρε τις μισές μονάδες. Οι υπόλοιποι μαθητές έδιναν λάθος απάντηση όπου φαινόταν ξεκάθαρα ότι δεν κατανόησαν το πρόβλημα (54.61%) ή έδιναν λάθος απάντηση με κάποιες ενδείξεις ότι κατανόησαν ότι σχετίζεται το πρόβλημα με εμβαδόν και περίμετρο σχημάτων (30.67%). Όσον αφορά το έργο Σ1, που αφορούσε το σχεδιασμό επιχειρήματος με βάση δεδομένα ραβδογράμματος, μόνο τέσσερις μαθητές πήραν όλες τις μονάδες, δηλαδή έδωσαν ορθή απάντηση και τεκμηρίωση σε συσχετιστικό επίπεδο (κατάλληλη χρήση μέσου όρου). Αλλά υπήρχαν μαθητές (35.66%) που έδωσαν ορθή απάντηση και τεκμηρίωση με πολλαπλές συγκρίσεις ή με εστίαση σε ένα σημείο και έτσι έπαιρναν κάποιους βαθμούς. Όμως, ένα μεγάλο μέρος των μαθητών έδινε λάθος ή ορθή απάντηση χωρίς ουσιαστική τεκμηρίωσή της (63.84%). Όσον αφορά το έργο Σ4 που αφορούσε τη λήψη απόφασης με βάση τα δεδομένα που δίνονταν, παρατηρήθηκε ότι είχε ένα μικρό ποσοστό μαθητών, 16%, που έδωσε ορθή απάντηση. Οι περισσότεροι μαθητές δεν κατάφεραν να κατανοήσουν τα δεδομένα του προβλήματος και έτσι ένα μεγάλο μέρος των μαθητών έδωσε λάθος απάντηση χωρίς κατανόηση των δεδομένων (48.88%) και ένα άλλο μέρος των μαθητών έδωσε λάθος απάντηση με μερική κατανόηση δεδομένων (28.52%). Γενικά, παρατηρείται οι μαθητές σε αυτά τα έργα να μην έχουν ικανοποιητική επίδοση.

Έγινε έλεγχος των συσχετίσεων μεταξύ των 32 μεταβλητών του Δοκιμίου που προέκυψαν από τις επιδόσεις των μαθητών στα αντίστοιχα έργα που έχουν ήδη αναφερθεί. Ο Πίνακας Η1 (βλέπε Παράρτημα Η) δίνει αυτές τις συσχετίσεις. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις υπήρχαν ψηλές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που αποτελούν δείκτες του ίδιου παράγοντα του προτεινόμενου μοντέλου (κυμαίνονται από .10 μέχρι .94), ενώ μεταξύ των μεταβλητών που δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα ήταν σχετικά χαμηλές (κυμαίνονται από .004 μέχρι .32). Σχεδόν όλες οι συσχετίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές, εκτός από κάποιες συσχετίσεις της μεταβλητής Κ5 (επιλογή συμπεράσματος με βάση δεδομένα-κριτική σκέψη: σύνδεση) με μεταβλητές που αποτελούσαν δείκτες του παράγοντα Βασικής Γνώσης Περιεχομένου και του παράγοντα Δημιουργικής Σκέψης. Άρα, δίνεται μια πολύ μικρή πρώτη ένδειξη ότι οι μεταβλητές μπορεί να ομαδοποιηθούν μαζί για να αποτελούν δείκτες του παράγοντα για τον οποίο σχεδιάστηκαν.

Επιβεβαίωση του μοντέλου με εμπειρικά δεδομένα. Για να εξεταστεί η προσαρμογή των δεδομένων των μαθητών από το Δοκίμιο στο προτεινόμενο μοντέλο σχετικά με τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, χρησιμοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Συγκεκριμένα, το μοντέλο υποθέτει ότι: (α) οι επιδόσεις των μαθητών στις 32 μεταβλητές μπορούν να εξηγηθούν από τέσσερις παράγοντες, δυο πρώτης τάξης (βασική γνώση και σύνθετες διαδικασίες σκέψης και δυο ανώτερης τάξης (κριτική σκέψη και δημιουργική σκέψη), (β) κάθε μεταβλητή φορτίζει σε κάθε παράγοντα που έχει σχεδιαστεί και δεν φορτίζει σε άλλους παράγοντες και (γ) οι τέσσερις παράγοντες συσχετίζονται μεταξύ τους.

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης δείχνουν ότι τα δεδομένα των μαθητών των δείγματος προσαρμόζονται στο προτεινόμενο μοντέλο σε ικανοποιητικό βαθμό, αφού οι τιμές των πέντε δεικτών που εξετάζονται είναι μέσα στο εύρος τιμών που ορίζονται για καλή προσαρμογή: (α) $CFI = .968$ (>.95), (β) $TLI = .964$ (>.95), (γ) $x^2 = 827.750$, $df = 446$, $x^2 / df = 1.86$ (<1.96), p<.05 (λόγω μεγέθους δείγματος), (δ) $RMSEA = .033$ (<.05) και (ε) $SRMR = .036$ (<.05). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει γενικά ότι το προσαρμοσμένο Μοντέλο Σκέψης στα μαθηματικά, δηλαδή το μοντέλο των τεσσάρων παραγόντων: βασική γνώση, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης, μπορεί να περιγράψει την ικανότητα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Όμως, επειδή ο Kline (1998) υποστηρίζει ότι «έστω και εάν η θεωρία είναι ακριβής σχετικά με τον αριθμό των παραγόντων ενός μοντέλου πρώτης τάξης, ο ερευνητής πρέπει να εξετάσει κατά πόσο προσαρμόζονται τα δεδομένα σε ένα πιο απλό μοντέλο, ενός παράγοντα», εξετάστηκαν δυο άλλα μοντέλα. Συγκεκριμένα, εξετάστηκε κατά πόσο τα δεδομένα προσαρμόζονται σε ένα μόνο παράγοντα, καθώς και κατά πόσο προσαρμόζονται σε ένα παράγοντα ανωτέρας τάξης. Τα αποτελέσματα από την ανάλυση έδειξαν ότι το μοντέλο ενός παράγοντα δεν πληροί τα κριτήρια που ορίζονται για καλή προσαρμογή, αφού οι τιμές των δεικτών δεν είναι στο ενδεδειγμένο εύρος τιμών: (α) $CFI = .495$ (<.95), (β) $TLI = .457$ (<.95), (γ) $x^2 = 6423.107$, $df = 461$, $x^2/df = 13.93$ (>1.96), p<.05, (δ) $RMSEA = .127$ (>.05) και (ε) $SRMR = .086$ (>.05). Όσον αφορά τα αποτελέσματα της ανάλυσης για μοντέλο ανωτέρας τάξης δείχνουν ότι στο μοντέλο αυτό προσαρμόζονται τα δεδομένα σε ικανοποιητικό βαθμό, αφού οι τιμές των δεικτών είναι στο ενδεδειγμένο εύρος τιμών: (α) $CFI = .966$ (>.95), (β) $TLI = .963$ (>.95), (γ) $x^2 = 844.060$, $df = 448$, $x^2/df = 1.90$ (<1.96), p<.05, (δ) $RMSEA = .033$ (<.05) και (ε) $SRMR = .038$ (<.05). Όμως συγκρίνοντας τα δυο μοντέλα (δηλαδή αυτό των τεσσάρων διακριτών παραγόντων και αυτό της ανωτέρα τάξης) στα οποία η ανάλυση έδειξε καλή προσαρμογή των δεδομένων, φαίνεται ότι στο μοντέλο των τεσσάρων διακριτών παραγόντων τα δεδομένα να προσαρμόζονται στατιστικά σημαντικά καλύτερα σε σχέση με το μοντέλο ανωτέρας τάξης (το πηλίκο της διαφοράς των x^2 των δυο μοντέλων προς τη διαφορά των βαθμών ελευθερίας - df τους αποτελεί στατιστικά σημαντικό σε επίπεδο p<.025 με βάση τον πίνακα κατανομής x^2).

Στο Διάγραμμα 4.2 δίνεται το μοντέλο των τεσσάρων διακριτών παραγόντων που περιγράφουν την ικανότητα της ανωτέρας επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Σε αυτό φαίνονται οι φορτίσεις των μεταβλητών στους αντίστοιχους παράγοντες, οι φορτίσεις παραγόντων πρώτης τάξης ή δευτέρας τάξης σε ανωτέρας τάξης παράγοντες και η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά τους. Όλες αυτές οι τιμές είναι στατιστικά σημαντικές, θετικές και σχετικά υψηλές. Η διακριτή φύση των τεσσάρων παραγόντων επιβεβαιώνεται από το ότι οι παρατηρούμενες μεταβλητές φορτίζουν μόνο σε ένα παράγοντα πρώτης τάξης. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου αυτού επιβεβαιώνει ότι τα έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι κατάλληλα έργα μέτρησης των τεσσάρων άδηλων παραγόντων. Επίσης, στο Διάγραμμα 4.2 διακρίνονται και οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων: βασική γνώση περιεχομένου, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Οι συσχετίσεις αυτές είναι στατιστικά σημαντικές και κυμαίνονται από .66 μέχρι .78.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός αποτελεί τη φόρτιση στον παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση είναι η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 4.2. Το μοντέλο για τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Οι φορτίσεις των μεταβλητών στους παράγοντες είναι όλες στατιστικά σημαντικές, θετικές και σχετικά υψηλές. Συγκεκριμένα, οι περισσότερες φορτίσεις των μεταβλητών Β1-Β7 στον παράγοντα πρώτης τάξης: «Βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά» κυμαίνονται από .50 μέχρι .62, ενώ υπάρχει και μια χαμηλότερη φόρτιση, της μεταβλητής Β2 (αναγνώριση ορθογωνίων) που είναι ίση με .38. Παρόμοιο εύρος παρατηρείται στις φορτίσεις των μεταβλητών Κ1-Κ9 στους παράγοντες πρώτης τάξης που ορίζουν τον παράγοντα της «Κριτικής Σκέψης στα Μαθηματικά» (.30 μέχρι .77). Δηλαδή, στον παράγοντα «Ανάλυση» οι φορτίσεις των μεταβλητών κυμαίνονται από .53 μέχρι .77, στον παράγοντα «Σύνδεση» οι φορτίσεις των μεταβλητών κυμαίνονται από .30 μέχρι . 57 και στον παράγοντα «Αξιολόγηση» οι φορτίσεις κυμαίνονται από .62 μέχρι .74. Ψηλότερες φορτίσεις παρατηρούνται στους παράγοντες πρώτης τάξης που ορίζουν τον παράγοντα της «Δημιουργικής Σκέψης στα Μαθηματικά», αφού κυμαίνονται από .68 μέχρι .98. Δηλαδή, οι φορτίσεις της ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας του έργου Δ1 (κατασκευή ερωτήσεων) κυμαίνονται από .68 μέχρι .86, του έργου Δ2 (κατασκευή μαθηματικών προτάσεων) από .74 μέχρι .85, του έργου Δ3 (κατασκευή σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2) από .85 μέχρι .96 και του έργου Δ4 από .86 μέχρι .98. Οι φορτίσεις των μεταβλητών Σ1-Σ4 στον παράγοντα πρώτης τάξης «Σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά» κυμαίνονται από .46 μέχρι .63. Επίσης, οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης σε αντίστοιχους δευτέρας και τρίτης τάξης (βλέπε κριτική σκέψη και δημιουργική σκέψη) είναι στατιστικά σημαντικές και αρκετά υψηλές, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.2. Οι φορτίσεις αυτές κυμαίνονται για την κριτική σκέψη από .78 μέχρι .93 και για την δημιουργική σκέψη από .59 μέχρι .97.

Όσον αφορά τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς τόσο των μεταβλητών από τους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης όσο και των παραγόντων πρώτης και δευτέρας τάξης από τους αντίστοιχους ανωτέρας τάξης παράγοντες είναι στατιστικά σημαντικά. Με βάση το Διάγραμμα 4.2, παρατηρείται ότι τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των μεταβλητών Β1-Β7 από τον παράγοντα «Βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά» κυμαίνονται από 14% μέχρι 38%. Λίγο ψηλότερα είναι τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των μεταβλητών Κ1-Κ9 από τους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης της κριτικής σκέψης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση), αφού κυμαίνονται από 10% μέχρι 54%. Πολύ ψηλότερα είναι τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των παραγόντων πρώτης τάξης της κριτικής σκέψης, αφού κυμαίνονται από 62% μέχρι 86%. Όσον αφορά τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των μεταβλητών της ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας του κάθε δημιουργικού έργου Δ1-Δ4 από τους αντίστοιχους παράγοντες πρώτης τάξης (δημιουργικά έργα: Δ1-Δ4) και δευτέρας τάξης της δημιουργικής σκέψης (σύνθεση, νοητική δημιουργία) είναι ιδιαίτερα ψηλά, αφού κυμαίνονται από 35% μέχρι 97%. Παρόμοιο μέγεθος έχουν και τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των παραγόντων δευτέρας τάξης της δημιουργικής σκέψης, αφού κυμαίνονται από 79% μέχρι 94%. Ενώ τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των μεταβλητών Σ1-Σ4 από τον παράγοντα «Σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά» κυμαίνονται από 21% μέχρι 40%.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.2, στη δομή του μοντέλου συμπεριλήφθηκαν τρεις στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ του σφάλματος μεταβλητών που ανήκουν στον ίδιο παράγοντα, αυτό της βασικής γνώσης περιεχομένου. Οι συσχετίσεις αυτές δείχνουν ότι υπάρχει κοινό σφάλμα στη μέτρηση των μεταβλητών λόγω του τύπου και της διαδικασίας χορήγησης του δοκιμίου. Συγκεκριμένα, συμπεριλήφθηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του σφάλματος των μεταβλητών Β1 και Β2 (r=.13), αφού αφορούν έργα που απαιτούν την ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων. Επίσης, συμπεριλήφθηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του σφάλματος των μεταβλητών Β4 και Β5 (r=.21), αφού αφορούν έργα που για την επίλυσή τους απαιτούν κατανόηση δεδομένων και πράξεις αριθμών. Τέλος, συμπεριλήφθηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του σφάλματος των μεταβλητών Β6 και Β7 (r=.31), αφού αφορούν έργα που χρησιμοποιούν τα ίδια σχήματα για εύρεση περιμέτρου (Β6) και για εύρεση εμβαδού (Β7).

Ο Πίνακας 4.6 δίνει τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τις επιδόσεις των μαθητών του δείγματος τόσο στο συνολικό δοκίμιο όσο και στους τέσσερις παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά με βάση το μοντέλο που επιβεβαιώθηκε πιο πάνω. Όπου ισχύει δίνονται στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τις επιδόσεις των μαθητών του δείγματος στους υπό-παράγοντες που ορίζονται. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία περιγραφικής στατιστικής που δίνονται είναι ο μέσος όρος, η τυπική απόκλιση, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή για σύγκριση μεταξύ των παραγόντων του *Δοκιμίου*, καθώς παρουσιάζονται και οι τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης.

Πίνακας 4.6

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής του Δοκιμίου της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά στο Σύνολο και στους Τέσσερις Παράγοντες του

	Μέσος Όρος ($\overline{X}$)	Τυπική Απόκλιση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Λοξότητα	Κύρτωση
Συνολική Επίδοση στο *Δοκίμιο*	.55	.15	.08	.94	-.27	-.29
Βασική Γνώση Περιεχομένου	.71	.18	.16	1	-.79	.12
Κριτική Σκέψη	.58	.20	.07	.98	-.41	-.64
Ανάλυση	.81	.27	0	1	-1.28	.37
Σύνδεση	.55	.20	0	.95	-.37	-.52
Αξιολόγηση	.48	.32	0	1	-.14	-1.21
Δημιουργική Σκέψη	.53	.18	0	.96	-.32	-.17
Σύνθεση	.56	.17	0	.96	-.58	.68
Νοητική Δημιουργία	.50	.24	0	1	-.16	-.65
Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης	.35	.20	0	.92	.13	-.59

Με βάση τον Πίνακα 4.6, ο μέσος όρος της επίδοσης των 802 μαθητών του δείγματος ήταν .55 με μέγιστη τιμή το .94 και η τυπική απόκλιση .15. Όσον αφορά τους μέσους όρους των τεσσάρων παραγόντων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και των υπό-παραγόντων όπου ισχύει, κυμαίνονται από .35 μέχρι .85. Συγκεκριμένα, οι μαθητές του δείγματος είχαν το πιο ψηλό μέσο όρο στα έργα που μετρούν τη βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά ($\overline{X}$ =.71, *SD*=.18) και το χαμηλότερο στα έργα που μετρούν τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά ($\overline{X}$ =.35, *SD*=.20). Ενώ ο μέσος όρος των μαθητών του δείγματος στα έργα που μετρούν την κριτική σκέψη και στα έργα που μετρούν τη δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά ήταν περίπου ο ίδιος ($\overline{X}$ =.58, *SD*=.20 και $\overline{X}$ =.53, *SD*=.18 αντίστοιχα). Όσον αφορά τους μέσους όρους των μαθητών του δείγματος στους υπό-παραγόντες της κριτικής σκέψης, παρατηρήθηκε ότι ο πιο ψηλός ήταν στην ανάλυση ($\overline{X}$ =.81, *SD*=.27) και ο χαμηλότερος ήταν στην αξιολόγηση ($\overline{X}$ =.48, *SD*=.32). Ενώ οι μέσοι όροι των μαθητών στους υπό-παράγοντες της δημιουργικής σκέψης ήταν περίπου ίσοι ($\overline{X}_{\text{σύνθεση}}$=.56, $SD_{\text{σύνθεση}}$=.17 και $\overline{X}_{\text{νοητική δημιουργία}}$=.50, $SD_{\text{νοητική δημιουργία}}$=.24).

Οι επιδόσεις των μαθητών τόσο στο συνολικό δοκίμιο όσο και στους παράγοντες – υπό-παράγοντες του μοντέλου που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά ακολουθούν κανονική κατανομή, αφού οι απόλυτες τιμές της λοξότητας και της κύρτωσής τους είναι μικρότερες από την τιμή δυο και στις περισσότερες περιπτώσεις πλησιάζουν το μηδέν (George & Mallery, 2010). Επιπρόσθετα εξετάστηκαν τα γραφήματα: normal probability plots για τη συνολική επίδοση και την επίδοση στους τέσσερις παράγοντες και στους υπό-παράγοντες όπου ισχύει και παρατηρήθηκε ότι τα σημεία στο διάγραμμα ήταν πάνω κάτω σε ευθεία γραμμή. Αυτό ενισχύει περισσότερο το πιο πάνω εύρημα σχετικά με το ότι οι επιδόσεις που εξετάστηκαν ακολουθούν κανονική κατανομή.

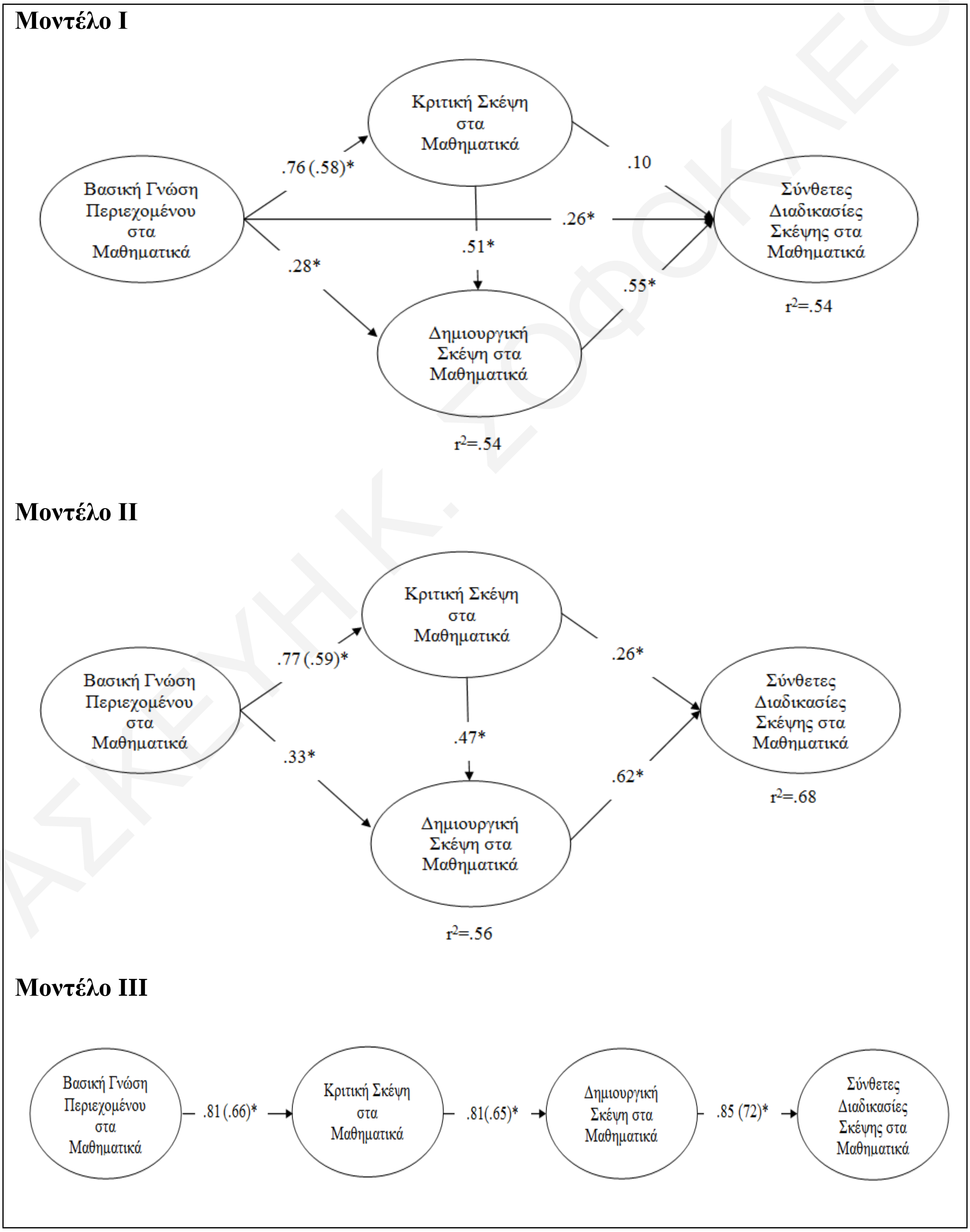
Επίσης, εξετάστηκε κατά πόσο υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις τέσσερις ικανότητες: βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά, κριτική σκέψη στα μαθηματικά, δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά και σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά χρησιμοποιώντας το κριτήριο *t* για εξαρτημένα δείγματα (paired samples). Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης έδειξαν ότι μεταξύ κάθε ζευγαριού επίδοσης υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε επίπεδο σημαντικότητας p<.01.

Οι μέσοι όροι των μαθητών σε κάθε παράγοντα και η εύρεση στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των επιδόσεων στους παράγοντες δίνουν κάποιες ενδείξεις σχετικά με τη σχέση μεταξύ των ικανοτήτων της ανωτέρου επιπέδου σκέψης που θα εξεταστούν στη συνέχεια. Δηλαδή, ο χαμηλός μέσος όρος των σύνθετων διαδικασιών σκέψης και οι υψηλότεροι μέσοι όροι των άλλων τριών ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά υποστηρίζουν την εξέταση του βαθμού που προβλέπουν τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης οι άλλες τρεις ικανότητες.

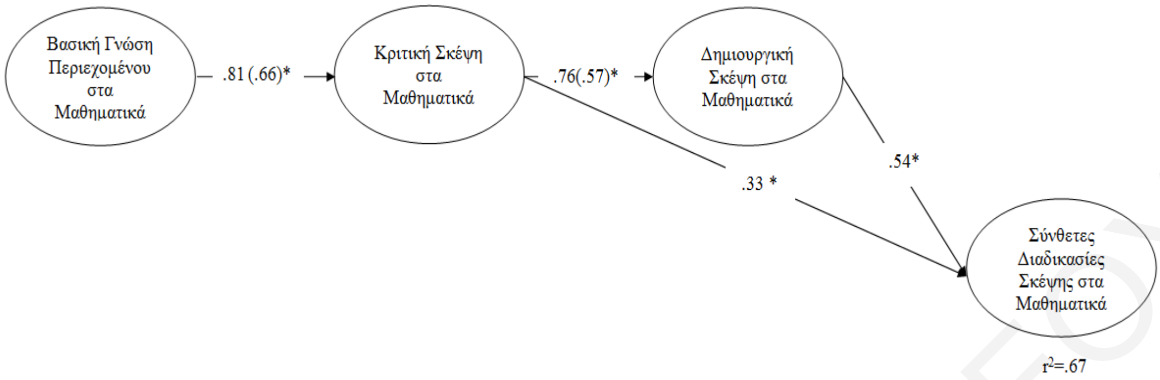
Σχέση ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση latent path στα δεδομένα με σκοπό την απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος:

2. Σε ποιο βαθμό οι επιδόσεις των μαθητών Στ΄ δημοτικού στη βασική γνώση, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργική σκέψη ερμηνεύουν την επίδοσή τους στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά και με ποιο τρόπο;

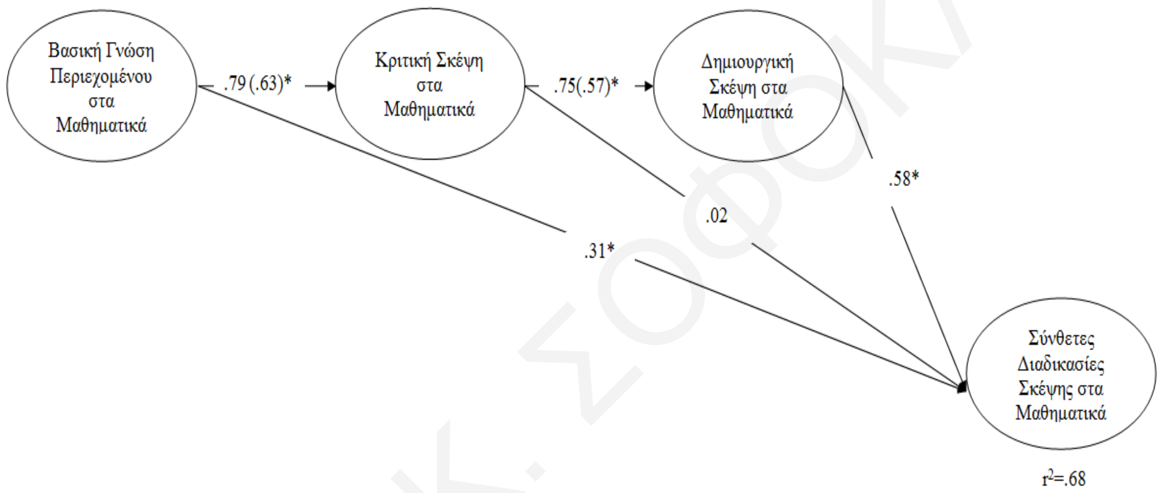
Συγκεκριμένα, εξετάστηκε η προσαρμογή των δεδομένων του *Δοκιμίου* σε έξι διαφορετικά μοντέλα όπου σε όλα ίσχυαν οι εξής σχέσεις με βάση τη βιβλιογραφία: (α) η κριτική σκέψη προβλέπεται από τη βασική γνώση, (β) η δημιουργική σκέψη προβλέπεται από τη βασική γνώση και την κριτική σκέψη και (γ) οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται από τη βασική γνώση, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη. Όμως, τα μοντέλα αυτά διέφεραν ως προς το είδος της επίδρασης (άμεση ή έμμεση) της βασικής γνώσης, της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Τα μοντέλα αυτά παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 4.3 και οι δείκτες προσαρμογής των δεδομένων για το καθένα από αυτά δίνονται στον Πίνακα 4.7.



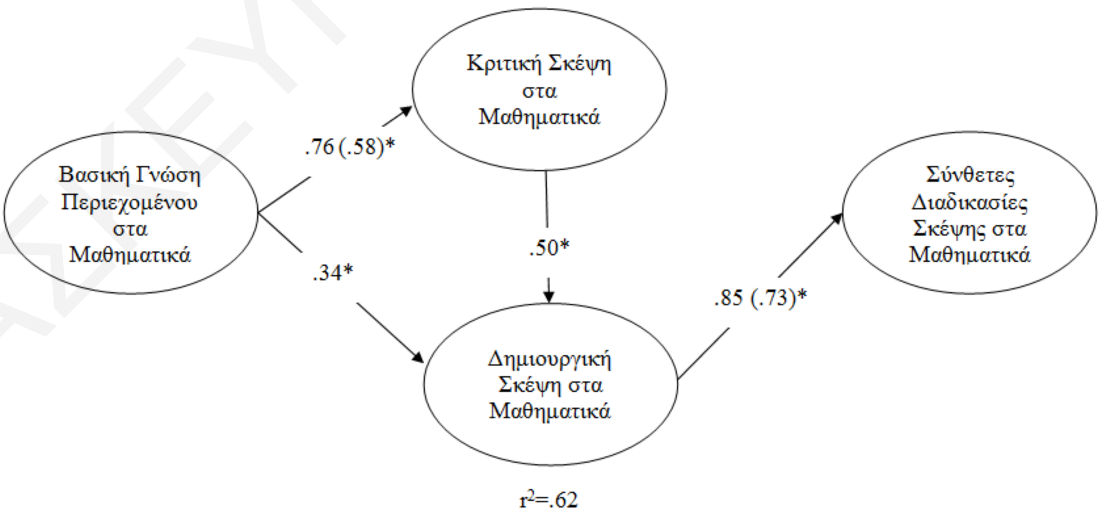
Μοντέλο IV



Μοντέλο V



Μοντέλο VI



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός αποτελεί το συντελεστή παλινδρόμησης και ο αριθμός στην παρένθεση όταν δίνεται είναι η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2). *p<.01

Διάγραμμα 4.3. Τα έξι μοντέλα που εξετάστηκαν σχετικά με τη σχέση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Πίνακας 4.7

Δείκτες Προσαρμογής των Δεδομένων στα Έξι Μοντέλα που Εξετάστηκαν Σχετικά με τη Σχέση των Ικανοτήτων που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

	CFI	*TLI*	x^2	*df*	x^2/df	*RMSEA*	*SRMR*
Μοντέλο I	.968	.964	827.750	446	1.78	.033	.036
Μοντέλο II	.967	.963	835.872	447	1.87	.033	.036
Μοντέλο III	.965	.962	857.695	449	1.91	.034	.038
Μοντέλο IV	.966	.963	846.585	448	1.89	.033	.037
Μοντέλο V	.967	.963	836.447	447	1.87	.033	.037
Μοντέλο VI	.967	.963	843.107	448	1.88	.033	.037

Με βάση το Διάγραμμα 4.3, τα Μοντέλα I και V, στα οποία η επίδραση της βασικής γνώσης περιεχομένου στις σύνθετες διαδικασίες μάθησης είναι και άμεση, εκτός από έμμεση όπως στα υπόλοιπα μοντέλα, περιλάμβαναν ένα μη στατιστικά σημαντικό συντελεστή παλινδρόμησης, της κριτικής σκέψης προς τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Άρα τα δυο αυτά μοντέλα έστω και αν έχουν πολύ καλούς δείκτες προσαρμογής, δεν θεωρούνται αποδεκτά. Συγκρίνοντας τα υπόλοιπα μοντέλα, Μοντέλα II, III, IV και VI, τα οποία περιλάμβαναν όλα στατιστικά σημαντικούς συντελεστές παλινδρόμησης (βλέπε Διάγραμμα 4.3), με βάση τον Πίνακα 4.7 τους καλύτερους δείκτες προσαρμογής είχαν τα Μοντέλο II και VI (ψηλότερο *CFI* και χαμηλότερο x^2/df). Τα δυο αυτά μοντέλα, όμως, διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους (το πηλίκο της διαφοράς των x^2 των δυο μοντέλων προς τη διαφορά των βαθμών ελευθερίας - df τους αποτελεί στατιστικά σημαντικό σε επίπεδο $p<.01$ με βάση τον πίνακα κατανομής x^2) και αυτό που έχει την καλύτερη προσαρμογή είναι το Μοντέλο II.

Το Μοντέλο II περιγράφει ότι η κριτική σκέψη προβλέπεται άμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου, η δημιουργική σκέψη προβλέπεται άμεσα από την κριτική σκέψη και άμεσα και έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται άμεσα και έμμεσα από την κριτική σκέψη, άμεσα από τη δημιουργική σκέψη και έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου. Ενώ απορρίφθηκαν μοντέλα τα οποία δεν περιλάμβαναν μία ή περισσότερες από τις άμεσες επιδράσεις του Μοντέλου II (το Μοντέλο III δεν περιλάμβανε την άμεση επίδραση της βασικής γνώσης στη δημιουργική και της κριτικής σκέψης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, το Μοντέλο IV δεν περιλάμβανε την άμεση επίδραση της βασικής γνώσης στη δημιουργική σκέψη και το Μοντέλο VI δεν περιλάμβανε την άμεση επίδραση της κριτικής σκέψης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης). Στο Μοντέλο II οι συντελεστές παλινδρόμησης ήταν στατιστικά σημαντικοί, όπως έχει ήδη αναφερθεί και μπορούν να χαρακτηριστούν και οι τιμές τους υψηλές αν αθροιστούν και οι έμμεσες επιδράσεις μαζί με τις άμεσες. Συγκεκριμένα οι συντελεστές παλινδρόμησης των τριών παραγόντων (βασική γνώση περιεχομένου, κριτική και δημιουργική σκέψη) στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ήταν σχεδόν ίσοι (Δημιουργική σκέψη: .61, Κριτική σκέψη: .55 και βασική γνώση περιεχομένου: .62). Ενώ, βρέθηκαν υψηλότεροι συντελεστές παλινδρόμησης στην περίπτωση της βασικής γνώσης περιεχομένου στη δημιουργική σκέψη (. 68) και στην κριτική σκέψη (.77) και χαμηλότερος συντελεστής παλινδρόμησης στην περίπτωση της κριτικής σκέψης στη δημιουργική σκέψη (.47). Όσον αφορά τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς που δίνονται στο Μοντέλο ΙΙ είναι στατιστικά σημαντικά και ψηλά. Συγκεκριμένα, οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης εξηγούν το 68% της διασποράς των παραγόντων κριτικής, δημιουργικής σκέψης και βασικής γνώσης περιεχομένου, η δημιουργική σκέψη εξηγεί το 56% της διασποράς της κριτικής σκέψης και της βασικής γνώσης περιεχομένου και η κριτική σκέψη εξηγεί το 59% της διασποράς της βασικής γνώσης περιεχομένου.

Οι σχέσεις που βρέθηκαν πιο πάνω μεταξύ των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά δίνουν κάποιες ενδείξεις ως προς τις ομάδες διαφορετικής επίδοσης που μπορεί να προκύψουν από τη διερεύνηση της οποίας τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν πιο κάτω. Η ύπαρξη άμεσης επίδρασης της κριτικής σκέψης και της δημιουργικής σκέψης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης και όχι της βασικής γνώσης, δηλώνει από τη μια ότι χωρίς βασική γνώση δεν μπορεί να αναπτυχθεί κριτική και δημιουργική σκέψη και κατ' επέκταση σύνθετες διαδικασίες σκέψης και από την άλλη ότι υπάρχει μια διάκριση της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης.

Ομάδες διαφορετικών ικανοτήτων ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν το τρίτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας, το οποίο αφορά την εύρεση και την περιγραφή ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά:

3. Ποιες είναι οι ομάδες μαθητών Στ΄ δημοτικού διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους στα μαθηματικά;

Εντοπισμός ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Για τη διερεύνηση της ύπαρξης ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά έγινε χρήση της Λανθάνουσας Ανάλυσης Κατηγοριών (Latent Class Analysis) με βάση τις επιδόσεις των μαθητών στις 32 μεταβλητές που προέκυψαν από το *Δοκίμιο της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά*. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν τέσσερα διαδοχικά μοντέλα με βάση τα οποία οι μαθητές μπορούν να χωριστούν σε δυο, τρεις, τέσσερις ή πέντε ομάδες παρόμοιας συμπεριφοράς στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Το μοντέλο με πέντε ομάδες απορρίφθηκε λόγω του ότι το πρόγραμμα εντόπιζε ότι το μοντέλο μπορεί να μην προσδιορίζεται. Αυτό γιατί τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων των παραμέτρων του μοντέλου εμφανίζονταν μη αξιόπιστα για κάποιες παραμέτρους (μη θετικός πρώτης τάξης παραγόμενος πίνακας). Η συγκεκριμένη προειδοποίηση εμφανιζόταν έστω και αν γινόταν αλλαγή στην τιμή έναρξης. Έτσι, λήφθηκαν υπόψη τα μοντέλα με δυο, τρεις και τέσσερις ομάδες αφού παρουσίασαν επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood (-36270.490, -35599.887 και -35021.438 αντίστοιχα) τουλάχιστον τέσσερις φορές χωρίς κάποια προειδοποίηση σφάλματος από το πρόγραμμα. Σημειώνεται ότι παρουσιαζόταν επανάληψη της καλύτερης τιμής loglikelihood σε όλα τα μοντέλα με αυξανόμενο ρυθμό όσο αυξανόταν η τιμή έναρξης.

Για τη σύγκριση των μοντέλων με δυο ομάδες, τρεις και τέσσερις ομάδες, χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές *AIC* και *BIC* (βλέπε Πίνακα 4.8) και ο έλεγχος Bootstrap LR Difference Test (TECH14 output). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το καλύτερο μοντέλο είναι αυτό με τις τέσσερις ομάδες, αφού έχει τις μικρότερες τιμές *AIC* και *BIC* σε σχέση με τα άλλα μοντέλα. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.8 την υψηλότερη τιμή εντροπίας παρουσιάζει το μοντέλο με τρεις ομάδες, αλλά όταν γίνει ο έλεγχος Bootstrap LR Difference Test (TECH14 output) παρουσιάζεται ότι το μοντέλο με τις τέσσερις ομάδες είναι στατιστικά σημαντικά καλύτερο από το μοντέλο με τις τρεις ομάδες. Συγκεκριμένα, η διαφορά στις τιμές *LR* (likelihood radio) μεταξύ του μοντέλου με τρεις ομάδες και του μοντέλου με τέσσερις ομάδες είναι στατιστικά σημαντική, LR_{Δ}= 1156.898, df=33, p<.0001. Σημειώνεται ότι κατά τον έλεγχο Bootstrap LR Difference Test (TECH14 output) παρατηρήθηκε να επαναλαμβάνεται ακριβώς η καλύτερη τιμή loglikelihood του μοντέλου με τις τρεις ομάδες (-35599.887), πράγμα που δηλώνει ότι είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματα του ελέγχου Bootstrap (Geiser, 2010).

Πίνακας 4.8

Δείκτες Προσαρμογής για τα Μοντέλα με Διαφορετικό Αριθμό Ομάδων Παρόμοιας Συμπεριφοράς στις Ικανότητες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη

	AIC	*BIC*	Adjusted BIC	Entropy
Μοντέλο με δυο ομάδες	72734.980	73189.629	72881.600	.917
Μοντέλο με τρεις ομάδες	71459.775	72069.099	71656.276	.940
Μοντέλο με τέσσερις ομάδες	70368.877	71132.875	70615.259	.933

Στον Πίνακα 4.9 δίνεται η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν στην ομάδα που τους τοποθέτησε η Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (Latent Class Analysis) σύμφωνα με το μοντέλο των τεσσάρων ομάδων.

Πίνακας 4.9

Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Ομάδας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν:	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υποκείμενα πρώτης ομάδας	.97	.03	.00	.00
Υποκείμενα δεύτερης ομάδας	.01	.97	.01	.01
Υποκείμενα τρίτης ομάδας	.00	.01	.95	.04
Υποκείμενα τέταρτης ομάδας	.00	.01	.03	.96

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.9, οι τιμές που δείχνουν την μέση πιθανότητα των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν στην ομάδα που τους τοποθέτησε η ανάλυση θεωρούνται ικανοποιητικές. Συγκεκριμένα, τα υποκείμενα της πρώτης ομάδας είχαν μέση πιθανότητα να ανήκουν στην πρώτη ομάδα .97, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητά τους να ανήκουν στις άλλες ομάδες ήταν πολύ μικρή. Παρόμοια, και τα υποκείμενα της δεύτερης ομάδας είχαν μέση πιθανότητα να ανήκουν στην δεύτερη ομάδα .97, ενώ η μέση πιθανότητά τους να ανήκουν στις άλλες ομάδες ήταν πολύ μικρή. Η μέση πιθανότητα των υποκειμένων της τρίτης ομάδας να ανήκουν στην τρίτη ομάδα ήταν .95, ενώ οι τιμές της μέσης πιθανότητάς τους να ανήκουν στις άλλες ομάδες ήταν πολύ μικρές. Παρόμοια και η τιμή της μέσης πιθανότητας των υποκειμένων της τέταρτης ομάδας να ανήκουν στην τέταρτη ομάδα ήταν πολύ ψηλό (.96) και οι αντίστοιχες τιμές τους να ανήκουν στις άλλες ομάδες ήταν πολύ μικρές.

Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής για τις τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος που ανήκουν στην κάθε μια ομάδα ήταν διαφορετικός. Στην τέταρτη ομάδα ανήκουν οι περισσότεροι μαθητές του δείγματος (304 μαθητές – 38%), ενώ στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι λιγότεροι μαθητές του δείγματος (134 μαθητές - 16%). Στη δεύτερη ομάδα ο αριθμός των μαθητών ήταν 198 (25%), ενώ στην τρίτη ομάδα ο αριθμός των μαθητών ήταν ελάχιστα μικρότερος από τη δεύτερη ομάδα, δηλαδή 166 μαθητές (21%).

Ο μέσος όρος της συνολικής επίδοσης στο *Δοκίμιο* των μαθητών της κάθε ομάδας δίνεται στον Πίνακα 4.10, όπως και οι τυπικές τους αποκλίσεις τους, η ελάχιστη και η μέγιστη συνολική επίδοση των μαθητών που ανήκουν σε κάθε ομάδα.

Πίνακας 4.10

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής της Συνολικής Επίδοσης στο Δοκίμιο των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων

	Μέσος Όρος ($\bar{X}$)	Τυπική Απόκλιση (*SD*)	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Πρώτη Ομάδα (134 μαθητές)	.32	.08	.08	.50
Δεύτερη Ομάδα (198 μαθητές)	.54	.08	.34	.80
Τρίτη Ομάδα (166 μαθητές)	.47	.08	.24	.62
Τετάρτη Ομάδα (304 μαθητές)	.67	.08	.52	.94

Με βάση τον Πίνακα 4.10, η τέταρτη ομάδα είχε το υψηλότερο μέσο όσο ($\bar{X}$ =.67, *SD*=.08), ενώ η πρώτη ομάδα είχε το χαμηλότερο μέσο όρο ($\bar{X}$ =.32, *SD*=.08). Ο μέσος όρος της δεύτερης ($\bar{X}$ =.54, *SD*=.08) και της τρίτης ομάδας ($\bar{X}$ =.47, *SD*=.08) ήταν σχεδόν ίσος. Σημειώνεται ότι οι τυπικές αποκλίσεις και στις τέσσερις ομάδες ήταν πολύ μικρές, πράγμα που δείχνει ότι δεν αποκλίνουν οι τιμές των μαθητών της κάθε ομάδας από το μέσο όρο της. Επίσης, ο Πίνακας 4.10 δίνει τη ελάχιστη τιμή και τη μέγιστη τιμή που πήραν μαθητές που ανήκουν σε κάθε ομάδα. Στην πρώτη ομάδα άνηκαν οι μαθητές που πήραν τη χαμηλότερη συνολική επίδοση του δείγματος (.08) και στην τέταρτη ομάδα άνηκαν οι μαθητές που πήραν την υψηλότερη συνολική επίδοση ολόκληρου του δείγματος (.94). Η υψηλότερη συνολική επίδοση της πρώτης ομάδας ήταν σχεδόν ίση με τη χαμηλότερη βαθμολογία της τέταρτης ομάδας (.50 και .52 αντίστοιχα). Άρα, η πρώτη ομάδα περιλάμβανε τους μαθητές με τις χαμηλότερες βαθμολογίες στη συνολική επίδοση στο *Δοκίμιο*, ενώ η τέταρτη ομάδα περιλάμβανε τους μαθητές με τις υψηλότερες βαθμολογίες στη συνολική επίδοση στο Δοκίμιο. Όσον αφορά την ελάχιστη και την υψηλότερη συνολική επίδοση στο *Δοκίμιο* στην δεύτερη ομάδα ήταν .34 και .80

αντίστοιχα, ενώ στην τρίτη ομάδα ήταν .24 και .62 αντίστοιχα. Δηλαδή, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας ήταν καλύτεροι στη συνολική επίδοση από τους μαθητές της τρίτης ομάδας, αλλά πιο αδύνατοι από τους μαθητές της τέταρτης ομάδας.

Για επιβεβαίωση του ότι οι τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης, που βρέθηκαν από την Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους στη συνολική επίδοση στο *Δοκίμιο* έγινε χρήση της Ανάλυσης Διακύμανσης μίας ανεξάρτητης μεταβλητής (ANOVA). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής δίνονται στον Πίνακα 4.11.

Πίνακας 4.11

Έλεγχος Σημαντικότητας των Διαφορών στην Συνολική Επίδοση στο Δοκίμιο μεταξύ των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων

Πηγή διακύμανσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσοι τετραγώνων	*F*
Μεταξύ των ομάδων	11.540	3	3.847	610.213*
Εντός των ομάδων	4.879	774	.006	

$^*p<.05$

Με βάση τον Πίνακα 4.11, η ανάλυση έδειξε ότι υπήρχε στατιστική σημαντική διαφορά μεταξύ των συνολικών επιδόσεων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων ($F_{(3,774)}$=610.213, $p<.001$) και αυτή η διαφορά από πρακτικής άποψης θεωρείται μεγάλη (*partial* η^2=.7>.14) (Cohen, 1988). Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών με τη χρήση Scheffe, έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (σε επίπεδο α=.05) μεταξύ όλων των συνολικών επιδόσεων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων.

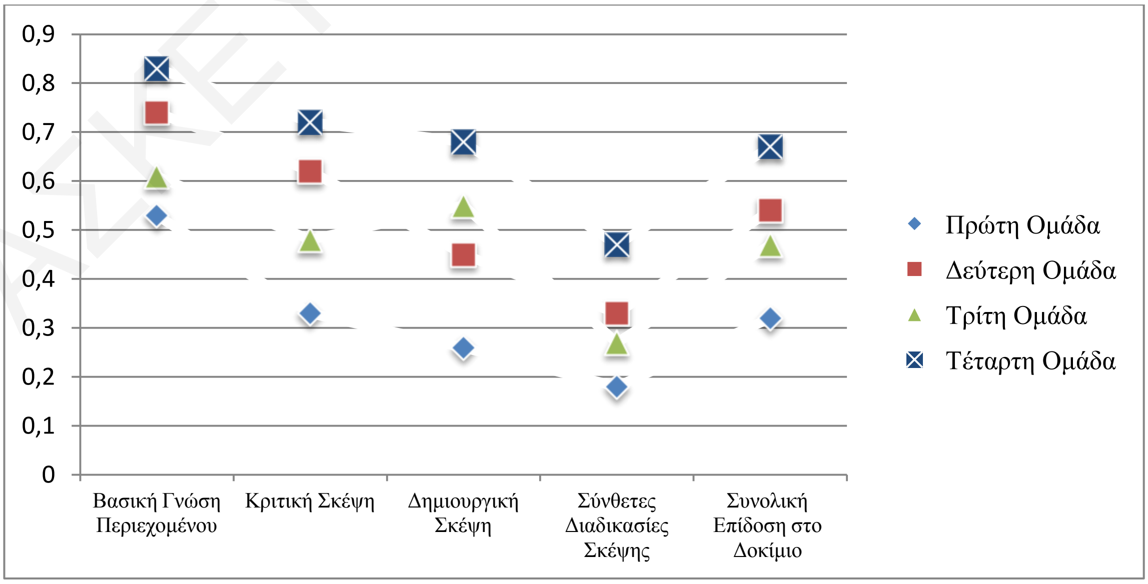
Οι μέσοι όροι των επιδόσεων και οι τυπικές αποκλίσεις των μαθητών της κάθε ομάδας στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.12.

Πίνακας 4.12

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Επιδόσεων των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στις Ικανότητες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

	Πρώτη Ομάδα		Δεύτερη Ομάδα		Τρίτη Ομάδα		Τέταρτη Ομάδα	
	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*
Βασική Γνώση Περιεχομένου	.53	.19	.74	.13	.61	.15	.83	.10
Κριτική Σκέψη	.33	.15	.62	.14	.48	.15	.72	.13
Δημιουργική Σκέψη	.26	.11	.45	.10	.55	.10	.68	.10
Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης	.18	.15	.33	.17	.27	.15	.47	.17

Με βάση τον Πίνακα 4.12, σε όλες τις ομάδες ο ψηλότερος μέσος όρος παρουσιάστηκε στη βασική γνώση περιεχομένου και ο χαμηλότερος μέσος όρος στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Παρόμοια συμπεριφέρθηκε στο σύνολο το δείγμα της εργασίας. Εκεί που υπάρχει διαφοροποίηση είναι στους μέσους όρους της κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Συγκεκριμένα, σε όλες τις ομάδες εκτός από την τρίτη ομάδα οι μαθητές τους σημείωσαν υψηλότερο μέσο όρο στην κριτική σκέψη σε σχέση με τη δημιουργική σκέψη, ενώ η τρίτη ομάδα είχε υψηλότερο μέσο όρο στη δημιουργική σκέψη σε σχέση με την κριτική σκέψη. Επίσης, με βάση τον Πίνακα 4.12 η τέταρτη ομάδα σημείωσε τους υψηλότερους μέσους όρους σε όλες τις ικανότητες, ενώ η πρώτη ομάδα είχε τους χαμηλότερους μέσους όρους σε όλες τις ικανότητες. Η δεύτερη ομάδα είχε πιο υψηλούς μέσους όρους σε όλες τις ικανότητες εκτός από τη δημιουργική σκέψη από την τρίτη ομάδα. Στο Διάγραμμα 4.4 παρουσιάζονται αυτές οι διαφορές πιο ξεκάθαρα.



Διάγραμμα 4.4. Οι μέσοι όροι των επιδόσεων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων τόσο στο σύνολο του *Δοκιμίου* όσο και στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Για επιβεβαίωση του ότι οι τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης, που βρέθηκαν από την Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά έγινε χρήση της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης Διακύμανσης (MANOVA). Η ανάλυση έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τεσσάρων ομάδων στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (*Pillais*=1.005, $F_{(12, 2319)}$=97.322, *p*<.01, *partial* η^2= .335) και οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν μεγάλες λόγω της τιμής του η^2. Βρέθηκε, επίσης, από διακριτά ANOVA ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τεσσάρων ομάδων στην επίδοσή τους σε κάθε μία από τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι τέσσερις ομάδες διέφεραν στατιστικά σημαντικά στη βασική γνώση περιεχομένου ($F_{(3, 774)}$=188.003, *p*<.01, *partial* η^2= .422), στην κριτική σκέψη ($F_{(3, 774)}$=267.771, *p*<.01, *partial* η^2= .509), στη δημιουργική σκέψη ($F_{(3, 774)}$=539.797, *p*<.01, *partial* η^2= .677) και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ($F_{(3, 774)}$=109.416, *p*<.01, *partial* η^2= .298). Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών με τη χρήση Scheffe, έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (σε επίπεδο α=.05) μεταξύ όλων των επιδόσεων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

Ο Πίνακας 4.13 παρουσιάζει μια συνοπτική κατανομή των μέσων όρων των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η κατανομή έγινε με βάση τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση της συνολικής επίδοσης των μαθητών όλου του δείγματος. Έτσι, υψηλή επίδοση αποτελεί αυτή που είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης όλου του δείγματος ($\overline{X} \geq .70$), μέτρια προς υψηλή επίδοση αποτελεί αυτή που είναι μεταξύ αυτού του αθροίσματος και του μέσου όρου ($.55 \leq \overline{X} < .70$), μέτρια προς χαμηλή επίδοση αποτελεί αυτή που είναι μεταξύ του μέσου όρου και της διαφοράς του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης όλου του δείγματος ($.40 \leq \overline{X} < .55$) και χαμηλή επίδοση αποτελεί αυτή που είναι μικρότερη από τη διαφορά του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης όλου του δείγματος ($\overline{X} < .40$).

Πίνακας 4.13

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τεσσάρων Ομάδων στις Τέσσερις Ικανότητες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)		ΒΓ		ΒΓ, ΚΣ
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)		ΚΣ	ΒΓ, ΔΣ	ΔΣ
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	ΒΓ	ΔΣ	ΚΣ	ΣΔ
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ	ΣΔ	ΣΔ	

Σημείωση. Ο κωδικός ΒΓ αντιστοιχεί στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά».

Με βάση τον Πίνακα 4.13, οι μαθητές της πρώτης ομάδας είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και στις υπόλοιπες ικανότητες είχαν χαμηλή επίδοση. Οι μαθητές της δεύτερη ομάδας είχαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση, μέτρια προς υψηλή στην κριτική σκέψη, μέτρια προς χαμηλή στη δημιουργική σκέψη και χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στην βασική γνώση και στη δημιουργική σκέψη, μέτρια προς χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη και χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας είχαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση και στην κριτική σκέψη, μέτρια προς υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη και μέτρια προς χαμηλή στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η συμπεριφορά της κάθε ομάδας σε κάθε ομάδα μεταβλητών που ορίζουν την κάθε ικανότητα.

Περιγραφή των χαρακτηριστικών και της συμπεριφοράς των τεσσάρων ομάδων ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται για κάθε μία ικανότητα που περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά τα χαρακτηριστικά και η συμπεριφορά των μαθητών των τεσσάρων ομάδων. Δηλαδή, για κάθε μια ικανότητα παρουσιάζεται η κατανομή των μέσων όρων των μαθητών της κάθε ομάδας στις μεταβλητές που την εξηγούν.

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων ως προς την βασική τους γνώση στα μαθηματικά. Ο Πίνακας 4.14 παρουσιάζει τη συνοπτική κατανομή των μέσων όρων των τεσσάρων ομάδων των μαθητών στις επτά μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Βασική Γνώση Περιεχομένου με βάση το επιβεβαιωμένο μοντέλο. Η κατανομή έγινε με βάση τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση της συνολικής επίδοσης των μαθητών όλου του δείγματος, όπως εξηγήθηκε πιο πάνω.

Πίνακας 4.14

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τεσσάρων Ομάδων στις Μεταβλητές που Αποτελούν Δείκτες του Παράγοντα Βασική Γνώση Περιεχομένου

	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	Β3, Β4	Β3, Β4, Β5, Β6	Β3, Β4, Β5	Β1, Β3, Β4, Β5, Β6, Β7
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)	Β1, Β5	Β1, Β7	Β1, Β6	Β2
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	Β2, Β6	Β2	Β2, Β7	
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	Β7			

Σημείωση. Β1: Αναγνώριση τριγώνων, Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων, Β3: Σύγκριση μεγέθους αριθμών, Β4: Απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης ραβδογράμματος, Β5: Επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με δομή σύγκρισης, Β6: Υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων, Β7: Υπολογισμός εμβαδού σχημάτων.

Με βάση τον Πίνακα 4.14, οι μαθητές όλων των ομάδων σημείωσαν υψηλή επίδοση στις ασκήσεις που αφορούσαν σύγκριση μεγέθους αριθμών (Β3) και απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος (Β4). Επίσης, οι μαθητές της δεύτερης, της τρίτης και της τέταρτης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση και στην άσκηση που αφορούσε επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με δομή σύγκρισης (Β5), ενώ οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν σε αυτή μέτρια προς υψηλή επίδοση. Επιπρόσθετα, παρατηρείται οι μαθητές της δεύτερης και της τέταρτης ομάδας να σημείωσαν υψηλή επίδοση και στην άσκηση που αφορούσε υπολογισμό περιμέτρου σχημάτων (Β6), ενώ αντίστοιχα οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση σε αυτή και οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση. Μια προσεκτική μελέτη των απαντήσεων των μαθητών σε αυτή την άσκηση παρατηρείται η πρώτη ομάδα να έχει το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών που έδωσε λάθος απάντηση (31.30%) σε σχέση με τις άλλες ομάδες (Δεύτερη ομάδα: 4.55%, Τρίτη ομάδα:14.11% και Τέταρτη ομάδα: 0.33%) και το μικρότερο ποσοστό που έδωσε ορθή απάντηση (Πρώτη ομάδα: 37.40%, Δεύτερη ομάδα:71.21%, Τρίτη ομάδα: 46.63% και Τέταρτη ομάδα: 88.82%). Επίσης, οι μαθητές της πρώτης ομάδας και της τρίτης ομάδας παρουσίασαν τα ψηλότερα ποσοστά μαθητών που έδωσαν λανθασμένη απάντηση αλλά με ένδειξη κατανόηση της έννοιας της περιμέτρου (Πρώτη ομάδα: 31.30% και Τρίτη ομάδα: 39.26%) σε σχέση με τις άλλες ομάδες (Δεύτερη ομάδα: 24.24% και Τέταρτη ομάδα: 10.86%).

Η μέση επίδοση στην αναγνώριση τριγώνων (Β1) χαρακτηρίστηκε για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη ομάδα μέτρια προς υψηλή επίδοση, ενώ για την τέταρτη ομάδα υψηλή. Παρόμοια επίδοση είχαν οι τρεις ομάδες και στην άσκηση που αφορούσε αναγνώριση ορθογωνίων, όπου σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση, ενώ η τέταρτη ομάδα σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση. Η τέταρτη ομάδα παρουσιάζει αυτή τη διαφοροποίηση λόγω του ότι υπήρχε ένα ποσοστό των μαθητών της (13.82%) που αναγνώρισε τα τετράγωνα ως ορθογώνια, ενώ στις άλλες ομάδες ήταν πολύ μικρότερο το ποσοστό αυτό (από 2 μέχρι 5%).

Η άσκηση που παρουσιάζει διαφοροποίηση ως προς την επίδοση των μαθητών των τεσσάρων ομάδων είναι αυτή που αφορά την εύρεση εμβαδού σχημάτων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση, οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση και οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν χαμηλή επίδοση. Μια προσεκτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών που παρουσίασαν μέτρια προς χαμηλή και χαμηλή επίδοση παρατηρείται ότι είχαν το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών που έγραψαν λανθασμένη απάντηση ή έδωσαν λανθασμένη απάντηση με ένδειξη κατανόησης της έννοιας του εμβαδού σε σχέση με τις άλλες ομάδες (Πρώτη ομάδα: 23.55% και 53.43%, Δεύτερη ομάδα: 7.07% , Τρίτη ομάδα: 20.86% και 51.53% και 40.91% και Τέταρτη ομάδα: 1.64% και 23.68% αντίστοιχα) και το μικρότερο ποσοστό μαθητών που έδωσε ορθή απάντηση (Πρώτη ομάδα: 22.14%, Δεύτερη ομάδα: 52.02%, Τρίτη ομάδα: 27.61% και Τέταρτη ομάδα: 74.67%).

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων ως προς την κριτική τους σκέψη στα μαθηματικά. Σε αυτό το μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται αρχικά οι μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στους παράγοντες πρώτης τάξης της κριτικής σκέψης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση) (βλέπε Πίνακα 4.15). Ακολούθως, δίνονται σε κατανομή οι μέσοι όροι τους στις εννέα μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Κριτική Σκέψη με βάση το επιβεβαιωμένο μοντέλο (βλέπε Πίνακα 4.16). Σημειώνεται ότι η μέγιστη τιμή που δόθηκε σε μαθητή ήταν το ένα και η ελάχιστη το μηδέν σε κάθε μεταβλητή.

Πίνακας 4.15

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στους Παράγοντες Πρώτης Τάξης της Κριτικής Σκέψης

	Πρώτη Ομάδα		Δεύτερη Ομάδα		Τρίτη Ομάδα		Τέταρτη Ομάδα	
	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*
Ανάλυση	.54	.31	.89	.19	.70	.31	.93	.15
Σύνδεση	.35	.17	.57	.17	.49	.17	.66	.16
Αξιολόγηση	.16	.21	.53	.28	.31	.27	.68	.24

Με βάση τον Πίνακα 4.15, οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν τη χαμηλότερη μέση επίδοση και στους τρεις παράγοντες πρώτης τάξης της Κριτικής Σκέψης σε σχέση με τις άλλες ομάδες. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν υψηλότερη μέση επίδοση και στους τρεις παράγοντες της Κριτικής Σκέψης από την πρώτη ομάδα, αλλά χαμηλότερη από τη δεύτερη και την τέταρτη ομάδα. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας σημείωσαν υψηλότερη μέση επίδοση και στους τρεις παράγοντες πρώτης τάξης της Κριτικής Σκέψης από την πρώτη και τη δεύτερη ομάδα, αλλά ελάχιστα πιο χαμηλή από την τέταρτη ομάδα. Πιο συγκεκριμένα, στον παράγοντα Ανάλυση, ο μέσος όρος των μαθητών και της δεύτερης και της τέταρτης ομάδας πλησιάζει τη μέγιστη τιμή (το ένα) ($\bar{X}_{\text{Δεύτερη ομάδα}}$=.89, $SD_{\text{Δεύτερη ομάδα}}$ =.19, $\bar{X}_{\text{Τέταρτη ομάδα}}$=.93, $SD_{\text{Τέταρτη ομάδα}}$ =.15), ενώ στους παράγοντες Σύνδεση και Αξιολόγηση οι μέσοι όροι των δυο ομάδων κυμαίνονται από .53 μέχρι .68, όπου οι μέσοι όροι της τέταρτης ομάδας είναι υψηλότεροι της δεύτερης ομάδας. Σημειώνεται, επίσης, ότι η συνολική μέση επίδοση όλων των ομάδων εκτός από την τέταρτη ομάδα στην αξιολόγηση είναι χαμηλότερη από τη συνολική μέση επίδοση της στη σύνδεση, αλλά η συνολική μέση επίδοση όλων των ομάδων στην ανάλυση είναι υψηλότερη από τη συνολική μέση επίδοση της στη σύνδεση και αξιολόγηση.

Πίνακας 4.16

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τεσσάρων Ομάδων στις Μεταβλητές που Ορίζουν τους Παράγοντες της Κριτικής Σκέψης

	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	Κ2	Κ1, Κ2, Κ3, Κ4, Κ5	Κ2, Κ4, Κ5	Κ1, Κ2, Κ3, Κ4, Κ5, Κ7, Κ9
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)	Κ4, Κ5	Κ7, Κ9	Κ1, Κ3	
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	Κ1, Κ3		Κ7	Κ6, Κ8
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	Κ6, Κ7, Κ8, Κ9	Κ6, Κ8	Κ6, Κ8, Κ9	

Σημείωση. Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο, Κ2: Συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων, Κ3: Επέκταση αριθμητικού μοτίβου, Κ4: Επιλογή ραβδογράμματος για αναπαράσταση δεδομένων, Κ5: Επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα, Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων, Κ7: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων -επεξήγηση κανόνα, Κ8: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα, Κ9: Τεκμηρίωση της δομής αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6.

Με βάση τον Πίνακα 4.16, υπήρχαν τρεις ασκήσεις της κριτικής σκέψης που ήταν εύκολες για τους μαθητές όλων των ομάδων και έτσι σημείωσαν υψηλή επίδοση ή μέτρια προς υψηλή επίδοση (Κ2, Κ4, Κ5). Συγκεκριμένα, όλες οι ομάδες μπόρεσαν και σημείωσαν υψηλή επίδοση στην άσκηση Κ2 που απαιτούσε τη χρήση της διαδικασίας της ανάλυσης για τη συμπλήρωση αριθμητικών μοτίβων και στις ασκήσεις Κ4 και Κ5 που απαιτούσαν χρήση της διαδικασίας της σύνδεσης για επιλογή ραβδογράμματος για αναπαράσταση δεδομένων (Κ4) και επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα (Κ5).

Ταυτόχρονα με βάση τον Πίνακα 4.16, όλες οι ομάδες σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή ή χαμηλή επίδοση στην άσκηση Κ6 που απαιτούσε τη χρήση της διαδικασίας σύνδεσης για ονομασία του κοινού χαρακτηριστικού ομάδας σχημάτων. Μια προσεκτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σε αυτή την άσκηση παρατηρείται ότι ένα μεγάλο μέρος των μαθητών της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης ομάδας να μην μπόρεσαν να βρουν κάποια σύνδεση μεταξύ των σχημάτων (Πρώτη ομάδα: 63.85% , Δεύτερη ομάδα: 35.86% και Τρίτη ομάδα: 41.10%), αλλά και ένα πιο μικρό μέρος τους είτε να εντόπισε κάποια σύνδεση χωρίς να δώσει ορθή απάντηση (Πρώτη ομάδα: 25.64% , Δεύτερη ομάδα: 30.47% και Τρίτη ομάδα: 33.74%) είτε να κατάφερε να συνδέσει τα σχήματα στις ομάδες που δίνονταν και να δώσει ορθή απάντηση (Πρώτη ομάδα: 13.10% , Δεύτερη ομάδα: 33.67% και Τρίτη ομάδα: 27.20%). Από την άλλη οι περισσότεροι μαθητές της τέταρτης ομάδας μπόρεσαν να συνδέσουν τα σχήματα στις ομάδες που δίνονταν και να δώσουν ορθή απάντηση (46.27%), αλλά ένα αρκετά υψηλό ποσοστό τους έδειξε να μην χρησιμοποιεί με επιτυχία τη διαδικασία της σύνδεσης (31.14%) ή να μην μπορεί καθόλου να συνδέσει τα σχήματα (22.59%).

Επίσης, οι μαθητές σε όλες τις ομάδες σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή ή χαμηλή επίδοση στην άσκηση Κ8 που απαιτούσε τη χρήση της διαδικασίας της αξιολόγησης ώστε να εξηγήσουν αν ανήκει ένας αριθμός σε συγκεκριμένο μοτίβο. Μια προσεκτική ανάλυση των προσεγγίσεων των μαθητών παρατηρήθηκαν τα εξής: (α) υπήρχαν μαθητές που μπόρεσαν με επιτυχία να αξιολογήσουν αν ο αριθμός ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με γενίκευση-οι περισσότεροι ήταν της τέταρτης ομάδας (Πρώτη ομάδα: 2.31%, Δεύτερη ομάδα: 25.25%, Τρίτη ομάδα: 11.04% και Τέταρτη ομάδα: 42.76%), (β) υπήρχαν μαθητές που μπόρεσαν με επιτυχία να αξιολογήσουν αν ο αριθμός ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο αλλά η αιτιολόγησή τους ήταν αδύναμη (δεν μπορούσα να γράψουν κάποιο είδος γενίκευσης η οποία αποτελεί ένδειξη χρήσης της διαδικασίας της αξιολόγησης) (Πρώτη ομάδα: 23.85%, Δεύτερη ομάδα: 39.90%, Τρίτη ομάδα: 38.65% και Τέταρτη ομάδα: 37.83%) και (γ) υπήρχαν μαθητές που δεν μπόρεσαν να αξιολογήσουν με επιτυχία αν ο αριθμός ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο-οι περισσότεροι ήταν της πρώτης και της τρίτης ομάδας (Πρώτη ομάδα: 73.85%, Δεύτερη ομάδα: 34.85%, Τρίτη ομάδα: 50.31% και Τέταρτη ομάδα: 19.41%).

Βρέθηκε, επίσης, ότι η πρώτη και η τρίτη σημείωσαν χαμηλή ή μέτρια προς χαμηλή επίδοση και στις άλλες δυο ασκήσεις της αξιολόγησης (Κ7 και Κ9), ενώ η δεύτερη και η τέταρτη ομάδα σε αυτές τις ασκήσεις παρουσίασαν μέτρια προς υψηλή ή υψηλή επίδοση. Αυτό οφειλόταν στο ότι οι περισσότεροι μαθητές της πρώτης και της τρίτης ομάδας στις ασκήσεις που αφορούσαν αξιολόγηση ενός αριθμού αν ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο (Κ7) (πιο απλό σε σχέση με αυτό της άσκησης Κ8) και τεκμηρίωση της δομής ενός αριθμού που ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο (Κ9) αδυνατούσαν να χρησιμοποιήσουν τη διαδικασία της αξιολόγησης και έτσι έδιναν λανθασμένη απάντηση.

Σημειώνεται ότι η πρώτη ομάδα είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση στις δυο ασκήσεις που εξέταζαν τη διαδικασία της ανάλυσης όπου καλούνταν να συμπληρώσουν ένα γεωμετρικό μοτίβο (Κ1) και να επεκτείνουν ένα αριθμητικό μοτίβο (Κ3), ενώ οι μαθητές των άλλων ομάδων σημείωσαν σε αυτές μέτρια προς υψηλή (Τρίτη ομάδα) ή υψηλή επίδοση (Δεύτερη και Τέταρτη ομάδα). Οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν τέτοια επίδοση αφού οι περισσότεροι από αυτούς δεν κατάλαβαν πώς να συνεχίσουν το αριθμητικό μοτίβο, ενώ στο γεωμετρικό παρουσιάζονταν να είχαν κατανοήσει το πώς συνεχίζεται αλλά δεν μπόρεσαν να το ζωγραφίσουν.

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων ως προς την δημιουργική τους σκέψη στα μαθηματικά. Στον Πίνακα 4.17 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των μαθητών των τεσσάρων ομάδων στους παράγοντες δευτέρας τάξης της δημιουργικής σκέψης (σύνθεση, νοητική δημιουργία). Ακολούθως, δίνονται σε κατανομή οι μέσοι όροι τους στις δώδεκα μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Δημιουργική Σκέψη με βάση το επιβεβαιωμένο μοντέλο (βλέπε Πίνακα 4.18). Σημειώνεται ότι η μέγιστη τιμή που δόθηκε σε μαθητή ήταν το ένα και η ελάχιστη το μηδέν σε κάθε μεταβλητή.

Πίνακας 4.17

Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις των Μαθητών των Τεσσάρων Ομάδων στους Παράγοντες Δευτέρας Τάξης της Δημιουργικής Σκέψης

	Πρώτη Ομάδα		Δεύτερη Ομάδα		Τρίτη Ομάδα		Τέταρτη Ομάδα	
	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*	$\bar{X}$	*SD*
Σύνθεση	.33	.16	.57	.13	.51	.12	.65	.12
Νοητική Δημιουργία	.19	.13	.33	.15	.56	.15	.70	.15

Με βάση τον Πίνακα 4.17, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας σημείωσαν υψηλότερη μέση επίδοση τόσο στη σύνθεση όσο και στη νοητική δημιουργία σε σχέση με τις άλλες ομάδες, ενώ οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν τη χαμηλότερη μέση επίδοση. Όσον αφορά τη δεύτερη και την τρίτη ομάδα, παρατηρήθηκε ότι η μέση επίδοσή τους στη σύνθεση να είναι σχεδόν η ίδια ($\bar{X}_{\text{Δεύτερη Ομάδα}}=.57$, $SD_{\text{Δεύτερη Ομάδα}}=.13$, $\bar{X}_{\text{Τρίτη Ομάδα}}=.51$, $SD_{\text{Τρίτη Ομάδα}}=.12$), ενώ στη νοητική δημιουργία οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν υψηλότερο μέσο όρο σε σχέση με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας ($\bar{X}_{\text{Δεύτερη Ομάδα}}=.33$, $SD_{\text{Δεύτερη Ομάδα}}=.15$, $\bar{X}_{\text{Τρίτη Ομάδα}}=.56$, $SD_{\text{Τρίτη Ομάδα}}=.15$). Επίσης, παρατηρήθηκε στην πρώτη και στη δεύτερη ομάδα ο μέσος όρος τους στη σύνθεση να είναι υψηλότερος από το μέσο όρο τους στη νοητική δημιουργία με μεγάλη διαφορά, ενώ στην τρίτη και στη τέταρτη ομάδα βρέθηκε το αντίστροφο. Δηλαδή, ο μέσος όρος τους στη νοητική δημιουργία να είναι υψηλότερος από το μέσο όρο τους στη σύνθεση με μικρή διαφορά.

Πίνακας 4.18

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τεσσάρων Ομάδων στις Μεταβλητές που Ορίζουν τους Παράγοντες της Δημιουργικής Σκέψης

	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υψηλή Επίδοση ($\overline{X} \geq .70$)				ΕΥΧΔ1, ΕΥΕΔ1, ΕΥΧΔ2, ΕΥΕΔ2, ΕΥΧΔ3, ΕΥΕΔ3, ΕΥΧΔ4, ΕΥΕΔ4, ΠΡΩΔ4
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \overline{X} < .70$)		ΕΥΧΔ1, ΕΥΕΔ1, ΕΥΧΔ2, ΕΥΕΔ2, ΕΥΧΔ3, ΕΥΕΔ3	ΕΥΧΔ1, ΕΥΕΔ1, ΕΥΧΔ2, ΕΥΕΔ2, ΕΥΧΔ3, ΕΥΕΔ3, ΕΥΧΔ4, ΕΥΕΔ4	ΠΡΩΔ2, ΠΡΩΔ3
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \overline{X} < .55$)	ΕΥΧΔ2	ΠΡΩΔ1, ΠΡΩΔ2, ΠΡΩΔ3	ΠΡΩΔ1, ΠΡΩΔ2, ΠΡΩΔ3, ΠΡΩΔ4	ΠΡΩΔ1
Χαμηλή Επίδοση ($\overline{X} < .40$)	ΕΥΧΔ1, ΕΥΕΔ1, ΠΡΩΔ1, ΕΥΕΔ2, ΠΡΩΔ2, ΕΥΧΔ3, ΕΥΕΔ3, ΠΡΩΔ3, ΕΥΧΔ4, ΕΥΕΔ4, ΠΡΩΔ4	ΕΥΧΔ4, ΕΥΕΔ4, ΠΡΩΔ4		

Σημείωση. ΕΥΧΔ1: Ευχέρεια Δ1, ΕΥΕΔ1: Ευελιξία Δ1, ΠΡΩΔ1: Πρωτοτυπία Δ1, ΕΥΧΔ2: Ευχέρεια Δ2, ΕΥΕΔ2: Ευελιξία Δ2, ΠΡΩΔ2: Πρωτοτυπία Δ2, ΕΥΧΔ3: Ευχέρεια Δ3, ΕΥΕΔ3: Ευελιξία Δ3, ΠΡΩΔ3: Πρωτοτυπία Δ3, ΕΥΧΔ4: Ευχέρεια Δ4, ΕΥΕΔ4: Ευελιξία Δ4, ΠΡΩΔ4: Πρωτοτυπία Δ4.

Με βάση τον Πίνακα 4.18, οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν σε όλες τις μεταβλητές που αποτελούν δείκτες της δημιουργικής σκέψης χαμηλή επίδοση, εκτός στην ευχέρεια της άσκησης Δ2 (Δημιουργία μαθηματικών προτάσεων με αποτέλεσμα 24), όπου οι μαθητές έδωσαν έναν αριθμό απαντήσεων που χαρακτηρίστηκε ο μέσος όρος της επίδοσή τους ως μέτριος προς χαμηλός. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη βαθμολογία της ευχέρειας και τις ευελιξίας των τριών ασκήσεων της δημιουργικής σκέψης (Δ1, Δ2, Δ3), μέτρια προς χαμηλή επίδοση στη βαθμολογία της πρωτοτυπίας σε αυτές τις ασκήσεις και χαμηλή επίδοση και στα τρία κριτήρια βαθμολόγησης της δημιουργικότητας της άσκησης Δ4 (Δημιουργία ομάδας τεσσάρων αριθμών με κοινή ιδιότητα). Ενώ οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στην ευχέρεια και στην ευελιξία και των τεσσάρων ασκήσεων της δημιουργικής σκέψης και μέτρια προς χαμηλή επίδοση στη βαθμολογία της πρωτοτυπίας των τεσσάρων αυτών ασκήσεων. Δηλαδή, αυτό που διακρίνει τους μαθητές της τρίτης ομάδας από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας στη δημιουργική σκέψη είναι η υψηλότερη επίδοσή τους στις τρεις διαστάσεις βαθμολόγησης της δημιουργικότητας στην άσκηση Δ4. Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας σημείωσαν υψηλότερες βαθμολογίες και στις τρεις διαστάσεις βαθμολόγησης των τεσσάρων ασκήσεων σε σχέση με τους μαθητές των άλλων ομάδων. Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος της βαθμολογίας τους στην ευχέρεια και στην ευελιξία των τεσσάρων ασκήσεων και της βαθμολογίας τους στην πρωτοτυπία της άσκησης Δ4 χαρακτηρίστηκε ως υψηλός και ο μέσος όρος της πρωτοτυπίας των ασκήσεων Δ2 και Δ3 χαρακτηρίστηκε ως μέτριος προς υψηλός, ενώ ο μέσος όρος της πρωτοτυπίας της άσκησης Δ1 χαρακτηρίστηκε ως μέτριος προς χαμηλός. Σημειώνεται, επίσης, ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας συγκριτικά με τους μαθητές των άλλων ομάδων ήταν οι περισσότεροι που πήραν μηδέν μονάδες και στις τέσσερις ασκήσεις δημιουργικής σκέψης, και μόνο στην άσκηση Δ4 τα ποσοστά μαθητών που δεν πήραν καθόλου μονάδες ήταν ιδιαίτερα υψηλά και της δεύτερης ομάδας.

Μια προσεκτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στις ασκήσεις δημιουργικότητας παρατηρούνται τα εξής: (α) οι μαθητές της πρώτης ομάδας κατά μέσο όρο έδωσαν σε σχέση με τις άλλες ομάδες τις λιγότερες απαντήσεις στις ασκήσεις αυτές (από μηδέν μέχρι επτά) οι οποίες παρουσίασαν τις λιγότερες διαφορετικές ιδέες (από μηδέν μέχρι μία), (β) οι μαθητές της τέταρτης ομάδας κατά μέσο όρο έδωσαν σε σχέση με τις άλλες ομάδες τις περισσότερες απαντήσεις στις ασκήσεις αυτές (από πέντε μέχρι 27) οι οποίες παρουσίασαν τις περισσότερες διαφορετικές ιδέες (από δυο μέχρι τρεις), (γ) οι μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας ενώ παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά στα έργα Δ1, Δ2 και Δ3, δηλαδή έδωσαν περίπου κατά μέσο όρο ίδιο αριθμό απαντήσεων (από πέντε μέχρι 20) και χρησιμοποίησαν ίδιο αριθμό διαφορετικών ιδεών (δυο), διαφέρει η συμπεριφορά τους στο έργο Δ4 αφού οι περισσότεροι μαθητές της δεύτερης ομάδας δεν κατάφεραν να δώσουν ορθή απάντηση και οι μαθητές της τρίτης ομάδας έδωσαν κατά μέσο όρο τρεις απαντήσεις που χαρακτηρίζονταν από μία τουλάχιστον διαφορετική ιδέα και (δ) οι μαθητές της τέταρτης ομάδας έδωσαν απαντήσεις που οι ιδέες των περισσοτέρων εμφανίζονταν στο 15% μέχρι 40% των απαντήσεων του συνόλου ενώ οι μαθητές της πρώτης ομάδας έδωσαν απαντήσεις που οι ιδέες των περισσοτέρων εμφανίζονταν σε ποσοστό μεγαλύτερο του 40% των απαντήσεων του συνόλου. Οι μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας στα έργα Δ1, Δ2 και Δ3 παρουσίασαν ιδέες που εμφανίζονταν τόσο σε ποσοστό μεγαλύτερο του 40% των απαντήσεων του συνόλου όσο και σε ποσοστό μεταξύ του 15% και του 40%. Αυτό δεν διαφοροποιείται για την τρίτη ομάδα στο έργο Δ4. Όμως, υπάρχει διαφοροποίηση από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας στο έργο Δ4. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας έδωσαν απαντήσεις που εμφανίζονταν μόνο σε ποσοστό μεγαλύτερο του 40% των απαντήσεων του συνόλου. Δηλαδή, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας έδωσαν απαντήσεις που οι περισσότερες ιδέες τους δεν χρησιμοποιήθηκαν από μεγάλο ποσοστό μαθητών, ενώ οι μαθητές της πρώτης ομάδας έδωσαν απαντήσεις που οι ιδέες τους χρησιμοποιήθηκαν από μεγάλο ποσοστό των μαθητών του συνόλου.

Περιγραφή των τεσσάρων ομάδων ως προς τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Ο Πίνακας 4.19 παρουσιάζει την κατανομή των μέσων όρων των τεσσάρων ομάδων στις τέσσερις μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά με βάση το επιβεβαιωμένο μοντέλο.

Πίνακας 4.19

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τεσσάρων Ομάδων στις Μεταβλητές που Ορίζουν τις Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά

	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)				
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)				Σ2
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)		Σ2		Σ1, Σ4
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4	Σ1, Σ3, Σ4	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4	Σ3

Σημείωση. Σ1: Σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα ραβδογράμματος, Σ2: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης, Σ3: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων, Σ4: Επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης.

Με βάση τον Πίνακα 4.19, οι μαθητές της πρώτης και της τρίτης ομάδας σημείωσαν χαμηλή επίδοση σε όλες τις ασκήσεις που αποτελούν δείκτες του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Παρόμοια, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν χαμηλή επίδοση στις περισσότερες ασκήσεις (στις τρεις από τις τέσσερις), ενώ σημείωσαν υψηλότερη επίδοση σε σχέση με τη πρώτη και την τρίτη ομάδα στη άσκηση που αφορούσε επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης (Σ2). Η επίδοση αυτή χαρακτηρίστηκε ως μέτρια προς χαμηλή επίδοση. Από την άλλη, η τέταρτη ομάδα είχε υψηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τις άλλες ομάδες σε όλες τις ασκήσεις, εκτός από την άσκηση που αφορούσε επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων (Σ3) που σημείωσε χαμηλή επίδοση όπως και οι άλλες ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στην άσκηση που αφορούσε επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης (Σ2) και μέτρια προς χαμηλή επίδοση στην άσκηση που αφορούσε σχεδιασμό επιχειρήματος με βάση δεδομένα ραβδρογράμματος (Σ1) και στην άσκηση που καλούσε τους μαθητές να λάβουν μια απόφαση με βάση δεδομένα σε ένα πίνακα (Σ4).

Μια πιο προσεκτική μελέτη της συμπεριφοράς των μαθητών στις ασκήσεις του παράγοντα σύνθετων διαδικασιών σκέψης, παρατηρούνται τα εξής: (α) υπήρχαν μαθητές που δεν κατανόησαν τα δεδομένα της κάθε άσκησης με αποτέλεσμα να έκαναν πράξεις χωρίς λογική ή να μην τεκμηρίωσαν καθόλου την απάντησή τους ή να χρησιμοποιούσαν τα δεδομένα με λανθασμένο τρόπο, δηλαδή να προσέγγιζαν επιφανειακά τις ασκήσεις, (β) υπήρχαν μαθητές που προσπάθησαν να κατανοήσουν τα δεδομένα των ασκήσεων και να κάνουν συνδέσεις και συσχετισμούς με αποτέλεσμα να δώσουν μερικώς λανθασμένη απάντηση κάνοντας πράξεις με λογική ή δίνοντας τεκμηρίωση λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα και (γ) υπήρχαν μαθητές που κατανόησαν τα δεδομένα των ασκήσεων και παρουσίαζαν διαδικασίες σύνδεσης, αξιολόγησης και σύνθεσης των δεδομένων αυτών ώστε να δώσουν μια απάντηση η οποία ήταν ορθή ή μερικώς ορθή. Η συμπεριφορά που περιγράφεται στο (α) και στο (β) παρατηρήθηκε σε όλες τις ομάδες σε διαφορετικό ποσοστό, ενώ η συμπεριφορά στο (γ) δεν παρατηρήθηκε στην πρώτη και στην τρίτη ομάδα. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη συμπεριφορά που αφορούσε μη κατανόηση δεδομένων παρατηρήθηκε σε ποσοστό 51% μέχρι 77% των μαθητών της πρώτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 26% μέχρι 51% των μαθητών της δεύτερης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 34% μέχρι 60% των μαθητών της τρίτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση) και σε ποσοστό 10% μέχρι 30% των μαθητών της τέταρτης ομάδας. Η δεύτερη συμπεριφορά που αφορούσε μερική κατανόηση δεδομένων παρατηρήθηκε σε ποσοστό 17% μέχρι 39% των μαθητών της πρώτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 27% μέχρι 47% των μαθητών της δεύτερης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 23% μέχρι 45% των μαθητών της τρίτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση) και σε ποσοστό 33% μέχρι 71% των μαθητών της τέταρτης ομάδας. Η τρίτη συμπεριφορά που αφορούσε κατανόηση δεδομένων παρατηρήθηκε σε ποσοστό 0 μέχρι 11% των μαθητών της πρώτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 1% μέχρι 27% των μαθητών της δεύτερης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση), σε ποσοστό 0 μέχρι 24% των μαθητών της τρίτης ομάδας (διαφοροποιείται με βάση την άσκηση) και σε ποσοστό 3% μέχρι 48% των μαθητών της τέταρτης ομάδας. Με λίγα λόγια οι περισσότεροι μαθητές της πρώτης ομάδας φαίνεται να μην κατανόησαν τα δεδομένα των ασκήσεων του παράγοντα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης και οι περισσότεροι μαθητές της τέταρτης ομάδας να κατανόησαν μερικώς ή πλήρως τα δεδομένα. Οι μαθητές της δεύτερης και της τρίτης ομάδας παρουσίασαν ίδια σχεδόν ποσοστά μαθητών στη συμπεριφορά που αφορούσε καθόλου κατανόηση και σε αυτή που αφορούσε μερικώς κατανόηση δεδομένων, με ελάχιστο προβάδισμα της δεύτερης ομάδας στη συμπεριφορά που αφορούσε μερικώς κατανόηση δεδομένων.

Ολοκληρώνοντας, την περιγραφή των τεσσάρων ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης που εντοπίστηκαν από την Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών (Latent Class Analysis), παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.20 μια σύνοψη των πιο πάνω. Δηλαδή, στον Πίνακα 4.20 σημειώνονται για κάθε ομάδα οι μεταβλητές που αποτελούν δείκτες των τεσσάρων ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στις οποίες η επίδοσή τους είναι πάνω από το μέσο όρο ($\overline{X} \geq .55$).

Πίνακας 4.20

Επιδόσεις πάνω από το Μέσο Όρο των Τεσσάρων Ομάδων στις Μεταβλητές που αποτελούν Δείκτες των Ικανοτήτων που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη

Μεταβλητές	Πρώτη Ομάδα	Δεύτερη Ομάδα	Τρίτη Ομάδα	Τέταρτη Ομάδα
ΒΑΣΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ				
Β1:Αναγνώριση τριγώνων	√	√	√	√
Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων				√
Β3: Σύγκριση μεγέθους αριθμών	√	√	√	√
Β4: Απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης ραβδογράμματος	√	√	√	√
Β5: Επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με δομή σύγκρισης	√	√	√	√
Β6: Υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων		√	√	√
Β7: Υπολογισμός εμβαδού σχημάτων		√		√
ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ				
Ανάλυση				
Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο		√	√	√
Κ2: Συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων	√	√	√	√
Κ3: Επέκταση αριθμητικού μοτίβου		√	√	√
Σύνδεση				
Κ4: Επιλογή ραβδογράμματος για αναπαράσταση δεδομένων	√	√	√	√
Κ5: Επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα	√	√	√	√
Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων				
Αξιολόγηση				
Κ7: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων - επεξήγηση κανόνα		√		√
Κ8: Αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα				
Κ9: Τεκμηρίωση της δομής αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6		√		√
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΣΚΕΨΗ				
Σύνθεση				
Ευχέρεια Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων		√	√	√
Ευελιξία Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων		√	√	√
Πρωτοτυπία Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων				
Ευχέρεια Δ2: Κατασκευή Προτάσεων με Αποτέλεσμα 24		√	√	√
Ευελιξία Δ2: Κατασκευή Προτάσεων με Αποτέλεσμα 24		√	√	√
Πρωτοτυπία Δ2: Κατασκευή Προτάσεων με Αποτέλεσμα 24				√
Νοητική Δημιουργία				
Ευχέρεια Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2		√	√	√
Ευελιξία Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2		√	√	√
Πρωτοτυπία Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2				√
Ευχέρεια Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα			√	√
Ευελιξία Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα			√	√
Πρωτοτυπία Δ4:Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα				√
ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΚΕΨΗΣ				
Σ1: Σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα ραβδογράμματος,				
Σ2: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης,				√
Σ3:Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων				
Σ4: Επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης				

Με βάση τον Πίνακα 4.20, οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση μόνο σε τέσσερις από τις επτά ασκήσεις της βασικής γνώσης περιεχομένου και σε τρεις ασκήσεις της κριτικής σκέψης (η μία άσκηση αποτελεί δείκτη του παράγοντα ανάλυση και οι δυο άλλες ασκήσεις αποτελούν δείκτες του παράγοντα σύνδεσης). Σημειώνεται ότι στις ασκήσεις αυτές όλες οι ομάδες μαθητών σημείωσαν υψηλή επίδοση. Ταυτόχρονα, οι μαθητές της πρώτης ομάδας δεν σημείωσαν υψηλή επίδοση σε καμία μεταβλητή των παραγόντων της δημιουργικής σκέψης και των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Αυτό δείχνει ότι η βασική τους γνώση τους βοήθησε να λύσουν κάποιες ασκήσεις κριτικής σκέψης (αφού με βάση το μοντέλο που επιβεβαίωσε η εργασία αυτή η βασική γνώση προβλέπει την κριτική σκέψη), αλλά η βασική τους γνώση και η κριτική τους σκέψη δεν τους βοήθησε να λύσουν με μεγάλη επιτυχία ασκήσεις δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης (αφού με βάση το μοντέλο που επιβεβαίωσε η εργασία αυτή η βασική και η κριτική σκέψη προβλέπουν άμεσα τη δημιουργική σκέψη, καθώς η κριτική σκέψη και η δημιουργική σκέψη προβλέπουν άμεσα τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης).

Οι μαθητές τη δεύτερης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση στις έξι από τις επτά μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα βασική γνώση περιεχομένου, στις επτά από τις εννιά μεταβλητές του παράγοντα κριτική σκέψη και στις έξι από τις 12 μεταβλητές του παράγοντα δημιουργική σκέψη. Οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν σημείωσαν υψηλή επίδοση σε καμία μεταβλητή του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Σημειώνεται ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής έλυσαν με επιτυχία όλες τις ασκήσεις της βασικής γνώσης περιεχομένου εκτός από την αναγνώριση ορθογωνίου που περιλαμβάνει κατανόηση σχέσεων εγκλεισμού, που αποτελούν μια εις βάθος κατανόηση. Επίσης, έλυσαν με επιτυχία όλες τις ασκήσεις του παράγοντα ανάλυσης, όλες τις ασκήσεις του παράγοντα σύνδεσης εκτός από την άσκηση που αφορούσε ονομασία ομάδας σχημάτων που απαιτούσε εις βάθος κατανόηση και όλες τις ασκήσεις του παράγοντα αξιολόγηση εκτός από την άσκηση που αφορούσε αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο το οποίο ήταν πιο σύνθετο σε σχέση με τα άλλα που αναφέρονταν οι άλλες ασκήσεις που έλυσαν με επιτυχία. Όσον αφορά τις μεταβλητές της δημιουργικής σκέψης στις οποίες οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν υψηλή επίδοση ήταν η ευχέρεια και η ευελιξία των τριών έργων: Δ1 (κατασκευή ερωτήσεων), Δ2 (κατασκευή προτάσεων με αποτέλεσμα 24) και Δ3 (σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2). Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος του αριθμού των ορθών απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές και ο μέσος όρος του αριθμού των διαφορετικών ιδεών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα δημιουργικά έργα σύνθεσης (Δ1 και Δ2) και στο ένα έργο νοητικής δημιουργίας (Δ3) χαρακτηρίστηκαν ως υψηλοί, ενώ ο μέσος όρος του βαθμού πρωτοτυπίας τους στα έργα αυτά χαρακτηρίστηκε ως χαμηλός. Επίσης, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας δεν κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία τη μια άσκηση που αποτελεί δείκτη της νοητικής δημιουργίας, που απαιτεί από τους μαθητές να δημιουργήσουν ομάδες των τεσσάρων αριθμών που να έχουν κοινή ιδιότητα. Δηλαδή, η άσκηση αυτή δεν απαιτεί συγκεκριμένη διαδικασία για την επιτυχή επίλυσή της, αλλά η λύση έρχεται ως αναλαμπή στο μυαλό του μαθητή με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις του. Επομένως, με βάση τα πιο πάνω και το επιβεβαιωμένο μοντέλο σχετικά με τις σχέσεις των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, φαίνεται ότι η βασική γνώση των μαθητών αυτών τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία της περισσότερες ασκήσεις της κριτικής σκέψης, καθώς ο βαθμός κατανόησης των δυο αυτών ικανοτήτων τους βοήθησε να σημειώσουν υψηλή επίδοση σε κάποια κριτήρια αξιολόγησης των περισσοτέρων ασκήσεων της δημιουργικής σκέψης. Όμως, ο βαθμός επιτυχίας τους στη βασική, στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη δεν τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία τις ασκήσεις των σύνθετων διαδικασιών σκέψης.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση στις πέντε από τις επτά μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα βασική γνώση περιεχομένου, στις πέντε από τις εννιά μεταβλητές του παράγοντα κριτική σκέψη και στις οκτώ από τις 12 μεταβλητές του παράγοντα δημιουργική σκέψη. Οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν σημείωσαν υψηλή επίδοση σε καμία μεταβλητή του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Σημειώνεται ότι οι μαθητές της τρίτης ομάδας δεν έλυσαν με επιτυχία τις δυο ασκήσεις της βασικής γνώσης περιεχομένου που αφορούσαν υπολογισμό εμβαδού σχημάτων και αναγνώριση ορθογωνίου, οι οποίες όπως έχει αναφερθεί χρειάζονταν μια εις βάθος κατανόηση για την ορθή επίλυσή τους. Όσον αφορά τη συμπεριφορά της ομάδας αυτής στις ασκήσεις της κριτικής σκέψης, παρατηρήθηκε να επιλύουν με επιτυχία όλες τις ασκήσεις του παράγοντα ανάλυση και τις δυο από τις τρεις ασκήσεις του παράγοντα σύνδεσης. Όμως, δεν μπόρεσαν να έχουν υψηλή επίδοση στην άσκηση που καλούνταν να δώσουν όνομα σε ομάδες σχημάτων και σε όλες τις ασκήσεις του παράγοντα αξιολόγησης. Όσον αφορά την επίδοσή τους στις ασκήσεις της δημιουργικής σκέψης, παρατηρήθηκε οι μαθητές της ομάδας αυτής να σημειώνουν υψηλή επίδοση στην ευχέρεια και στην ευελιξία όλων των έργων. Δηλαδή, μπορούσαν να παράγουν πολλές και διαφορετικές λύσεις σε κάθε έργο, αλλά δεν μπορούσαν να παράγουν πρωτότυπες λύσεις. Επομένως, με βάση τα πιο πάνω και το επιβεβαιωμένο μοντέλο σχετικά με τις σχέσεις των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, φαίνεται ότι η βασική γνώση των μαθητών της ομάδας αυτής τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία κάποιες ασκήσεις της κριτικής σκέψης, καθώς και ο βαθμός κατανόησης των δυο αυτών ικανοτήτων τους βοήθησε να σημειώσουν υψηλή επίδοση στις δυο από τις τρεις διαστάσεις αξιολόγησης των ασκήσεων της δημιουργικής σκέψης. Παρατηρείται εδώ ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής ενώ σημείωσαν χαμηλότερη επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και στην κριτική σκέψη σε σχέση με τη δεύτερη ομάδα, να είχαν υψηλή επίδοση σε περισσότερες διαστάσεις αξιολόγησης της δημιουργικής σκέψης.

Οι μαθητές της τέταρτης ομάδας σημείωσαν υψηλή επίδοση σε όλες τις μεταβλητές που αποτελούν δείκτες του παράγοντα βασική γνώση περιεχομένου, στις επτά από τις εννιά μεταβλητές του παράγοντα κριτική σκέψη (όπως και η δεύτερη ομάδα), στις 11 από τις 12 μεταβλητές του παράγοντα δημιουργική σκέψη και σε μία από τις τέσσερις μεταβλητές του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή, οι μαθητές της ομάδας αυτής με βάση τη βασική τους γνώση, την κριτική τους σκέψη και τη δημιουργική τους σκέψη κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία μία άσκηση του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης, ενώ οι προηγούμενες ομάδες δεν κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία καμία άσκηση του παράγοντα αυτού. Οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν έλυσαν με επιτυχία μία άσκηση του παράγοντα σύνδεση που αφορούσε την ονομασία ομάδας σχημάτων και μία άσκηση του παράγοντα αξιολόγηση που αφορούσε αξιολόγηση αριθμού αν ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο το οποίο ήταν πιο σύνθετο σε σχέση με τα άλλα που αναφέρονταν οι άλλες ασκήσεις που έλυσαν με επιτυχία. Επίσης, σημείωσαν χαμηλή επίδοση στην πρωτοτυπία του έργου Δ1 (κατασκευή ερωτήσεων), καθώς και στις τρεις ασκήσεις των σύνθετων διαδικασιών σκέψης που αφορούσαν (Σ1, Σ3 και Σ4).

Σύνοψη αποτελεσμάτων πρώτου μέρους. Στο πρώτος μέρος των αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής έχει επιβεβαιωθεί με βάση τα δεδομένα της εργασίας ότι οι ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά είναι η βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά, η κριτική σκέψη στα μαθηματικά, η δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Επίσης, έχει εξεταστεί η σχέση μεταξύ των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και έχει βρεθεί ότι η κριτική σκέψη προβλέπεται άμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου, η δημιουργική σκέψη προβλέπεται άμεσα από την κριτική σκέψη και άμεσα και έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται άμεσα και έμμεσα από την κριτική σκέψη, άμεσα από τη δημιουργική σκέψη και έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου. Τέλος, έχουν προκύψει με βάση τα δεδομένα της εργασίας τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η πρώτη ομάδα κατάφερε να σημειώσει υψηλή επίδοση σε κάποιες ασκήσεις της βασικής γνώσης περιεχομένου και έτσι σημείωσε μέτρια προς χαμηλή επίδοση σε αυτή την ικανότητα, αλλά είχε χαμηλή επίδοση σε όλες τις άλλες ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Άρα, η πρώτη ομάδα χαρακτηρίζεται από επιφανειακή βασική γνώση. Η δεύτερη και η τρίτη ομάδα έχουν και οι δυο υψηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αλλά διαφέρουν ως προς την επίδοσή τους στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη. Συγκεκριμένα, η δεύτερη ομάδα έχει υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη και χαμηλή επίδοση στη δημιουργική, ενώ η τρίτη ομάδα έχει υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη και χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη. Άρα, η δεύτερη ομάδα χαρακτηρίζεται από εις βάθος βασική γνώση και κριτική σκέψη, ενώ η τρίτη ομάδα από εις βάθος βασική γνώση και δημιουργική σκέψη. Η τέταρτη ομάδα σημείωσε υψηλές επιδόσεις σε όλες τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, εκτός στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Στην ικανότητα αυτή σημείωσε χαμηλή επίδοση, αλλά κατάφερε να έχει υψηλότερη επίδοση σε αυτή την ικανότητα σε σχέση με τις άλλες τρεις ομάδες. Άρα, η τέταρτη ομάδα χαρακτηρίζεται από εις βάθος βασική γνώση, κριτική και δημιουργική σκέψη και επιφανειακή ικανότητα στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Έτσι, θα μπορούσαν οι τέσσερις αυτές ομάδες να ονομαστούν ως εξής: Πρώτη ομάδα: Επιφανειακά Βασική, Δεύτερη ομάδα: Εις βάθος Κριτική, Τρίτη ομάδα: Εις βάθος Δημιουργική και Τέταρτη ομάδα: Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική.

Νέες Τεχνολογίες και Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Αυτό αποτελεί το δεύτερο μέρος των αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής που αφορά τον τρόπο με τον οποίο οι νέες τεχνολογίες επιδρούν στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, δίνοντας απάντηση στα τελευταία δυο ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα, στο μέρος αυτό αξιοποιώντας τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους σχετικά με το επιβεβαιωμένο μοντέλο που περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και τις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων των 85 μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης: ανοικτό, καθοδηγούμενο και μικτό. Αρχικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* και τις διαφορές μεταξύ τους. Ακολούθως, εξετάζεται η αλλαγή της συμπεριφοράς των τεσσάρων ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά σε κάθε ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης.

Συμπεριφορά των μαθητών του κάθε ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* και οι διαφορές μεταξύ τους. Στο μέρος αυτό αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εξέταση στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης: ανοικτό, καθοδηγούμενο και μικτό στο προπειραματικό και μεταπειραματικό *Δοκίμιο*. Δηλαδή, τα αποτελέσματα αυτά αφορούν την εξέταση διαφορών μεταξύ των μαθητών των τριών περιβαλλόντων τόσο στη συνολική επίδοση όσο και στην επίδοση σε καθεμία από τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στις δυο χορηγήσεις του *Δοκιμίου* (πριν και μετά τη διεξαγωγή της παρέμβασης). Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εξέταση στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ της αρχικής επίδοσης και της τελικής επίδοσης των μαθητών σε κάθε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης τόσο στο σύνολο του *Δοκιμίου* όσο και σε κάθε μία ικανότητα που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Ολοκληρώνεται το μέρος αυτό, παρουσιάζοντας στοιχεία περιγραφικής στατιστικής σχετικά με την αλλαγή της συμπεριφοράς των μαθητών του από το προπειραματικό σε μεταπειραματικό σε κάθε μία ικανότητα που περιγράφει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και συνεπώς στις ασκήσεις που αποτελούν δείκτες τους. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν την απάντηση στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας αυτής:

4. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά; Αν ναι, με ποιο τρόπο;

Διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό Δοκίμιο. Αρχικά, για να μπορέσει να διερευνηθεί εάν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης στο μεταπειραματικό δοκίμιο, χρειάστηκε να εξεταστεί εάν υπήρχαν διαφορές μεταξύ των μαθητών αυτών στο προπειραματικό δοκίμιο, τόσο στο σύνολο του όσο και στις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Για αυτό, για να εξεταστεί εάν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο μεταξύ των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης έγινε χρήση της Ανάλυσης Διακύμανσης (ANOVA) μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (τύπος περιβάλλοντος) με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο Στον Πίνακα 4.21

παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής. Επιλέγηκε τεχνική ανάλυσης της παραμετρικής στατιστικής, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, αφού οι επιδόσεις των μαθητών της κάθε ομάδας παρέμβασης στις μεταβλητές του προπειραματικού ακολουθούν κανονική κατανομή, αφού οι απόλυτες τιμές της λοξότητας και της κύρτωσής τους είναι μικρότερες από την τιμή δυο και στις περισσότερες περιπτώσεις πλησιάζουν το μηδέν (George & Mallery, 2010).

Πίνακας 4.21

Έλεγχος Σημαντικότητας των Διαφορών στην Συνολική Επίδοση στο Προπειραματικό Δοκίμιο μεταξύ των Μαθητών των Τριών Ψηφιακών Περιβαλλόντων Μάθησης

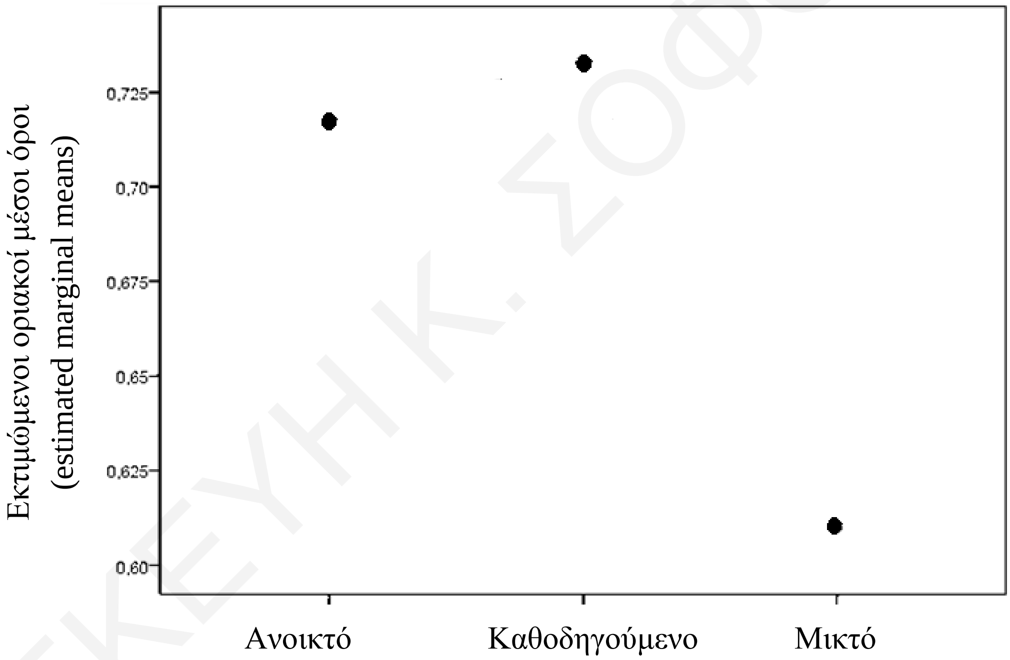
Πηγή διακύμανσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέσοι τετραγώνων	*F*
Μεταξύ των ομάδων	.044	2	.022	.862
Εντός των ομάδων	2.087	82	.025	

**p*<.05

Με βάση τον Πίνακα 4.21, η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου ($F_{(2,82)=}$.862, p=.426>.05). Για αυτό μπορεί να εξεταστεί εάν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης στη συνολική τους επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την συνολική τους επίδοση στο προπειραματικό. Συγκεκριμένα, έγινε χρήση της Ανάλυσης Συνδιακύμανσης (ANCOVA) με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, με ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της παρέμβασης και με συνδιακυμαίνουσα (covariate) την συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Επιλέγηκε τεχνική ανάλυσης της παραμετρικής στατιστικής, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, αφού οι επιδόσεις των μαθητών της κάθε ομάδας παρέμβασης στις μεταβλητές του μεταπειραματικού ακολουθούν κανονική κατανομή, αφού οι απόλυτες τιμές της λοξότητας και της κύρτωσής τους είναι μικρότερες από την τιμή δυο και στις περισσότερες περιπτώσεις πλησιάζουν το μηδέν (George & Mallery, 2010).

Η ανάλυση έδειξε ότι η συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σχετίζεται με την συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($F_{(1, 81)}$=108.148, p<.001). Ωστόσο αφαιρώντας την επίδραση της συνολικής επίδοσης στο προπειραματικό δοκίμιο, βρέθηκε ότι η επίδραση του είδους της παρέμβασης ήταν στατιστικά σημαντική ($F_{(2, 81)}$=9.005,

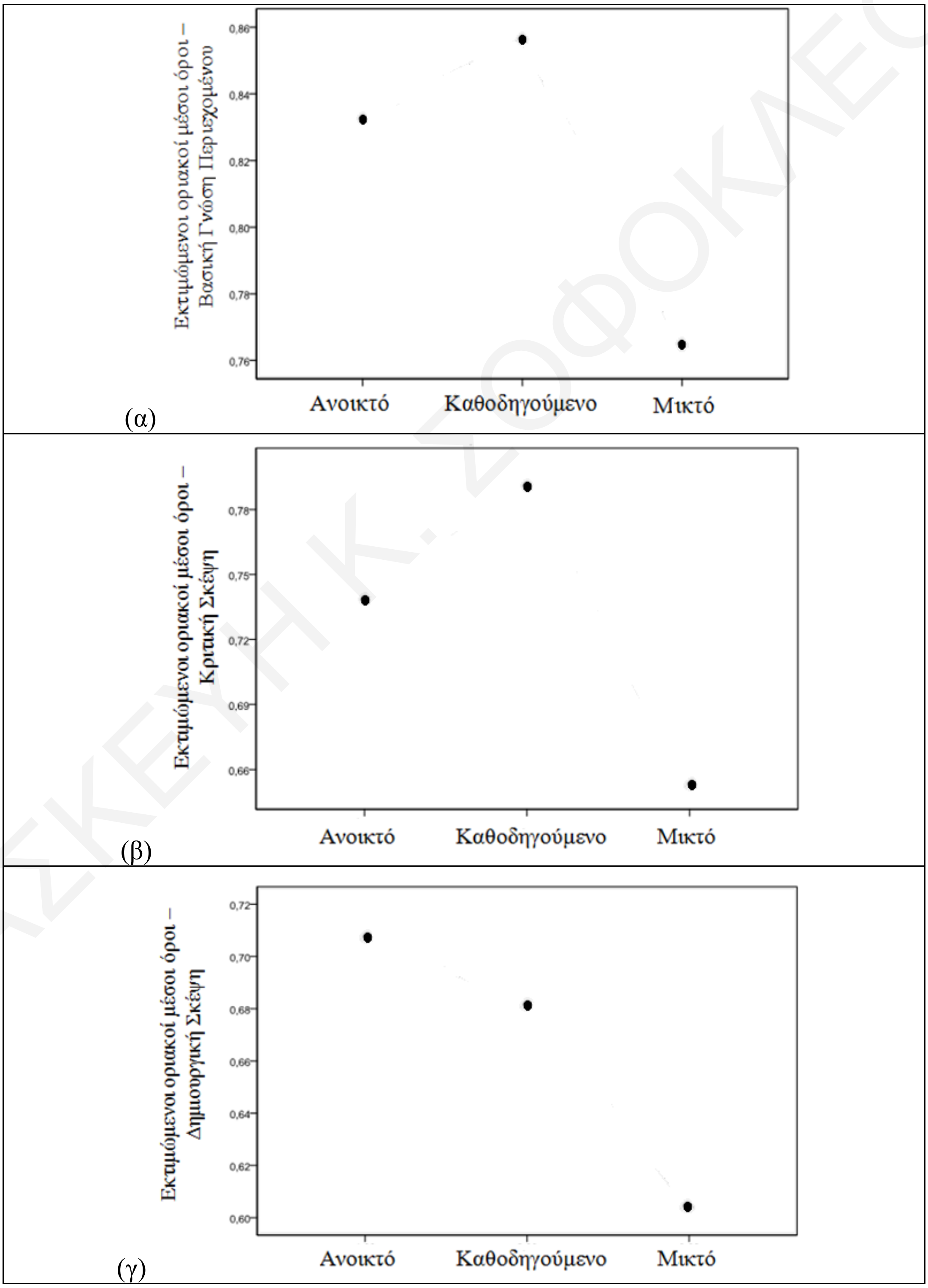
p<.001) και από πρακτικής άποψης η επίδραση αυτή χαρακτηρίζεται ως μεγάλη (*partial* η^2= .18>.14) (Cohen, 1988). Δηλαδή, βρέθηκε ότι μεταξύ των τριών ομάδων των μαθητών που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη συνολική τους επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών με τη χρήση του ελέγχου Bonferroni έδειξαν ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές (σε επίπεδο α=.05) υπήρχαν μεταξύ των μαθητών της ομάδας του ανοικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης και του μικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης, καθώς και μεταξύ των μαθητών του καθοδηγούμενου ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης και του μικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης. Στο Διάγραμμα 4.5 φαίνονται οι διαφορές αυτές, παρουσιάζοντας τους μέσους όρους της συνολικής επίδοσης της κάθε πειραματικής ομάδας στο μεταπειραματικό δοκίμιο που εκτιμήθηκαν με βάση την συνολική επίδοσή της στο προπειραματικό δοκίμιο.

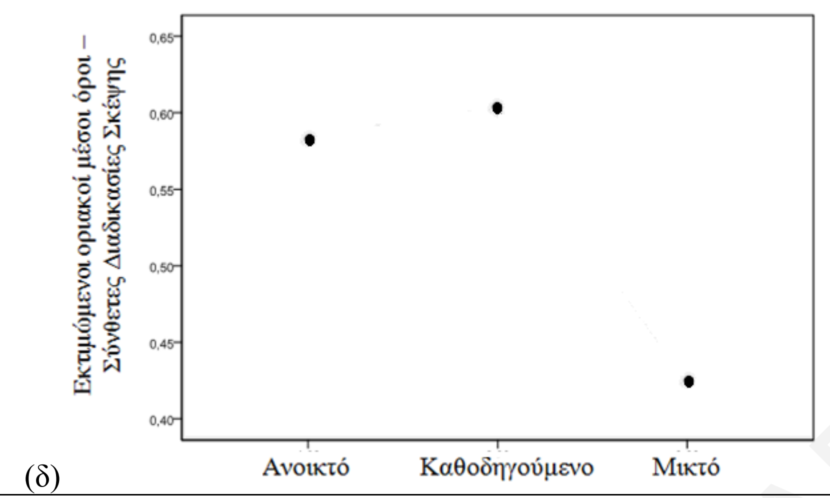


Διάγραμμα 4.5. Εκτιμώμενοι μέσοι όροι της κάθε πειραματικής ομάδας στη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό.

Με βάση το Διάγραμμα 4.5, ο εκτιμώμενος μέσος όρος της συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο της ομάδας των μαθητών που συμμετείχε στο καθοδηγούμενο ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης ήταν πιο υψηλός από τους αντίστοιχους μέσους όρους των άλλων δυο πειραματικών ομάδων. Δηλαδή, ο πιο ψηλός μέσος όρος συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο που εκτιμήθηκε με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο ήταν της ομάδας του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος και ο πιο χαμηλός αντίστοιχος μέσος όρος ήταν της ομάδας του μικτού περιβάλλοντος. Όμως, σημειώνεται ότι ο μέσος όρος της ομάδας του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος στο μεταπειραματικό δοκίμιο χωρίς να εκτιμηθεί με βάση την επίδοσή της στο προπειραματικό δοκίμιο δεν ήταν πιο ψηλός ($\overline{X}$ =.71, *SD*=.16) από την ομάδα του ανοικτού περιβάλλοντος ($\overline{X}$ =.75, *SD*=.16) (βλέπε Πίνακα 4.22).

Περαιτέρω αναλύσεις χρειάζονται ώστε να εξεταστούν εις βάθος οι διαφορές που βρέθηκαν στη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο μεταξύ των τριών ομάδων με βάση τη συνολική τους επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Για αυτό, αρχικά έγινε χρήση της Πολυμεταβλητής Ανάλυσης Διακύμανσης (MANOVA) για έλεγχο στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των τριών ομάδων στην επίδοσή τους στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (*Pillais*=.107, $F_{(8,\ 160)}$=1.135, p=.342>.05). Για αυτό μπορεί να εξεταστεί εάν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων στην επίδοσή τους στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοσή τους στο προπειραματικό. Συγκεκριμένα, έγινε χρήση της Πολλαπλής Ανάλυσης Συνδιακύμανσης (MANCOVA) με εξαρτημένες μεταβλητές τις επιδόσεις στις τέσσερις ικανότητες στο μεταπειραματικό δοκίμιο, με ανεξάρτητη μεταβλητή το είδος της παρέμβασης και με συνδιακυμαίνουσες (covariates) τις αντίστοιχες επιδόσεις στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση έδειξε ότι η επίδραση του είδους της παρέμβασης ήταν στατιστικά σημαντική (*Pillais*=.222, $F_{(8,\ 152)}$=2.367, p<.05, *partial* η^2= .11) και μπορεί να χαρακτηριστεί ως μέτρια λόγω της τιμής του η^2. Δηλαδή, η ανάλυση έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων στις επιδόσεις τους στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοσή τους στο προπειραματικό. Βρέθηκε, επίσης, από διακριτά ANOVA ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων στην επίδοσή τους σε κάθε μία από τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, οι τρεις ομάδες μαθητών διέφεραν στατιστικά σημαντικά στη βασική γνώση περιεχομένου ($F_{(2,\ 78)}$=3.335, p<.05, *partial* η^2= .079), στην κριτική σκέψη ($F_{(2,\ 78)}$=5.248, p<.01, *partial* η^2= .119), στη δημιουργική σκέψη ($F_{(2,\ 78)}$=3.872, p<.05, *partial* η^2= .090) και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ($F_{(2,\ 78)}$=7.777, p<.01, *partial* η^2= .166). Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών με τη χρήση του ελέγχου Bonferroni έδειξαν ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές (σε επίπεδο α=.05) υπήρχαν μεταξύ των μαθητών της ομάδας του ανοικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης και του μικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, καθώς και μεταξύ των μαθητών της ομάδας του καθοδηγούμενου ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης και του μικτού ψηφιακού περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης στη βασική γνώση περιεχομένου, στην κριτική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Στο Διάγραμμα 4.6 φαίνονται οι διαφορές αυτές, παρουσιάζοντας τους μέσους όρους της επίδοσης της κάθε ομάδας σε κάθε μία από τις τέσσερις ικανότητες στο μεταπειραματικό δοκίμιο που εκτιμήθηκαν με βάση την αντίστοιχη επίδοσή της κάθε ομάδας στο προπειραματικό δοκίμιο.





(δ)

Διάγραμμα 4.6. Εκτιμώμενοι μέσοι όροι της κάθε πειραματικής ομάδας στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό: (α) Βασική Γνώση Περιεχομένου, (β) Κριτική Σκέψη, (γ) Δημιουργική Σκέψη και (δ) Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης.

Με βάση το Διάγραμμα 4.6, οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης σημείωσαν υψηλότερους εκτιμώμενους μέσους όρους στη βασική γνώση περιεχομένου, στην κριτική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο από τους αντίστοιχους των άλλων πειραματικών ομάδων. Επίσης, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης σημείωσαν υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο στη δημιουργική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο από το αντίστοιχο των άλλων πειραματικών ομάδων. Ενώ οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος σημείωσαν τους χαμηλότερους εκτιμώμενους μέσους όρους και στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο μεταπειραματικό δοκίμιο.

Διαφορές μεταξύ των επιδόσεων στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο για κάθε πειραματική ομάδα. Στο μέρος αυτό εξετάζονται κατά πόσο υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιδόσεων του προπειραματικού και του μεταπειραματικού δοκιμίου για κάθε πειραματική ομάδα. Ο Πίνακας 4.22 παρουσιάζει τόσο τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις των μαθητών της κάθε πειραματικής ομάδας στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσο και τη διαφορά μεταξύ τους.

Με βάση τον Πίνακα 4.22, οι μέσοι όροι στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε όλες τις ομάδες ήταν πιο ψηλοί από τους αντίστοιχους στο προπειραματικό δοκίμιο. Επίσης, σημειώνεται ότι οι τυπικές αποκλίσεις των επιδόσεων των μαθητών και στις τρεις ομάδες τόσο στο προπειραματικό όσο και στο μεταπειραματικό δοκίμιο ήταν μικρές και αυτό δείχνει ότι δεν αποκλίνουν οι τιμές των μαθητών της κάθε ομάδας από το μέσο όρο της.

Πίνακας 4.22

Επιδόσεις της Κάθε Πειραματικής Ομάδας στο Προπειραματικό και στο Μεταπειραματικό Δοκίμιο

Πειραματικές Ομάδες	Προπειραματικό		Μεταπειραματικό		Διαφορά
	$\overline{X}$	*SD*	$\overline{X}$	*SD*	$\overline{X}_{ΜΠ} - \overline{X}_{ΠΠ}$
Συνολική Επίδοση					
Ανοικτό (*N*=25)	.55	.17	.75	.16	.20
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.50	.17	.71	.16	.21
Μικτό (*N*=34)	.51	.15	.60	.22	.09
Βασική Γνώση Περιεχομένου					
Ανοικτό (*N*=25)	.78	.15	.86	.14	.08
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.72	.20	.84	.18	.12
Μικτό (*N*=34)	.71	.18	.75	.21	.04
Κριτική Σκέψη					
Ανοικτό (*N*=25)	.60	.23	.78	.22	.18
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.56	.22	.77	.17	.21
Μικτό (*N*=34)	.55	.20	.63	.27	.08
Ανάλυση					
Ανοικτό (*N*=25)	.75	.36	.86	.27	.11
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.77	.32	.84	.22	.07
Μικτό (*N*=34)	.75	.30	.80	.27	.05
Σύνδεση					
Ανοικτό (*N*=25)	.63	.19	.76	.26	.13
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.53	.19	.80	.17	.27
Μικτό (*N*=34)	.53	.22	.59	.30	.06
Αξιολόγηση					
Ανοικτό (*N*=25)	.44	.32	.76	.26	.32
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.45	.38	.69	.26	.24
Μικτό (*N*=34)	.45	.34	.62	.38	.17
Δημιουργική Σκέψη					
Ανοικτό (*N*=25)	.54	.20	.74	.17	.20
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.42	.20	.65	.19	.23
Μικτό (*N*=34)	.47	.21	.60	.25	.13
Σύνθεση					
Ανοικτό (*N*=25)	.60	.18	.70	.19	.10
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.52	.17	.66	.22	.14
Μικτό (*N*=34)	.50	.19	.54	.26	.04
Νοητική Δημιουργία					
Ανοικτό (*N*=25)	.48	.33	.80	.20	.32
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.31	.28	.65	.24	.34
Μικτό (*N*=34)	.44	.27	.66	.27	.22
Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης					
Ανοικτό (*N*=25)	.30	.21	.61	.21	.31
Καθοδηγούμενο (*N*=26)	.30	.18	.59	.21	.29
Μικτό (*N*=34)	.31	.18	.42	.29	.11

Σημείωση. Η μέγιστη τιμή ήταν ένα και η ελάχιστη τιμή ήταν μηδέν.
ΜΠ: Μεταπειραματικό, ΠΠ: Προπειραματικό

Με βάση τον Πίνακα 4.22 δεν ήταν σε όλες τις ομάδες και σε όλες τις επιδόσεις η διαφορά μεταξύ του μεταπειραματικού και προπειραματικού δοκιμίου η ίδια.

Συγκεκριμένα, ενώ και οι τρεις ομάδες μαθητών (ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό) σημείωσαν αύξηση στην συνολική τους μέση επίδοση από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στο μικτό (Ανοικτό: Διαφορά: .20, Ποσοστό αύξησης: 36.4%; Καθοδηγούμενο: Διαφορά: .21, Ποσοστό αύξησης: 42%; Μικτό: Διαφορά: .09, Ποσοστό αύξησης: 17.6%). Σημειώνεται ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρουσίασαν τη μεγαλύτερη αύξηση στη συνολική τους μέση επίδοση.

Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στις επιδόσεις των μαθητών στους παράγοντες και στους υπό-παράγοντες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Δηλαδή, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρουσίασαν μεγαλύτερη αύξηση στη μέση επίδοσή τους στο κάθε ένα παράγοντα και υπό-παράγοντα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό. Συγκεκριμένα, οι μαθητές και των δυο ομάδων σημείωσαν τη μεγαλύτερη αύξηση (δηλαδή η διαφορά της τελικής επίδοσης από την αρχική ήταν ίση περίπου με .30) στον παράγοντα Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης και στον υπό-παράγοντα της Δημιουργικής Σκέψης: Νοητική Δημιουργία. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας του ανοικτού σημείωσαν αντίστοιχη αύξηση και στον υπό-παράγοντα της κριτικής σκέψης: Αξιολόγηση, ενώ οι μαθητές της πειραματικής ομάδας του καθοδηγούμενου σημείωσαν αντίστοιχη αύξηση στον υπό-παράγοντα της κριτικής σκέψης: Σύνδεση. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκετά μεγάλη αύξηση (δηλαδή η διαφορά της τελικής επίδοσης από την αρχική ήταν ίση περίπου με .20) παρατηρήθηκε από τους μαθητές του ανοικτού και του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος στο σύνολο της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης, καθώς και από τους μαθητές του μικτού περιβάλλοντος στους υπό-παράγοντες της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης: Αξιολόγηση και Νοητική Δημιουργία.

Παράλληλα, η μικρότερη αύξηση στο μέσο όρο από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο παρατηρήθηκε από τους μαθητές και των τριών πειραματικών ομάδων στη βασική γνώση περιεχομένου, στον υπό-παράγοντα της κριτικής σκέψης: ανάλυση και στον υπό-παράγοντα της δημιουργικής σκέψης: σύνθεση.

Περιγραφή της αλλαγής της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά των μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας. Στο μέρος αυτό χρησιμοποιώντας στοιχεία περιγραφικής στατιστικής αναλύεται αρχικά η αλλαγή της μέσης επίδοσης των μαθητών της κάθε πειραματικής ομάδας σε κάθε παράγοντα και υπό-παράγοντα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Έπειτα παρουσιάζεται η αλλαγή των ποσοστών των μαθητών της κάθε πειραματικής ομάδας ως προς τη βαθμίδα επίδοσης που σημείωσαν τόσο στο σύνολο όσο και τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη από το προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο.

Ο Πίνακας 4.23 παρουσιάζει μια συνοπτική κατανομή των μέσων όρων των μαθητών των τριών πειραματικών ομάδων στους παράγοντες και στους υπό-παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβαση. Η κατανομή έγινε με βάση τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση της συνολικής επίδοσης των μαθητών όλου του δείγματος στην αρχική χορήγηση του δοκιμίου (802 μαθητές), όπως έχει επεξηγηθεί προηγουμένως. Δηλαδή, κατανέμονται οι μέσοι όροι σε τέσσερις βαθμίδες επίδοσης (χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή).

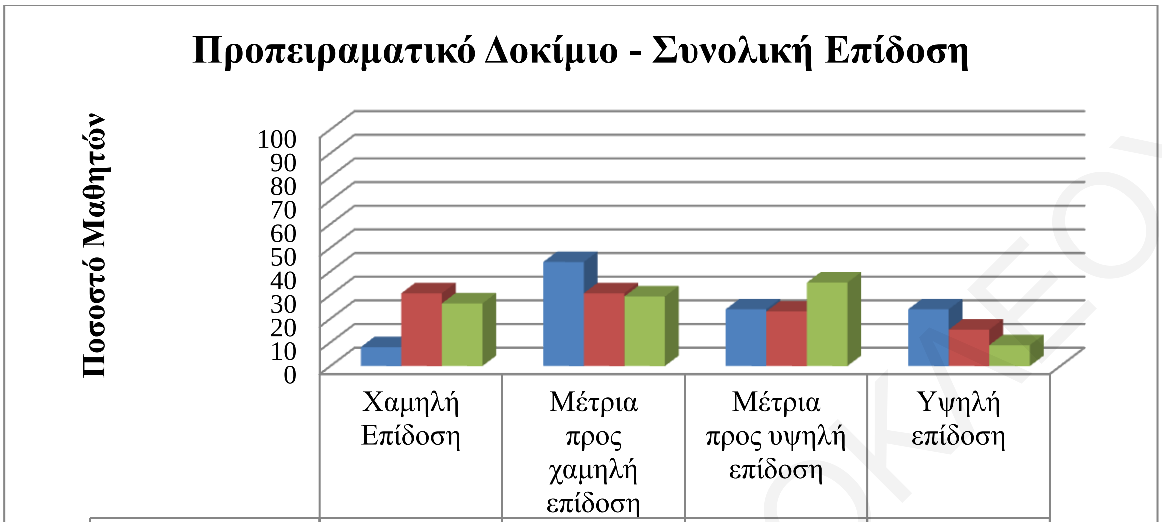
Πίνακας 4.23

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων των Τριών Πειραματικών Ομάδων στους Παράγοντες και στους Υπό-Παράγοντες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά Πριν και Μετά την Παρέμβαση

	Ανοικτό		Καθοδηγούμενο		Μικτό	
	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	ΒΓ Αναλ.	ΒΓ, ΚΣ,ΔΣ Αναλ., Συνδ., Αξιολ., Συνθ., Ν. Δημ.	ΒΓ Αναλ.	ΒΓ, ΚΣ Αναλ.,Συνδ.	ΒΓ Αναλ.	ΒΓ Αναλ.
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)	ΚΣ Συνδ., Συνθ.	ΣΔ	ΚΣ	ΔΣ, ΣΔ Αξιολ., Συνθ., Ν. Δημ.	ΚΣ	ΚΣ, ΔΣ Συνδ., Αξιολ., Ν. Δημ.
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	ΔΣ Αξιολ., Ν.Δημ.		ΔΣ Συνδ., Αξιολ., Συνθ.		ΔΣ Συνδ., Αξιολ., Συνθ., Ν. Δημ.	ΣΔ Συνθ.
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	ΣΔ		ΣΔ Ν. Δημ.		ΣΔ	

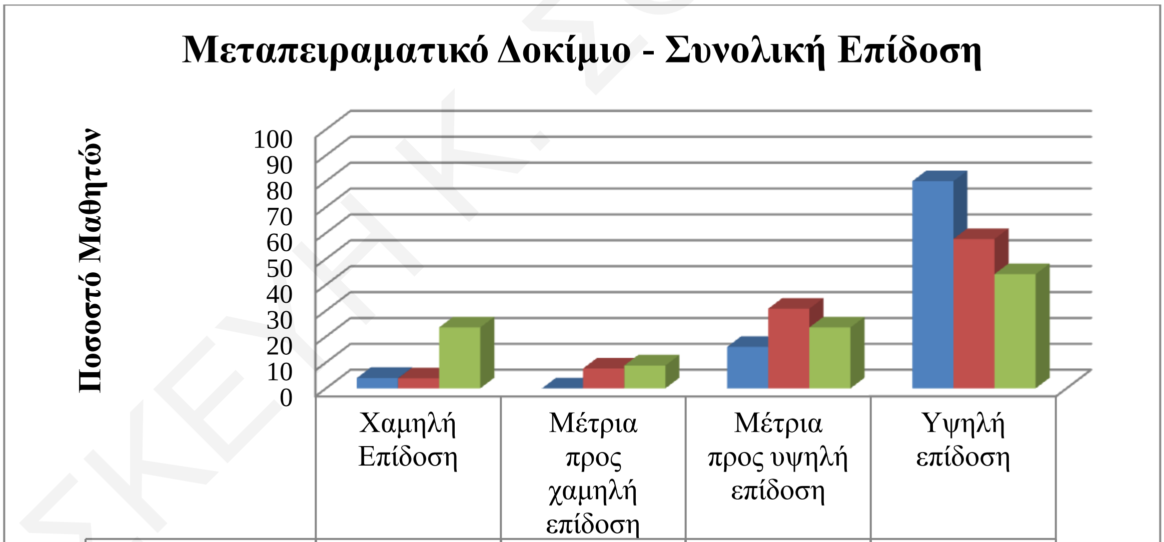
Σημείωση. Ο κωδικός ΠΠ αντιστοιχεί στο Προπειραματικό δοκίμιο, ΜΠ στο Μεταπειραματικό δοκίμιο, ΒΓ στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά». Οι κωδικοί με μικρά γράμματα αντιστοιχούν στους υπό-παράγοντες της κριτικής σκέψης (Αναλ.: «Ανάλυση», Συνδ.: «Σύνδεση» και Αξιολ.: «Αξιολόγηση») και της δημιουργικής σκέψης (Συνθ.: «Σύνθεση» και Ν. Δημ.: «Νοητική Δημιουργία»)

Με βάση τον Πίνακα 4.23, οι μαθητές και των τριών πειραματικών ομάδων παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά στο προπειραματικό δοκίμιο, δηλαδή η μέση επίδοσή τους στη βασική γνώση περιεχομένου ήταν υψηλή, στην κριτική σκέψη ήταν μέτρια προς υψηλή, στη δημιουργική σκέψη μέτρια προς χαμηλή και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ήταν χαμηλή. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με το εύρημα που παρουσιάστηκε πιο πάνω ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων στο προπειραματικό δοκίμιο. Όμως, υπάρχει διαφοροποίηση στη μέση επίδοση των μαθητών της κάθε πειραματικής ομάδας σε κάθε παράγοντα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές του ανοικτού περιβάλλοντος είχαν υψηλή μέση επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργική σκέψη, ενώ σημείωσαν μέτρια προς υψηλή μέση επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Οι μαθητές του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος σημείωσαν όπως και οι μαθητές του ανοικτού περιβάλλοντος υψηλή μέση επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και στην κριτική σκέψη, καθώς και μέτρια προς υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αλλά η μέση επίδοσή τους στη δημιουργική σκέψη χαρακτηρίστηκε ως μέτρια προς υψηλή. Οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος σημείωσαν υψηλή επίδοση μόνο στη βασική γνώση περιεχομένου, μέτρια προς υψηλή στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη και μέτρια προς χαμηλή στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Άρα, παρατηρείται, όπως έχει ήδη βρεθεί από την τεχνική ανάλυση της επαγωγικής στατιστικής MANCOVA,να υπάρχει διαφορά στην μέση επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μεταξύ των μαθητών του μικτού περιβάλλοντος και των μαθητών που συμμετείχαν στις άλλες δυο παρεμβάσεις. Επίσης, υπάρχει διαφορά στην μέση επίδοση στην κριτική σκέψη και στους υπό-παράγοντες της μεταξύ των μαθητών του μικτού περιβάλλοντος και των μαθητών των άλλων δυο πειραματικών ομάδων, αλλά η στατιστική σημαντική διαφορά βρέθηκε μόνο μεταξύ του μικτού και του καθοδηγούμενου. Αυτό πιθανόν να συνέβηκε αφού η πειραματική ομάδα του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος παρουσίασε μεγαλύτερη αύξηση στην μέση επίδοση της στους υπό-παράγοντες της κριτικής σκέψης σε σχέση με την αρχική της επίδοση. Ακόμη, υπάρχει διαφορά στη μέση επίδοση στη δημιουργική σκέψη και στους υπό-παράγοντες της μεταξύ των μαθητών του ανοικτού και των μαθητών των άλλων δυο πειραματικών ομάδων, αλλά στατιστικά σημαντική διαφορά βρέθηκε μόνο μεταξύ του ανοικτού και του μικτού. Αυτό πιθανόν να συνέβηκε αφού οι μαθητές του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος ενώ σημείωσαν όπως και οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος μέτρια προς υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, βελτίωσαν αισθητά την επίδοσή τους και στους δυο υπό-παράγοντες της δημιουργικής σκέψης (από χαμηλή και μέτρια προς χαμηλή επίδοση σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση). Όμως, οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος δεν παρουσίασαν αισθητή βελτίωση στον υπό-παράγοντα της σύνθεσης και για αυτό σημείωσαν και στις δυο μετρήσεις μέτρια προς χαμηλή επίδοση.



	Χαμηλή Επίδοση	Μέτρια προς χαμηλή επίδοση	Μέτρια προς υψηλή επίδοση	Υψηλή επίδοση
Ανοικτό	8	44	24	24
Καθοδηγούμενο	31	31	23	15
Μικτό	26	29	35	9

(α)



	Χαμηλή Επίδοση	Μέτρια προς χαμηλή επίδοση	Μέτρια προς υψηλή επίδοση	Υψηλή επίδοση
Ανοικτό	4	0	16	80
Καθοδηγούμενο	4	8	31	58
Μικτό	24	9	24	44

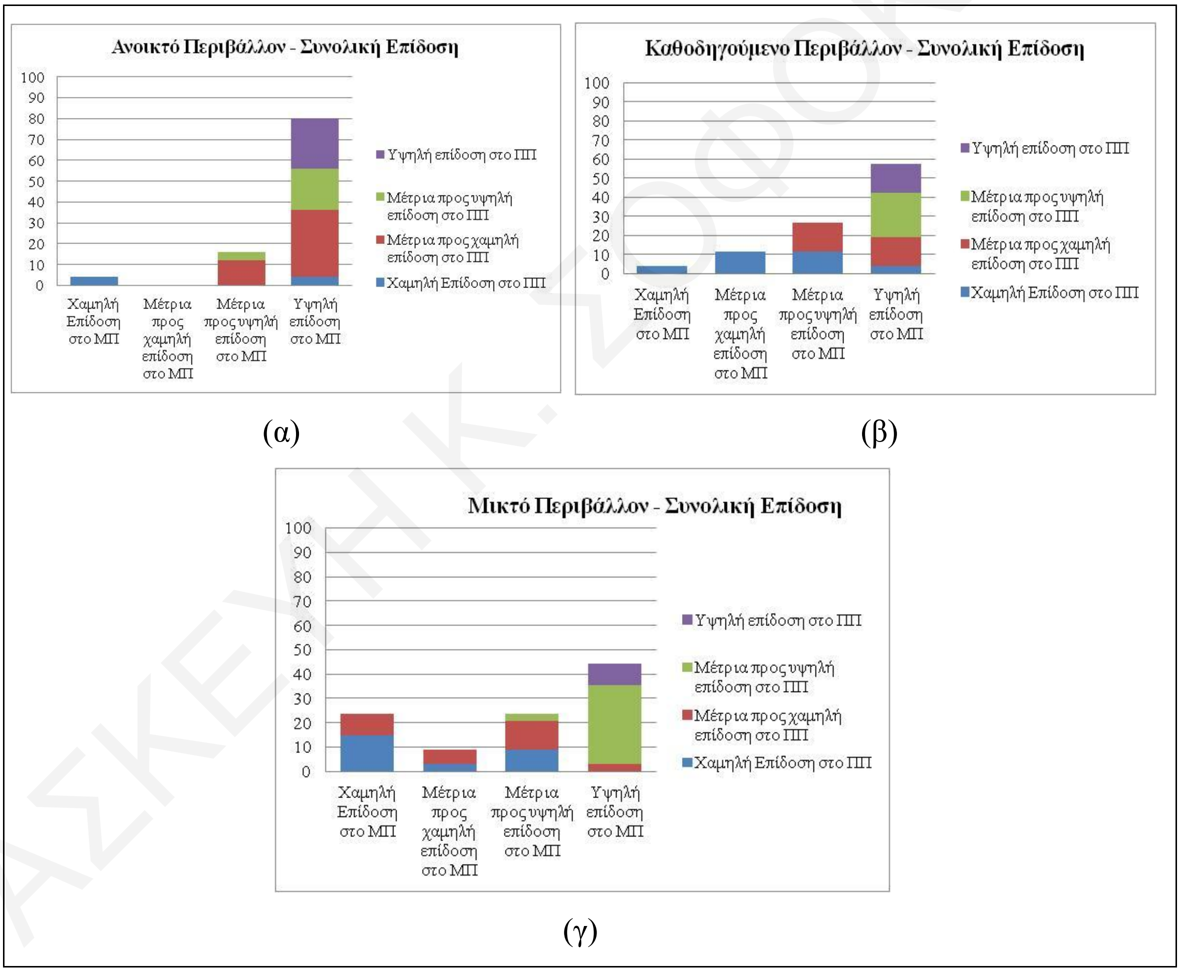
(β)

Διάγραμμα 4.7. Ποσοστά μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή συνολική επίδοση στο προπειραματικό (α) και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* (β).

Πιο πάνω, αναλύθηκε η αλλαγή που σημείωσαν οι μαθητές της κάθε πειραματικής ομάδας στη μέση επίδοσή τους τόσο στο σύνολο όσο και στους παράγοντες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Η αλλαγή αυτή παρουσιάστηκε με βάση τη βαθμίδα επίδοσης που άνηκαν οι μέσοι όρο των μαθητών. Ακολούθως, περιγράφεται η αλλαγή των ποσοστών των μαθητών ανά πειραματική ομάδα που σημείωσαν χαμηλή επίδοση ($\bar{X}$ <.40), μέτρια προς χαμηλή επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$), μέτρια προς υψηλή επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$) και υψηλή επίδοση ($\bar{X} \geq .70$) πριν και μετά την παρέμβαση. Στο Διάγραμμα 4.7 παρουσιάζεται αυτή η αλλαγή ως προς τη συνολική επίδοση στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο.

Με βάση το Διάγραμμα 4.7, στο ανοικτό περιβάλλον παρατηρήθηκε ότι στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου το 8% των μαθητών του σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 44% σημείωσε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 24% σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 24% υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν στην κατανομή της συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Αυτό γιατί μειώθηκαν σχεδόν κατά ήμισυ τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν χαμηλή (4%), μέτρια προς χαμηλή (0%) και μέτρια προς υψηλή επίδοση (16%) και αυξήθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση (80%). Όσον αφορά το καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρήθηκε στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου το 31% των μαθητών να σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 31% των μαθητών να σημείωσε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 23% των μαθητών να σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 15% υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά, όπως και στο ανοικτό περιβάλλον, διαφοροποιήθηκαν στην κατανομή της συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Αυτό γιατί μειώθηκαν αισθητά τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν χαμηλή (4%) και μέτρια προς χαμηλή επίδοση (8%) και αυξήθηκαν τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν μέτρια προς υψηλή (31%) και υψηλή επίδοση (58%). Όσον αφορά το μικτό περιβάλλον, παρατηρήθηκε ότι στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου το 26% των μαθητών του να σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 29% μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 35% μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 9% υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά δεν διαφοροποιήθηκαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο ως προς τη χαμηλή επίδοση (24%), αλλά ως προς τη μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση. Δηλαδή, το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο ήταν σχεδόν το ίδιο με το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση στο μεταπειραματικό και αποτελεί το μεγαλύτερο σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστά των άλλων δυο πειραματικών ομάδων. Όμως, μειώθηκαν τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή (9%) και μέτρια προς υψηλή επίδοση (24%) και αυξήθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση (44%). Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο στο μικτό περιβάλλον ήταν το μικρότερο σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστά των άλλων δυο πειραματικών ομάδων, αλλά το ποσοστό αύξησης του σε σχέση με το προπειραματικό ήταν σχεδόν το ίδιο με αυτό του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος (περίπου 40%).

Με βάση τα πιο πάνω, υπάρχουν ενδείξεις ότι το μικτό περιβάλλον δεν βοήθησε τους μαθητές που σημείωσαν χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο να βελτιώσουν την επίδοσή τους στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ τα άλλα δυο περιβάλλοντα φαίνεται ότι βοήθησαν όλους τους μαθητές τους ανεξαρτήτως επίδοσης στο προπειραματικό δοκίμιο να βελτιώσουν την επίδοσή τους στο μεταπειραματικό. Για να εξεταστεί αυτό, στη συνέχεια, παρουσιάζεται σε γραφικές παραστάσεις πόσοι μαθητές που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου σημείωσαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο συνολική επίδοση ίδιας βαθμίδας επίδοσης, ανώτερης ή κατώτερης.

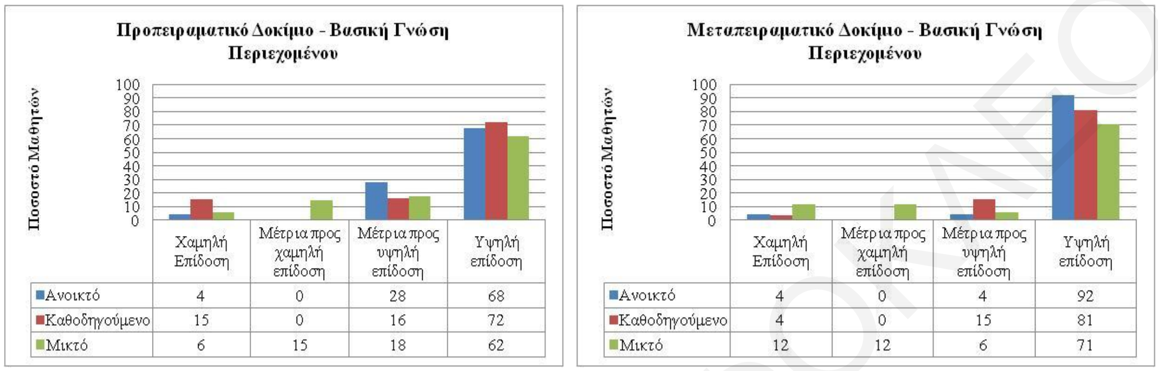


Διάγραμμα 4.8. Κατανομή μαθητών (ποσοστά) της κάθε πειραματικής ομάδας με βάση τη βαθμίδα επίδοσή τους στο σύνολο του προπειραματικού (ΠΠ) και μεταπειραματικού (ΜΠ) *Δοκιμίου.*

Με βάση το Διάγραμμα 4.8α, στο ανοικτό περιβάλλον οι μισοί μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου, σημείωσαν χαμηλή επίδοση και στο μεταπειραματικό δοκίμιο ενώ οι υπόλοιποι σημείωσαν υψηλή επίδοση. Επίσης, λίγο περισσότερο από το ένα τέταρτο των μαθητών που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν υψηλή επίδοση. Ακόμη, το ένα έκτο των μαθητών που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές της συγκεκριμένης βαθμίδας σημείωσαν υψηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και στο μεταπειραματικό. Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον περίπου το ένα τρίτο των μαθητών του ανεξαρτήτως επίδοσης σημείωσαν ίδια βαθμίδα επίδοσης στο σύνολο του δοκιμίου πριν και μετά την παρέμβαση, ενώ οι περισσότεροι μαθητές (τα δυο τρίτα) σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με το προπειραματικό.

Με βάση το Διάγραμμα 4.8β, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον το ένα όγδοο των μαθητών που είχαν χαμηλή επίδοση στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου, σημείωσαν χαμηλή επίδοση και στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Επίσης, οι μισοί μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν υψηλή επίδοση. Ακόμη, όλοι οι μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσαν υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και στο μεταπειραματικό. Δηλαδή, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον όλοι οι μαθητές εκτός από ένα σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με το προπειραματικό.

Με βάση το Διάγραμμα 4.8γ, στο μικτό περιβάλλον λίγο περισσότερο από το ένα δεύτερο των μαθητών που είχαν χαμηλή επίδοση στο σύνολο του προπειραματικού δοκιμίου, σημείωσαν χαμηλή επίδοση και στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (όχι τη βαθμίδα της υψηλής επίδοσης). Επίσης, οι μισοί μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσαν είτε ίδια βαθμίδα επίδοσης (20%) είτε κατώτερη (χαμηλή επίδοση) (30%) στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν μέτρια προς υψηλή (40%) και υψηλή επίδοση (10%). Ακόμη, όλοι οι μαθητές εκτός από ένα που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, σημείωσαν υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ ο ένας μαθητής σημείωσε ίδια βαθμίδα επίδοσης. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο, διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και στο μεταπειραματικό. Δηλαδή, στο μικτό περιβάλλον περίπου το ένα τρίτο των μαθητών του σημείωσαν κατώτερη ή ίδια βαθμίδα επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με το προπειραματικό. Οι μαθητές αυτοί είχαν σημειώσει χαμηλή ή μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Με λίγα λόγια περίπου οι μισοί μαθητές χαμηλής επίδοσης φαίνεται να μην βοηθήθηκαν από το μικτό περιβάλλον. Ακολούθως, εξετάζεται αν παρουσιάζεται παρόμοια εικόνα με τα πιο πάνω σε κάθε μία ικανότητα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης.

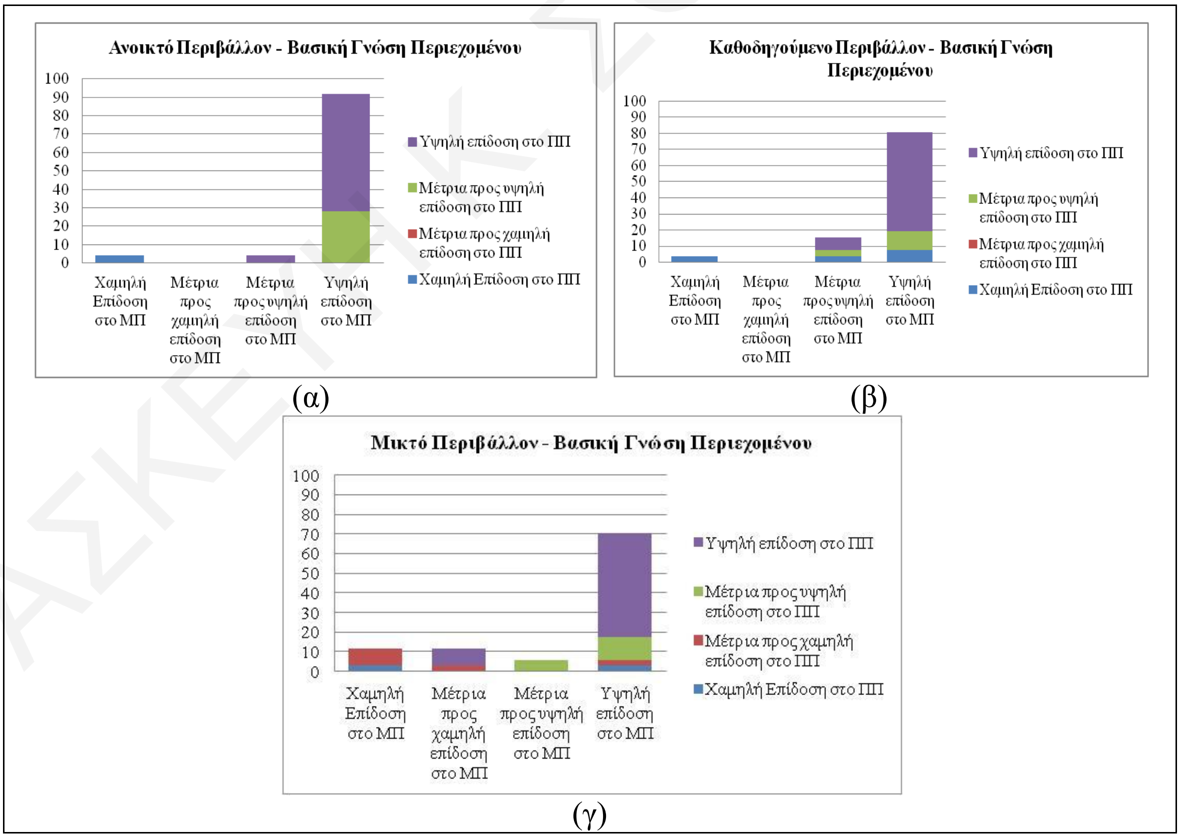


(α) (β)

Διάγραμμα 4.9. Ποσοστά μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου στο προπειραματικό (α) και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* (β).

Με βάση το Διάγραμμα 4.9, στο ανοικτό περιβάλλον παρατηρήθηκε ότι στη βασική γνώση περιεχομένου στο προπειραματικό δοκίμιο το 4% των μαθητών του σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 28% σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 68% υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν στην κατανομή της επίδοσης της βασικής γνώσης περιεχομένου στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Αυτό γιατί μειώθηκαν αισθητά τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση (4%) και αυξήθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση (92%). Ενώ το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση διατηρήθηκε στα ίδια επίπεδα με το προπειραματικό δοκίμιο. Όσον αφορά το καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρήθηκε στη βασική γνώση περιεχομένου πριν την παρέμβαση το 15% των μαθητών να σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 16% των μαθητών να σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 72% υψηλή επίδοση. Τα δυο από αυτά τα ποσοστά (της χαμηλής και της υψηλής επίδοσης) διαφοροποιήθηκαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ το ένα ποσοστό έμεινε το ίδιο (της μέτριας προς υψηλής επίδοσης). Δηλαδή, μειώθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση (4%) και αυξήθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση. Όσον αφορά το μικτό περιβάλλον, παρατηρήθηκε ότι στη βασική γνώση περιεχομένου του προπειραματικού δοκιμίου το 6% των μαθητών του σημείωσε χαμηλή επίδοση, το 15% μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 18% μέτρια προς υψηλή επίδοση και το

62% υψηλή επίδοση. Τα τρία από αυτά ποσοστά διαφοροποιήθηκαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο (της χαμηλής, της μέτριας προς υψηλής και της υψηλής επίδοσης), ενώ το ένα ποσοστό (της μέτριας προς χαμηλής επίδοσης) κυμάνθηκε στα ίδια επίπεδα. Δηλαδή, αυξήθηκε τόσο το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση (12%) στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσο και το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση (71%). Όμως, μειώθηκε το ποσοστό των μαθητών που σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση (6%). Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το υψηλότερο και το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών που σημείωσε υψηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο στη βασική γνώση περιεχομένου παρατηρήθηκε στο καθοδηγούμενο και στο μικτό περιβάλλον αντίστοιχα, ενώ στο μεταπειραματικό ήταν στο ανοικτό και στο μικτό περιβάλλον αντίστοιχα. Όσον αφορά το υψηλότερο και το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών που σημείωσε χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο στη βασική γνώση ήταν το καθοδηγούμενο και το ανοικτό αντίστοιχο, ενώ στο μεταπειραματικό ήταν το μικτό και τα άλλα δυο αντίστοιχα. Στη συνέχεια αναλύεται σε ποιες βαθμίδες επίδοσης στη βασική γνώση στο μεταπειραματικό δοκίμιο κατανέμονται μαθητές με συγκεκριμένη βαθμίδα επίδοσης στο προπειραματικό δοκίμιο.



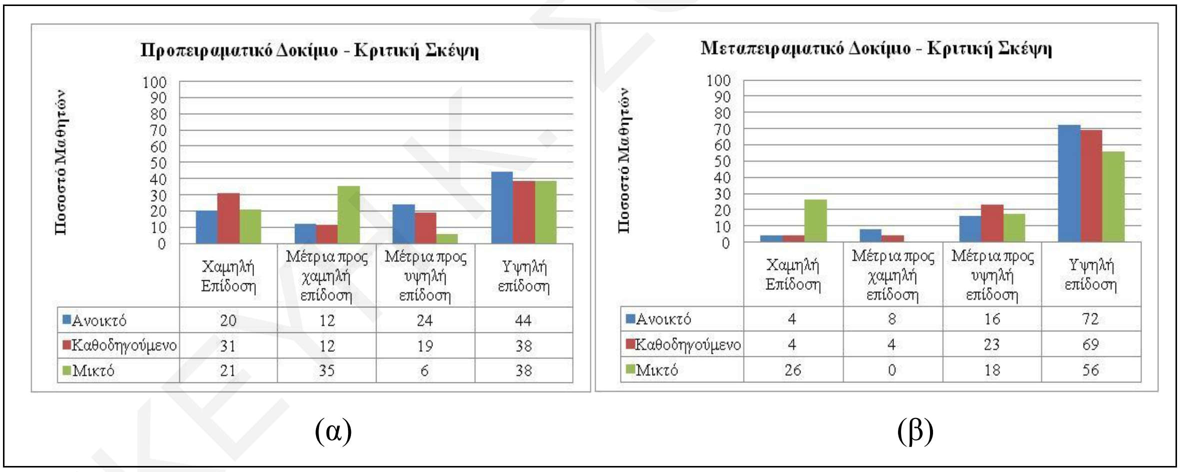
Διάγραμμα 4.10. Κατανομή μαθητών (ποσοστά) τους κάθε πειραματικής ομάδας με βάση τη βαθμίδα επίδοσή τους στη βασική γνώση περιεχομένου στο προπειραματικό (ΠΠ) και μεταπειραματικό (ΜΠ) *Δοκίμιο*.

Με βάση το Διάγραμμα 4.10α, στο ανοικτό περιβάλλον ο ένας μαθητής που σημείωσε χαμηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσε την ίδια βαθμίδα επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Ενώ οι επτά μαθητές που σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη βασική γνώση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση στο προπειραματικό δοκίμιο παρατηρείται ότι όλοι εκτός από ένα μαθητή να σημείωσαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Ο ένας μαθητής που δεν σημείωσε υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση. Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον περίπου το 70% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της βασικής γνώσης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (περίπου 30%) είτε κατώτερη (μόνο ένας μαθητής).

Με βάση το Διάγραμμα 4.10β, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρείται ότι τόσο οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση όσο και οι μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη βασική γνώση στο προπειραματικό δοκίμιο να σημείωσαν είτε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (τα τρία τέταρτά τους) είτε ίδια βαθμίδα επίδοσης (το ένα τέταρτο τους) στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση πριν την παρέμβαση στη βασική γνώση, σημείωσαν οι περισσότεροι από αυτούς (περίπου το 90%) και πάλι υψηλή επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο, αλλά ένα μέρος τους (περίπου το 10%) σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης (μέτρια προς υψηλή επίδοση). Δηλαδή, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον το 70% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της βασικής γνώσης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (περίπου 27%) είτε κατώτερη (μόνο δυο μαθητές).

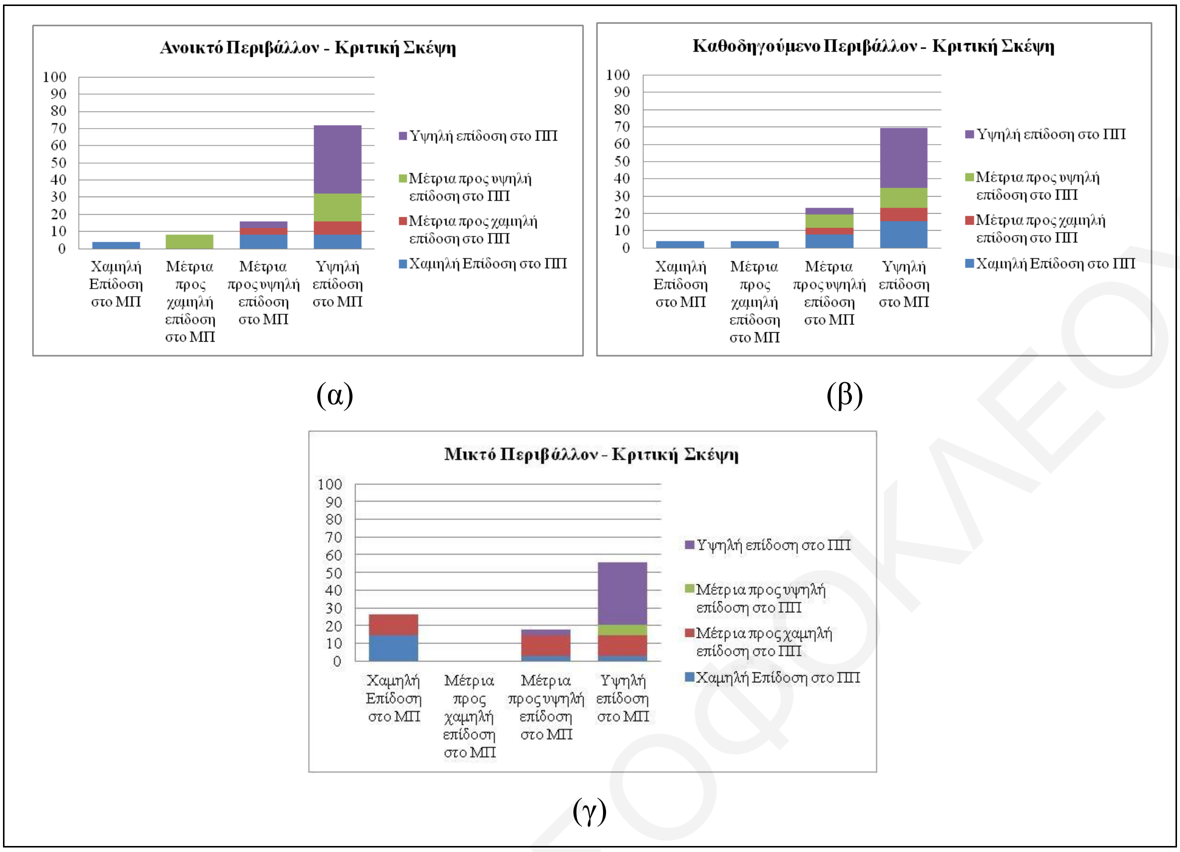
Με βάση το Διάγραμμα 4.10γ, στο μικτό περιβάλλον τόσο οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση όσο και οι μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη βασική γνώση πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν είτε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (50% και 66.6% αντίστοιχα) είτε ίδια βαθμίδα επίδοσης (50% και 33.3% αντίστοιχα). Ενώ τόσο οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση όσο και οι μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν είτε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης (60% και 14% αντίστοιχα) είτε ίδια βαθμίδα επίδοσης (20% και 86% αντίστοιχα) είτε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (20% και 0% αντίστοιχα). Δηλαδή, στο μικτό περιβάλλον το 65% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της βασικής γνώσης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (περίπου 18%) είτε κατώτερη (περίπου 18%).

Με βάση τα πιο πάνω, παρατηρείται ότι κάποιοι μαθητές και των τριών περιβαλλόντων που σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση στο προπειραματικό δοκίμιο να σημειώνουν κατώτερη βαθμίδα επίδοσης στη βασική γνώση στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Το μεγαλύτερο ποσοστό παρουσιάζεται στο μικτό περιβάλλον. Επίσης, στο μικτό περιβάλλον παρατηρείται να σημειώνουν κατώτερη βαθμίδα επίδοσης στη βασική γνώση στο μεταπειραματικό δοκίμιο και το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών του που σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση. Γενικά, και στα τρία περιβάλλοντα παρατηρείται οι μαθητές της χαμηλής και της μέτριας προς υψηλής επίδοσης στη βασική γνώση στο προπειραματικό δοκίμιο να σημείωσαν είτε ίδια βαθμίδας επίδοσης είτε ανώτερης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στη βασική γνώση. Ακολούθως, εξετάζεται η αντίστοιχη με τα πιο πάνω συμπεριφορά των μαθητών διαφορετικής βαθμίδας επίδοσης στην κριτική σκέψη.



Διάγραμμα 4.11. Ποσοστά μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη στο προπειραματικό (α) και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* (β).

Με βάση το Διάγραμμα 4.11, στο ανοικτό περιβάλλον το 20% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 12% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 24% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 44% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 4%, με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 8% και με μέτρια προς υψηλή στο 16%. Ενώ αυξήθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με υψηλή επίδοση στο 72%. Στο καθοδηγούμενο περιβάλλον το 31% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 12% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 19% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 38% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 4% και με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 8%, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 23% και με υψηλή επίδοση στο 69%. Στο μικτό περιβάλλον, το 21% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 35% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 6% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 38% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 0%, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 26%, με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 18% και με υψηλή επίδοση στο 56%. Δηλαδή, παρατηρείται ότι παρόλο που τα ποσοστά των μαθητών με χαμηλή και υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση στο μικτό περιβάλλον να είναι σχεδόν ίσα με τα αντίστοιχα ποσοστά των άλλων δυο πειραματικών ομάδων, μετά την παρέμβαση τα ποσοστά αυτά διαφοροποιούνται από τα αντίστοιχα των άλλων δυο πειραματικών ομάδων. Συγκεκριμένα, σημειώνεται ότι το μικτό περιβάλλον είχε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση και το χαμηλότερο με υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα. Στη συνέχεια, αναλύεται από ποια βαθμίδα επίδοσης στην κριτική σκέψη στο προπειραματικό δοκίμιο προέρχονται οι μαθητές της κάθε μίας από τις τέσσερις βαθμίδες επίδοσης στην κριτική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο.



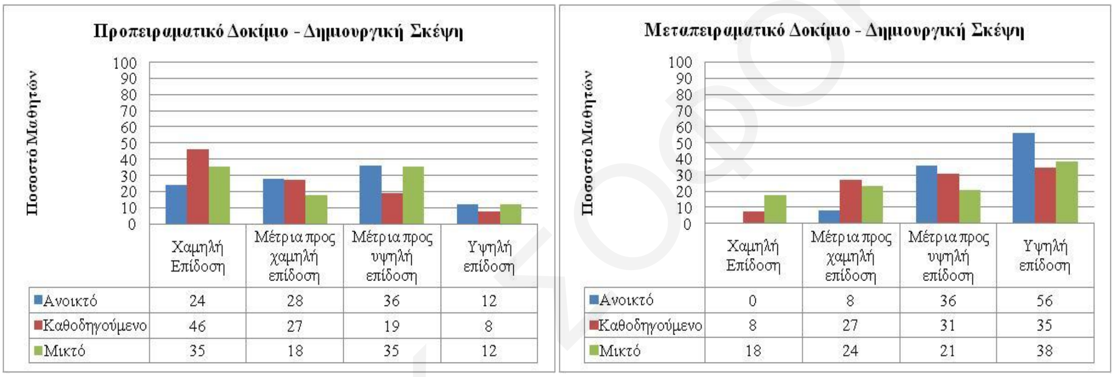
Διάγραμμα 4.12. Κατανομή μαθητών (ποσοστά) της κάθε πειραματικής ομάδας με βάση τη βαθμίδα επίδοσή τους στην κριτική σκέψη στο προπειραματικό (ΠΠ) και μεταπειραματικό (ΜΠ) *Δοκίμιο*.

Με βάση το Διάγραμμα 4.12α, στο ανοικτό περιβάλλον οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση σημείωσαν ίδια ή ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, το ένα πέμπτο τους διατήρησε την ίδια βαθμίδα και οι υπόλοιποι σημείωσαν είτε μέτρια προς υψηλή επίδοση (τα δυο πέμπτα) είτε υψηλή επίδοση (τα δυο πέμπτα). Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Δηλαδή, το ένα τρίτο τους σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και τα δυο τρίτα τους υψηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση και υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση παρατηρείται ένα μέρος τους να σημείωσαν κατώτερη βαθμίδα επίδοσης (33% και 10% αντίστοιχα), αλλά το μεγαλύτερο μέρος τους σημείωσε υψηλή επίδοση (66% και 90%). Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 45% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της κριτικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (44%) είτε κατώτερη (12%).

Με βάση το Διάγραμμα 4.12β, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ίδια ή ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, το ένα όγδοο διατήρησε την ίδια βαθμίδα και οι υπόλοιποι σημείωσαν υψηλή επίδοση (50%), μέτρια προς υψηλή επίδοση (25%) και μέτρια προς χαμηλή επίδοση (12.5%). Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Δηλαδή, το ένα τρίτο τους σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση και τα δυο τρίτα τους υψηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση τα δυο πέμπτα τους διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και τα τρία πέμπτα τους σημείωσαν υψηλή επίδοση. Ενώ παρατηρήθηκε στους μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, να υπάρχει ένας μαθητής που να σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση και οι υπόλοιποι μαθητές να διατήρησαν την ίδια βαθμίδα. Δηλαδή, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 45% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της κριτικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (50%) είτε κατώτερη (μόνο ένας μαθητής).

Με βάση το Διάγραμμα 4.12γ, οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος που είχαν χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση οι περισσότεροι από αυτούς διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης (περίπου το 70%) και ένα μικρό μέρος τους σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το ένα τρίτο τους σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης και οι υπόλοιποι ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (33% μέτρια προς υψηλή και 33% υψηλή). Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν όλοι υψηλή επίδοση. Ενώ οι μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση ο ένας μαθητής σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης (μέτρια προς υψηλή) και οι υπόλοιποι μαθητές διατήρησαν τη βαθμίδα επίδοσής τους. Δηλαδή, στο μικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 50% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της κριτικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (35%) είτε κατώτερη (15%).

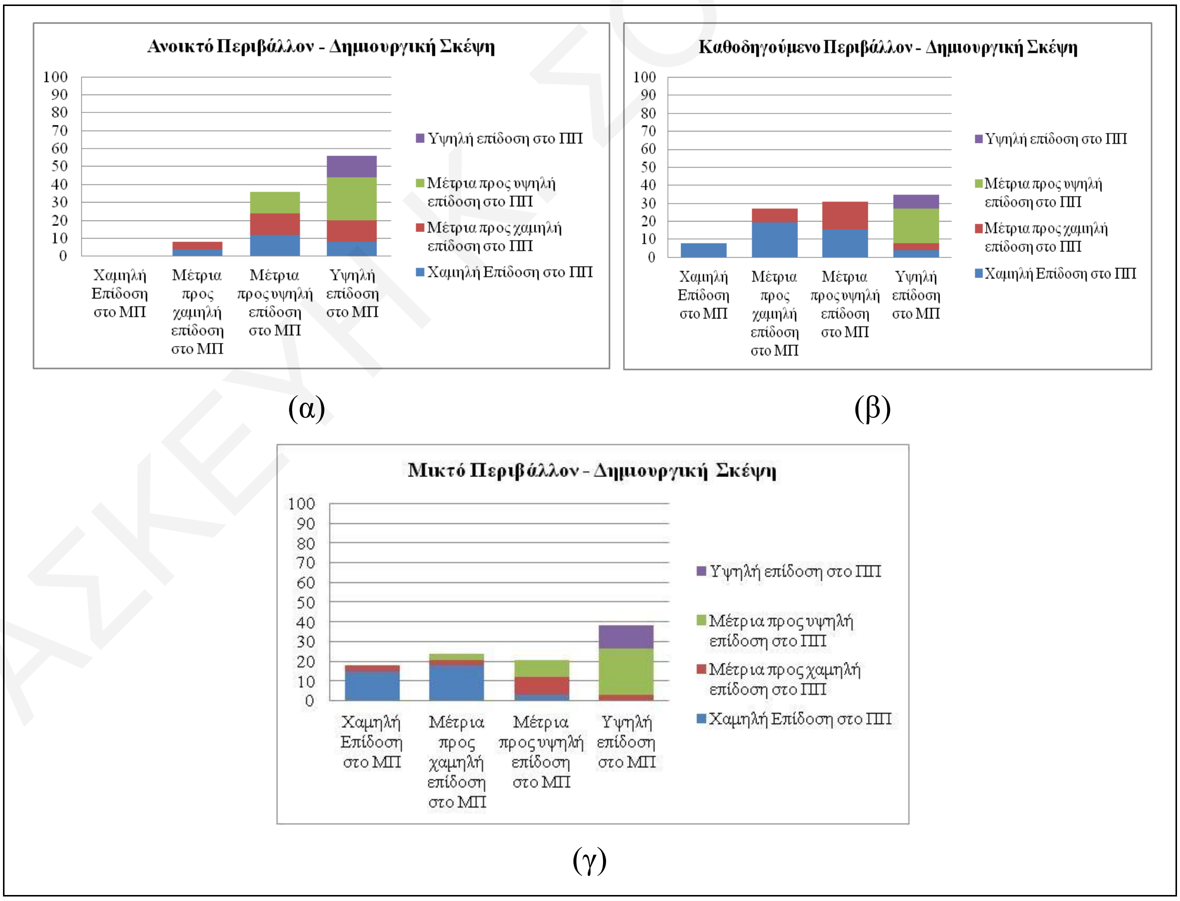
Με βάση τα πιο πάνω, διαπιστώνεται ότι το μικτό περιβάλλον είχε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών χαμηλής επίδοσης στην κριτική σκέψη μετά την παρέμβαση σε σχέση με τις άλλες δυο πειραματικές ομάδες, αφού οι περισσότεροι μαθητές του που είχαν χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση έμειναν σταθεροί στην ίδια βαθμίδα επίδοσης και ένα μεγάλο μέρος των μαθητών του που είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση σημείωσαν χαμηλή επίδοση. Επίσης, το μικτό περιβάλλον είχε το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών με υψηλή επίδοση στην κριτική σκέψη μετά την παρέμβαση σε σχέση με τις άλλες δυο πειραματικές ομάδες, αφού είχε το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών που σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης σε σχέση με τις άλλες ομάδες. Στη συνέχεια εξετάζεται η αντίστοιχη με τα πιο πάνω συμπεριφορά των μαθητών διαφορετικής βαθμίδας επίδοσης στη δημιουργική σκέψη.



(α) (β)

Διάγραμμα 4.13. Ποσοστά μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη στο προπειραματικό (α) και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* (β).

Με βάση το Διάγραμμα 4.13, στο ανοικτό περιβάλλον το 24% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 28% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 36% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και μόνο το 12% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 0% και με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 8%. Το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με μέτρια προς υψηλή έμεινε το ίδιο (36%), ενώ αυξήθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με υψηλή επίδοση στο 56%. Στο καθοδηγούμενο περιβάλλον το 46% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στην δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 37% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 19% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 8% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 8% και έμεινε σταθερό το ποσοστό μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση (27%). Επίσης, αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 31% και με υψηλή επίδοση στο 35%. Στο μικτό περιβάλλον, το 35% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, το 18% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 35% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 12% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 18% και με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 21%, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 24% και με υψηλή επίδοση στο 38%. Δηλαδή, παρατηρείται ότι παρόλο που τα ποσοστά των μαθητών που είχαν συγκεκριμένη βαθμίδα επίδοσης ήταν παρόμοια μεταξύ των τριών περιβαλλόντων μάθησης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το μικτό περιβάλλον σημείωσε πολύ υψηλό ποσοστό με χαμηλή επίδοση και χαμηλό ποσοστό με μέτρια προς υψηλή επίδοση σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα. Στη συνέχεια, αναλύεται από ποια βαθμίδα επίδοσης στη δημιουργική σκέψη στο προπειραματικό δοκίμιο προέρχονται οι μαθητές της κάθε μίας από τις τέσσερις βαθμίδες επίδοσης στη δημιουργική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο.



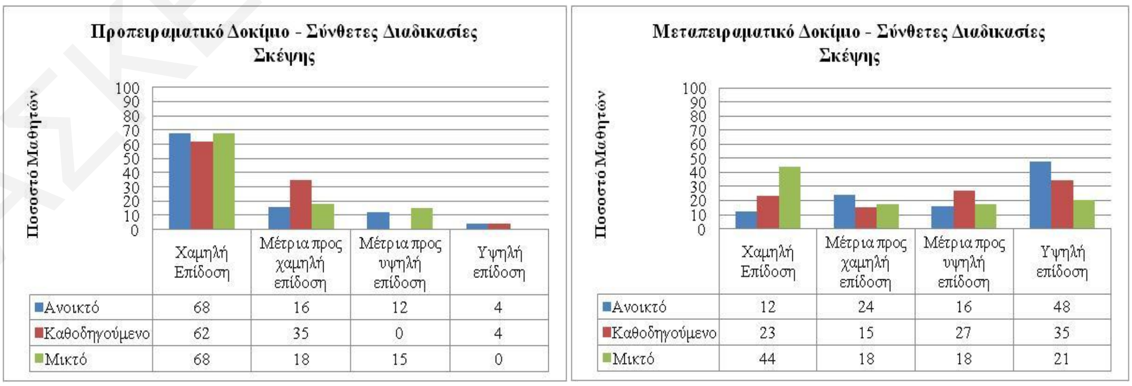
Διάγραμμα 4.14. Κατανομή μαθητών (ποσοστά) της κάθε πειραματικής ομάδας με βάση τη βαθμίδα επίδοσή τους στη δημιουργική σκέψη στο προπειραματικό (ΠΠ) και μεταπειραματικό (ΜΠ) *Δοκίμιο*.

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.14α, στο ανοικτό περιβάλλον όλοι οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, το 17% των μαθητών αυτών σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 50% μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 33.3% υψηλή επίδοση. Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση και μέτρια προς υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ίδια ή ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, ένα μέρος των μαθητών τους σημείωσε ίδια βαθμίδα επίδοσης (14% και 33% αντίστοιχα), ενώ το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών τους σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (86% και 66% αντίστοιχα). Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ίδια βαθμίδα επίδοσης. Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 28% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της δημιουργικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (72%).

Με βάση το Διάγραμμα 4.14β, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση και μέτρια προς χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ίδια ή ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, ένα μέρος των μαθητών διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης (16% και 29% αντίστοιχα), ενώ το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (83% και 71% αντίστοιχα). Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, σημείωσαν όλοι τους ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν και πάλι υψηλή επίδοση. Δηλαδή, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 23% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της δημιουργικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (77%).

Με βάση το Διάγραμμα 4.14γ, οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος που είχαν χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση περίπου το 42% των μαθητών αυτών διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 58% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το 17% των μαθητών αυτών σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης, το 17% διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 67% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (50% μέτρια προς υψηλή και 17% υψηλή). Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το 10% των μαθητών αυτών σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης, το 25% διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 83% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν και πάλι υψηλή επίδοση. Δηλαδή, στο μικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 38% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα της δημιουργικής σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (56%) είτε κατώτερη (6%).

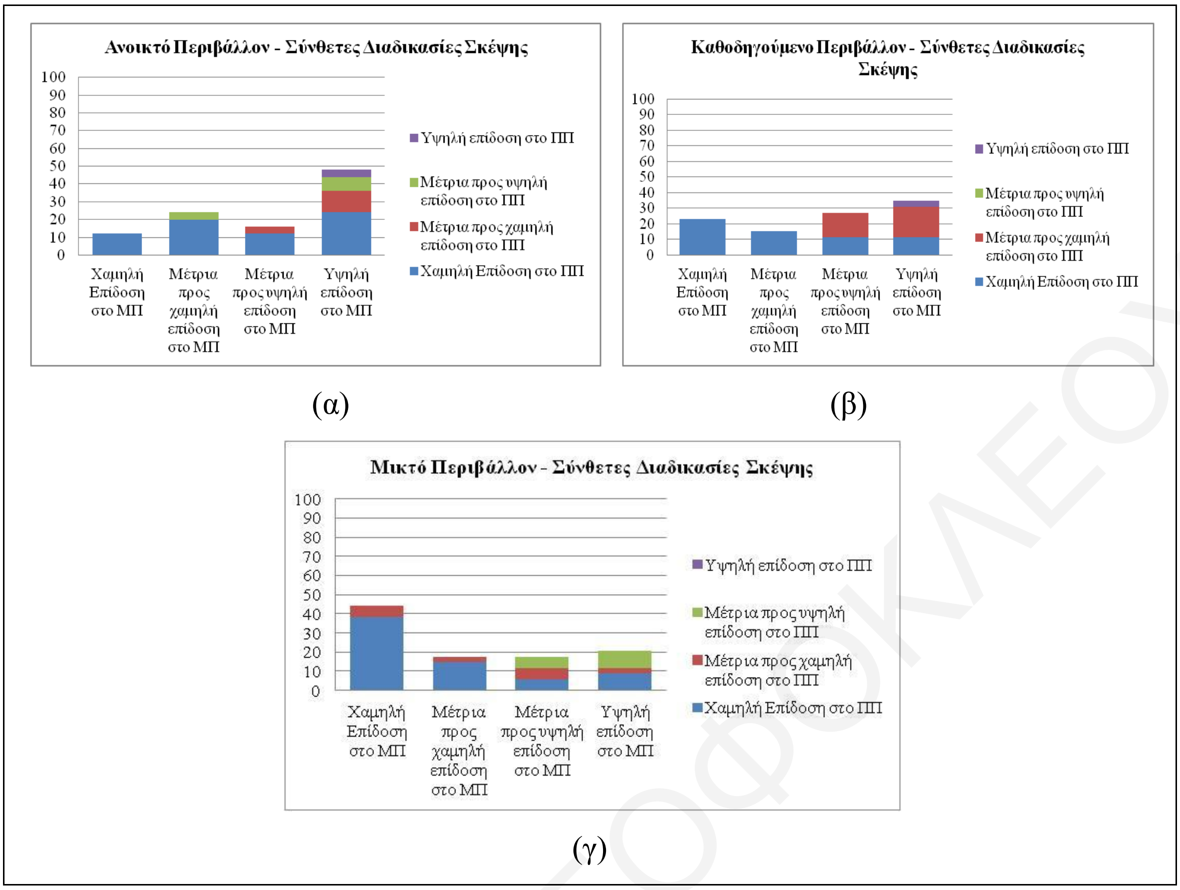
Με βάση τα πιο πάνω, διαπιστώνεται ότι το μικτό περιβάλλον είχε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών χαμηλής επίδοσης στη δημιουργική σκέψη μετά την παρέμβαση σε σχέση με τις άλλες δυο πειραματικές ομάδες, αφού ένα μεγάλο μέρος των μαθητών αυτών διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο και ένα μέρος των μαθητών που είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης. Επίσης, το μικτό περιβάλλον σημείωσε το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών με μέτρια προς υψηλή επίδοση μετά την παρέμβαση σε σχέση με τις άλλες δυο πειραματικές ομάδες, αφού μικρότερο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση και μέτρια προς χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση σημείωσε μέτρια προς υψηλή επίδοση μετά την παρέμβαση σε σχέση με τις άλλες δυο ομάδες. Στη συνέχεια εξετάζεται η αντίστοιχη με τα πιο πάνω συμπεριφορά των μαθητών διαφορετικής βαθμίδας επίδοσης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης.



(α) (β)

Διάγραμμα 4.15. Ποσοστά μαθητών κάθε πειραματικής ομάδας που σημείωσαν χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο προπειραματικό (α) και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* (β).

Με βάση το Διάγραμμα 4.15, στο ανοικτό περιβάλλον το 68% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, το 16% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση, το 12% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση και το 4% είχε υψηλή επίδοση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 12%, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 24%, με μέτρια προς υψηλή στο 16% και με υψηλή επίδοση στο 48%. Στο καθοδηγούμενο περιβάλλον το 62% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, το 35% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση και το 4% είχε υψηλή επίδοση. Σημειώνεται ότι πριν την παρέμβαση δεν υπήρχε κανένας μαθητής του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος ο οποίος να είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Τα πιο πάνω ποσοστά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 23% και με μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο 15%, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 24% και με υψηλή επίδοση στο 35%. Στο μικτό περιβάλλον, το 68% των μαθητών του είχε χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, το 18% είχε μέτρια προς χαμηλή επίδοση και το 15% είχε μέτρια προς υψηλή επίδοση. Κανένας μαθητής του μικτού περιβάλλοντος δεν σημείωσε υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση. Τα ποσοστά αυτά διαφοροποιήθηκαν μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, μειώθηκε το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στο 44%, έμεινε ίδιο το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση, ενώ αυξήθηκαν τα αντίστοιχα ποσοστά μαθητών με μέτρια προς υψηλή επίδοση στο 18% και με υψηλή επίδοση στο 21%. Δηλαδή, παρατηρείται ότι παρόλο που τα ποσοστά των μαθητών με χαμηλή και υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση στο μικτό περιβάλλον να είναι σχεδόν ίσα με τα αντίστοιχα ποσοστά των άλλων δυο πειραματικών ομάδων, μετά την παρέμβαση τα ποσοστά αυτά διαφοροποιούνται από τα αντίστοιχα των άλλων δυο πειραματικών ομάδων. Συγκεκριμένα, σημειώνεται ότι το μικτό περιβάλλον είχε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση και το χαμηλότερο με υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα. Στη συνέχεια, αναλύεται από ποια βαθμίδα επίδοσης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο προπειραματικό δοκίμιο προέρχονται οι μαθητές της κάθε μίας από τις τέσσερις βαθμίδες επίδοσης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο.



Διάγραμμα 4.16. Κατανομή μαθητών (ποσοστά) της κάθε πειραματικής ομάδας με βάση τη βαθμίδα επίδοσή τους στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο προπειραματικό (ΠΠ) και μεταπειραματικό (ΜΠ) *Δοκίμιο*.

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.16α, στο ανοικτό περιβάλλον οι μαθητές που σημείωσαν χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το 18% των μαθητών αυτών διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 82% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση (25% μέτρια προς υψηλή επίδοση και 75% υψηλή επίδοση). Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση ένας μαθητής από αυτούς σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης και οι υπόλοιποι μαθητές ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Οι μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση πριν την παρέμβαση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, μετά την παρέμβαση πάλι είχαν υψηλή επίδοση. Δηλαδή, στο ανοικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 16% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (80%) είτε κατώτερη (ένας μόνο μαθητής).

Με βάση το Διάγραμμα 4.16β, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, σημείωσαν ίδια ή ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Συγκεκριμένα, ένα μέρος των μαθητών αυτών διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης (38%), ενώ το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών αυτών σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (62%). Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, σημείωσαν όλοι τους ανώτερη βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση. Όσον αφορά τους μαθητές που σημείωσαν υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση σημείωσαν και πάλι υψηλή επίδοση. Δηλαδή, στο καθοδηγούμενο περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 27% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (73%).

Με βάση το Διάγραμμα 4.16γ, οι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος που είχαν χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση ποσοστό μεγαλύτερο του 50% διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 43% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Οι μαθητές που είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το 33% των μαθητών αυτών σημείωσε κατώτερη βαθμίδα επίδοσης, το 17% διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 50% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (33% μέτρια προς υψηλή και 17% υψηλή). Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης πριν την παρέμβαση, μετά την παρέμβαση το 40% των μαθητών αυτών διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης και το 60% σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Δηλαδή, στο μικτό περιβάλλον παρατηρείται περίπου το 47% των μαθητών ανεξαρτήτως επίδοσης να διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο όσον αφορά την ικανότητα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές είτε σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης (41%) είτε κατώτερη (6%).

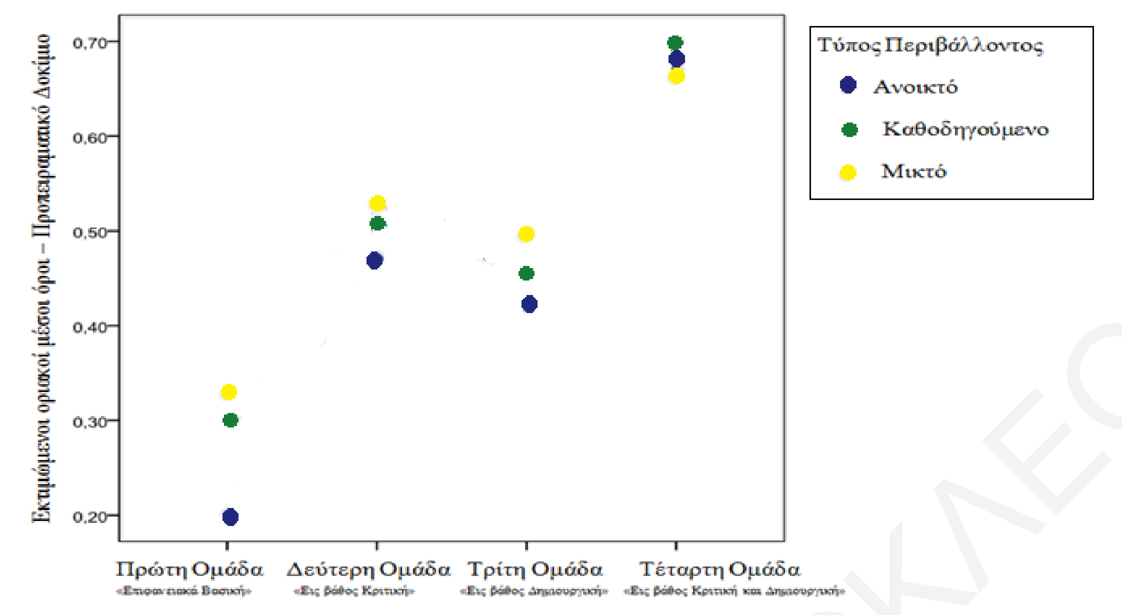
Με βάση τα πιο πάνω, διαπιστώνεται ότι το ανοικτό και το καθοδηγούμενο περιβάλλον έχουν υψηλότερο ποσοστό μαθητών που σημείωσε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με το μικτό περιβάλλον και ταυτόχρονα έχουν χαμηλότερο ποσοστό μαθητών που διατήρησε την ίδια βαθμίδα επίδοσης σε σχέση με το μικτό περιβάλλον. Γενικά, το μικτό περιβάλλον είχε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μετά την παρέμβαση σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα, αφού ένα μεγάλο μέρος των μαθητών του που είχαν σημειώσει χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης μετά την παρέμβαση καθώς και ένα μέρος των μαθητών με μέτρια προς χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση σημείωσε χαμηλή επίδοση μετά την παρέμβαση. Ενώ αντίστοιχη συμπεριφορά δεν παρατηρήθηκε στα άλλα δυο περιβάλλοντα. Επίσης, το μικτό περιβάλλον είχε το χαμηλότερο ποσοστό μαθητών με υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μετά την παρέμβαση, αφού παρουσιάζεται να έχει το μικρότερο ποσοστό μαθητών που σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα.

Ολοκληρώνοντας, υπάρχουν ενδείξεις ότι το μικτό περιβάλλον δεν βοήθησε τους μαθητές με χαμηλή επίδοση και μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο να βελτιώσουν την επίδοσή τους στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με τα άλλα δυο περιβάλλοντα. Αλλά χρειάζεται να εξεταστούν αυτές οι ενδείξεις με τεχνικές επαγωγικής στατιστικής και αυτό παρουσιάζεται στο επόμενο μέρος των αποτελεσμάτων.

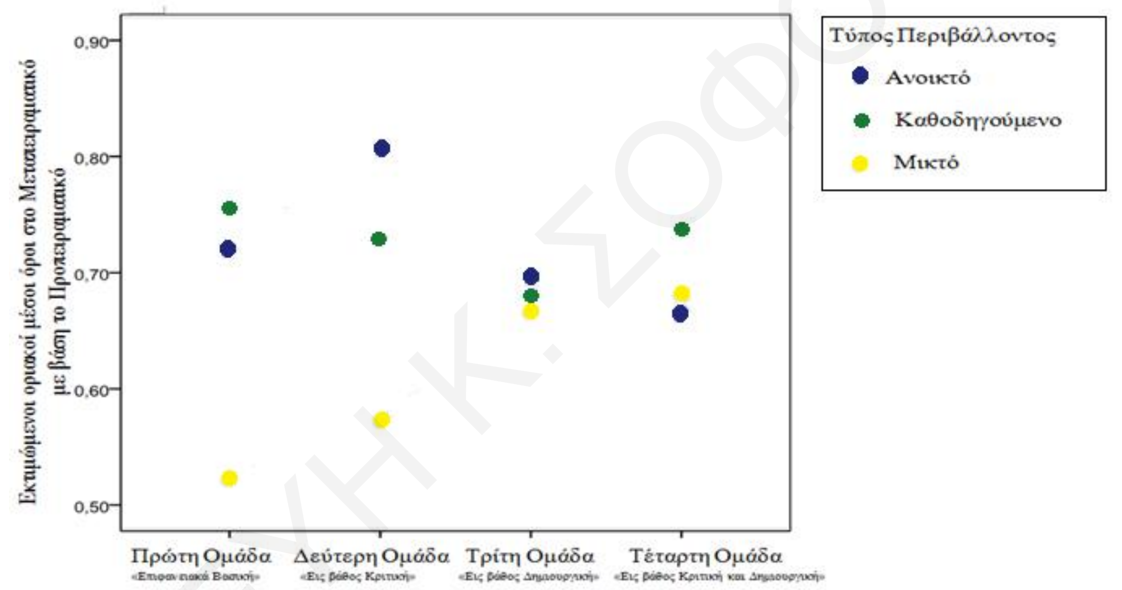
Συμπεριφορά και οι διαφορές των μαθητών στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν. Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται αρχικά τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση του κατά πόσο υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αρχική τους επίδοση ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχαν (ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό) και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν, όπως αυτή προέκυψε από τη Λανθάνουσα Ανάλυση Κατηγοριών που έγινε με βάση τις επιδόσεις των 802 μαθητών στο *Δοκίμιο* (Πρώτη ομάδα: Επιφανειακά Βασική, Δεύτερη ομάδα: Εις βάθος Κριτική, Τρίτη ομάδα: Εις βάθος Δημιουργική και Τέταρτη ομάδα: Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική). Σημειώνεται ότι οι όροι «επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο» και η «αρχική επίδοση» αφορούν και τη συνολική επίδοση αλλά και την επίδοση στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Ολοκληρώνεται το μέρος αυτό, παρουσιάζοντας στοιχεία περιγραφικής στατιστικής της αλλαγής που σημείωσαν στην ανωτέρου επιπέδου σκέψη οι ομάδες των μαθητών που προέκυψαν από το συνδυασμό του τύπου περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν και γίνεται εστίαση στις ομάδες που βρέθηκαν από προηγούμενες αναλύσεις ότι διαφέρουν στατιστικά σημαντικά. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν την απάντηση στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας:

5. Τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά των μαθητών με ίδια ή διαφορετική επίδοση; Αν ναι, με ποιο τρόπο;

Διαφορές μεταξύ των μαθητών στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν. Αρχικά, για να μπορέσει να διερευνηθεί εάν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν (ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό) και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (Πρώτη ομάδα: Επιφανειακά Βασική, Δεύτερη ομάδα: Εις βάθος Κριτική, Τρίτη ομάδα: Εις βάθος Δημιουργική και Τέταρτη ομάδα: Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική), χρειάστηκε να εξεταστούν εάν υπήρχαν διαφορές μεταξύ των μαθητών αυτών στο προπειραματικό δοκίμιο. Έτσι, διενεργήθηκε Ανάλυση Διακύμανσης (ANOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών (τύπος περιβάλλοντος και ομάδα επίδοσης) με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση έδειξε ότι η αλληλεπίδραση του τύπου περιβάλλοντος και της ομάδας επίδοσης δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($F_{(6,73)=}$.857, p=.530>.05). Δηλαδή, βρέθηκε ότι η συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο των μαθητών που άνηκαν σε ίδια ή διαφορετική ομάδα επίδοσης δεν ήταν στατιστικά σημαντικά διαφορετική ανάλογα με το τύπο του ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης που συμμετείχαν (βλέπε Διάγραμμα 4.17α). Για αυτό διενεργήθηκε Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών (τύπος περιβάλλοντος και ομάδα επίδοσης) με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο και με συνδιακυμαίνουσα (covariate) τη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση αυτή έδειξε ότι η αλληλεπίδραση του τύπου περιβάλλοντος και της ομάδας επίδοσης ήταν στατιστικά σημαντική ($F_{(6,72)=}$2.753, p=.018<.05) και από πρακτικής άποψης η αλληλεπίδραση αυτή χαρακτηρίζεται ως μεγάλη (*partial* η^2= .19>.14) (Cohen, 1988). Δηλαδή, βρέθηκε ότι η συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο των μαθητών που άνηκαν σε ίδια ή διαφορετική ομάδα επίδοσης ήταν στατιστικά σημαντικά διαφορετική ανάλογα με το τύπο του ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης που συμμετείχαν (βλέπε Διάγραμμα 4.17α).



(α)



(β)

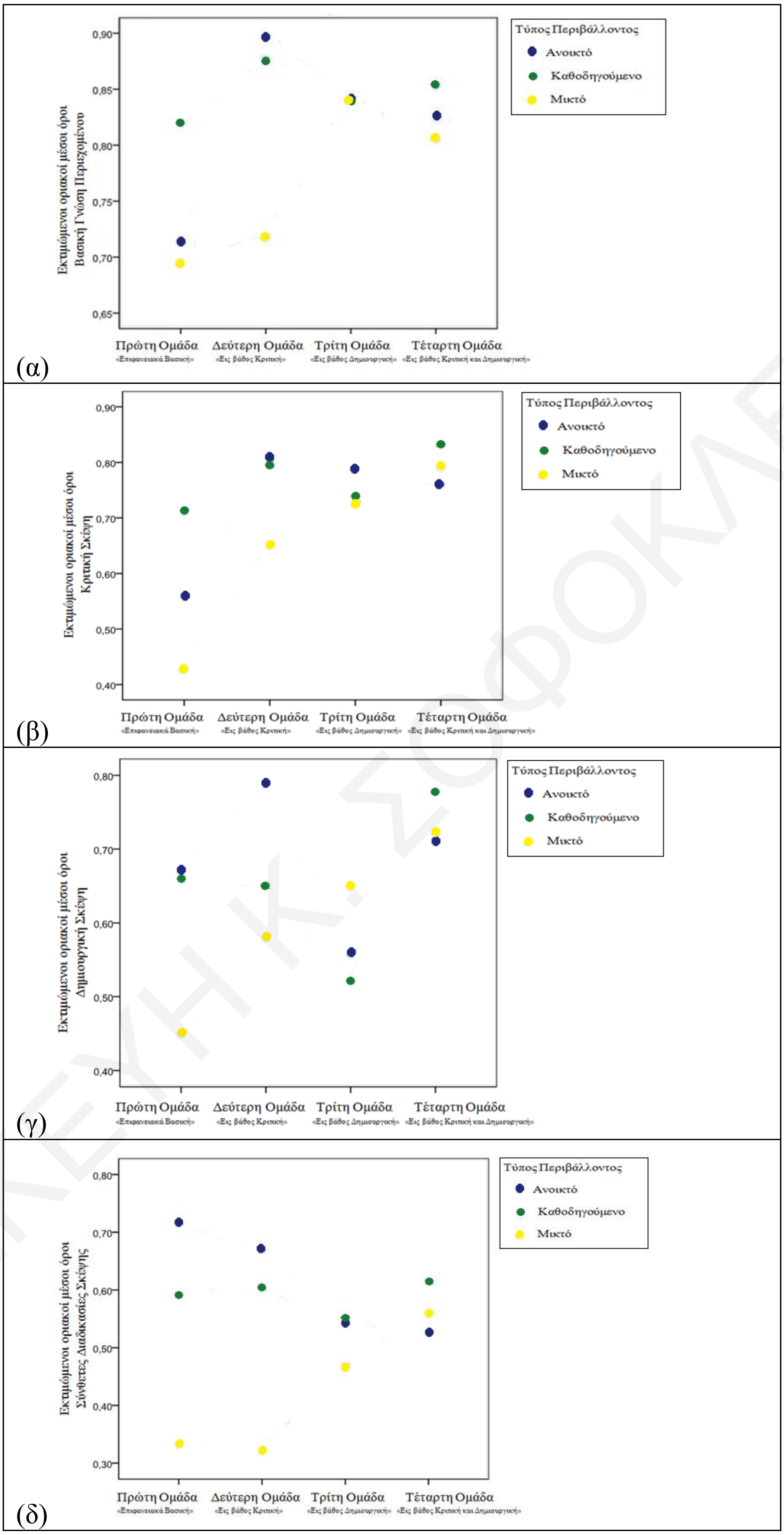
Διάγραμμα 4.17. Εκτιμώμενοι μέσοι όροι της κάθε ομάδας επίδοσης με βάση το περιβάλλον που συμμετείχαν στη συνολική επίδοση στο (α) προπειραματικό *Δοκίμιο* και (β) μεταπειραματικό *Δοκίμιο* με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό.

Με βάση το Διάγραμμα 4.17β, ο υψηλότερος μέσος όρος συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημειώθηκε από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον. Τους δυο χαμηλότερους μέσους όρους συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της πρώτης («Επιφανειακά Βασική») και της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική») επίδοσης που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Οι υπόλοιποι εκτιμώμενοι μέσοι όροι συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα. Επίσης, με βάση το διάγραμμα 4.17β μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας

(«Επιφανειακά Βασική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.76, *SD*=.06) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.72, $SD_{ανοικτού}$=.10 και $\overline{X}_{μικτού}$=.52, $SD_{μικτού}$=.05). Σημειώνεται, όμως, η διαφορά μεταξύ του εκτιμώμενου μέσου όρου της συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο των μαθητών της πρώτης ομάδας του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος και του αντίστοιχου μέσου όρου του ανοικτού περιβάλλοντος ήταν μικρή. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.17β μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο ($\overline{X}$ =.81, *SD*=.04) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{καθοδηγούμενου}$=.73, $SD_{καθοδηγούμενου}$=.04 και $\overline{X}_{μικτού}$=.57, $SD_{μικτού}$=.04). Όσον αφορά τους εκτιμώμενους μέσους όρους της συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στην τρίτη ομάδα επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») παρατηρήθηκε να κυμάνθηκαν όλοι από .64 μέχρι .70. Δηλαδή, ανεξαρτήτως περιβάλλοντος που συμμετείχαν οι μαθητές της τρίτης ομάδας σημείωσαν σχεδόν ίσο εκτιμώμενο μέσο όρο. Ακόμη, μεταξύ των μαθητών της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο συνολικής επίδοσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.74, *SD*=.06) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.67, $SD_{ανοικτού}$=.04 και $\overline{X}_{μικτού}$=.68, $SD_{μικτού}$=.05).

Με βάση τα πιο πάνω, δεν παρουσιάζονται μεταξύ ποιων μαθητών υπάρχουν οι στατιστικά σημαντικές διαφορές που βρέθηκαν. Έτσι, διενεργήθηκε ανάλυση συνδιακύμανσης (ANCOVA) μιας ανεξάρτητης μεταβλητής με 12 ομάδες (τρεις τύποι περιβάλλοντος x τέσσερις ομάδες επίδοσης), με εξαρτημένη μεταβλητή και πάλι τη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο και με συνδιακυμαίνουσα (covariate) τη συνολική επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση αυτή έδειξε ότι υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων αυτών ($F_{(11,72)=}$3.551, *p*=.001<.01, *partial* η^2= .35). Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών με τη χρήση του ελέγχου Bonferroni έδειξαν ότι οι στατιστικά σημαντικές διαφορές (σε επίπεδο α=.05) στη συνολική επίδοση υπήρχαν μεταξύ της δεύτερης ομάδας του ανοικτού περιβάλλοντος ($\overline{X}$ =.77, *SD*=.11) με την πρώτη ($\overline{X}$ =.36, *SD*=.17) και τη δεύτερη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος ($\overline{X}$ =.59, *SD*=.20), καθώς και μεταξύ της πρώτης ομάδας του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος ($\overline{X}$ =.57, *SD*=.13) και της αντίστοιχης του μικτού περιβάλλοντος ($\overline{X}$ =.36, *SD*=.17).

Περαιτέρω αναλύσεις χρειάζονται ώστε να εξεταστούν εις βάθος οι διαφορές που βρέθηκαν στη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο μεταξύ των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν, με βάση την αρχική τους επίδοση. Έτσι, διενεργήθηκε Πολυμεταβλητή Ανάλυση Διακύμανσης (MANOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών (τύπος περιβάλλοντος και ομάδα επίδοσης) με εξαρτημένη την επίδοση στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση έδειξε ότι η αλληλεπίδραση του τύπου περιβάλλοντος και της ομάδας επίδοσης δεν ήταν στατιστικά σημαντική (*Pillais*=.229, $F_{(24,\ 292)}$=.739, p=.810>.05). Για αυτό διενεργήθηκε Πολλαπλή Ανάλυση Συνδιακύμανσης (MANCOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών (τύπος περιβάλλοντος και ομάδα επίδοσης) με εξαρτημένες μεταβλητές τις επιδόσεις στις τέσσερις ικανότητες στο μεταπειραματικό δοκίμιο και με συνδιακυμαίνουσες (covariates) τις αντίστοιχες επιδόσεις στο προπειραματικό δοκίμιο. Η ανάλυση έδειξε ότι η αλληλεπίδραση του τύπου περιβάλλοντος και της ομάδας επίδοσης δεν ήταν στατιστικά σημαντική (*Pillais*=.376, $F_{(24,\ 276)}$=1.136, p=.332>.05). Δηλαδή, βρέθηκε ότι η επίδοση στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά στο προπειραματικό δοκίμιο των μαθητών που άνηκαν σε ίδια ή διαφορετική ομάδα επίδοσης δεν ήταν στατιστικά σημαντικά διαφορετική ανάλογα με το τύπο του ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης που συμμετείχαν. Στο Διάγραμμα 4.18 δίνονται τέσσερις γραφικές παραστάσεις που δείχνουν πώς η κάθε ομάδα επίδοσης συμπεριφέρθηκε ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχε στις τέσσερις ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης μετά την παρέμβαση, παρουσιάζοντας τους μέσους όρους επίδοσης της σε αυτές στο μεταπειραματικό δοκίμιο που εκτιμήθηκαν με βάση την αντίστοιχη επίδοσή στο προπειραματικό δοκίμιο.



Διάγραμμα 4.18. Εκτιμώμενοι μέσοι όροι της κάθε ομάδας επίδοσης ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχε στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στο μεταπειραματικό *Δοκίμιο* με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό: (α) Βασική Γνώση Περιεχομένου, (β) Κριτική Σκέψη, (γ) Δημιουργική Σκέψη και (δ) Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης.

Με βάση το Διάγραμμα 4.18α, τους δυο υψηλότερους μέσους όρους στη βασική γνώση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον. Τους τρεις χαμηλότερους μέσους όρους στη βασική γνώση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της πρώτης («Επιφανειακά Βασική») και της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική») επίδοσης που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον και οι μαθητές της πρώτης ομάδας που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον. Οι υπόλοιποι εκτιμώμενοι μέσοι όροι βασικής γνώσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα. Επίσης, με βάση το διάγραμμα 4.18α, μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας («Επιφανειακά Βασική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο βασικής γνώσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.82, *SD*=.08) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.71, $SD_{ανοικτού}$=.13 και $\overline{X}_{μικτού}$=.70, $SD_{μικτού}$=.07). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.18α μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο ($\overline{X}$ =.90, *SD*=.06) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{καθοδηγούμενου}$=.88, $SD_{καθοδηγούμενου}$=.05 και $\overline{X}_{μικτού}$=.72, $SD_{μικτού}$=.05). Όσον αφορά τους εκτιμώμενους μέσους όρους της βασικής γνώσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στην τρίτη ομάδα επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») παρατηρήθηκε να ήταν όλοι ίσοι με .84 ανεξαρτήτως περιβάλλοντος. Ακόμη, μεταξύ των μαθητών της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο βασικής γνώσης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.85, *SD*=.07) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.83, $SD_{ανοικτού}$=.06 και $\overline{X}_{μικτού}$=.81, $SD_{μικτού}$=.06). Όμως, σημειώνεται ότι η διαφορά μεταξύ των τριών αυτών εκτιμώμενων μέσων όρων ήταν μικρή.

Με βάση το Διάγραμμα 4.18β, τον υψηλότερο μέσο όρο στην κριτική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της τέταρτης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον. Σημειώνεται, όμως, ότι πολύ κοντά στον υψηλότερο αυτό μέσο όρο σημείωσαν και οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον, οι μαθητές της τρίτης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος

Δημιουργική») που συμμετείχαν στο ανοικτό και οι μαθητές της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Ο χαμηλότερος μέσος όρος στην κριτική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημειώθηκε από τους μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης («Επιφανειακά Βασική») που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Οι υπόλοιποι εκτιμώμενοι μέσοι όροι κριτικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα. Επίσης, με βάση το διάγραμμα 4.18β, μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας («Επιφανειακά Βασική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο κριτικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.71, *SD*=.09) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.56, $SD_{ανοικτού}$=.14 και $\overline{X}_{μικτού}$=.43, $SD_{μικτού}$=.08). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.18β μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο κριτικής σκέψης ίσο με .80 σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στο μικτό ($\overline{X}$ =.65, *SD*=.06). Όσον αφορά τους εκτιμώμενους μέσους όρους της κριτικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στην τρίτη ομάδα επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») παρατηρήθηκε ο υψηλότερος να σημειώνεται από τους μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον ($\overline{X}$ =.79, *SD*=.12) . Ακόμη, μεταξύ των μαθητών της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο κριτικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.83, *SD*=.08) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.76, $SD_{ανοικτού}$=.07 και $\overline{X}_{μικτού}$=.79, $SD_{μικτού}$=.07).

Με βάση το Διάγραμμα 4.18γ, τον υψηλότερο μέσο όρο στη δημιουργική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον και της τέταρτης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον. Ο χαμηλότερος μέσος όρος στη δημιουργική σκέψη στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημειώθηκε από τους μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης («Επιφανειακά Βασική») που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Σημειώνεται, όμως, ότι παρατηρούνται να έχουν εκτιμώμενο μέσο όρο στη δημιουργική σκέψη πολύ κοντά στο χαμηλότερο μέσο όρο και οι μαθητές της τρίτης ομάδας («Εις βάθος Δημιουργική») που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον, όπως και οι μαθητές της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Οι υπόλοιποι εκτιμώμενοι μέσοι όροι δημιουργικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα. Επίσης, με βάση το διάγραμμα 4.18γ, μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας («Επιφανειακά Βασική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο δημιουργικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}_{\text{ανοικτού}}$=.67, $SD_{\text{ανοικτού}}$=.12 και $\overline{X}_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.66, $SD_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.08) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον ($\overline{X}$ =.45, SD=.07). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.18γ μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο δημιουργικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.79, SD=.05) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.65, $SD_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.05 και $\overline{X}_{\text{μικτού}}$=.58, $SD_{\text{μικτού}}$=.05). Όσον αφορά τους εκτιμώμενους μέσους όρους της δημιουργικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στην τρίτη ομάδα επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») παρατηρήθηκε ο υψηλότερος να σημειώνεται από τους μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον ($\overline{X}$ =.65, SD=.06). Ακόμη, μεταξύ των μαθητών της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο δημιουργικής σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.78, SD=.07) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{\text{ανοικτού}}$=.71, $SD_{\text{ανοικτού}}$=.06 και $\overline{X}_{\text{μικτού}}$=.72, $SD_{\text{μικτού}}$=.06).

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.18δ, τον υψηλότερο μέσο όρο στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν οι μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης («Επιφανειακά Βασική») που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον. Ο χαμηλότερος μέσος όρος στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αντίστοιχη επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο σημειώθηκε από τους μαθητές της πρώτης («Επιφανειακά Βασική») και της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Επίσης, με βάση το διάγραμμα 4.18δ, μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας («Επιφανειακά Βασική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.72, SD=.17) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.59, $SD_{\text{καθοδηγούμενου}}$=.11 και $\overline{X}_{\text{μικτού}}$=.33, $SD_{\text{μικτού}}$=.10). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Διάγραμμα 4.18γ μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας («Εις βάθος Κριτική»), αυτοί που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.67, SD=.07) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{καθοδηγούμενου}$=.60, $SD_{καθοδηγούμενου}$=.07 και $\overline{X}_{μικτού}$=.32, $SD_{μικτού}$=.07). Όσον αφορά τους εκτιμώμενους μέσους όρους των σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο στην τρίτη ομάδα επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») παρατηρήθηκε ο υψηλότερος να σημειώνεται από τους μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο ($\overline{X}$ =.55, SD=.11) και στο ανοικτό περιβάλλον ($\overline{X}$ =.55, SD=.14). Ακόμη, μεταξύ των μαθητών της τέταρτης ομάδας («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική»), αυτοί που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν τον υψηλότερο εκτιμώμενο μέσο όρο σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο ($\overline{X}$ =.62, SD=.09) σε σχέση με αυτούς που συμμετείχαν στα άλλα δυο περιβάλλοντα ($\overline{X}_{ανοικτού}$=.53, $SD_{ανοικτού}$=.08 και $\overline{X}_{μικτού}$=.56, $SD_{μικτού}$=.08).

Ολοκληρώνοντας, αυτό το μέρος επισημαίνεται ότι οι πιο πάνω διαφορές που έχουν παρουσιαστεί δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές με βάση την Πολυμεταβλητή Ανάλυση Συνδιακύμανσης (MANCOVA), αλλά αποτελούν περιγραφή των διαφορών στην επίδοση των μαθητών ανάλογα με τον τύπο περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό δοκίμιο.

Περιγραφή της αλλαγής της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά των μαθητών ανάλογα με τον τύπο του περιβάλλοντος που συμμετείχαν και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν. Στο μέρος αυτό αναλύεται η αλλαγή στη βαθμίδα επίδοσης στους παράγοντες και στους υπό-παράγοντες της ανωτέρου επιπέδου σκέψη από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο των μαθητών της κάθε ομάδας επίδοσης ανά περιβάλλον μάθησης που συμμετείχαν. Ο όρος βαθμίδα επίδοσης αφορά τις τέσσερις βαθμίδες επίδοσης (χαμηλή, μέτρια προς χαμηλή, μέτρια προς υψηλή και υψηλή) που προέκυψαν από το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση της συνολικής επίδοσης των μαθητών όλου του δείγματος στην αρχική χορήγηση του δοκιμίου (802 μαθητές), όπως έχει επεξηγηθεί σε προηγούμενα μέρη.

Ο Πίνακας 4.24 παρουσιάζει τη συνοπτική κατανομή των μέσων όρων της πρώτης ομάδας επίδοσης («Επιφανειακά Βασική») ανά περιβάλλον μάθησης στους παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβαση.

Πίνακας 4.24

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων της Πρώτης Ομάδας Επίδοσης («Επιφανειακά Βασική») ανά Περιβάλλον Μάθησης στους Παράγοντες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη Πριν και Μετά την Παρέμβαση

	«Επιφανειακά Βασική» Ανοικτό		«Επιφανειακά Βασική» Καθοδηγούμενο		«Επιφανειακά Βασική» Μικτό	
	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ
Υψηλή Επίδοση ($\overline{X} \geq .70$)				ΒΓ		
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \overline{X} < .70$)			ΒΓ	ΚΣ	ΒΓ	ΒΓ
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \overline{X} < .55$)	ΒΓ	ΒΓ, ΔΣ, ΣΔ		ΔΣ, ΣΔ		
Χαμηλή Επίδοση ($\overline{X} < .40$)	ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ	ΚΣ	ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ		ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ	ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ

Σημείωση. Ο κωδικός ΠΠ αντιστοιχεί στο Προπειραματικό δοκίμιο, ΜΠ στο Μεταπειραματικό δοκίμιο, ΒΓ στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά».

Με βάση τον Πίνακα 4.24, οι μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης ανεξαρτήτως τύπου περιβάλλοντος που συμμετείχαν παρουσίασαν παρόμοια συμπεριφορά στο προπειραματικό δοκίμιο σε όλους τους παράγοντες, εκτός στη βασική γνώση περιεχομένου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης και στα τρία περιβάλλοντα είχαν χαμηλή επίδοση στην κριτική σκέψη, στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στο προπειραματικό δοκίμιο. Ενώ στη βασική γνώση οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο και στο μικτό περιβάλλον είχαν μέτρια προς υψηλή επίδοση και οι μαθητές του ανοικτού είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση. Μετά την παρέμβαση, οι μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης σε όλους τους παράγοντες στο δοκίμιο, ενώ οι μαθητές του καθοδηγούμενου και του ανοικτού περιβάλλοντος σημείωσαν σε όλους ή σε μερικούς παράγοντες αντίστοιχα ανώτερη βαθμίδα επίδοσης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος σημείωσαν στη βασική γνώση υψηλή επίδοση από μέτρια προς υψηλή επίδοση, στην κριτική σκέψη μέτρια προς υψηλή από χαμηλή επίδοση, στη δημιουργική και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μέτρια προς χαμηλή από χαμηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές του ανοικτού περιβάλλοντος σημείωσαν ίδια βαθμίδα επίδοσης στη βασική γνώση (μέτρια προς χαμηλή επίδοση) και στην κριτική σκέψη (χαμηλή επίδοση) στο μεταπειραματικό δοκίμιο σε σχέση με το προπειραματικό, ενώ σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης: μέτρια προς χαμηλή επίδοση από χαμηλή στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Με βάση τα πιο πάνω, οι μαθητές της πρώτης ομάδας επίδοσης που συμμετέχουν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον έχουν σημειώσει βελτίωση στις επιδόσεις τους στους παράγοντες, ενώ οι μαθητές που συμμετέχουν στο μικτό περιβάλλον δεν έχουν σημειώσει βελτίωση. Αυτό ενισχύει το αποτέλεσμα που βρέθηκε από την Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, όπου οι μαθητές της πρώτης ομάδας που συμμετέχουν στο μικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους.

Ο Πίνακας 4.25 παρουσιάζει τη συνοπτική κατανομή των μέσων όρων της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») ανά περιβάλλον μάθησης στους παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβαση.

Πίνακας 4.25

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων της Δεύτερης Ομάδας Επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») ανά Περιβάλλον Μάθησης στους Παράγοντες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη Πριν και Μετά την Παρέμβαση

	«Εις βάθος Κριτική» Ανοικτό		«Εις βάθος Κριτική» Καθοδηγούμενο		«Εις βάθος Κριτική» Μικτό	
	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	ΒΓ	ΒΓ, ΚΣ, ΔΣ		ΒΓ, ΚΣ	ΒΓ	ΒΓ
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)	ΚΣ	ΣΔ	ΒΓ, ΚΣ	ΔΣ, ΣΔ	ΚΣ	ΚΣ, ΔΣ
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)			ΔΣ		ΔΣ	
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	ΔΣ, ΣΔ		ΣΔ		ΣΔ	ΣΔ

Σημείωση. Ο κωδικός ΠΠ αντιστοιχεί στο Προπειραματικό δοκίμιο, ΜΠ στο Μεταπειραματικό δοκίμιο, ΒΓ στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά».

Με βάση τον Πίνακα 4.25, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον μάθησης παρουσίασαν βελτίωση βαθμίδα επίδοσης σε τουλάχιστον τρεις από τις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο, ενώ αυτοί που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον μόνο σε μία ικανότητα παρουσίασαν βελτίωση βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, στο μεταπειραματικό δοκίμιο οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση, στην κριτική σκέψη και στη δημιουργική σκέψη και μέτρια προς υψηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, ενώ στο προπειραματικό δοκίμιο είχαν αντίστοιχα υψηλή, μέτρια προς υψηλή και χαμηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον στο μεταπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση και στην κριτική σκέψη και μέτρια προς υψηλή επίδοση στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, ενώ στο προπειραματικό δοκίμιο είχαν αντίστοιχα μέτρια προς υψηλή, μέτρια προς χαμηλή και χαμηλή επίδοση. Όσον αφορά τους μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον στο μεταπειραματικό δοκίμιο σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση, μέτρια προς υψηλή επίδοση στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη και χαμηλή επίδοση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, ενώ στο προπειραματικό δοκίμιο στη δημιουργική σκέψη είχαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση και στις υπόλοιπες ικανότητες ήταν στην ίδια βαθμίδα επίδοσης.

Τα στοιχεία που παρουσιάστηκαν πιο πάνω με βάση τον Πίνακα 4.25, εξηγούν τις στατιστικά σημαντικές διαφορές που βρέθηκαν από την Ανάλυση Συνδιακύμανσης (ANCOVA) δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας του μικτού και του ανοικτού περιβάλλοντος. Δηλαδή, οι δυο αυτές ομάδες μαθητών διαφέρουν στατιστικά σημαντικά στη συνολική τους επίδοση στο μεταπειραματικό με βάση την επίδοσή τους στο προπειραματικό δοκίμιο, αφού οι μαθητές του ανοικτού σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στις τρεις από τις τέσσερις ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, ενώ οι μαθητές του μικτού σε μία μόνο ικανότητα σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Σημειώνεται, επίσης, ότι η βαθμίδα επίδοσής στο μεταπειραματικό δοκίμιο των μαθητών του μικτού σε όλες τις ικανότητες εκτός από τη βασική γνώση είναι κατώτερη σε σχέση με την αντίστοιχη των μαθητών του ανοικτού. Η πρώτη διαφορά μπορεί να επισημανθεί και μεταξύ του μικτού και του καθοδηγούμενου, ενώ η δεύτερη διαφορά δεν παρουσιάζεται μεταξύ των δυο αυτών ομάδων και για αυτό μπορεί να μην βρέθηκαν μεταξύ τους στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Ο Πίνακας 4.26 παρουσιάζει τη συνοπτική κατανομή των μέσων όρων της τρίτης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») ανά περιβάλλον μάθησης στους παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβαση.

Πίνακας 4.26

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων της Τρίτης Ομάδας Επίδοσης («Εις βάθος Δημιουργική») ανά Περιβάλλον Μάθησης στους Παράγοντες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη Πριν και Μετά την Παρέμβαση

	«Εις βάθος Δημιουργική» Ανοικτό		«Εις βάθος Δημιουργική» Καθοδηγούμενο		«Εις βάθος Δημιουργική» Μικτό	
	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	ΒΓ	ΒΓ, ΚΣ	ΒΓ	ΒΓ, ΚΣ		ΒΓ
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)					ΒΓ, ΔΣ	ΚΣ, ΔΣ
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	ΔΣ	ΔΣ, ΣΔ	ΚΣ, ΔΣ	ΔΣ, ΣΔ	ΚΣ	ΣΔ
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)	ΚΣ, ΣΔ		ΣΔ		ΣΔ	

Σημείωση. Ο κωδικός ΠΠ αντιστοιχεί στο Προπειραματικό δοκίμιο, ΜΠ στο Μεταπειραματικό δοκίμιο, ΒΓ στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά».

Με βάση τον Πίνακα 4.26, υπάρχουν κάποιες ομοιότητες και κάποιες διαφορές μεταξύ των μαθητών της τρίτης ομάδας επίδοσης των τριών περιβαλλόντων μάθησης τόσο στο προπειραματικό όσο και στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Συγκεκριμένα, και οι τρεις ομάδες μαθητών με βάση το περιβάλλον που συμμετείχαν διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης στη δημιουργική σκέψη από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο και ταυτόχρονα σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στην κριτική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Όσον αφορά τη βασική γνώση και οι τρεις ομάδες σημείωσαν στο μεταπειραματικό δοκίμιο υψηλή επίδοση, αλλά οι μαθητές του ανοικτού και του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης και οι μαθητές του μικτού σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό. Άρα, με βάση τα πιο πάνω οι διαφορές που εντοπίζονται δεν είναι μεγάλες και για αυτό δεν βρέθηκαν να είναι στατιστικά σημαντικές με βάση τις τεχνικές ανάλυσης της επαγωγικής στατιστικής που έγιναν πιο πάνω.

Ο Πίνακας 4.27 παρουσιάζει τη συνοπτική κατανομή των μέσων όρων της τέταρτης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») ανά περιβάλλον μάθησης στους παράγοντες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβαση.

Πίνακας 4.27

Συνοπτική Κατανομή των Μέσων Όρων της Τέταρτης Ομάδα Επίδοσης («Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») ανά Περιβάλλον Μάθησης στους Παράγοντες που Περιγράφουν την Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη Πριν και Μετά την Παρέμβαση

	«Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» Ανοικτό		«Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» Καθοδηγούμενο		«Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» Μικτό	
	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ	ΠΠ	ΜΠ
Υψηλή Επίδοση ($\bar{X} \geq .70$)	ΒΓ, ΚΣ	ΒΓ, ΚΣ, ΔΣ	ΒΓ, ΚΣ	ΒΓ, ΚΣ, ΔΣ, ΣΔ	ΒΓ, ΚΣ	ΒΓ, ΚΣ, ΔΣ
Μέτρια προς Υψηλή Επίδοση ($.55 \leq \bar{X} < .70$)	ΔΣ	ΣΔ	ΔΣ		ΔΣ	ΣΔ
Μέτρια προς Χαμηλή Επίδοση ($.40 \leq \bar{X} < .55$)	ΣΔ		ΣΔ		ΣΔ	
Χαμηλή Επίδοση ($\bar{X} < .40$)						

Σημείωση. Ο κωδικός ΠΠ αντιστοιχεί στο Προπειραματικό δοκίμιο, ΜΠ στο Μεταπειραματικό δοκίμιο, ΒΓ στην ικανότητα «Βασική Γνώση Περιεχομένου στα Μαθηματικά», ΚΣ στην ικανότητα «Κριτική Σκέψη στα Μαθηματικά, ΔΣ στην ικανότητα «Δημιουργική Σκέψη στα Μαθηματικά» και ΣΔ στην ικανότητα «Σύνθετες Διαδικασίες Σκέψης στα Μαθηματικά».

Με βάση τον Πίνακα 4.27, οι μαθητές της τέταρτης ομάδας επίδοσης ανεξαρτήτως τύπου περιβάλλοντος που συμμετείχαν παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά τόσο στο προπειραματικό όσο και στο μεταπειραματικό δοκίμιο, με μία μικρή διαφοροποίηση από την ομάδα που συμμετέχει στο καθοδηγούμενο περιβάλλον. Δηλαδή, επιβεβαιώνονται εδώ τα αποτελέσματα από τεχνικές επαγωγικής στατιστικής ότι οι μαθητές της τέταρτης ομάδας επίδοσης δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους αφού έχουν στις ίδιες ικανότητες σημειώσει ίδια και ανώτερη βαθμίδα επίδοσης από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Σημειώνεται, όμως, οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο σημείωσαν τόση βελτίωση στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ώστε να κατατάσσεται η επίδοσή τους μία βαθμίδα πιο ψηλά από τις άλλες ομάδες (υψηλή επίδοση).

Σύνοψη αποτελεσμάτων δεύτερου μέρους. Η χρήση τεχνικών επαγωγικής στατιστικής περιγραφικής στατιστικής έχουν επισημάνει διαφορές και ομοιότητες στην επίδοση στο προπειραματικό και στο μεταπειραματικό δοκίμιο που είχαν οι μαθητές ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχαν (ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό) και την ομάδα επίδοσης που άνηκαν (Πρώτη ομάδα: Επιφανειακά Βασική, Δεύτερη ομάδα: Εις βάθος Κριτική, Τρίτη ομάδα: Εις βάθος Δημιουργική και Τέταρτη ομάδα: Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική). Δηλαδή, έχουν βρεθεί διαφορές τόσο μεταξύ του συνόλου των περιβαλλόντων όσο και μεταξύ των μαθητών ίδιας ή διαφορετικής ομάδας επίδοσης ανάλογα με το περιβάλλον που συμμετείχαν. Συνοπτικά έχουν βρεθεί στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ του ανοικτού και του μικτού περιβάλλοντος τόσο στη συνολική επίδοση όσο και στις ικανότητες της δημιουργικής σκέψης και των σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αρχική τους επίδοση, με το ανοικτό περιβάλλον να σημείωσε υψηλότερες επιδόσεις. Επίσης, έχουν βρεθεί στατιστικά διαφορές μεταξύ του καθοδηγούμενου και του μικτού περιβάλλοντος τόσο στη συνολική επίδοση όσο και στις ικανότητες της βασικής γνώσης, της κριτικής σκέψης και των σύνθετων διαδικασιών σκέψης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την αρχική τους επίδοση, με το καθοδηγούμενο περιβάλλον να σημείωσε υψηλότερες επιδόσεις. Ακόμη, έχουν βρεθεί στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της πρώτης ομάδας επίδοσης («Επιφανειακά Βασική) που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο και στο μικτό στη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό, με τους μαθητές του καθοδηγούμενου να έχουν σημειώσει υψηλότερη επίδοση. Επιπρόσθετα, έχουν βρεθεί στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της δεύτερης ομάδας επίδοσης («Εις βάθος Κριτική») που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον και της αντίστοιχης ομάδας επίδοσης του μικτού περιβάλλοντος, καθώς και με την πρώτη ομάδα επίδοσης του μικτού («Επιφανειακά Βασική»). Οι διαφορές αυτές βρέθηκαν για τη συνολική επίδοση στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοση στο προπειραματικό και οι μαθητές της δεύτερης ομάδας επίδοσης του ανοικτού περιβάλλοντος σημείωσαν υψηλότερη επίδοση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Ο σημαντικός ρόλος της τεχνολογίας και της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητος, όπως και η θετική επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Παρόλα αυτά, δεν είναι ακόμη ξεκάθαρο πώς ορίζεται η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Haladyna, 1997) και με ποιο τρόπο η τεχνολογία την αναπτύσσει. Για αυτό, σκοπός της εργασίας ήταν η παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου μοντέλου ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και η εξέταση του πώς η χρήση νέων τεχνολογιών υποστηρίζει την ανάπτυξή της σε μαθητές Στ΄ δημοτικού διαφορετικών ικανοτήτων. Ο σκοπός αναλύθηκε σε τρεις επιμέρους στόχους ώστε να είναι δυνατή η εξέτασή του.

Ο πρώτος στόχος ήταν η επιβεβαίωση με εμπειρικά δεδομένα του Μοντέλου Σκέψης (Integrated Thinking Model) (Iowa Department of Education, 1989) για τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και η εξέταση των σχέσεων μεταξύ αυτών των ικανοτήτων. Αυτό προέκυψε από το ότι υπάρχει ανάγκη για μια πιο ευρεία προσέγγισή της έννοιας και ένα κατάλληλο μοντέλο που παρουσιάζει την προσέγγιση αυτή και δεν έχει επιβεβαιωθεί με εμπειρικά δεδομένα στα μαθηματικά είναι το Μοντέλο Σκέψης.

Ο δεύτερος στόχος ήταν η εξέταση και η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την εφαρμογή τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης (*ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό*) που είχαν σκοπό την ανάπτυξη και την ενίσχυση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Αυτό προέκυψε αφού τονίζεται στη βιβλιογραφία ότι υπάρχει ανάγκη για σχεδιασμό και εφαρμογή κατάλληλων περιβαλλόντων που βασίζονται στο μοντέλο του εποικοδομητισμού στα μαθηματικά σε μαθητές ηλικίας 10-14 ετών με τη χρήση νέων τεχνολογιών (English, 2008α· Drijvers et al., 2016· Li & Ma, 2010) και σύγκρισης μεταξύ τους (Hiebert & Grouws, 2007).

Ο τρίτος στόχος αφορούσε τον εντοπισμό ομάδων μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, την εξέταση εάν επωφελούνται οι ομάδες αυτές και από τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης (*ανοικτό, καθοδηγούμενο, μικτό*) και σύγκριση μεταξύ τους. Αυτό προέκυψε από την ανάγκη εξέτασης σε ποιο περιβάλλον μάθησης μαθαίνουν πιο αποτελεσματικά ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Lesh et al., 2014).

Με βάση τους τρεις στόχους διατυπώθηκαν τα πέντε ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού για κάθε ερευνητικό ερώτημα γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που απαντούν σε αυτό. Η συζήτηση βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, όπου γίνεται προσπάθεια να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα σε σχέση και με άλλες ερευνητικές εργασίες. Η συζήτηση χωρίζεται σε δυο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά τη συζήτηση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και απαντά στα πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Το δεύτερο μέρος αφορά τη συζήτηση των αποτελεσμάτων σχετικά με την επίδραση των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά που απαντά στα δυο τελευταία ερευνητικά ερωτήματα. Ακολούθως, γίνεται συζήτηση των περιορισμών της εργασίας.

Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Το πρώτο μέρος του σκοπού της εργασίας αφορά την παρουσίαση ενός ολοκληρωμένου μοντέλου ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Η έννοια αυτή εδώ και σχεδόν 50 χρόνια έχει δεχτεί πολλές ερμηνείες από διαφορετικές επιστημονικές περιοχές, οι οποίες δεν ταυτίζονται και η κάθε μια έχει τη βάση της στις ιδέες και στη φιλοσοφία της (Brookhart, 2010· Lewis & Smith, 1993). Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας φάνηκε ότι η έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο γενικότερα όσο και ειδικότερα στα μαθηματικά περιλαμβάνει ή και ταυτίζεται με ικανότητες, όπως τη λύση προβλήματος, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη, τη λογική σκέψη, τη λήψη απόφασης, την ανάλυση, τη μεταφορά της γνώσης, την αξιολόγηση, την τεκμηρίωση κ.α. Οι ικανότητες αυτές αναγνωρίζονται ως απαραίτητες για την επιβίωση του ατόμου στον 21ο αιώνα (English & Gainsburg, 2016· Partnership for 21st Century Skills, 2009) και για αυτό διάφορα αναλυτικά προγράμματα θέτουν ως σκοπό την ανάπτυξη τους, αφού βοηθούν τους μαθητές να σκέφτονται πιο βαθιά και ανοικτά (π.χ., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2012· National Curriculum in England: Mathematics programmes of study, 2014·Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου κ.ά, 2010).

Η εργασία αυτή αναγνωρίζει ότι η σημαντική έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά δεν είναι ακόμη ξεκάθαρη, δηλαδή από ποιες ικανότητες περιγράφεται ή ποια θεωρία την περιγράφει καλύτερα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Ταυτόχρονα λαμβάνει υπόψη της ότι υπάρχει ανάγκη για μια πιο ευρεία προσέγγισή της (Brookhart, 2010· Lewis & Smith, 1993). Έτσι, αξιοποίησε το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) για να παρουσιάσει στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας ένα ολοκληρωμένο μοντέλο για τη δομή και την ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά με εμπειρικά δεδομένα. Το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) δεν είναι το μοναδικό μοντέλο που προσεγγίζει πολυδιάστατα την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, αλλά αποτελεί ένα οργανωμένο, καλά ορισμένο και ολοκληρωμένο μοντέλο. Δηλαδή, η εργασία αξιοποιώντας τις τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες διαστάσεις του Μοντέλου Σκέψης για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη ανέπτυξε εργαλείο μέτρησής της στα μαθηματικά και (α) επιβεβαίωσε ότι η επίδοση των μαθητών Στ΄ δημοτικού σε μαθηματικές ασκήσεις υποστηρίζει τη δομή του Μοντέλου Σκέψης, (β) βρήκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών Στ΄ δημοτικού στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη εξηγούν άμεσα την επίδοσή τους στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης ενώ η επίδοσή τους στη βασική γνώση εξηγεί έμμεσα την επίδοσή αυτή και (γ) εντόπισε τέσσερις ομάδες μαθητών Στ΄ δημοτικού διαφορετικής επίδοσης ως προς τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Τα ευρήματα αυτά που αντιστοιχούν ως απαντήσεις στα πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα παρουσιάζονται και συζητιούνται εκτεταμένα πιο κάτω.

Πρώτο ερευνητικό ερώτημα – Ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η εργασία αυτή επιβεβαίωσε ότι η επίδοση των μαθητών Στ΄δημοτικού σε μαθηματικές ασκήσεις υποστηρίζει τη δομή του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) για τις τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: βασική γνώση, κριτική, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή, επιβεβαίωσε με εμπειρικά δεδομένα (α) τη πολυδιάστατη φύση της έννοιας της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στο πεδίο των μαθηματικών και (β) ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά δεν αποτελεί απλώς μια συλλογή από διακριτές ικανότητες αλλά ένα σύστημα όπου οι τέσσερις ικανότητες αλληλοσχετίζονται μεταξύ τους.

Όσον αφορά την εμπειρική επιβεβαίωση της πολυδιάστατης φύση της έννοιας της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, αποτελεί καινοτομία της εργασίας. Κάποιοι ορισμοί/προσεγγίσεις που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία αναφέρονταν σε μία ή δυο ικανότητες ως αυτές που περιγράφουν την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (π.χ., English, 2010α, 2011). Ενώ κάποιοι άλλοι την παρουσίαζαν ως ένα σύνολο ικανοτήτων χωρίς ευδιάκριτες ομαδοποιήσεις τους (π.χ., Stein & Lane, 1996· Wilson, 1971), πράγμα που δυσκόλευε την πρακτική χρήση της. Έτσι η εργασία αυτή επιβεβαιώνοντας τη δομή του Μοντέλου Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) στα μαθηματικά παρουσιάζει στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας ένα ολοκληρωμένο, καλά οργανωμένο, αναλυτικό και ταυτόχρονα πρακτικά διαχειρίσιμο μοντέλο για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Είναι ολοκληρωμένο αφού λαμβάνει υπόψη του τις διάφορες προσεγγίσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τόσο από διάφορες επιστημονικές περιοχές (π.χ., ως κριτική σκέψη, ως λύση προβλήματος, ως μεταφορά γνώσης κτλ) για τον καθορισμό των τεσσάρων ικανοτήτων όσο και από το πεδίο της μαθηματικής παιδείας για τον ορισμό αυτών των ικανοτήτων στα μαθηματικά. Είναι καλά οργανωμένο αφού αποτελείται από τέσσερις ευδιάκριτες ικανότητες, οι οποίες αλληλοσχετίζονται. Είναι αναλυτικό αφού για κάθε ικανότητα υπάρχει ξεκάθαρος ορισμός που καθορίστηκε με βάση τη σχετική βιβλιογραφία. Τέλος, είναι πρακτικά διαχειρίσιμο αφού μπορεί να αξιοποιηθεί για ανάπτυξη περιβαλλόντων ενίσχυσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά καθώς και για μέτρησή της, δηλώνοντας ταυτόχρονα ότι δεν αποτελεί κάτι δύσκολο και άγνωστο στους μαθητές (Brookhart, 2010).

Οι τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη, όπως έχει επιβεβαιώσει η εργασία αυτή είναι η βασική γνώση περιεχομένου, η κριτική σκέψη, η δημιουργική σκέψη και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Ο ορισμός των τεσσάρων αυτών ικανοτήτων προέκυψε τόσο από το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) όσο και από την αντίστοιχη βιβλιογραφία στη μαθηματική παιδεία. Με βάση τον ορισμό τους αναπτύχθηκαν τα έργα που αποτελούν δείκτες τους στο επιβεβαιωμένο μοντέλο.

Η βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά ορίστηκε ως οι γνώσεις και οι διαδικασίες που χρειάζεται να κατέχει μαθητής Στ΄δημοτικού για να μπορέσει να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και να ελέγχει και να ρυθμίζει τις γνώσεις του. Δεν αποτελεί απλώς ανάκληση μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών (Iowa Department of Education, 1989). Για αυτό τα έργα που επιβεβαιώθηκε ότι αποτελούν δείκτες του συγκεκριμένου παράγοντα αφορούσαν γνώσεις μαθηματικών εννοιών που οι μαθητές Στ΄ δημοτικού της Κύπρου θεωρείται ότι κατέχουν με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και πάνω σε αυτές στηρίζονται οι μαθητές για να σκεφτούν κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα. Σε κάποια έργα οι μαθητές σημείωσαν χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με τα υπόλοιπα, έστω και αν και αυτά τα έχουν συναντήσει ξανά με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτή η χαμηλή επίδοση πιθανόν να οφείλεται στο ότι οι έννοιες που αφορούν τα συγκεκριμένα έργα είναι δύσκολες για τους μαθητές (εμβαδόν και περίμετρος) (π.χ., Kidman, 1997).

Η κριτική σκέψη στα μαθηματικά ορίστηκε στα πλαίσια της εργασίας αυτής ως η ικανότητα του ατόμου να αναδιοργανώνει τη βασική του μαθηματική γνώση περιεχομένου (Iowa Department of Education , 1989) χρησιμοποιώντας το λογικό συλλογισμό του (Jablonka, 2014). Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου), της σύνδεσης (χειρισμός σχέσεων μεταξύ όλων) και της αξιολόγησης (κρίση πληροφοριών με βάση κριτήρια) της βασικής του γνώσης, παράγει την αναδιοργανώμενη γνώση (Balcaen & Klassen, 2008· Iowa Department of Education, 1989· TC^2, 2013). Έτσι, η εργασία επιβεβαίωσε ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά ορίζεται από τρεις διακριτές ικανότητες: την ανάλυση, τη σύνδεση και την αξιολόγηση. Αυτό αποτελεί νέο εύρημα στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, αφού στις εργασίες που εντοπίστηκαν παρουσιαζόταν ότι η κριτική σκέψη ήταν μια ελλιπής συλλογή από δεξιότητες και έτσι χρειαζόταν ένα συνοπτικό, αναλυτικό μοντέλο για αυτή (Balcaen & Klassen, 2008 · Ennis, 1989).

Οι επιδόσεις των μαθητών του δείγματος στις τρεις διαστάσεις της κριτικής σκέψης ήταν διαφορετική. Συγκεκριμένα, σημείωσαν την υψηλότερη μέση επίδοση στα έργα της ανάλυσης και τη χαμηλότερη στα έργα της αξιολόγησης. Η υψηλή επίδοση που σημείωσαν οι μαθητές του δείγματος στα έργα της ανάλυσης δικαιολογείται από το ότι τα έργα που χρησιμοποιούν διαδικασίες σύνδεσης και αξιολόγησης, χρειάζονται ταυτόχρονα και διαδικασίες ανάλυσης (Iowa Department of Education, 1989). Η χαμηλή επίδοση που σημείωσαν οι μαθητές στα έργα της σύνδεσης και της αξιολόγησης σε σχέση με τα έργα της ανάλυσης, μπορεί να οφείλεται στο ότι οι δυο αυτές διαδικασίες αποτελούν τις κύριες συνιστώσες της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά (TC^2, 2013) όπου γενικά διαπιστώνεται ότι δεν δίνεται έμφαση σε αυτές στη διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ., Balcaen & Klassen, 2008).

Η δημιουργική σκέψη ορίστηκε ως η ικανότητα του ατόμου να παράγει νέα γνώση (Ervynck, 1991· Iowa Department of Education, 1989), η οποία αφορά είτε τη δημιουργία μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης ιδέας (πρωτοτυπία) (Singh, 1987) είτε την εύρεση πολλών (ευχέρεια) και διαφορετικών λύσεων ή στρατηγικών για ένα πρόβλημα (ευελιξία) (Smith & Stein, 1998· Stein et al., 2000). Για να παραχθεί αυτή η νέα γνώση, το άτομο χρησιμοποιεί τη σύνθεση πληροφοριών (συστηματικό τρόπο) και τη νοητική δημιουργία (ανάδυση ιδεών ως αναλαμπή ή χρήση νοερών διαδικασιών) (π.χ., Krulik & Rudnick, 1999· Sheffield, 2003). Έτσι, η εργασία επιβεβαίωσε ότι η δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά ορίζεται από δυο διαδικασίες: τη σύνθεση και τη νοητική δημιουργία. Αυτό αποτελεί εύρημα που ενισχύει τη βιβλιογραφία σχετικά με τον ορισμό και κατά συνέπεια τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αυτό γιατί είναι θολό το τοπίο σχετικά με τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας (Mann, 2006· Sriraman, 2009). Διαπιστώνεται ότι οι ορισμοί που δόθηκαν αναφέρουν ότι η παραγωγή κάτι νέου προκύπτει είτε μόνο από τη σύνθεση μαθηματικών γνώσεων (Ervynck, 1991) είτε μόνο ως αναλαμπή (Singh, 1987) είτε και από τα δυο (Krulik & Rudnick, 1999· Kwon et al., 2006· Levan-Waynberg & Leikin, 2009). Άρα, φαίνεται με το εύρημα της εργασίας αυτής να υπάρχει μια σύγκλιση προς τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας, δηλαδή το ότι αφορά παραγωγή νέων ιδεών χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της σύνθεσης και της νοητικής δημιουργίας.

Οι μαθητές του δείγματος σημείωσαν ελάχιστα πιο ψηλή μέση επίδοση στα έργα που αφορούσαν σύνθεση σε σχέση με αυτά που απαιτούσαν νοητική δημιουργία. Στη βιβλιογραφία έχει οριστεί ότι η σύνθεση συνδέεται με την κριτική σκέψη, ενώ η νοητική δημιουργία αποτελεί το απόλυτο χαρακτηριστικό της δημιουργικής σκέψης (Iowa Department of Education, 1989· Liljedahl, 2013). Άρα, πιθανόν η κριτική σκέψη των μαθητών να τους βοήθησε να παράγουν σε μεγαλύτερο βαθμό περισσότερες, διαφορετικές και πρωτότυπες λύσεις στις δημιουργικές ασκήσεις της σύνθεσης σε σχέση με τις ασκήσεις της νοητικής δημιουργίας. Υποθέτεται ότι η ανάδυση μιας ιδέας ως αναλαμπή που απαιτούν οι ασκήσεις της νοητικής δημιουργίας είναι δύσκολη διαδικασία για παιδιά. Αυτό γιατί απαιτεί το στάδιο της προετοιμασίας με βάση το Liljedahl (2013), όπου τα άτομα προσπαθούν με βάση τις γνώσεις τους να βρουν λύση και οδηγούνται σε επανειλημμένες αποτυχημένες προσπάθειες. Αυτό πιθανόν είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί από παιδιά και έτσι να συνεχίζουν να προσπαθούν.

Ταυτόχρονα βρέθηκε ότι σε όλα τα δημιουργικά έργα οι μαθητές του δείγματος σημείωσαν υψηλότερη επίδοση στις διαστάσεις της ευχέρειας κα της ευελιξίας, σε σχέση με την πρωτοτυπία. Άρα, φαίνεται ότι οι μαθητές του δείγματος μπορούν να παράγουν έναν αριθμό λύσεων που να είναι διαφορετικές, αλλά δυσκολεύονται στο να βρουν πρωτότυπες λύσεις είτε όταν ακολουθούν συστηματικό πλάνο εργασίας (σύνθεση) είτε όταν τους έρχονται οι ιδέες ως αναλαμπή (νοητική δημιουργία). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι η πρωτοτυπία που αποτελεί το πιο βασικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής δημιουργικότητας (Leikin, 2009) είναι δύσκολο να αναπτυχθεί αφού βρέθηκε ότι παρεμβάσεις που ενίσχυαν την ευχέρεια και την ευελιξία, μείωναν την πρωτοτυπία των συμμετεχόντων (Levav-Waynberg & Leikin, 2009, 2012).

Οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης στην εργασία αυτή ορίστηκαν ότι απαιτούν το συνδυασμό της βασικής γνώσης περιεχομένου, της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης για να εκδηλωθούν (Iowa Department of Education, 1989). Ο συνδυασμός αυτός είναι φανερός στα μαθηματικά σε ασκήσεις άγνωστες για το λύτη και έχουν τη μορφή μη συνηθισμένων προβλημάτων, προβλημάτων σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης. Τέτοια έργα αξιοποιήθηκαν στην εργασία αυτή, όπου επιβεβαιώθηκαν ότι αποτελούν δείκτες του συγκεκριμένου παράγοντα. Οι μαθητές του δείγματος σε αυτά τα έργα σημείωσαν χαμηλή επίδοση, αφού φάνηκε να έχουν καθόλου ή μερική κατανόηση των δεδομένων που δίνονταν. Τα μαθηματικά που απαιτούσαν αυτά τα έργα αποτελούν αυτά που γνώριζαν οι μαθητές του δείγματος με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου. Όμως, φαίνεται ότι ο συνδυασμός των διαδικασιών της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης που απαιτούσαν τα έργα αυτά δυσκόλεψε τους μαθητές του δείγματος.

Η επίδοση των μαθητών του δείγματος στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά ήταν διαφορετική και μεταξύ τους υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Συγκεκριμένα, σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και χαμηλές επιδόσεις στην κριτική σκέψη, στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Η χαμηλή επίδοση στις τρεις ικανότητες πιθανόν να οφείλεται στο ότι τα έργα που απαιτούσαν τη χρήση αυτών των ικανοτήτων ήταν γνωστικά απαιτητικά. Ταυτόχρονα τέτοια έργα δεν διδάσκονται, αφού διαπιστώθηκε ότι είναι δύσκολο να εφαρμοστούν ασκήσεις που είναι μαθηματικά πλούσιες και προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν, να συλλογιστούν και να λύνουν προβλήματα στις τάξεις (Stein et al., 1996). Είναι δύσκολο αφού όπως έρευνες έχουν βρει οι εκπαιδευτικοί απλοποιούν σύνθετα προβλήματα γιατί θεωρούν ότι δεν μπορούν οι μαθητές τους να τα σκεφτούν (Stein et al., 1996). Ταυτόχρονα, θεωρούν ότι δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για διδασκαλία τέτοιων ασκήσεων στην τάξη είτε λόγω ύλης είτε λόγω αντιμετώπισης προβλημάτων διαχείρισης τάξης (Stein et al., 1996). Επίσης, η χαμηλή επίδοση των μαθητών του δείγματος στις τρεις ικανότητες μπορεί να οφείλεται στη μη κατάλληλη διδασκαλία ασκήσεων που να τις ενισχύουν και έτσι οι μαθητές να καταλήγουν να εφαρμόζουν τύπους και κανόνες χωρίς σύνδεση, νόημα ή κατανόηση και να χάνονται ευκαιρίες σκέψης και συλλογισμού (Smith et al., 2008). Η μη κατάλληλη διδασκαλία είναι αποτέλεσμα της μη ύπαρξης ξεκάθαρου ορισμού στα μαθηματικά για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη και τις ικανότητες που την περιγράφουν που να μπορεί να αξιοποιηθεί για τη μέτρησή της και τη διδασκαλία της (π.χ., Ennis, 1989 · Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016).

Όσον αφορά την επιβεβαίωση της ύπαρξης αλληλοσχετίσεων μεταξύ των τεσσάρων ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, αποτελεί νέο εύρημα στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας. Ταυτόχρονα, το εύρημα αυτό δηλώνει ότι η περιγραφή της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά δεν περιλαμβάνει μόνο τέσσερις διακριτές ικανότητες, αλλά τέσσερις ικανότητες που αλληλοσχετίζονται.

Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα – Σχέσεις μεταξύ των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) υπογραμμίζει ότι οι τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά έχουν σχέσεις αλληλεξάρτησης, δηλαδή η μία ικανότητα εξαρτάται από την άλλη. Η εργασία αυτή, όμως, λόγω του ότι δεν είχε διαχρονικά δεδομένα των μαθητών από το δοκίμιο μπορούσε να επιβεβαιώσει σχέσεις επίδρασης προς μια κατεύθυνση, όχι αμφίδρομες. Έτσι, προσπάθησε να επιβεβαιώσει ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις επίδρασης της μιας ικανότητας στην άλλη που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία και να βρει το είδος της επίδρασης τους, δηλαδή άμεσα (απευθείας επίδραση) ή έμμεσα (επίδραση μέσω άλλων ικανοτήτων):
(α) η βασική γνώση προβλέπει την κριτική, τη δημιουργική και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αφού η γνώση έχει βρεθεί να αποτελεί σημαντικό στοιχείο για έκφραση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Tularam, 1994),
(β) η κριτική σκέψη προβλέπει τη δημιουργική σκέψη, αφού για να εκφραστεί η μαθηματική δημιουργικότητα χρειάζεται να χρησιμοποιήσει διαδικασίες κριτικής σκέψης, όπως της σύνδεσης της υπάρχουσας γνώσης με τη μαθηματική διαίσθηση, φαντασία και έμπνευση, για παραγωγή αποδεκτής λύσης (π.χ., Levan-Waynberg & Leikin, 2009) ή της αξιολόγησης του νέου προϊόντος που παράγεται (Leikin & Elgrabli, 2015),
(γ) η κριτική σκέψη προβλέπει τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης , αφού τα αποτελέσματα της κριτικής σκέψης αποτελούν τη βάση για λήψη απόφασης, επίλυσης προβλήματος και σύνθετες διαδικασίες μαθηματικής σκέψης (Balcaen & Klassen, 2008· Jablonka, 2014 · Rassmussen et al., 2005) και
(δ) η δημιουργική σκέψη προβλέπει τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αφού το αποτέλεσμα της μαθηματικής δημιουργικότητας οδηγεί στην επέκταση της μαθηματικής γνώσης σε νέο έδαφος (Leikin & Elgrabli, 2015).

Η εργασία βρήκε ότι οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται άμεσα από τη δημιουργική σκέψη, άμεσα και έμμεσα από την κριτική σκέψη και μόνο έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου. Σημειώνεται ότι οι τρεις ικανότητες: βασική γνώση περιεχομένου, κριτική σκέψη και δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά συνεισφέρουν στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στον ίδιο βαθμό. Ταυτόχρονα, η βασική γνώση περιεχομένου προβλέπει την κριτική σκέψη άμεσα, ενώ τη δημιουργική την προβλέπει και άμεσα και έμμεσα μέσω της κριτικής σκέψης. Σημειώνεται ότι η βασική γνώση συνεισφέρει στο ίδιο βαθμό στις δυο ικανότητες: κριτική και δημιουργική σκέψη. Όμως, η συνεισφορά της κριτικής σκέψης στη δημιουργική σκέψη ήταν πιο χαμηλή σε σχέση με τη συνεισφορά της βασικής γνώσης σε αυτή. Άρα, κάποιος μπορεί να εκφράσει υψηλή δημιουργικότητα χωρίς να έχει σε υψηλό βαθμό την κριτική του σκέψη, φτάνει να έχει βασική γνώση περιεχομένου.

Τα πιο πάνω ευρήματα υποδηλώνουν ότι κάποιος που έχει μόνο βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά η οποία δεν τον βοηθά να εκφραστεί κριτικά και δημιουργικά, δεν μπορεί να εκφράσει σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Ενώ κάποιος που έχει βασική γνώση περιεχομένου την οποία αξιοποιεί με τρόπο που να μπορεί να εκφράσει κριτική και δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά, μπορεί να εκφράσει σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Επίσης, κάποιος μπορεί να εκφράσει σε πιο ισχυρό βαθμό σύνθετες διαδικασίες σκέψης, όταν η βασική του γνώση είναι πιο ισχυρή και του δίνει τη δυνατότητα να κρίνει και να δημιουργήσει σε πιο ισχυρό βαθμό σε σχέση με κάποιο άλλο που δεν έχει τόσο ισχυρή βασική γνώση. Δηλαδή, η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά με βάση το εύρημα της εργασίας αυτής αποτελεί ένα σύστημα σχέσεων εξάρτησης μεταξύ τεσσάρων διακριτών ικανοτήτων, όπου οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται από τις άλλες τρεις ικανότητες, αλλά όχι με τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα, η βασική γνώση επιδρά στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μέσω της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης.

Τρίτο ερευνητικό ερώτημα – Ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η εργασία αυτή εντόπισε ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Οι ομάδες αυτές διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους τόσο ως προς τη συνολική τους στην ανωτέρου επιπέδου σκέψη όσο και ως προς τις τέσσερις ικανότητες που την περιγράφουν. Στις ομάδες αυτές τους δόθηκαν τα ακόλουθα ονόματα: η «Επιφανειακά Βασική», η «Εις βάθος Κριτική», η «Εις βάθος Δημιουργική» και η «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» με βάση τη συμπεριφορά τους στις ασκήσεις του δοκιμίου. Η «Επιφανειακά Βασική» ομάδα σημείωσε το χαμηλότερο μέσο όρο στη συνολική επίδοση στο δοκίμιο, ενώ η «Εις Βάθος Κριτική και Δημιουργική» ομάδα σημείωσε τον υψηλότερο αντίστοιχο μέσο όρο. Ο μέσος όρος των άλλων δυο ομάδων ήταν περίπου ο ίδιος, με το μέσο όρο της «Εις βάθος Κριτικής» ομάδας να είναι ελάχιστα πιο ψηλός από τον αντίστοιχο της «Εις βάθος Δημιουργικής» ομάδας. Άρα, δεν παρουσιάζονται ιεραρχημένες από την πιο αδύνατη στην πιο ισχυρή ομάδα.

Οι μαθητές που άνηκαν στην «Επιφανειακά Βασική» ομάδα σημείωσαν μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο σύνολο της βασικής γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά και χαμηλή επίδοση στο σύνολο της κριτικής, της δημιουργικής σκέψης και των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Όμως, σημείωσαν υψηλή ή μέτρια προς υψηλή επίδοση σε κάποια έργα της βασικής γνώσης, καθώς και σε κάποια έργα της κριτικής σκέψης. Με βάση τις σχέσεις εξάρτησης που βρέθηκαν αυτό δείχνει ότι η βασική γνώση των μαθητών της ομάδας αυτής τους βοήθησε να λύσουν με επιτυχία κάποιες ασκήσεις κριτικής σκέψης. Όμως, η βασική τους γνώση και η κριτική τους σκέψη δεν τους βοήθησε να λύσουν με επιτυχία ασκήσεις δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι η βασική γνώση των ατόμων της ομάδας αυτής, όπως και η κριτική τους σκέψης ήταν επιφανειακές. Για αυτό ονομάστηκε «Επιφανειακά βασική».

Οι μαθητές που άνηκαν στην «Εις βάθος Κριτική» ομάδα σημείωσαν υψηλή επίδοση στο σύνολο της βασικής γνώσης περιεχομένου, μέτρια προς υψηλή επίδοση στο σύνολο της κριτική σκέψης, μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο σύνολο της δημιουργικής σκέψης και χαμηλή επίδοση στο σύνολο των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Αυτό δείχνει ότι με βάση τις σχέσεις εξάρτησης που βρέθηκαν, η βασική γνώση των μαθητών αυτών τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία της περισσότερες ασκήσεις της κριτικής σκέψης. Επίσης, ο βαθμός κατανόησης των δυο αυτών ικανοτήτων τους βοήθησε να σημειώσουν υψηλή επίδοση μόνο στην ευχέρεια και στην ευελιξία των δημιουργικών ασκήσεων που απαιτούσαν σύνθεση πληροφοριών. Όμως, ο βαθμός επιτυχίας τους στη βασική γνώση, στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη δεν τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία τις ασκήσεις των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Πιθανόν αυτό να οφείλεται στο ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν μπόρεσαν να επιλύσουν με επιτυχία τις ασκήσεις της δημιουργικής σκέψης που απαιτούσαν τη χρήση της διαδικασίας της νοητικής δημιουργίας, καθώς και να δώσουν πρωτότυπες λύσεις. Αλλά σημειώνεται ότι με βάση τη βασική γνώση που είχαν, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη μπόρεσαν να σημειώσουν υψηλότερο μέσο όρο στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με τις ομάδες «Επιφανειακά βασική» και «Εις βάθος Δημιουργική». Επίσης, τονίζεται ότι η ομάδα αυτή χαρακτηρίζεται από την υψηλή της επίδοση σε ασκήσεις κριτικής σκέψης και συγκεκριμένα από το ότι οι επιδόσεις της στις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης ήταν υψηλότερες σε σχέση με αυτές των ομάδων: «Επιφανειακά βασική» και «Εις βάθος Δημιουργική». Για αυτό ονομάστηκε «Εις βάθος Κριτική».

Οι μαθητές που άνηκαν στην «Εις βάθος Δημιουργική» ομάδα σημείωσαν μέτρια προς υψηλή επίδοση στο σύνολο της βασικής γνώσης περιεχομένου και της δημιουργικής σκέψης, μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο σύνολο της κριτικής σκέψης και χαμηλή επίδοση στο σύνολο των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Με βάση τις σχέσεις εξάρτησης που βρέθηκαν, αυτό δείχνει ότι η βασική γνώση των μαθητών της ομάδας αυτής τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία κάποιες ασκήσεις της κριτικής σκέψης. Επίσης, ο βαθμός κατανόησης των δυο αυτών ικανοτήτων τους βοήθησε να σημειώσουν υψηλή επίδοση στην ευχέρεια και στην ευελιξία και στους δυο τύπους δημιουργικών ασκήσεων (σύνθεσης και νοητικής δημιουργίας). Όμως, ο βαθμός επιτυχίας τους στη βασική γνώση, στην κριτική και στη δημιουργική σκέψη δεν τους βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία τις ασκήσεις των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Πιθανόν να οφείλεται στο ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής δεν μπόρεσαν να επιλύσουν με επιτυχία τις ασκήσεις αξιολόγησης της κριτικής σκέψης, καθώς και να δώσουν πρωτότυπες λύσεις. Επίσης, τονίζεται ότι η ομάδα αυτή χαρακτηρίζεται από την υψηλή της επίδοση σε ασκήσεις δημιουργικής σκέψης και συγκεκριμένα από το ότι η επίδοσή της στα έργα νοητικής δημιουργίας ήταν υψηλότερη σε σχέση με αυτή των ομάδων: «Επιφανειακά βασική» και «Εις βάθος Κριτική». Η νοητική δημιουργία αποτελεί το απόλυτο χαρακτηριστικό της δημιουργικής σκέψης (Iowa Department of Education, 1989· Liljedahl, 2013) και για αυτό η ομάδα αυτή ονομάστηκε «Εις βάθος Δημιουργική».

Οι μαθητές που άνηκαν στην «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» ομάδα σημείωσαν υψηλή επίδοση στο σύνολο της βασικής γνώσης περιεχομένου και της κριτικής σκέψης, μέτρια προς υψηλή επίδοση στο σύνολο της δημιουργικής σκέψης και μέτρια προς χαμηλή επίδοση στο σύνολο των σύνθετων διαδικασιών σκέψης. Με βάση τις σχέσεις εξάρτησης που βρέθηκαν, αυτό δείχνει ότι ο βαθμός που είχαν τη βασική γνώση, την κριτική σκέψη και τη δημιουργική σκέψη οι μαθητές της ομάδας αυτής βοήθησε να επιλύσουν με επιτυχία μία άσκηση του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης, ενώ οι προηγούμενες ομάδες δεν κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία καμία άσκηση του παράγοντα αυτού. Όμως, δεν έλυσαν όλες τις ασκήσεις του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης με επιτυχία. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι δεν είχαν σε τέτοιο βαθμό την κριτική και τη δημιουργική τους σκέψη ώστε να επιλύσουν όλες τις ασκήσεις του παράγοντα σύνθετες διαδικασίες σκέψης με επιτυχία. Όμως, τονίζεται ότι είχαν υψηλή επίδοση τόσο στην κριτική σκέψη όσο και στη δημιουργική και ήταν υψηλότερη σε σχέση με τις άλλες ομάδες, για αυτό ονομάστηκε «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική».

Ομάδες με αντίστοιχα χαρακτηριστικά βρέθηκαν σε διάφορες έρευνες, αλλά όχι όλες μαζί και όχι τόσο ξεκάθαρες όπως παρουσιάζονται στην εργασία αυτή. Συγκεκριμένα, η «Επιφανειακά Βασική» ομάδα περιγραφόταν ως αυτή με χαμηλή επίδοση και χαμηλή δημιουργικότητα (Kattou et al., 2013· Haylock, 1997). Με βάση το Haylock (1997) η ομάδα αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική επίδοση δεν έχουν τη γνώση και τις δεξιότητες για να εκφράσουν δημιουργική σκέψη σε κατάλληλες δραστηριότητες. Η «Εις βάθος Κριτική» ομάδα περιγραφόταν ως αυτή που είχε υψηλή επίδοση και χαμηλή δημιουργικότητα (Haylock, 1997). Με βάση το Haylock (1997) η ομάδα αυτή έχει χαμηλή αυτό-εικόνα και διστάζει να προσεγγίσει τα μαθηματικά με ένα άλλο τρόπο διαφορετικό από την παραδοσιακή προσέγγιση. Συμπληρώνοντας σε αυτό, ο Pehkonen (1997) θεωρεί ότι οι μαθητές της ομάδας αυτής χρησιμοποιούν υπερβολικά το αριστερό ημισφαίριο από κανόνες και αλγορίθμους που μαθαίνονται με σειριακό τρόπο με αποτέλεσμα να εμποδίζεται η ανάπτυξη της δημιουργικότητας που χρειάζεται και τη χρήση του δεξιού ημισφαιρίου. Η «Εις βάθος Δημιουργική» ομάδα μπορεί να έχει αντίστοιχα χαρακτηριστικά με την ομάδα που είχε μέση επίδοση και μέση δημιουργικότητα στην έρευνα των Kattou et al. (2013), αφού οι μαθητές της ομάδας αυτής έχουν σε κάποιο βαθμό τη βασική και την κριτική τους σκέψη, η οποία δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε χαμηλή ούτε υψηλή. Η «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» ομάδα μπορεί να έχει αντίστοιχα χαρακτηριστικά με την ομάδα που περιγραφόταν ότι είχε υψηλή επίδοση και υψηλή δημιουργικότητα, η οποία με βάση το Haylock (1997) προκύπτει από το γεγονός ότι οι μαθητές με υψηλή μαθηματική επίδοση έχουν τη γνώση και τις δεξιότητες για να εκφράσουν δημιουργική σκέψη σε κατάλληλες δραστηριότητες.

Παράλληλα, τρεις από τις ομάδες που βρήκε η εργασία αυτή («Επιφανειακά Βασική», «Εις βάθος Κριτική» και «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική») έχουν χαρακτηριστικά κάποιων επιπέδων του PISA σχετικά με τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών με βάση το βαθμό μαθηματικής εγγραμματοσύνης. Συγκεκριμένα, η «Επιφανειακά Βασική» ομάδα μπορεί να έχει κατακτήσει το επίπεδο ένα, αφού οι μαθητές της μπορούσαν να απαντήσουν ερωτήσεις που ήταν οικείες σε αυτούς, με όλες τις απαραίτητες πληροφορίες να δίνονται ξεκάθαρα. Η «Εις βάθος Κριτική» ομάδα μπορεί να έχει κατακτήσει το επίπεδο τρία, όπου οι μαθητές της μπορούσαν να ερμηνεύσουν, να επιλέξουν και να εφαρμόσουν απλές στρατηγικές λύσης προβλήματος και αναπαραστάσεις από διάφορες πηγές. Η «Εις βάθος Κριτική και Δημιουργική» ομάδα μπορεί να έχει κατακτήσει το επίπεδο τέσσερα, αφού οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν αποτελεσματικά με ξεκάθαρα μοντέλα σύνθετων καταστάσεων και να εφαρμόσουν διάφορες αναπαραστάσεις συνδέοντας τις ταυτόχρονα με πτυχές των σύνθετων καταστάσεων. Καμία από τις ομάδες αυτές δεν μπορεί να έχουν κατακτήσει ούτε το επίπεδο πέντε ούτε το έξι, αφού δεν έλυσαν με επιτυχία τις ασκήσεις των σύνθετων διαδικασιών σκέψης.

Άρα, η συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζει τέσσερις ολοκληρωμένες, αναλυτικές και πρακτικά διαχειρίσιμες ομάδες μαθητών. Είναι ολοκληρωμένες αφού η εργασία χρησιμοποιεί ένα ξεκάθαρο ορισμό της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά που συνοψίζει τις διάφορες προσεγγίσεις της στη βιβλιογραφία και έτσι περιγράφεται από τέσσερις διακριτές ικανότητες. Για αυτό και είναι και αναλυτικές προς τον αναγνώστη για κατάλληλη αξιοποίηση τους στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Νέες Τεχνολογίες και Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Στο μέρος αυτό γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που αφορούν το πώς οι νέες τεχνολογίες αναπτύσσουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά μαθητών Στ΄ δημοτικού. Για να προκύψουν τα αποτελέσματα αυτά η εργασία θεώρησε ότι η τεχνολογία μπορεί να ενισχύσει την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά με βάση τα ευρήματα διαφόρων εργασιών και αυτό που αναζητείτο ήταν με ποιο τρόπο η τεχνολογία την ενισχύει.

Η τεχνολογία αναγνωρίζεται ότι αποτελεί βασικό εργαλείο στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών (NCTM, 2008) και γενικά διαπιστώνεται η θετική της επίδρασης στη μάθηση των μαθηματικών. Για αυτό τα τελευταία χρόνια η χρήση της τεχνολογίας ενσωματώνεται ως μία από τις αρχές σε αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών (π.χ., NCTM, 2000· Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου κ.ά., 2010) και αξιοποιείται σε διεθνείς αξιολογήσεις της επίδοσης των μαθητών στα Μαθηματικά (π.χ., TIMSS, PISA). Ταυτόχρονα, παρατηρείται ότι αναπτύσσονται με γοργό ρυθμό διάφορα τεχνολογικά μέσα και ότι υπάρχει ευκολία πρόσβασης των εκπαιδευτικών για συνεχή και σχετική ενημέρωση για αυτά. Όμως, κρίνεται ότι όλη αυτή η έμφαση και η χρήση της τεχνολογίας δεν συνάδει με αντίστοιχη αύξηση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά σε διεθνείς έρευνες που εξετάζουν και ανωτέρου επιπέδου σκέψη (Drijvers, 2014). Άρα, με βάση το ότι η μέθοδος διδασκαλίας με τη χρήση της τεχνολογίας θεωρείται ένας από τους βασικότερους παράγοντες που σχετίζονται με την επίδοση των μαθητών (Li & Ma, 2010) αφού από μόνη της η τεχνολογία δεν μπορεί να έχει αποτελέσματα, υπογραμμίζεται ότι χρειάζονται έρευνες που να εξετάζουν με ποιο τρόπο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία για αποτελεσματική ενίσχυση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Drijvers et al., 2016· English, 2008α, 2010α). Παράλληλα, μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας παρουσιάστηκαν διάφορα ευρήματα που υποστηρίζουν ότι η διερευνητική προσέγγιση της δίνει θετικά αποτελέσματα, αφού δίνει νέες ευκαιρίες για ανάπτυξη κατάλληλων εκπαιδευτικών στρατηγικών (Artigue & Baptist, 2012).

Έτσι, η εργασία αυτή σχεδίασε τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης που είχαν σκοπό να ενισχύσουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: το ανοικτό, το καθοδηγούμενο και το μικτό. Τα περιβάλλοντα αυτά είχαν κοινή τους αρχή τη διερευνητική μάθηση (Maaß & Artigue, 2013) και τη μάθηση με τεχνολογία (Jonassen et al., 2003) και αξιοποιούσαν προσεγγίσεις που βρέθηκαν αποτελεσματικές στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Οι προσεγγίσεις αυτές αφορούσαν τον τρόπο διδασκαλίας του περιεχομένου (διερευνητική μάθηση, ανοικτά προβλήματα, προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, κατασκευή προβλήματος, μάθηση με παιχνίδι), τον τρόπο οργάνωσης της τάξης (συνεργατική λύση προβλήματος και χρήση κατάλληλων ερωτήσεων και συζήτησης) και τον τρόπο αξιοποίησης των τεχνολογικών εργαλείων (ενισχυτής, αναδιοργανωτής, εξάσκηση δεξιοτήτων, εννοιολογική κατανόηση). Όμως, τα τρία περιβάλλοντα διέφεραν ως προς τον τρόπο δόμησης των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν. Δηλαδή, ως προς το πότε και με ποιο τρόπο δίνουν στους μαθητές (δομημένα ή λιγότερα δομημένα) την ελευθερία να αποφασίζουν από μόνοι τους ποια ικανότητα ανωτέρου επιπέδου σκέψης να χρησιμοποιήσουν για να λύσουν τις δραστηριότητες που περιλαμβάνουν.

Το ανοικτό περιβάλλον ενέπλεκε τους μαθητές μόνο σε καταστάσεις που απαιτούσαν σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Το καθοδηγούμενο άρχιζε με καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες που απαιτούσαν από τους μαθητές είτε τη χρήση διαδικασιών κριτικής σκέψης είτε τη χρήση διαδικασιών δημιουργικής σκέψης και σταδιακά εμπλέκονταν σε δραστηριότητες που απαιτούσαν σύνθετες διαδικασίες σκέψης, μειώνοντας και την καθοδήγηση. Το μικτό περιβάλλον άρχιζε με κατάσταση που απαιτούσε σύνθετες διαδικασίες σκέψης όπως το ανοικτό, ακολούθως περιλάμβανε καθοδηγούμενες διερευνητικές δραστηριότητες παρόμοιες με το καθοδηγούμενο και στο τέλος υπήρχε πάλι μια κατάσταση που απαιτούσε σύνθετες διαδικασίες σκέψης.

Τα περιβάλλοντα αυτά με βάση τα αποτελέσματα της εφαρμογής τους πέτυχαν να ενισχύσουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά. Όμως, τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά τόσο του συνόλου των μαθητών όσο και των ομάδων των μαθητών που προέκυψαν με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας. Τα ευρήματα αυτά που αντιστοιχούν ως απαντήσεις στο τέταρτο και πέμπτο ερευνητικό ερώτημα παρουσιάζονται και συζητιούνται εκτεταμένα πιο κάτω.

Τέταρτο ερευνητικό ερώτημα – Τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης και η ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Η εργασία αυτή βρήκε ότι τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά τόσο ως προς το σύνολό της όσο και ως προς τις ικανότητες που την περιγράφουν με βάση την αντίστοιχη αρχική τους επίδοση. Συγκεκριμένα, βρέθηκαν μετά την εφαρμογή των περιβαλλόντων τα τέσσερα πιο κάτω αποτελέσματα. Πρώτον, οι μαθητές που συμμετείχαν στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης σημείωσαν στατιστικά σημαντική βελτίωση της επίδοσής τους τόσο στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά όσο και στις ικανότητες που την περιγράφουν με μόνη εξαίρεση στη βασική γνώση για το μικτό περιβάλλον. Δεύτερον, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο τόσο στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης όσο και στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Τρίτον, οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο τόσο στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης όσο και στη βασική γνώση, στην κριτική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με τους μαθητές που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Τέταρτον, οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Οι μαθητές σε κάθε περιβάλλον που σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε στα πλαίσια της εργασίας αυτής παρουσίασαν βελτίωση στην επίδοσή τους στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Δηλαδή, βρέθηκε ότι η διερευνητική προσέγγιση της τεχνολογίας επιδρά θετικά στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης όποια και εάν είναι η μορφή της. Αυτό βρίσκεται σε συνάφεια με τον ορισμό της διερευνητικής μάθησης. Δηλαδή, οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες, όπως παρατήρησης, υποβολής ερωτήσεων, μοντελοποίησης, επίλυσης προβλήματος με πολλαπλούς τρόπους, ανάλυσης, αξιολόγησης, ερμηνείας, σύνδεσης, υπόθεσης και γενίκευσης (Artigue & Blomhøj, 2013· Maaß & Artigue, 2013· NRC, 1996, 2000), οι οποίες επιδρούν θετικά στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και ικανοτήτων, καθώς και στην ανάπτυξη διαδικασιών σκέψης για διερεύνηση (Artigue & Blomhøj, 2013). Επιπρόσθετα, η θετική επίδραση της διερευνητικής προσέγγισης της τεχνολογίας μπορεί να οφείλεται στο ενδιαφέρον που είχαν οι μαθητές για μάθηση των μαθηματικών και κατά συνέπεια στη θέληση τους για ενεργό συμμετοχή (π.χ., Huang et al., 2014· Tabach & Friedlander, 2006). Ταυτόχρονα, μπορεί οι μαθητές να βρήκαν νόημα στα μαθηματικά σε αυτά τα περιβάλλοντα και για αυτό παρουσίασαν βελτίωση. Επίσης, επιβεβαιώνονται ευρήματα διαφόρων ερευνών που υποστηρίζουν τη θετική επίδραση της διερευνητικής προσέγγισης στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (π.χ., Chin et al., 2007· Markovitz & Sowder, 1994· Rooney, 2012), καθώς και της διερευνητικής προσέγγισης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη αυτή (π.χ., Bokhove, 2013, 2014· Eysink et al., 2009· Fahlgren & Brunström, 2014). Όμως, τονίζεται από το Drijvers (2015) ότι η τεχνολογία και η διερεύνηση εδώ δουλεύουν λόγω του ότι συνδυάζονται με συζητήσεις, εργασίες στο χαρτί, με μαθηματικές πρακτικές και γενικά με κατάλληλο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Δηλαδή, τα θετικά αποτελέσματα οφείλονται και στις διάφορες προσεγγίσεις που αξιοποιήθηκαν και θεωρούνταν κατάλληλες για ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (π.χ., συνεργατική λύση προβλήματος, χρήση συζήτησης και κατάλληλων ερωτήσεων, προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, κατασκευή προβλήματος, μάθηση με παιχνίδι), καθώς και στον τρόπο χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων (π.χ., ως εργαλείο ενίσχυσης, ως εργαλείο αναδιοργάνωσης, ως εργαλείο εξάσκησης δεξιοτήτων, ως εργαλείο για ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης)

Παράλληλα, βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον επωφελήθηκαν περισσότερο από αυτά ως προς την ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους στα μαθηματικά σε σχέση με τους μαθητές του μικτού περιβάλλοντος. Έτσι, φαίνεται ότι οι μαθητές δεν μαθαίνουν τόσο καλά σε περιβάλλον διερευνητικής μάθησης που συνδυάζει προσεγγίσεις ως προς τη δομή. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με τα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με την επίδραση προσεγγίσεων παρόμοιων με το μικτό. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι παρόμοια προσέγγιση με το μικτό (Bokhove, 2013, 2014· Bokhove & Drijvers, 2012) είχε θετική επίδραση στη μάθηση των μαθηματικών, αλλά και στην εννοιολογική κατανόηση τους. Πιθανόν η προσέγγιση αυτή να έχει πιο ισχυρή επίδραση σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας, δηλαδή γυμνασίου και λυκείου που ήταν το δείγμα των πιο πάνω εργασιών σε σχέση με μαθητές δημοτικού που ήταν το δείγμα της εργασίας αυτής.

Ταυτόχρονα βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο ανοικτό και στο καθοδηγούμενο περιβάλλον δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους μετά την παρέμβαση ως προς το σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με ευρήματα εργασιών που δείχνουν να υπερέχει στατιστικά σημαντικά η καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση έναντι της ανοικτής σε ψηφιακό περιβάλλον μάθησης (Fathurrohman et al., 2014), καθώς και η ανοικτή προσέγγιση έναντι της καθοδηγούμενης (McCraw & Grant, 2005). Τα ευρήματα αυτά προκύπτουν πιθανόν από τους διαφορετικούς ορισμούς που δίνονται στην καθοδηγούμενη και στην ανοικτή διερευνητική προσέγγιση σε διάφορες έρευνες, καθώς και στο διαφορετικό εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιούν. Αυτό γιατί από την μια η μορφή της καθοδηγούμενη διερεύνηση κυμαίνεται από δομημένη μέχρι λιγότερο δομημένη και από την άλλη η ανοικτή προσέγγιση κυμαίνεται από κλειστή μέχρι ανοικτή (Zbiek et al., 2007). Ακόμη, τα διαφορετικά ευρήματα οφείλονται και στους διαφορετικούς συμμετέχοντες που έχουν.

Επίσης, βρέθηκε ότι οι μαθητές στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερη επίδοση στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με τους μαθητές του μικτού περιβάλλοντος. Αυτό ενισχύει ευρήματα ερευνών που έχουν δείξει ότι τα ανοικτά προβλήματα επιδρούν θετικά στην ενίσχυση της δημιουργικότητας ατόμων που εργάζονται συστηματικά με αυτά (π.χ., Kwon et al., 2006). Ταυτόχρονα, είναι σε συμφωνία με αποτελέσματα ερευνών στα οποία οι μαθητές που συμμετείχαν σε ανοικτή προσέγγιση σημείωσαν υψηλές επιδόσεις σε ασκήσεις μεταφοράς γνώσης (Boaler, 2002· Brown et al., 1996· Lane & Silver, 1999· Silver et al., 1995), καθώς ανάπτυξαν και πιο ευέλικτες και χρήσιμες μορφές γνώσης που ήταν ικανοί να τις χρησιμοποιήσουν σε ένα εύρος καταστάσεων (Boaler, 1998β). Άρα, πιθανόν το ανοικτό περιβάλλον προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργήσουν νέα γνώση σε πιο ισχυρό βαθμό σε σχέση με το μικτό περιβάλλον και έτσι να ενισχύσουν και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης τους.

Τέλος, στην εργασία αυτή βρέθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο στη βασική γνώση, κριτική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης έναντι των μαθητών που συμμετείχαν στο μικτό περιβάλλον. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι οι δραστηριότητες στο καθοδηγούμενο περιβάλλον ήταν αναπτυγμένες με τρόπο που ενίσχυαν όλες τις ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά διακριτά και διαβαθμισμένα. Ενώ στο μικτό περιβάλλον που άρχιζε με μια ανοικτή κατάσταση και μετά συνέχιζε με καθοδηγούμενη διερεύνηση και τελείωνε πάλι με ανοικτή κατάσταση, οι μαθητές φαίνεται να «χάνονταν» και να μην μπορούσαν να συνδέσουν την ανοικτή κατάσταση με το υπόλοιπο μάθημα, δηλαδή να μην κατανοούσαν τι κάνουν και γιατί το κάνουν.

Πέμπτο ερευνητικό ερώτημα – Τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης, ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων και η ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της εργασία έδειξαν ότι τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά των μαθητών με ίδια ή διαφορετική επίδοση ως προς το σύνολό της με βάση την αντίστοιχη αρχική τους επίδοση. Συγκεκριμένα, βρέθηκε μετά την εφαρμογή των περιβαλλόντων ότι (α) οι μαθητές της «Επιφανειακά βασικής» ομάδας που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος, (β) οι μαθητές της «Εις βάθος Κριτικής» ομάδας που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος και την «Επιφανειακά βασική» ομάδα του μικτού και (γ) οι μαθητές της «Εις βάθος Δημιουργικής» ομάδας και της «Εις βάθος Κριτικής και Δημιουργικής» ομάδας σημείωσαν παρόμοια επίδοση και στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης.

Βρέθηκε ότι οι μαθητές της «Επιφανειακά βασικής» ομάδας που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο μετά την παρέμβαση στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος με βάση την αρχική τους επίδοση. Παρατηρήθηκε, ακόμη, ότι οι μαθητές της «Επιφανειακά βασικής» ομάδας που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον να σημείωσαν από το προπειραματικό στο μεταπειραματικό δοκίμιο αλλαγή σε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης και στις τέσσερις ικανότητες της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Ενώ οι αντίστοιχοι μαθητές του μικτού διατήρησαν στην ίδια βαθμίδα την επίδοσή τους στις τέσσερις ικανότητες. Δηλαδή, οι αδύνατοι μαθητές φαίνεται να επωφελήθηκαν από καθοδηγημένη διερευνητική διδασκαλία σε ψηφιακό περιβάλλον, αφού πιθανόν στην διδασκαλία αυτή λόγω της καθοδήγησης που υπάρχει στην αρχή του μαθήματος δίνεται στους μαθητές ξεκάθαρα με ποιο τρόπο να σκέφτονται, να κατανοούν τι κάνουν και γιατί το κάνουν και έτσι να ενισχύσουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της «Επιφανειακής βασικής» ομάδας που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον ενώ σημείωσαν βελτίωση στην επίδοσή τους δεν ήταν τόση ώστε να είναι στατιστικά σημαντική πιο υψηλή από την αντίστοιχη ομάδα του μικτού. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι δεν βελτίωσαν την κριτική τους σκέψης όπως τους μαθητές του καθοδηγούμενου περιβάλλοντος. Άρα, μπορεί το καθοδηγούμενο ψηφιακό περιβάλλον να προσφέρει στους μαθητές που κατέχουν μόνο κάποιες βασικές γνώσεις περιεχομένου στα μαθηματικά τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν σταδιακά τις διαδικασίες της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης σε διακριτές δραστηριότητες ώστε να ενισχύσουν ξεχωριστά τις ικανότητες αυτές. Η ενίσχυση των ικανοτήτων αυτών βοηθά στην ενίσχυση και των σύνθετων διαδικασιών σκέψης.

Επίσης, η εργασία βρήκε ότι οι μαθητές της «Εις βάθος Κριτικής» ομάδας που συμμετείχαν στο ανοικτό περιβάλλον σημείωσαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μέσο όρο μετά την παρέμβαση στο σύνολο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος και την «Επιφανειακά βασική» ομάδα του μικτού. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της «Εις βάθος Κριτικής» ομάδας του ανοικτού περιβάλλοντος να σημείωσαν αλλαγή σε ανώτερη βαθμίδα επίδοσης και στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Ενώ οι αντίστοιχοι μαθητές του μικτού περιβάλλοντος διατήρησαν την ίδια βαθμίδα επίδοσης στις τρεις από τις τέσσερις ικανότητες και σημείωσαν ανώτερη βαθμίδα επίδοσης στη δημιουργική σκέψη. Δηλαδή, οι μαθητές που ήταν αδύνατοι αλλά μπορούσαν να κρίνουν με επιτυχία επωφελήθηκαν από το ανοικτό περιβάλλον. Πιθανόν σε αυτό το περιβάλλον να τους δινόταν η ευκαιρία να αξιοποιήσουν τη βασική γνώση και την κριτική σκέψη που είχαν, όπως και τη δημιουργική σκέψη στη λύση ανοικτών προβληματισμών και έτσι να ενίσχυσαν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους σε πιο ισχυρό βαθμό σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα του μικτού περιβάλλοντος. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της «Εις βάθος Κριτικής» ομάδας που συμμετείχαν στο καθοδηγούμενο περιβάλλον ενώ σημείωσαν βελτίωση στην επίδοσή τους δεν ήταν τόση ώστε να είναι στατιστικά σημαντική πιο υψηλή από την αντίστοιχη ομάδα του μικτού. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι δεν βελτίωσαν την δημιουργική τους σκέψης όπως τους μαθητές του ανοικτού περιβάλλοντος. Άρα, μπορεί το ανοικτό ψηφιακό περιβάλλον να προσφέρει στους μαθητές που έχουν βασική γνώση και κριτική σκέψη στα μαθηματικά τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό τις διαδικασίες της δημιουργικής σκέψης (που είχαν ανάγκη) και έτσι να την ενισχύσουν. Η ενίσχυση της δημιουργικής σκέψης βοηθάει στην ενίσχυση και των άλλων ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη.

Ταυτόχρονα, βρέθηκε ότι οι μαθητές της «Εις βάθος Δημιουργικής» ομάδας και της «Εις βάθος Κριτικής και Δημιουργικής» ομάδας σημείωσαν παρόμοια επίδοση και στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης. Δηλαδή, οι ομάδες μαθητών που είχαν ενισχυμένη την αποκλίνουσα σκέψης τους (δημιουργική σκέψη) επωφελήθηκαν και από τα τρία περιβάλλοντα. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι η αποκλίνουσα σκέψη τους, τους βοηθούσε να προσαρμοστούν σε κάθε περιβάλλον και να εργαστούν σε αυτό με στόχο τη μάθησή τους.

Όμως, υπάρχουν ενδείξεις ότι ένα ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης δεν μπορεί να ενισχύσει μόνο μία ικανότητα της ανωτέρου επιπέδου σκέψης σε όλους τους μαθητές ανεξαρτήτως επίδοσης. Ταυτόχρονα, υπάρχουν ενδείξεις ότι δεν μπορεί μόνο ένα ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης να ενισχύσει όλες τις ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά σε μία ομάδα μαθητών διαφορετικής επίδοσης. Αυτά είναι μόνο ενδείξεις και χρειάζονται περαιτέρω διερεύνηση σε έρευνες με μεγαλύτερο δείγμα.

Περιορισμοί της Εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας συζητήθηκαν οι περιορισμοί της εργασίας που αφορούσαν την επιλογή των υποκειμένων της έρευνας, την επιλογή των μέσων συλλογής δεδομένων και τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας. Στο μέρος αυτό θα αναφερθούν οι περιορισμοί που αφορούν (i) τα δεδομένα της εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν για την απάντηση των ερευνητικών της ερωτημάτων και (ii) τη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας επιλέγηκαν να χρησιμοποιηθούν μόνο τα ποσοτικά δεδομένα που συλλέχτηκαν, δηλαδή οι απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση. Τα ποιοτικά δεδομένα που συλλέχτηκαν κατά τη διάρκεια των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης δεν αξιοποιήθηκαν παρόλο που θα ενίσχυαν τα ποσοτικά αποτελέσματα. Δηλαδή, θα έδιναν εξηγήσεις για τις στατιστικά σημαντικές διαφορές που εντοπίστηκαν μεταξύ των μαθητών των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης στο μεταπειραματικό δοκίμιο με βάση την επίδοσή τους στο προπειραματικό δοκίμιο. Οι εξηγήσεις αυτές θα αφορούσαν τον τρόπο σκέψης των μαθητών σε κάθε περιβάλλον και με ποιο τρόπο εξελίχθηκε σε αυτό.

Η γενικευσιμότητα αναφέρεται στο βαθμό στο οποίο τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας μπορούν να αφορούν το πληθυσμό που αντιπροσωπεύει το δείγμα της εργασίας. Επίσης, η γενεκευσιμότητα σε εργασίες με ποσοτικές έρευνες αφορά εκτός από τον πληθυσμό, και τις παρεμβάσεις και τα αποτελέσματα (Schofield, 2002).

Όσον αφορά τη διάσταση του πληθυσμού, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο πρώτο και στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας, το δείγμα της εργασίας επιλέχθηκε ευκαιριακά με βάση την ευκολία πρόσβασης σε αυτό από την ερευνήτρια. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από 802 μαθητές Στ΄ Δημοτικού για να εξεταστεί η έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά προήλθαν από δημοτικά σχολεία που η ερευνήτρια είχε πρόσβαση. Όμως, παρόλο που το δείγμα της εργασίας δεν επιλέγηκε τυχαία ώστε να θεωρείται αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού της, έγινε προσπάθεια οι μαθητές του δείγματος να προέρχονται από όλες τις επαρχίες της ελεύθερης Κύπρου και να φοιτούν σε δημόσια και ιδιωτικά δημοτικά σχολεία αστικών και ορεινών περιοχών. Επίσης, τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από 85 μαθητές Στ΄ Δημοτικού για να εξεταστεί η επίδραση των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους προήλθαν με βάση το ενδιαφέρον που είχαν οι ίδιοι ή οι γονείς τους να συμμετέχουν σε απογευματινό χρόνο σε σειρά μαθημάτων. Όμως, παρόλο που δεν θεωρείται η ομάδα αυτή αντιπροσωπευτική του πληθυσμού της έρευνας τόσο για το ότι δεν επιλέχθηκε τυχαία όσο και για το μικρό της μέγεθος, έγινε προσπάθεια να παρακολουθήσουν τα μαθήματα μαθητές από δημοτικά σχολεία εκτός από τα γειτονικά του Πανεπιστημίου Κύπρου αλλά από όλη την επαρχία της Λευκωσίας.

Όσον αφορά τη διάσταση που αναφέρεται σε θέματα παρεμβάσεων, τονίζεται ότι η εργασία εξέτασε τρία συγκεκριμένα περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης σε μαθηματικές έννοιες από τις πέντε περιοχές των μαθηματικών. Είναι ακόμη ανοικτό αν τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται αν εμπλακούν οι μαθητές σε διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης και με διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Επίσης, αξιοποιήθηκαν συγκεκριμένα μαθηματικά εφαρμογίδια και ανοικτά λογισμικά, όπου παραμένει ανοικτό αν τα αποτελέσματα διαφοροποιούνταν αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν διαφορετικά τεχνολογικά μέσα. Ακόμη, η διδασκαλία των τριών ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης γινόταν από την ερευνήτρια και έτσι παραμένει ανοικτό αν τα αποτελέσματα διαφοροποιούνταν αν τα μαθήματα γίνονταν με διαφορετικούς εκπαιδευτικούς με λιγότερα ή περισσότερα χρόνια υπηρεσίας από την ερευνήτρια.

Όσον αφορά τη διάσταση που αναφέρεται σε θέματα αποτελεσμάτων, τονίζεται ότι τα αποτελέσματα προκύπτουν από μαθητές της Κύπρου που έχουν συγκεκριμένο πολιτιστικό και εκπαιδευτικό υπόβαθρο. Πιθανόν τα αποτελέσματα της εργασίας να διαφοροποιούνται με μαθητές άλλων χωρών με άλλες κουλτούρες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

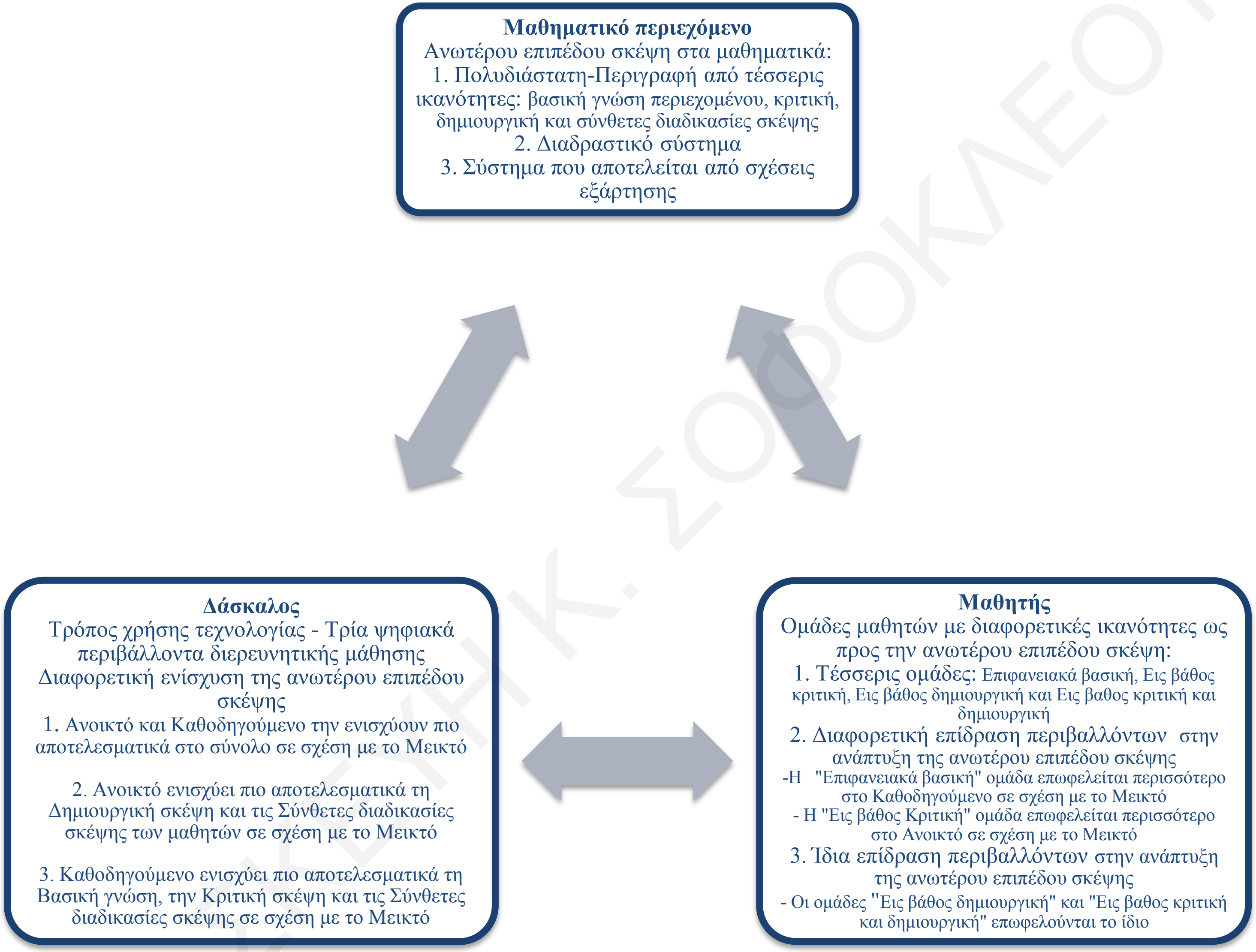
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αρχικά τα συμπεράσματα της εργασίας όπως αυτά προέκυψαν από τη συζήτηση των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια ακολουθεί η συζήτηση των εφαρμογών των αποτελεσμάτων της εργασίας σε θεωρητικό, σε μεθοδολογικό και σε πρακτικό επίπεδο. Τέλος, δίνονται εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες.

Συμπεράσματα της Εργασίας

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να παρουσιάσει ένα ολοκληρωμένο μοντέλο ορισμού και μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά και να εξετάσει το πώς οι νέες τεχνολογίες υποστηρίζουν την ανάπτυξή της σε μαθητές Στ΄ δημοτικού. Η εργασία εξέτασε ένα κρίσιμο ζήτημα της διδασκαλίας των μαθηματικών, για το λόγο αυτό τα συμπεράσματα της παρουσιάζονται σε σχέση με τις τρεις αλληλοσχετιζόμενες διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών: το μαθηματικό περιεχόμενο, το δάσκαλο και τους μαθητές. Δηλαδή, η εργασία προσπάθησε να δώσει στη βιβλιογραφία μια ολοκληρωμένη και αναλυτική προσέγγιση σχετικά με το ρόλο των νέων τεχνολογιών στα μαθηματικά, ξεκαθαρίζοντας την έννοια που είχε στόχο να ενισχύσει (μαθηματικό περιεχόμενο), παρουσιάζοντας στο δάσκαλο τα περιβάλλοντα που είναι πιο αποτελεσματικά για τη μάθηση των μαθητών του και καθορίζοντας ποια περιβάλλοντα είναι πιο κατάλληλα για συγκεκριμένες ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων. Αυτά παρουσιάζονται συνοπτικά στο Διάγραμμα 6.1.

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, η εργασία έχει καταλήξει ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά είναι ένα πολυδιάστατο σύστημα που περιγράφεται από τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες: τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά. Η βασική γνώση περιεχομένου αφορά τις γνώσεις που χρειάζεται να κατέχει έναν άτομο με βάση την ηλικία του. Η κριτική σκέψη αποτελεί την ικανότητα αναδιοργάνωσης της βασικής γνώσης χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης. Η δημιουργική σκέψη είναι η ικανότητα παραγωγής νέας γνώσης χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της σύνθεσης και της νοητικής δημιουργίας.



Διάγραμμα 6.1. Συμπεράσματα εργασίας ως προς τις τρεις διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης αποτελούν την παραγωγή μιας σύνθεσης της αποδεκτής, της αναδιοργανώμενης και της παραγόμενης γνώσης. Επίσης, η εργασία κατέληξε ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά αποτελεί ένα σύστημα σχέσεων εξάρτησης μεταξύ των τεσσάρων ικανοτήτων, όπου οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης προβλέπονται άμεσα από την κριτική και τη δημιουργική σκέψη και έμμεσα από τη βασική γνώση περιεχομένου. Η δημιουργική σκέψη προβλέπεται άμεσα από την κριτική σκέψη και άμεσα και έμμεσα από τη βασική γνώση, ενώ η κριτική σκέψη προβλέπεται άμεσα από τη βασική γνώση. Έτσι, για να αναπτυχθεί η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά χρειάζεται να αναπτυχθούν και οι τέσσερις ικανότητες που την περιγράφουν ταυτόχρονα και όχι διακριτά.

Ως προς τον δάσκαλο, η εργασία κατέληξε ότι έστω και αν τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης που σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν στα πλαίσια της ενίσχυσαν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά, το ανοικτό και το καθοδηγούμενο περιβάλλον την ενίσχυσαν σε μεγαλύτερο στατιστικά σημαντικό βαθμό σε σχέση με το μικτό. Συγκεκριμένα, το ανοικτό περιβάλλον ενίσχυσε σε μεγαλύτερο στατιστικά σημαντικό βαθμό τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με το μικτό, καθώς και το καθοδηγούμενο περιβάλλον ενίσχυσε σε μεγαλύτερο στατιστικά σημαντικό βαθμό τη βασική γνώση, την κριτική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης σε σχέση με το μικτό. Άρα, συμπεραίνεται ότι τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών στα μαθηματικά, με το περιβάλλον που συνδυάζει προσεγγίσεις ως προς τη δομή του (μικτό) να μειονεκτεί.

Ως προς τους μαθητές, η εργασία κατέληξε σε δυο συμπεράσματα. Πρώτον, ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Η πρώτη ομάδα ονομάστηκε «Επιφανειακά Βασική», όπου τα άτομα σε αυτή κατέχουν μόνο σε επιφανειακό επίπεδο κάποιες βασικές γνώσεις στα μαθηματικά που χρειάζονται με βάση την ηλικία τους και είναι αδύνατοι σε όλες τις άλλες ικανότητες που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη. Η δεύτερη ομάδα ονομάστηκε «Εις βάθος Κριτική». Σε αυτή την ομάδα ανήκουν τα άτομα που κατέχουν εις βάθος τη βασική γνώση περιεχομένου και μπορούν να την αναδιοργανώσουν σε υψηλά επίπεδα επιτυχίας, δηλαδή κατέχουν σε υψηλό επίπεδο τη βασική γνώση και την κριτική σκέψη και σε χαμηλό επίπεδο τις άλλες ικανότητες. Η τρίτη ομάδα ονομάστηκε «Εις βάθος Δημιουργική», διότι τα άτομα που ανήκουν σε αυτή κατέχουν σε βάθος τη βασική γνώση περιεχομένου την οποία χρησιμοποιούν για να παράγουν νέα γνώση. Τα άτομα στην τρίτη ομάδα κατέχουν σε υψηλό βαθμό τη βασική γνώση και τη δημιουργική σκέψη, ενώ έχουν αδυναμίες στην κριτική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Η τέταρτη ομάδα ονομάστηκε «Εις βάθος κριτική και δημιουργική», αφού τα άτομα που ανήκουν σε αυτή κατέχουν σε βάθος τη βασική γνώση, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη και έχουν αδυναμίες στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή, τα άτομα σε αυτή την ομάδα χρησιμοποιούν τη βασική τους γνώση για να την αναδιοργανώσουν και για να παράγουν νέα γνώση, αλλά αδυνατούν να συνθέσουν όλα αυτά για τη λύση μη συνηθισμένων προβλημάτων. Δεύτερον, η εργασία κατέληξε ότι παρόλο σε όλες τις ομάδες μαθητών διαφορετικής επίδοσης ενισχύθηκε η ανωτέρου επιπέδου σκέψη τους σε όποιο περιβάλλον και αν συμμετείχαν, κάποιες ομάδες μαθητών επωφελήθηκαν περισσότερο από συγκεκριμένα περιβάλλοντα. Δηλαδή, η ανωτέρου επιπέδου σκέψη της «Επιφανειακά βασικής» ομάδας ενισχύθηκε σε μεγαλύτερο στατιστικά σημαντικό βαθμό στο καθοδηγούμενο σε σχέση με το μικτό και η ανωτέρου επιπέδου σκέψη της «Εις βάθος κριτικής» ομάδας ενισχύθηκε στο ανοικτό περιβάλλον σε μεγαλύτερο στατιστικά σημαντικό βαθμό σε σχέση με το μικτό. Η ανωτέρου επιπέδου σκέψη των ομάδων: «Εις βάθος δημιουργική» και «Εις βάθος κριτική και δημιουργική» ενισχύθηκε στο ίδιο βαθμό σε όποιο περιβάλλον και αν συμμετείχαν. Άρα, βρέθηκε ότι τα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης ενισχύουν διαφορετικά την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στις ομάδες μαθητών που είναι πιο αδύνατες στην αποκλίνουσα σκέψη, ενώ την ενισχύουν το ίδιο στις ομάδες μαθητών που έχουν σε υψηλό βαθμό την αποκλίνουσα σκέψη τους. Σημειώνεται ότι οι ομάδες μαθητών με αδυναμίες στην αποκλίνουσα σκέψη επωφελούνται περισσότερο από περιβάλλοντα που δεν συνδυάζουν προσεγγίσεις ως προς τη δομή τους.

Εφαρμογές της Εργασίας σε Θεωρητικό, σε Μεθοδολογικό και σε Πρακτικό Επίπεδο

Με βάση τα αποτελέσματα της η εργασία συνεισφέρει σε τρεις τομείς: θεωρητικό, μεθοδολογικό και πρακτικό, όπως έχουν αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας.

Από θεωρητικής πλευράς, ενισχύεται η βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας σχετικά με την έννοια της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας ένα ολοκληρωμένο, καλά οργανωμένο, αναλυτικό και ταυτόχρονα διαχειρίσιμο μοντέλο για την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Παρόμοιο δεν έχει βρεθεί στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, αφού η ανωτέρου επιπέδου σκέψη δεν ήταν ξεκάθαρη (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Η εργασία αξιοποιώντας το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989) επιβεβαίωσε με εμπειρικά δεδομένα ότι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά είναι πολυδιάστατη, όπου περιγράφεται από ένα σύστημα τεσσάρων αλληλοσχετιζόμενων ικανοτήτων: βασική γνώση περιεχομένου, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Επίσης, ενίσχυσε τη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας σχετικά με τις σχέσεις εξάρτησης που υπάρχουν μεταξύ των τεσσάρων ικανοτήτων. Συγκεκριμένα, βρήκε ότι κάποιος για να εκφράσει σύνθετες διαδικασίες σκέψης χρειάζεται και τις τρεις άλλες ικανότητες, αλλά σημειώνεται ότι η βασική γνώση προβλέπει τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης μόνο μέσω της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης και όχι άμεσα. Ταυτόχρονα η εργασία αναγνωρίζοντας ότι κάθε μαθητής έχει τις δικές του ικανότητες και ανάγκες, παρουσιάζει τέσσερις ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων ως προς την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: «Επιφανειακά βασική», «Εις βάθος κριτική», «Εις βάθος δημιουργική» και «Εις βάθος κριτική και δημιουργική». Δεν χαρακτηρίζονται από ιεραρχική ταξινόμηση και η ερμηνεία τους στηρίζεται στις σχέσεις εξάρτησης που βρέθηκαν. Επίσης, οι ομάδες αυτές όπως και οι σχέσεις εξάρτησης καθώς και γενικά το μοντέλο εξηγούν διάφορα αντικρουόμενα αποτελέσματα που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία.

Από μεθοδολογικής πλευράς, η εργασία προσφέρει έναν ολοκληρωμένο, αναλυτικό και κατάλληλο εργαλείο μέτρησης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Είναι ολοκληρωμένο αφού περιλαμβάνει όλες τις ικανότητες που λέχθηκαν στη βιβλιογραφία σχετικά με το τι είναι ανωτέρου επιπέδου σκέψη και ταυτόχρονα τις οργανώνει σε τέσσερις διακριτές ικανότητες. Είναι αναλυτικό αφού δίνεται ξεκάθαρος ορισμός της κάθε ικανότητας, ώστε ο καθένας να μπορεί να ελέγξει ότι πράγματι το συγκεκριμένο έργο μετρά τη συγκεκριμένη ικανότητα. Είναι κατάλληλο αφού έχει επιβεβαιωθεί η δομή του μέσω της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης. Το εργαλείο αυτό είναι αναγκαίο και σημαντικό αφού από τη μία η αξιολόγηση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης είναι άμεσα συνδεδεμένη με την βελτίωση της επίδοσης των μαθητών και τη δημιουργία κινήτρων για μάθηση (Brookhart, 2010) και από την άλλη δεν έχει βρεθεί παρόμοιο κατάλληλο εργαλείο. Η έλλειψη αυτή οδήγησε σε μια αδράνεια στο πεδίο σχεδιασμού αποτελεσματικών περιβαλλόντων μάθησης για υποστήριξή της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016· Eseryel et al., 2011, 2013· Kulm, 1990). Για αυτό ταυτόχρονα η εργασία αυτή αξιοποιώντας το μοντέλο που βρήκε σχετικά με το τι είναι ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και σχετική βιβλιογραφία της αποτελεσματικής χρήσης της τεχνολογίας στα μαθηματικά και αποτελεσματικών προσεγγίσεων ενίσχυσης της ανωτέρου επιπέδου σκέψης, παρουσιάζει με ξεκάθαρο τρόπο το σχεδιασμό τριών ψηφιακών περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης που ενισχύουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη: ανοικτό, καθοδηγούμενο και μικτό και εντοπίζει τα πιο αποτελεσματικά. Έτσι, η εργασία αυτή συνεισφέρει μεθοδολογικά και στο πεδίο σχεδιασμού δραστηριοτήτων που ενισχύουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και αξιοποιούν την τεχνολογία. Αυτό παρουσιάστηκε ως ανάγκη τα τελευταία χρόνια ειδικά στον τομέα της τεχνολογίας στη διδακτική των μαθηματικών αφού η ενημέρωση σχετικά με τον τρόπο σχεδιασμού δραστηριοτήτων είναι πενιχρή σε διάφορες έρευνες. Έτσι παρουσιάζονταν αποτελέσματα που δεν μπορούν να συνδεθούν με αποτελέσματα άλλων εργασιών και γενικά κυριαρχεί ένα θολό τοπίο γύρω από το ρόλο των νέων τεχνολογιών.

Ακόμη από μεθοδολογικής πλευράς, τα αποτελέσματα της εργασίας ενισχύουν τη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας σχετικά με τον αποτελεσματικό τρόπο χρήσης της τεχνολογίας για τη μάθηση των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα για την ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Δηλαδή, τα αποτελέσματα της εργασίας υποστηρίζουν ότι ο τρόπος χρήσης της τεχνολογίας δεν περιλαμβάνει μόνο τον τρόπο χρήσης των τεχνολογικών εργαλείων, τον τρόπο οργάνωσης και διάταξης των μαθητών και τον τρόπο διδασκαλίας του μαθηματικού περιεχομένου (Pierce & Stacey, 2010), αλλά και τον τρόπο δόμησης των δραστηριοτήτων.

Ως προς το πρακτικό επίπεδο, τα αποτελέσματα της εργασίας είναι χρήσιμα τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους μαθητές. Από τη μία οι εκπαιδευτικοί θα ενισχύσουν τις γνώσεις τους σχετικά με ποιο τρόπο γίνεται αποτελεσματική η διδασκαλία τους στα μαθηματικά για ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών τους αξιοποιώντας τις νέες τεχνολογίες με βάση αποτελέσματα έρευνας και όχι θεωρίας. Δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη το τι είναι η ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας, ποιες ομάδες μαθητών διαφορετικών ικανοτήτων έχουν στην τάξη τους και ποιο ψηφιακό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης είναι αποτελεσματικότερο θα μπορούν να αναπτύξουν μια αποτελεσματική διδασκαλία. Αυτό είναι σημαντικό αφού έχει βρεθεί ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν γνωρίζουν με ποιους τρόπους η διδασκαλία γίνεται πιο αποτελεσματική στη μάθηση των μαθητών τους (Jacobse & Harskamp, 2011), καθώς αδυνατούν να σχεδιάσουν δραστηριότητες που να προωθούν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (π.χ., Thompson, 2008). Επίσης, οι εκπαιδευτικοί πολλές φορές επικεντρώνονται στο εάν πρέπει να χρησιμοποιούν την τεχνολογία ή όχι στη διδασκαλία των μαθηματικών και έτσι με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής μεταφέρονται στο πώς να χρησιμοποιούν την τεχνολογία. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα αυτά θα είναι χρήσιμα και σε προγράμματα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών. Ο βασικός παραλήπτης των αποτελεσμάτων αυτών είναι ο μαθητής (Stein & Lane, 1996· Stigler & Hiebert, 2004), αφού η ενίσχυση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης τους στα μαθηματικά είναι σημαντική για την «επιβίωση» του στη σύγχρονη τεχνολογικά αναπτυσσόμενη κοινωνία (English, 2010α· Lesh & Zawojewski, 2007).

Εισηγήσεις για Μελλοντικές Έρευνες

Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής, όπως έχει ήδη αναφερθεί, προήλθαν από μαθητές Στ΄ δημοτικού της Κύπρου που δεν επιλέχθηκαν τυχαία. Άρα, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί αν ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα όταν τα δεδομένα προέρχονται από: (i) τυχαία δειγματοληψία, (ii) μαθητές Στ΄ δημοτικού άλλων χωρών, (iii) μαθητές μικρότερης ηλικίας και (iv) μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας.

Ακόμη, τα δεδομένα της συγκεκριμένης έρευνας προήλθαν από τη συμπλήρωση ενός γραπτού δοκιμίου. Για το λόγο αυτό, θα είχε ενδιαφέρον να εξεταστούν με ποιο τρόπο ενισχύονται τα αποτελέσματα της εργασίας με δεδομένα των μαθητών από συνεντεύξεις ή από τη συμπλήρωση ηλεκτρονικών εργαλείων. Αυτό γιατί υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι μέσω αυτών των εργαλείων συλλογής δεδομένων δίνονται ευκαιρίες για ανάδυση των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη των μαθητών (Stacey & Wiliam, 2013). Επίσης, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν σε μελλοντικές έρευνες οι συμπεριφορές των μαθητών στα τρία ψηφιακά περιβάλλοντα διερευνητικής μάθησης που οδηγούν στη μάθησή τους, αξιοποιώντας διάφορες θεωρίες όπως της εργαλειακής προσέγγισης και της οντοσημειωτικής προσέγγισης. Αυτά τα αποτελέσματα πιθανόν να εξηγούν τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής.

Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα της εργασίας προήλθαν από δεδομένα μιας χρονικής στιγμής για το μοντέλο της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και από δεδομένα σε δυο χρονικές στιγμές για την επίδραση της τεχνολογίας. Για αυτό, θα ήταν ενδιαφέρον να επανεξεταστεί η ισχύς των αποτελεσμάτων με βάση διαχρονικές μετρήσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά. Οι διαχρονικές αυτές μετρήσεις θα έδιναν τη δυνατότητα εξέτασης σχέσεων αλληλεξάρτησης μεταξύ των ικανοτήτων που περιγράφουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, οι οποίες δεν ήταν φανερές από τα δεδομένα μιας χρονικής στιγμής.

Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της επίδρασης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης προήλθαν από τη διδασκαλία ενός μόνο ατόμου, της ερευνήτριας. Για το λόγο αυτό, θα μπορούσε μελλοντικά να εξεταστεί με ποιο τρόπο χρειάζεται να επιμορφωθούν οι εκπαιδευτικοί ώστε να ισχύουν τα ίδια θετικά αποτελέσματα της εργασίας σε συνθήκες σχολικής τάξης.

Ακόμη, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο συνεισφέρουν στην ανάπτυξη της ανωτέρου επιπέδου σκέψης οι διάφορες προσεγγίσεις που αξιοποιήθηκαν στα τρία περιβάλλοντα μάθησης τόσο ως προς τη διδασκαλία του περιεχομένου (π.χ., προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, κατασκευή προβλήματος, μάθηση με παιχνίδι κτλ), όσο και ως προς την οργάνωση της τάξης (π.χ., συνεργατική λύση προβλήματος, συζήτηση).

Κλείνοντας, είναι γεγονός ότι οι ανάγκες της διδασκαλίας των μαθηματικών διαφοροποιούνται συνέχεια λόγω της ραγδαίας εξέλιξης της μαθηματικής γνώσης, της τεχνολογίας και γενικά των συνθηκών ζωής που επηρεάζουν τη μάθηση. Άρα σήμερα είναι δύσκολο να προβλεφθεί τι συνθήκες θα υπάρχουν σε πέντε χρόνια. Όμως, τα συμπεράσματα που κατέληξε η εργασία αποτελούν σημαντικά εφόδια για αντιμετώπιση της εξέλιξης της διδασκαλίας των μαθηματικών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Abrami P., Bernard R., Borokhovski E., Waddington D., Wade C., Persson T. (2015). Strategies for teaching students to think critically: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 85*(2), 275-314. doi:10.3102/0034654314551063

Aizikovitsh, E. & Amit, M. (2008) Developing critical thinking in probability lesson. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-13). Mexico: PME.

Aizikovitsh, E., & Amit, M. (2009). Imparting the language of critical thinking while teaching probability. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 833 – 841). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Aizikovitsh, E., & Amit, M. (2011). Developing the skills of critical and creative thinking by probability teaching. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 15*, 1087–1091.

Akcaoglu, M., & Koehler, M. J. (2014). Cognitive outcomes from the game-design and learning (GDL) after-school program. *Computers & Education, 75*, 72-81.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (eds.) (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* New York: Longman.

Applebaum, M., & Leikin, R. (2007). Looking back at the beginning: Teachers' critical reasoning when solving non-realistic tasks. *Montana Mathematical Enthusiast Journal, 4*

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education.* Retrieved from http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 797–810. doi:10.1007/s11858-013-0506-6

Assude, T., Buteau, C., & Forgasz, H. (2010). Factors influencing implementation of technology-rich mathematics curriculum and practices. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 405–419). New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0146-0_19

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). (2015). *General capabilities in the Australian Curriculum: Mathematics*. Retrieved from http://www.australiancurriculum.edu.au/

Aviram, A. (2001). From “computers in the classroom” to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. *Journal of Educational Change*, *1*, 4, 331 – 352.

Bahar, A. & Maker, J. (2011). Exploring the relationship between mathematical creativity and mathematical achievement. *Asia-Pacific Journal of Gifted and Talented Education, 3*(1), 33-47

Bakker, A. (2004). Reasoning about shape as a pattern in variability. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 64-83.

Bakker, A., & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students’ learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 333–358. doi:10.1007/s10649-005-5536-8

Balcaen, P. L., & Klassen, W. (2008). *Teaching critical mathematics thinking (Mathematical mindedness)*. Proceedings of the 2008 Canadian Society for the Study of

Education Congress, University of British Columbia, USA. Retrieved from http://ocs.sfu.ca/fedcan/index.php/csse/csse2008/paper/view/437/308
Banchi, H., & Bell, R. (2008).The many levels of inquiry. *Science and Children, 46*(2), 26 – 29.
Barahal, S. L. (2008). Thinking about thinking. *Phi Delta Kappan, 90*(4), 298–302.
Baran, G., Erdogan, S., & Çakmak, A. (2011). A study on the relationship between six-year-old children's creativity and mathematical ability. *International Educational Studies, 4*(1), 105-111.
Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115 – 131.
Barron, B. (2000). Achieving coordination in collaborative problem-solving groups. *Journal of the Learning Sciences, 8*, 403-436.
Bartolini Bussi, M. G., Taimina, D., & Isoda, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: From Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 42*(1), 19-31. doi:10.1007/s11858-009-0220-6
Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843 – 908). USA: IAP & NCTM.
BECTA. (2009). *Primary Mathematics with ICT: A pupil's entitlement to ICT in primary mathematics*. Retrieved from http://www.bee-it.co.uk/Guidance%20Docs/Becta%20Files/Schools/Curriculum/Mathematics/02%20ICT%20in%20primary%20mathematics%20A%20pupil's%20entitlement.pdf
Bell, R., Smetana, L., & Binns, I. (2005). Simplifying inquiry instruction. *The Science Teacher, 72*(7), 30–34.
Bentler, P. M., & Bonnet, D. C. (1980). Significance tests and goodness of fit in the analysis of covariance structures. *Psychological Bulletin, 88*(3), 588-606.
Berger, E. J. (Ed.) (1973). *Instructional aids* (The 34th Yearbook). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
Berlin, K. S., Williams, N. A., & Parra, G. R. (2014). An introduction to latent variable mixture modeling (part 1): overview and cross-sectional latent class and latent profile analyses. *Journal of Pediatric Psychology, 39*, 174–187. doi:10.1093/jpepsy/jst084
Bloom, B. S., Englehart, M. B., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, the classification of educational goals – Handbook I: Cognitive Domain*. New York: McKay.
Boaler, J. (1998α). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.
Boaler, J. (1998β). Alternative approaches to teaching, learning and assessing mathematics. *Evaluation and Program Planning, 21*, 129–141.
Boaler, J. (2002). Learning from teaching: Exploring the relationship between 'reform' curriculum and equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(4), 239-258.
Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record, 110*(3), 608–645.
Bokhove, C. (2013). Using crises, feedback and fading for online task design. In, C. Margolinas (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22: Task design in mathematics education* (pp. 19-25). Oxford, UK.
Bokhove, C. (2014). Using crises, feedback and fading for online task design. *PNA, 8*(4), 127-138.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2012). Effects of a digital intervention on the development of algebraic expertise. *Computers & Education, 58*(1), 197-208. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.010

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37 – 55.

Boston, M. D., & Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: Increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 119–156.

Bransford, J. D., & Stein, B. S. (1984). *The IDEAL problem solver*. New York: W. H. Freeman.

Bretscher, N. (2014). Exploring the quantitative and qualitative gap between expectation and implementation: A Survey of english mathematics teachers' uses of ICT. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (pp. 43-70). Dordrecht: Springer.

Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher order thinking skills in your classroom*. Virginia, USA: ASCD.

Brown, C. A., Stein, M. K., & Forman, E. A. (1996). Assisting teachers and students to reform their mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 63-93.

Lee, K., Kong, J. N. L., Srikoon, S., Vangpoomyai, P., Rattanavongsa J., & Rachahoon, G. (2014). Do different levels of inquiry lead to different learning outcomes? A comparison between guided and structured inquiry. *International Journal of Science Education*. doi:10.1080/09500693.2014.886347

Budak, S., & Roy, G. A. (2013). Case study investigating the effects of technology on visual and nonvisual thinking preferences in mathematics. *Technology, Instruction, Cognition & Learning, 9*(3), 217-236.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31 – 48.

Butterworth, J., & Thwaites, G. (2005). *Thinking skills*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Butterworth, J., & Thwaites, G. (2013). *Thinking skills: Critical thinking and problem solving* (2nd ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal, 10*(1), 37-50.

Campuzano, L., Dynarski, M., Agodini, R., & Rall, K. (Eds.). (2009). *Effectiveness of reading and mathematics software products: Findings from two student cohorts: Executive summary (NCEE 2009–4042)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance,Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the problem@web project*. Switzerland: Springer.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education: Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp 19-59). UK: Routledge.

Charles, E. S., & Shumar, W. (2007). *Creativity, collaboration and competence: Agency in online synchronous chat environment*. Paper presented at the international conference on Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL '07), New Brunswick, NJ. Paper retrieved from http://GerryStahl.net/vmtwiki/liz.pdf

Cheung, A., & Slavin, R. E. (2011). *The effectiveness of education technology for enhancing reading achievement: A meta-analysis*. Retrieved from http://www.bestevidence.org/reading/tech/tech.html

Chin, E.T., Lin, Y.-C., Chuang, C.-W., & Tuan, H.-L. (2007). The influence of inquiry-based mathematics teaching on 11th grade high achievers: focusing on metacognition. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 129-136). Seoul: PME.

Chukwuyenum, A. N. (2013). Impact of critical thinking on performance in mathematics among senior secondary school students in Lagos State. *Journal of Research & Method in Education, 3*(5), 18-25.

Clark-Wilson, A., Oldknow, A., & Sutherland, R. (2011). *Digital technologies and mathematics education: A report from a working group of the Joint Mathematical Council of the United Kingdom.* London. Retrieved from https://www.ncetm.org.uk/files/9793653/JMC_Digital_Technologies_Report_2011.pdf

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1989). Learning of geometric concepts in a logo environment. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 450 – 467.

Clements, D. H., Sarama, J., Yelland, N. J., & Glass, B. (2008). Learning and teaching geometry with computers in the elementary and middle school. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1 Research Syntheses* (pp. 109-154). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Clements, D. H. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420 - 464). New York: MacMillan.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 57-68). New York: Springer. doi:10.1007/978-0-387-29822-1_4

Cooper, J. L. (1995). Cooperative learning and critical thinking. *Teaching of Psychology, 22*(1), 7-8.

Critical Thinking Consortium (TC^2). (2013). *Critical thinking in elementary mathematics: What? Why? When? and How?*. Retrieved from http://tc2.ca/.

Cronbach, L. J. (1990). *Essentials of psychological testing* (5th Ed.). New York: Harper & Row.

Cuban, L. (1984). Policy and research dilemmas in the teaching of reasoning: Unplanned designs. *Review of Educational Research, 54,* 655-681.

Curcio, F. R. (2010). *Developing data-graph comprehension in grades K-8*. Reston, VA: NCTM.

Dalton, S., & Hegedus, S. (2013). Learning and participation in high school classrooms. In S. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 145 – 166). New York: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-5696-0_12

Day, E. A., Arthur, W. Jr., & Gettman, D. (2001). Knowledge structures and the acquisition of a complex skill. *Journal of Applied Psychology*, *86*(5), 1022–1033. doi:10.1037/0021-9010.86.5.1022

de Jong, T. (2006). Scaffolds for computer simulation based scientific discovery learning. In J. Elen & R. E. Clark (Eds.), *Dealing with complexity in learning environments* (pp. 107-128). London: Elsevier Science Publishers.

de Jong, T., Hendrikse,P., & van der Meij, H. (2010). Learning mathematics through inquiry: A large-scale evaluation. In M. J. Jacobson & P. Reimann (Eds.), *Designs for learning environments of the future: International perspectives form the learning sciences* (pp. 189-203). New York: Springer. doi:10.1007/978-0-387-88279-6_7

Demetriou, A., Kyriakides, L., & Avraamidou, C. (2003). The missing link in relations between intelligence and personality. *Journal of Research in Personality, 37*, 547−581.

Department for Education in England. (2014). *National Curriculum in England: Mathematics programmes of study*. England. Retrieved from https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

Dhombres, J. (1993). Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 401–419. doi:10.1007/BF01273373

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143–163. doi:10.1023/A:1003905929557

Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2014). Inquiry based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300 – 304). New York: Springer.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Springer. doi:10.1007/0-306-47203-1_2

Drijvers, P. (2014). Digital technology in mathematics education: A reflective look into the mirror. In J. Roth & J. Ames (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (pp. 21–28). Münster: WTM-Verlag.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. Je Chuo (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-17187-6_8

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B, Heid, K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Switzerland: Springer.

Drijvers, P., Boon, P., & Reeuwijk, V. (2010). Algebra and technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 179-202). Rotterdam: Sense Publishers.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234. doi: 10.1007/s10649-010-9254-5

Drijvers, P., Doorman, M., Kirschner, P., Hoogveld, B., & Boon, P. (2014). The effect of online tasks for algebra on student achievement in grade 8. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(1-2), 1-18. doi:10.1007/s10758-014-9217-5

Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*, 15–25.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41*, 605–618. doi:10.1007/s11858-009-0184-6

Elliott, B., Oty, K., McArthur, J., & Clark, B. (2001). The effect of an interdisciplinary algebra/science course on students' problem solving skills, critical thinking skills and attitudes towards mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(6), 811-816.

English, L. (2008α). Setting an agenda for international research in mathematics education. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & B. Sriranam (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 3–19). New York: Routledge.

English, L. D. (2008β). Introducing complex systems into the mathematics curriculum. *Teaching Children Mathematics, 15*(1), 38 - 47.

English, L. (2010α). Promoting student understanding through complex learning. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33 - 42). Columbus, Ohio.

English, L. (2010β). Modeling with complex data in the primary school. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* (pp. 287-299). New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0561-1_25

English, L. (2011). Complex learning through cognitively demanding tasks. *Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 483-506.

English, L., & Gainsburg, J. (2016). Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp 313-335). UK: Routledge.

Ennis, R. H. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational Researcher, 18*(3), 4-10.

Ennis, R. (2013). Critical thinking across the curriculum (CTAC). In D. Mohammed, & M. Lewiński (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the Ontario Society for the Study of Argumentation* (pp. 1-16). Windsor, ON: OSSA.

Ennis, R. H., & Millman, J. (2005). *Cornell Critical Thinking Test, Level X*. Seaside, CA: The Critical Thinking Company.

Erbas, A. K., & Yenmez, A. A. (2011). The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. *Computers* & *Education*, *57*(4), 2462-2475. doi:10.1016/j.compedu.2011.07.002

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42 – 53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eseryel, D., Ifenthaler, D., & Ge, X. (2013). Validation study of a method for assessing complex ill-structured problem solving by using causal representations. *Educational Technology Research and Development, 61*(3), *443-463*. doi:10.1007/s11423-013-9297-2

European Commission. (2012). *2012* Joint report of the Council and the Commission on the implementation of the Strategic Framework for European cooperation in education and training (ET 2020): 'Education and Training in a smart, sustainable and inclusive Europe'. *Official Journal of the European Union, 55*, 9 – 18. doi:10.3000/1977091X.C_2012.070/05.eng

European Commission. (2015). *2015* Joint report of the Council and the Commission on the implementation of the Strategic Framework for European cooperation in education and training (ET 2020): 'New priorities for European cooperation in education and training'. *Official Journal of the European Union*, *58,* 25 – 35.

Eysink, T. H. S., de Jong, T., Berthold, K., Kolloffel, B., Opfermann, M., & Wouters, P. (2009). Learner performance in multimedia learning arrangements: An analysis across instructional approaches. *American Educational Research Journal, 46*(4), 1107 – 1149. doi:10.3102/0002831209340235

Facione, P. (1990). *The California Critical Thinking Skills Test: College Level*. Millbrae, CA: The California Academic Press.

Facione, P. (2015). *Critical thinking: What it is and why it counts*. Retrieved from Insight Assessment https://www.insightassessment.com/

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 287-315. doi:10.1007/s10758-014-9213-9

Fathurrohman, M., Porter, A., & Worthy, A. L. (2014). Comparison of performance due to guided hyperlearning, unguided hyperlearning, and conventional learning in mathematics: An empirical study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(5), 682-692. doi:10.1080/0020739X.2013.868541

Ferguson, K. (2010). *Inquiry based mathematics instruction versus traditional mathematics instruction: The effect on student understanding and comprehension in an eighth grade pre-algebra classroom* (Master's thesis, Cedarville University). Retrieved from http://www.digitalcommons. cedarville.edu

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS* (3rd ed.). London: SAGE.

Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., & Paris, A. H. (2004). School engagement: Potential of the concept, state of evidence. *Review of Educational Research, 74*(1), 59-109. doi:10.3102/00346543074001059

Freiman, V. (2014). Types of technology in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 623 – 629). New York: Springer.

Frensch, P. A., & Funke, J. (1995). Definitions, traditions, and a general framework for understanding complex problem solving. In P. Frensch & J.Funke (Eds.), *Complex Problem Solving.The European Perspective* (pp. 3-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Friel, S.N., Arbaugh, F., Mooney, E. S., Pugalee, D. K., Watanabe, T., & Smith, M. S. (2009). *Navigating through problem solving and reasoning in grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

Foong, F. P. (2000). Open-ended problems for higher-order thinking in mathematics. *Teaching and Leaning, 20*(2), 49-57.

Fraivillig, J., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170. doi:10.2307/749608

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Gavin, M. K., Belkin, L. P., Spinelli, A. M., & Marie, J. St. (2001). *Navigating through geometry in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Geiger, V., Faragher, R., & Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modelling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 48-68.

Geiser, C. (2010). *Data analysis with MPLUS*. New York: The Guiford press.

George, D., & Mallery, M. (2010). *Using SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference.* Boston, MA: Allyn & Bacon.

Gokhale, A. A. (1995). Collaborative learning enhances critical thinking. *Journal of Technology Education, 7*(1), 22–30.

Goos, M. (2012). Digital Technologies in the Australian Curriculum: Mathematics – A Lost Opportunity? In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen & D. Siemon (Eds.), *Engaging the Australian National Curriculum: Mathematics – Perspectives from the field* (pp. 135-142). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 73–89. doi:10.1016/S0732-3123(03)00005-1

Goos, M., & Soury-Lavergne, S. (2010). Teachers and teaching: Theoretical perspectives and issues concerning classroom implementation. In C. Hoyles & J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 311 – 328). New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0146-0_14

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276-295). New York: Macmillan.
Guilford, J. P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin, 53,* 267–293.
Guo, K., & Cao, Y. (2015). Survey of mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge and analysis of the influence factors. *Educational Science Research, 3,* 41–48.
Habgood, M. P. J., Ainsworth, S. E., & Benford, S. (2005). Endogenous fantasy and learning in digital games. *Simulation & Gaming,* 36(4), 483-498. doi: 10.1177/1046878105282276
Haladyna, T. M. (1997). *Writing test items to evaluate higher-order thinking*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon
Hamilton, E. (2007). What changes are occurring in the kind of problem solving situations where mathematical thinking is needed beyond school? In R. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), *Models & Modeling as Foundations for the Future in Mathematics Education* (pp. 1-6). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.
Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7,* 27-50
Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children, *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59–74. doi:10.1007/BF00367914
Haylock, D. W. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 68 – 74. doi:10.1007/s11858-997-0002-y
Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Technology and the teaching and learning mathematics: Cross-content implications. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1 Research Syntheses* (pp. 419-431). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.
Herrington, J., & Oliver, R. (2000). An instructional design framework for authentic learning environments. *Educational Technology Research and Development*, *48*(3), 23–48.
Herron, M. D. (1971). The nature of scientific inquiry. *School Review*, *79*(2), 171–212.
Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70–95). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Hershkowitz, R. Tabach, M., & Dreyfus, T. (2016). Computerized environments in mathematics classrooms: A research-design view. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp 617-635). UK: Routledge.
Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan.
Hiebert, J. S, & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students'learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371 - 404). Reston, VA: NCTM.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Hmelo-Silver, C. E., & DeSimone, C. (2013). Problem-based learning: An instructional model of collaborative learning. In C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan, &

A. O'Donnell (Eds.), *The international handbook of collaborative learning* (pp. 370-385). New York, NY: Routledge.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Strasser, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. In M. K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematic, Volume 1*: *Research Syntheses* (pp. 155–205). Greenwich, CT: Information Age.

Hooper, D., Coughlan, J., & Mullen, M. (2008). Structural equation modelling: Guidelines for determining model fit. *Electronic Journal of Business Research Methods, 6*(1), 53-60.

Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). Introduction to mathematics education and technology-rethinking the terrain: The 17th ICMI Study. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 1–15). New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0146-0_1

Hoyles, C., & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 31-57.

Huang, Y.-M., Huang, S.-H., & Wu, T.-T. (2014). Embedding diagnostic mechanisms in a digital game for learning mathematics. *Educational Technology Research and Development, 62*(2), 187-207.

Hsiao, H.-C. (2007). A brief review of digital games and learning. *Proceedings of the 2007 First IEEE International Workshop on Digital Game and Intelligent Toy Enhanced Learning (DIGITEL'07)* (pp. 124-129). Jhongli City. doi:10.1109/DIGITEL.2007.3

Iowa Department of Education (1989). *A guide to developing higher order thinking across the curriculum*. Des Moines, IA: Department of Education. Retrieved from ERIC database (ED 306 550).

Jablonka, E. (2014). Critical thinking in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 121 – 125). New York: Springer.

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2011). *A meta-analysis of the effects of instructional interventions on students' mathematics achievement*. Groningen: University of Groningen, GION. http://gion.gmw.eldoc.ub.rug.nl/FILES/root/2011/ametaanalysis/A_Meta-Analysis_of_the_Effects_1.pdf

Jacobson, M., Kim, B., Miao, C., Shen, Z., & Chavez, M. (2010). Design perspectives for learning in virtual worlds. In M. J. Jacobson & P. Reimann (Eds.), *Designs for learning environments of the future: International perspectives form the learning sciences* (pp. 111-141). New York: Springer. doi:10.1007/978-0-387-88279-6_5

Jacobson, M. J., & Kozma, R. B. (Eds.). (2000). *Innovations in science and mathematics education: Advanced designs for technology of learning* (p. xiii). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Jacobson, M., & Wilensky, U. (2006). Complex systems in education: Scientific and educational importance and implications for the learning sciences. *Journal of the Learning Sciences, 15*, 11–34. doi: 10.1207/s15327809jls1501_4

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Jonassen, D. H., Carr, C., & Yueh, H.-P. (1998). Computers as mindtools for engaging learners in critical thinking. *TechTrends*, 43(2), 24-32.

Jonassen, D. H., Howland, J., Moore, J., & Marra, R. M. (2003). *Learning to solve problems with technology: A constructivist perspective* (2nd. Ed.). Columbus, OH: Merrill/Prentice-Hall.

Jonassen, D. H., Howland, J., Marra, R. M., & Crismond, D. (2008). *Meaningful learning with technology* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Jones, K., Mackrell, K., & Stevenson, I. (2010). Designing digital technologies and learning activities for different geometries. In C. Hoyles & J. B. Lagrange (Eds.),

Mathematics education and technology-Rethinking the terrain (pp. 47-60). New York: Springer.
Jupri, A., Drijvers, P. H. M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2016). An instrumentation theory view on students' use of an applet for algebraic substitution. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 23*(2), 63-80.
Kafai, Y. B. (2006). Playing and making games for learning: Instructionist and constructionist perspectives for game studies. *Games and Culture, 1*(1), 36–40.
Kaput, J., & Hegedus, S. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. In R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 173 - 192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Κάττου, Μ. (2013). *Μαθηματική δημιουργικότητα: Η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για το άτομο, τη διαδικασία, το αποτέλεσμα και το εκπαιδευτικό περιβάλλον* (Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή). Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος.
Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 167-181. doi: 10.1007/s11858-012-0467-1
Kelly, A., Baek, J. Y., Lesh, R. A., & Bannan-Ritland, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 3 - 18). New York: Routledge.
Kidman, G. C. (1997). Area integration rules. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 271-277). New Zealand: MERGA.
King, F.J., Goodson, L., & Rohani, F. (1998) *Higher order thinking skills: Definitions, strategies, assessment*. Educational Service Program. Retrieved from: http://www.cala.fsu.edu/files/higher_order_thinking_skills.pdf
Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On excellence and creativity: A study of gifted and expert students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 221–242). Rotterdam: Sense Publishers
Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling.* New York: The Guilford Press.
Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Köller, O. (2013). An intervention including an online game to improve grade 6 students' performance in early algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 510-549.
Kontoyianni, K. N. (2014). *Unraveling mathematical giftedness: Characteristics, cognitive processes and identification* (Unpublished doctoral dissertation). University of Cyprus, Cyprus.
Kordaki, M. (2014). The challenge of multiple perspectives: Multiple solution tasks for students incorporating diverse tools and representation systems. *Technology, Pedagogy and Education*. doi:10.1080/1475939X.2014.919346
Kordaki, M. & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broader context: Exploiting the tools of Cabri II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(1), 99-135.
Kotsopoulos, D. (2010). When collaborative is not collaborative: Supporting student learning through self-surveillance. *International Journal of Educational Research, 49*, 129-140.
Koyuncu, I., Akyuz, D., & Cakiroglu, E. (2014). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 837-862.

Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 225-250

Krulik, S. & Rudnick, J.A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative-thinking skills. In L. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K – 12* (pp. 138-145). VA: Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Kulm, G. (1990). Assessing higher order mathematical thinking: What we need to know and be able to do. In G. Kulm (Ed.), *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics* (pp. 1-4). Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review, 7*, 51 – 61.

Laborde, C., & Sträßer, R. (2010). Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 42*(1), 121–133. doi:10.1007/s11858-009-0219-z

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 237-270). Dordecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129 – 145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li, (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 59-80). Dordrecht, the Netherlands: Springer. doi:10.1007/978-3-319-04993-9_5

Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer & N. Vondrová. (Eds.), *Proceedings of Ninth Conference of the European Research in Mathematics Education* (pp. 1024 – 1031). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161 – 168). Seoul: PME.

Leikin, R. & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 183–197.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 203–223.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 159–166. doi:10.1007/s11858-012-0459-1

Lesh, R. (2006). Modeling students modeling abilities: The teaching and learning of complex systems in education. *Journal of the Learning Sciences,15*, 45–52.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundation of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond* *constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 9–34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R. A., Sriraman, B., & English, L. D. (2014). Theories of learning mathematics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.615–623). New York: Springer. doi: 978-94-007-4978-8.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modelling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes*. Washington: NSF. Retrieved from ERIC database (ED314255)

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modelling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R.A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 43*, 325 – 336. doi:10.1007/s11858-011-0329-2

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 776–785). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73-90. doi:10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2013). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(4), 311-333.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry: Theory, research and practical perspectives*. The Netherlands: Sense Publishers.

Levin, T., & Wadmany, R. (2006). Teachers' beliefs and practices in technology-based classrooms: A developmental view. *Journal of Research on Technology in Education, 39*(2), 157–181.

Lewis, A., & Smith, D. (1993). Defining higher order thinking. *Theory into Practice, 32*(3), 131 – 137.

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*(3), 215 – 243. doi:10.1007/s10648-010-9125-8

Liljedahl, P. (2008). Mathematical creativity: in the words of the creators. In R.Leikin, *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 153-159). Haifa, Israel.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An affective experience? *ZDM*, *45*(2), 253-265. doi:10.1007/s11858-012-0473-3

Lima, M., Koehler, M.J., & Spiro, R.J. (2004). Cognitive flexibility hypertexts and the development of creative and critical thinking in business education: The Panteon project. *FACEF Pesquisa, 7*(3), 109-127

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 779-795. doi:10.1007/s11858-013-0528-0

Mann, E. (2006). Creativity: The essense of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236 – 260.
Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modeling: Issues and techniques*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Markovitz, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.
Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist*, *59*(1), 14-19.
McGraw, R., & Grant, M. (2005). Investigating mathematics with technology: Lesson structures that encourage a range of methods and solutions. In W. Masalski (Ed.), *Technology-supported mathematics learning environments* (pp. 303-317). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Meissner, H. (2005). Challenges to provoke creativity. *Proceedings of the 3rd East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME 3)*. Shanghai, China.
Meissner, H. (2008). Creativity or Giftness? In R.Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 165-172). Haifa: Israel.
Mestre, J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology, 23,* 9-50.
Michko, G., Lin, M.-F., & Park, K. (2003). An investigation of critical thinking skills in computer- based educational software using content analysis. In C. Crawford, N. Davis, J. Price, R. Weber, & D. A. Willis (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2003* (pp. 755-756). Chesapeake, VA: AACE.
Miri, B., David, B., & Uri, Z. (2007). Purposely teaching for the promotion of higher-order thinking skills: A case of critical thinking. *Research in Science Education, 37,* 353-369
Mitchell, A., & Savill-Smith, C. (2004). *The use of computer and video games for learning: A review of the literature*. London: LSDA.
Mousoulides, N. (2013). Mathematical modeling with SimCalc: Enhancing students' complex problem solving skills using a modeling approach. In S. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 363 – 382). New York: Springer.
Moyer, P. S., Bolyard, J. J.,& Spikell, M. A. (2002). What are virtualmanipulatives? *Teaching Children Mathematics, 8,* 372–377.
Murphy, K. R., & Davidshofer, C. O. (2001). *Psychological testing: Principles and application* (5th ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.
Muthén, B. (2008). Latent variable hybrids: Overview of old and new models. In G. R. Hancock, & K. M. Samuelsen (Eds.), *Advances in latent variable mixture models* (pp. 1–24). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.
Muthén, L. K., & Muthén B. O. (1998). *Mplus user's guide*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
National Center for Education Statistics. (1996). *High school seniors' instructional experiences in science and mathematics*. Washington, D.C.: U.S Government Printing Office.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). *The role of technology in the teaching and learning of mathematics.* Retrieved from http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

National Research Council. (1996). *National science education standards*. Washington, DC: National Academy Press.
National Research Council. (2000). *Inquiry and national science education standards. A guide for teaching and learning*. Washington, DC: National Academy Press.
National Research Council. (2009). *Rising above the gathering storm* two years later: *Accelerating progress toward a brighter economic future.* Washington, D.C.: The National Academies Press.
Nesbitt-Hawes, P. J. (2005). *Higher order thinking skills in a science classroom computer simulation* (Master's thesis). Queensland University of Technology, Brisbane, Australia.
Nitko, A. J., & Brookhart, S. M. (2007). *Educational assessment of students* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
Noss, R., & Hoyles, C. (1996). The visibility of meanings: modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 3-31
Noss R., Hoyles C., Mavrikis M., Geraniou E., Gutierrez- Santos S., & Pearce D. (2009) Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM, 41*(4), 493–503. doi:10.1007/s11858-009-0182-8
Organisation for economic co-operation and development (OECD). (2004). *Problem solving for tomorrow's world: First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003*. Paris, France: OECD. Retrieved from: http://www.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf
Organisation for economic co-operation and development (OECD). (2006). *Pisa released items-Mathematics.* Paris, France: OECD. Retrieved from: http://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf
Organisation for economic co-operation and development (OECD) (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy.* OECD. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en
Olive, J., & Makar, K. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 133–177). New York: Springer.
Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L. K., Kosheleva, O., & Sträßer, R. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 133-177). New York: Springer.
Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.
Partnership for 21st Century Skills (P21). (2015). *P21 Framework Definitions*. Retrieved from http://www.p21.org/index.php
Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Pehkonen, E. (1997).The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM, 29*(3), 63-67.
Peterson, P. L. (1988). Teaching for higher-order thinking in mathematics: The challenge for the next decade. In D. A. Grouws & T. J. Cooney (Eds.), *Perspective on Research on Effective Mathematics Teaching* (Vol. 1, pp. 2–26). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computes for Mathematical Learning, 15*(1), 1-20.
Pierce, R., Stacey, K. & Barkatsas, A. N. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers and Education, 48*(2) 285-300.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013α). Developing and enhancing elementary school students' higher order mathematical thinking with SimCalc. In S. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 319 – 340). New York: Springer.
Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013β). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: Their mathematical creative abilities. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 199 – 213. doi:10.1007/s11858-012-0475-1
Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2014). Sixth grade students' visual cognitive styles and three-dimensional geometrical abilities. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1-2), 289 – 306.
Protheroe, N. (2007). What Does Good Math Instruction Look Like?. *Principal*, 7(1), 51 – 54.
Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in Algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research, 80*(3), 372–400.
Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*, 189-194.
Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity. A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.
Raudenbush, S. W., Rowan, B., & Cheong, Y. F. (1993). Higher order instructional goals in secondary schools: Class, teacher, and school Influences. *American Educational Research Journal, 30*(3), 523–553.
Reed, H., Drijvers, P., & Kirschner, P. (2010). Effects of attitudes and behaviours on learning mathematics with computer tools. *Computers and Education, 55*(1), 1–15.
Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers'use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*, 211 – 246.
Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy Press.
Resnick, L., B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimals fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.
Robertson, J., & Howells, C. (2008). Computer game design: opportunities for successful learning. *Computers & Education, 50*(2), 559–578.
Rooney, C. (2012). How am I using inquiry-based learning to improve my practice and to encourage higher order thinking among my students of mathematics? *Educational Journal of Living Theories, 5*(2), 99-127.
Rosen, Y., & Foltz, P. W. (2014). Assessing collaborative problem solving through automated technologies. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning, 9*(3), 389－410.
Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity Research Journal, 18*, 279–291.
Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*, 145–166.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334 – 370). USA: NCTM.
Schofield, J. W. (2002). Increasing the generalizabilty of qualitative research. In A. M. Huberman, & M. B. Miles (Eds.), *The qualitative researchers' companion* (pp. 171-203). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Sedighian, K., & Sedighian, A. (1996). Can educational computer games help educators learn about the psychology of learning mathematics in children? *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education -- the North American Chapter*. Florida, USA. Retrieved from http://www.citeulike.org/group/932/article/383707

Selden, A., & Selden, J. (2005). *Perspectives on advanced mathematical thinking, mathematical thinking and learning, 7*(1), 1-13. doi:10.1207/s15327833mtl0701_1

Senk, S. L., Beckmann, C. E., & Thompson, D. R. (1997). Assessment and grading in high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics* Education, 28(2), 187-215.

Sheffield, L. J. (2000). Creating and Developing Promising Young Mathematicians. *Teaching Children Mathematics*, *6*(6), 416 – 419.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in Mathematics: Developing mathematical promise in K - 8 pupils*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sherman M (2011). An examination of the role of technological tools in relation to the cognitive demand of mathematical tasks ın secondary classrooms (Unpublished doctorate thesis). University of Pittsburgh.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75 - 80.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539.

Silver, E. A., Smith, M. S., & Nelson, B. S. (1995). The QUASAR project: Equity concerns meet mathematics education reform in the middle school. In E. Fennema, W. Secada & L. B. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 9–56). New York: Cambridge University Press.

Sinclair, N., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Digital technologies in the early primary school classroom. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp 662-686). UK: Routledge.

Singh, B. (1987). The development of tests to measure mathematical creativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *18*(2), 181 – 186. doi:10.1080/0020739870180203

Siswono, T. Y. E. (2010). Leveling students' creative thinking in solving and posing mathematical problem. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *1*(1), 20–41

Slangen, L. A. M. P., Fanchamps, N. L. J. A., & Kommers, P. A. M. (2008). A case study about supporting the development of thinking by means of ICT and concretization tools. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning, 18*(3), 305-322.

Smeets, E. (2005). Does ICT Contribute to Powerful Learning Environments in Primary Education?. *Computers & Education*, *44*, 343–355.

Smith, M.S., Bill, V., & Hughes, E.K. (2008). Thinking through a lesson protocol: A key for successfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(3), 132-138.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344-350.

Sophocleous, P., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Creativity in three-dimensional geometry: How an interactive 3D-geometry software environment enhance it? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (pp. 1143 - 1153). Rzeshów, Poland: University of Rzeszów.

Σοφοκλέους, Π., & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2014). Ο ρόλος της τεχνολογίας στην ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά σε μαθητές δημοτικού σχολείου. Σε Χ. Λεμονίδης & Κ. Νικολαντωνάκης (Επιμ.), *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ).* Φλώρινα, Ελλάδα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Sophocleous, P., & Pitta-Pantazi, D. (2015), Higher order thinking in mathematics. In F. M. Singer, F. Toader, & C. Voica (Eds.), *Proceedings of the 9th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 160-165). Sinaia, Romania: MCG.

Squire, K. (2003). Video games in education. *International Journal of Intelligent Simulations and Gaming, 2*(1). Retrieved from https://website.education.wisc.edu/kdsquire/tenure-files/39-squire-IJIS.pdf

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 41*(1-2), 13–27. doi:10.1007/s11858-008-0114-z

Stacey, K., & Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 721–751). New York / Berlin: Springer.

Standler, R. B. (1998). *Creativity in science and engineering***.** Retrieved from http://www.rbs0.com/create.htm

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404 – 411.

Stein,M . K., Grover,B . W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*, 455-488.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and evaluation, 2*, 50-80.

Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M.A., & Silver, E.A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. New York: Teachers College Press, Columbia University.

Sternberg, R. J., Lipka, J., Newman, T., Wildfeuer, S., & Grigorenko, L. (2006). Triarchically-based instruction and assessment of sixth-grade mathematics in a Yup'ik cultural setting in Alaska. *Gifted and Talented International, 21*(2), 9-19.

Stevens, J. P. (2002). *Applied multivariate statistics for the social sciences* (4th ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: The Free Press.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). Studying the classroom implementation of tasks: High-level mathematical tasks embedded in 'real-life' contexts. *Teaching and Teacher Education, 24,* 859-875. doi:10.1016/j.tate.2007.11.015

Swartz, R.J., Fischer, S.D., & Parks, S. (1998) *Infusing the Teaching of Critical and Creative Thinking into Secondary Science: A Lesson Design Handbook.* California: Critical Thinking Books & Software.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2006). Solving equations in a spreadsheets environment. In C. Hoyles, J. B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the 17th*

ICMI Study Conference ‘‘Technology Revisited’’ (pp. 539–545). Hanoi, Vietnam: Hanoi University of Technology.
Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle grades level: How are they related? *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 227-238.
Tabach, M., Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Dreyfus, T. (2008). Computerized environments in mathematics classrooms: A research-design view. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & B. Sriranam (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 784 – 805). New York: Routledge.
Tabaghi, G., & Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, *18*(3), 149-164. doi:10.1007/s10758-013-9206-0
Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1 Research Syntheses* (pp. 207-258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Thompson, T. (2008). Mathematics teachers’ interpretation of higher-order thinking in Bloom’s taxonomy. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 3*(2), 96–109. Retrieved from http://www.iejme.com/022008/d2.pdf
Treffinger, D. J., Isaksen, S. G., & Stead-Dorval, K. (2003). *Creative problem solving: A contemporary framework for managing change.* CCL & CPSB. Retrieved from http://www.cpsb.com/resources/downloads/public/CPSVersion61B.pdf
Treffinger, D. J., Isaksen, S. G., & Stead-Dorval, B. (2006). *Creative Problem Solving: An introduction* (4th ed.). Waco, TX: Prufrock Press.
Torrance, E. P. (1974). *A manual for the Torrance Tests of creative thinking.* Princeton, NJ: Personnel Press.
Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81 – 95. doi:10.1007/s10649-008-9133-5
Tularam, G. A. (1994). Higher order thinking and mathematics. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Geake (Eds.), *Proceedings of 17th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia - Challenges in mathematics: Constraints on construction* (pp. 641-648). Lismore: MERGA.
Watson, J. M., Collis, K. F., Callingham, R. A., & Moritz, J. B. (1995). A model for assessing higher order thinking in statistics. *Educational Research and Evaluation, 1*, 247-275.
Watson, G., & Glaser, E. (2002). *Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal: Practice test*. London, UK: Pearson.
Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1998). Longitudinal development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal, 10*, 103-127
Way, J. (2008). Using questioning to stimulate mathematical thinking. *APMC*, *13*(3), 22-27.
Wilson, J. W. (1971). Evaluation of learning in secondary school mathematics. In B.S. Bloom, J. T. Hastings, & G. F. Madaus (Eds), *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York, NY: McGraw – Hill.
Wheeler, S. (2012). E-Learning and digital learning. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the sciences of learning* (pp. 1109-1111). New York: Springer.
White, T., & Pea, R. (2011). Distributed by design: On the promises and pitfalls of collaborative learning with multiple representations. *Journal of the Learning Sciences, 20*(3), 489-547. doi:10.1080/10508406.2010.542700.

Widjaja, W., Dolk, M., & Fauzan, A. (2010). The role of contexts and teacher's questioning to enhance students' thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 33*(2), 168-186.

Willingham, D. T. (2007). Critical thinking: Why is it so hard to teach? *American Educator*, 8-18.

Wood, T. (2002). What does it mean to teach differently? In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds), *Proceedings of the Twenty-fifth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 61–67). Auckland: MERGA.

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning, 7*, 42 – 57.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2010). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. In B. Sriraman, & K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5-28). Sense Publishers.

Yushau, B., Mji, A., & Wessels, D.C.J. (2003) *Creativity and Computer in the Teaching and Learning of Mathematics.* Technical Report Series. Department of Mathematical Sciences. King Fahd University of Petroleum & Minerals.

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων. (2010). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών*. Λευκωσία, Κύπρος: Συγγραφέας. Retrieved from http://www.moec.gov.cy/analytika_programmata/programmata_spoudon.html

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου, & Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης. (2003). *Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού*. Λευκωσία, Κύπρος: Συγγραφέας.

Zembat, I. O. (2008). Pre-service teachers‟ use of different types of mathematical reasoning in paper-and-pencil versus technology-supported environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(2), 143-160.

Zohar, A., & Dori, Y. J. (2003). Higher order thinking skills and low-achieving students: Are they mutually exclusive? *Journal of the Learning Sciences, 12*(2), 145–181.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). Greenwich, CT: Information Age Publishing

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

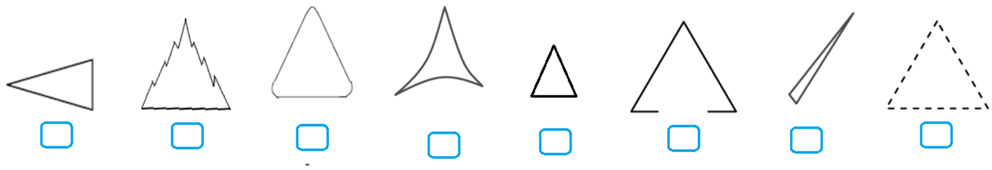
Δοκίμιο Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά

ΟΙ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όνομα: ____ Τάξη: ________

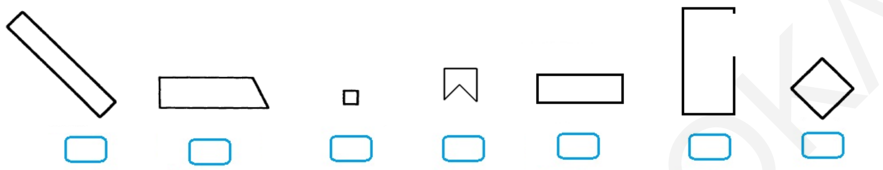
(ΕΡΓΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ)

1. Να σημειώσεις τα τρίγωνα με √.



(Β1: Αναγνώριση τριγώνων)

2. Να σημειώσεις τα ορθογώνια με √.



(Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων)

3. Να τοποθετήσεις στο ☐ το κατάλληλο σύμβολο: <, > και = , για να συγκρίνεις τους αριθμούς.

(α) 238 ☐ 2380 (β) 0,06 ☐ 0,6 (γ) 2,42 ☐ 2,420

(Β3: Σύγκριση μεγέθους αριθμών)

4. Να απαντήσεις στις ερωτήσεις χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση.

(α) Σε πόσα παιδιά αρέσει να διαβάζουν βιβλία στον ελεύθερό τους χρόνο; ☐

(β) Τι αρέσει στα περισσότερα παιδιά να κάνουν στον ελεύθερό τους χρόνο;

____

(γ) Πόσα περισσότερα είναι τα παιδιά που τους αρέσει να παίζουν ηλεκτρονικά παιχνίδια από τα παιδιά που τους αρέσει να διαβάζουν βιβλία στον ελεύθερό τους χρόνο; ____

(Β4: Απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος)

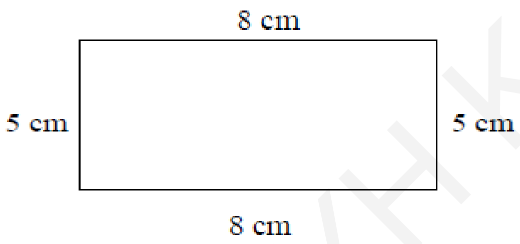
5. Να λύσεις το πιο κάτω πρόβλημα:

Το Σάββατο παρακολούθησαν μια θεατρική παράσταση 583 θεατές. Την Κυριακή παρακολούθησαν την παράσταση 650 θεατές. Πόσοι περισσότεροι θεατές παρακολούθησαν την παράσταση την Κυριακή;

(Β5: Επίλυση προβλήματος αφαίρεσης τριψήφιων αριθμών με δομή σύγκρισης)

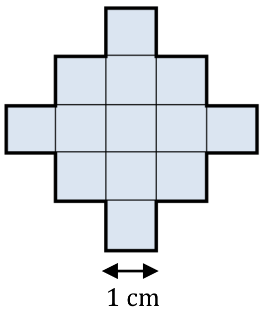
6. Να γράψεις κάτω από κάθε σχήμα την περίμετρο και το εμβαδόν του.

(i)



Περίμετρος:

(ii)



Περίμετρος:

(Β6: Υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων)

Εμβαδόν:

Εμβαδόν:

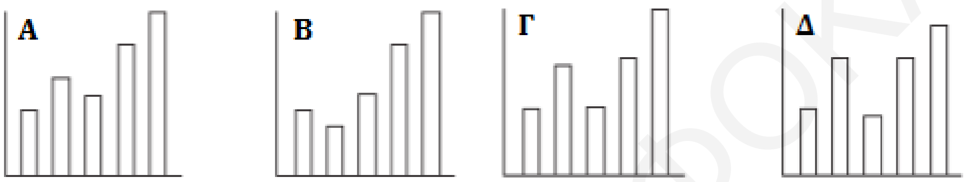
(Β7: Υπολογισμός εμβαδού σχημάτων)

Όνομα: ____ Τάξη: ________

(ΕΡΓΑ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ)

1. Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των κατοίκων σε πέντε χωριά της Κύπρου. Να βάλεις σε κύκλο τη γραφική παράσταση που δείχνει τα δεδομένα του πίνακα.

Χωριά	Λύμπια	Λιοπέτρι	Ξυλοτύμβου	Κολόσσι	Γεροσκήπου
Αριθμός Κατοίκων	2997	4432	3761	5980	7440



(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

(Κ4: Επιλογή κατάλληλου ραβδογράμματος για αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων που δίνονται σε πίνακα)

2. Σε μια βιτρίνα ενός καταστήματος παιχνιδιών γράφει τα εξής:

Μια μπάλα και ένα αυτοκινητάκι στοιχίζουν μαζί €2. Ένα αυτοκινητάκι και μια κούκλα στοιχίζουν μαζί €3. Η μπάλα, το αυτοκινητάκι και η κούκλα έχουν διαφορετικές τιμές.

Με βάση αυτές τις πληροφορίες, ποιο από τα πιο κάτω ισχύει; Να το βάλεις σε κύκλο.

(i) Μια μπάλα στοιχίζει περισσότερο από μια κούκλα.

(ii) Ένα αυτοκινητάκι στοιχίζει περισσότερο από μια κούκλα.

(iii) Μια κούκλα στοιχίζει περισσότερο από €1.

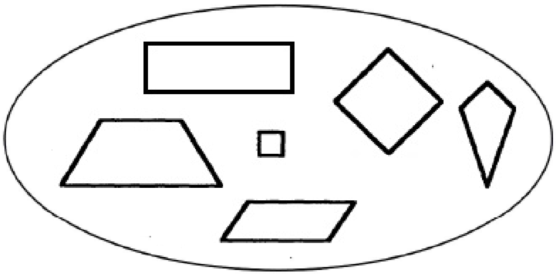
(iv) Μια μπάλα στοιχίζει λιγότερο από €1.

(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

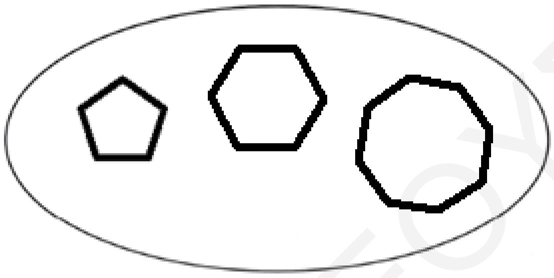
(Κ5: Επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα)

3. Δίνονται πιο κάτω ομάδες σχημάτων. Τα σχήματα σε κάθε ομάδα έχουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό. Να το βρεις και να το γράψεις στο χώρο που δίνεται.

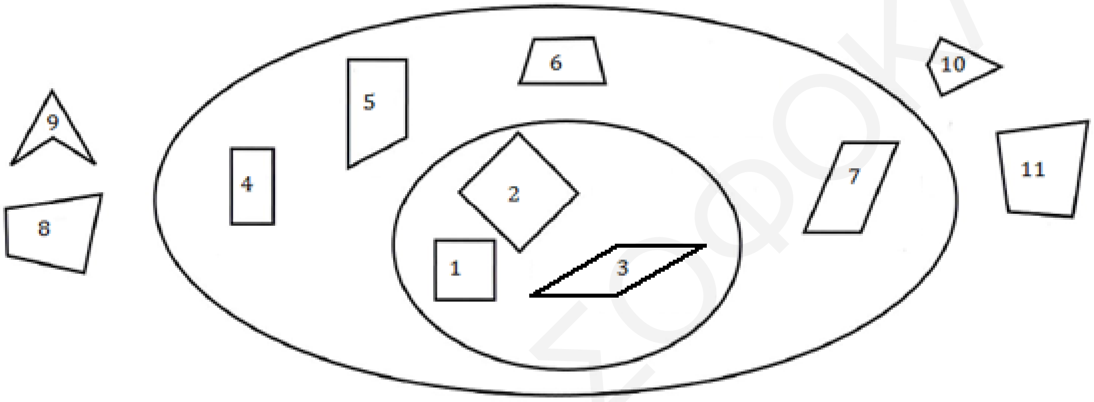
(α)



(β)



(γ)



Κοινό χαρακτηριστικό των σχημάτων 1, 2, 3 :

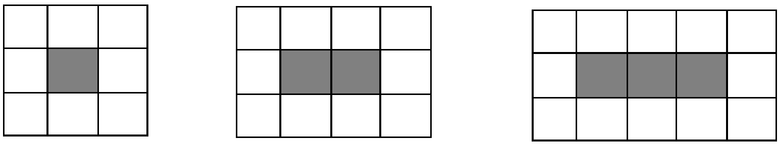
Κοινό χαρακτηριστικό των σχημάτων 4, 5, 6, 7:

Κοινό χαρακτηριστικό των σχημάτων 8, 9, 10, 11:

(Τροποποιήθηκε από Gavin, Belkin, Spinelli, & Marie, 2001)

(Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων)

4. (α) Να συνεχίσεις το μοτίβο.



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3 Σχήμα 4

(Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο)

(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα.

	Αριθμός άσπρων τετραγώνων (□)	**Αριθμός μαύρων τετραγώνων(■)**	**Συνολικός αριθμός τετραγώνων (□ και ■)**
Σχήμα 1			
Σχήμα 2			
Σχήμα 3			
Σχήμα 4			
Σχήμα 5			

(Κ2: Συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων)

(γ) Το σχήμα που έχει 7 μαύρα τετράγωνα, πόσα άσπρα τετράγωνα έχει;

____

____

(Κ3: Επέκταση αριθμητικού μοτίβου)

(δ) Μπορεί ένα σχήμα να έχει 11 άσπρα τετράγωνα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

____

____

(Κ7: Αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων αριθμών- επεξήγηση κανόνα)

(ε) Το σχήμα που έχει συνολικά 30 τετράγωνα, από πόσα άσπρα τετράγωνα και πόσα μαύρα τετράγωνα αποτελείται;

____

____

(Κ9: Τεκμηρίωση της δομής δοσμένου αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6)

(στ) Μπορεί ένα σχήμα να έχει συνολικά 59 τετράγωνα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

____

____

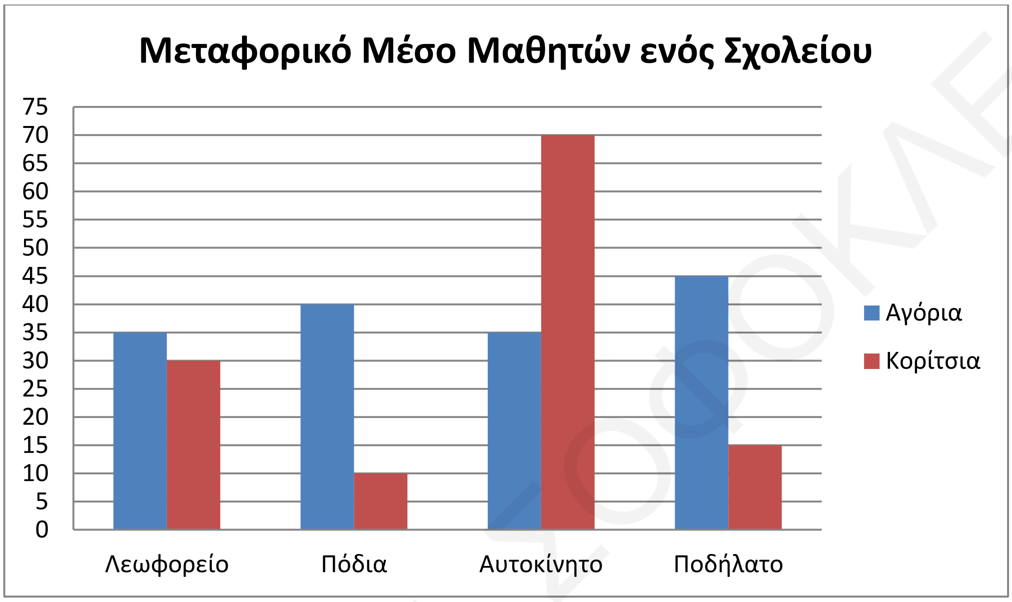
(Κ8: Αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο με γενικό κανόνα 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα)

(Τροποποιήθηκε από Friel, Arbaugh, Pugalee, Watanabe, & Smith, 2009)

Όνομα: ____ Τάξη: ________

(ΕΡΓΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ)

1. Να κατασκευάσεις όσες περισσότερες και διαφορετικές ερωτήσεις μπορείς, με βάση την πιο κάτω γραφική παράσταση.



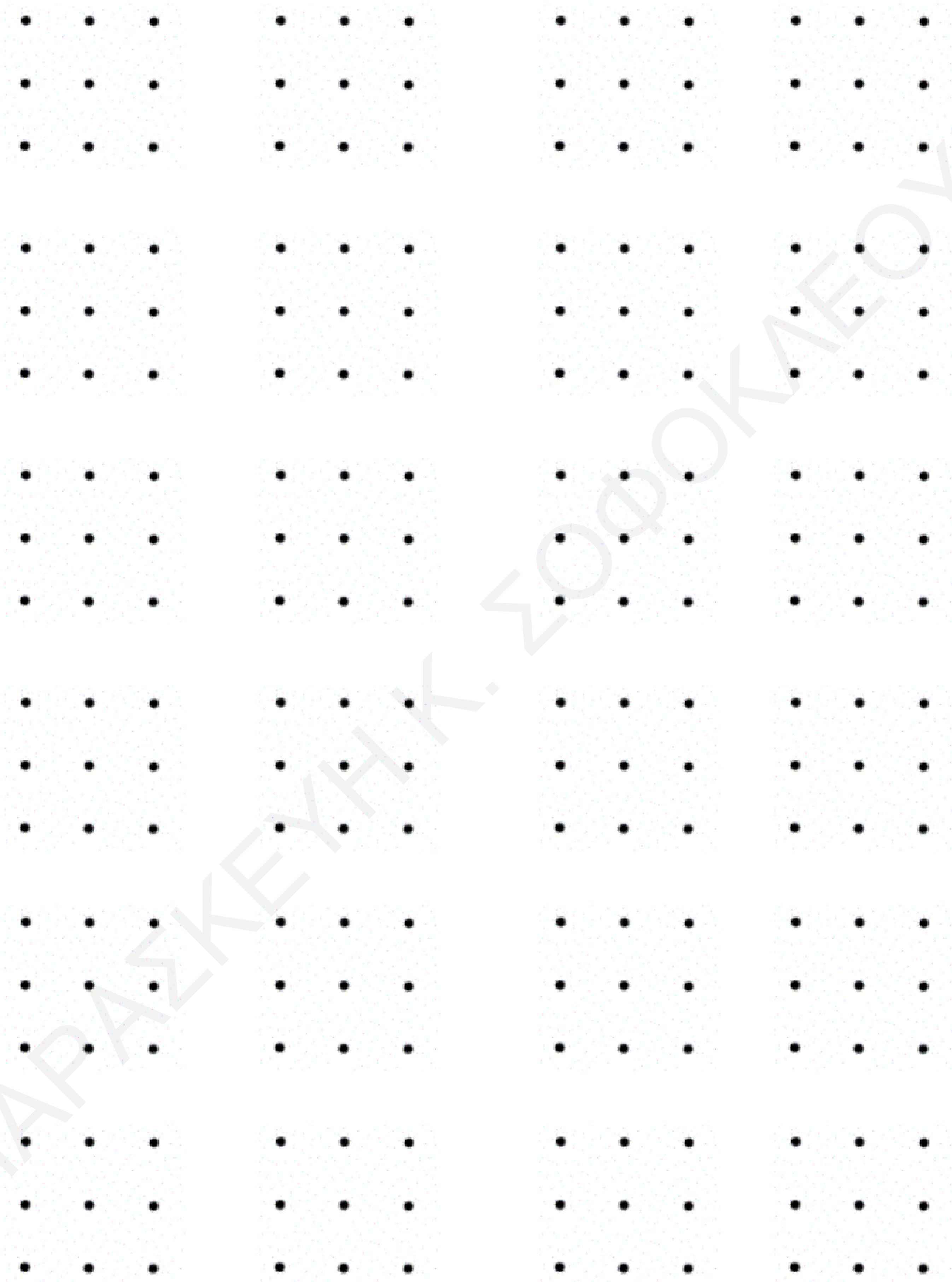
(Δ1: Κατασκευή ερωτήσεων)

2. Να γράψεις όσες περισσότερες και διαφορετικές μαθηματικές προτάσεις μπορείς με αποτέλεσμα 24. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις όσους αριθμούς και όσες πράξεις θέλεις.

Για παράδειγμα, μια απάντηση θα μπορούσε να ήταν 3Χ8=24.

(Δ2: Κατασκευή μαθηματικών προτάσεων με αποτέλεσμα 24)

3. Να κατασκευάσεις όσα περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορείς με εμβαδόν 2 cm^2.



(Τροποποιήθηκε από Haylock, 1997)

(Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2)

4. Να χρησιμοποιήσεις τους πιο κάτω αριθμούς, για να δημιουργήσεις όσες περισσότερες ομάδες τεσσάρων αριθμών με κοινό χαρακτηριστικό μπορείς. Κάθε φορά να ονομάζεις τις ομάδες που δημιουργείς.

2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 21, 25, 28, 49

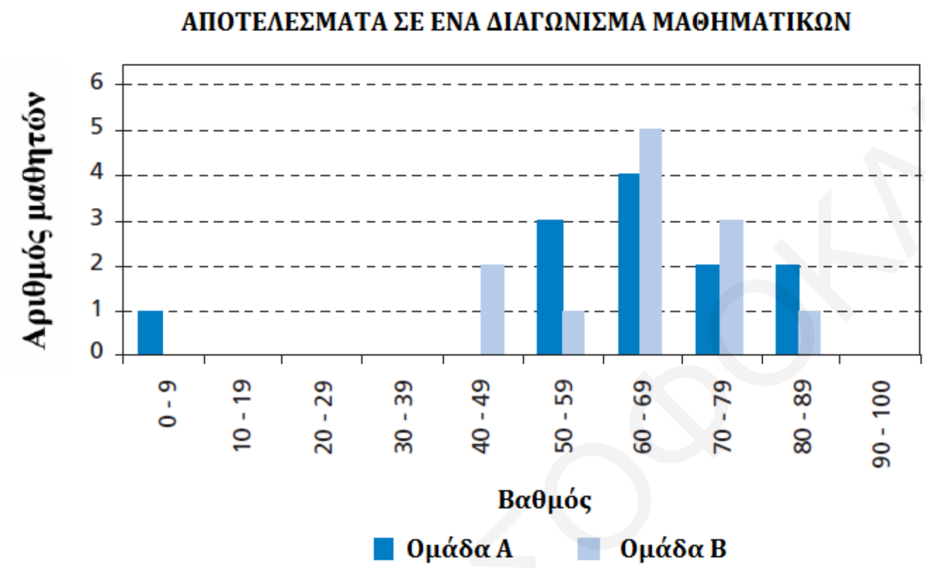
(Τροποποιήθηκε από NRICH Project: Sets of four numbers - https://nrich.maths.org/2660).

(Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα)

ΣΚΕΦΤΟΜΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όνομα: ____ Τάξη: ________

1. Η δασκάλα με βάση την πιο κάτω γραφική παράσταση υποστηρίζει ότι η ομάδα Β είχε καλύτερα αποτελέσματα από την ομάδα Α στο διαγώνισμα των μαθηματικών. Όμως, οι μαθητές της ομάδας Α διαφωνούν με τη δασκάλα τους.



Σημείωση: Οι μαθητές περνούν με επιτυχία το διαγώνισμα, όταν ο βαθμός τους είναι μεγαλύτερος από 50.

Με ποιο τρόπο μπορούν να πείσουν οι μαθητές της ομάδας Α τη δασκάλα τους ότι μπορεί να κάνει και λάθος; Να γράψεις μια πειστική μαθηματική επεξήγηση.

____

____

____

____

____

____

____

____

(Τροποποιήθηκε από OECD, 2006)

(Σ1: Σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα διπλού ραβδογράμματος)

2. Στο ευρωπαϊκό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου οι εθνικές ομάδες κάθε χώρας αρχικά είναι σε ομίλους των τεσσάρων ομάδων και παίζουν μεταξύ τους έξι συνολικά αγώνες. Οι πρώτες δυο ομάδες κάθε ομίλου περνούν στο επόμενο στάδιο, των πρώτων 16 ομάδων της Ευρώπης.

Οι ομάδες παίρνουν 3 μονάδες για κάθε παιχνίδι που κερδίζουν, 1 μονάδα για ισοπαλία και καμία μονάδα για παιχνίδια που χάνουν.

Μετά από τέσσερα παιχνίδια, τα αποτελέσματα του ομίλου Α παρουσιάζονται πιο κάτω:

Ομάδα	**Αριθμός παιχνιδιών που έπαιξαν μέχρι στιγμής**	**Βαθμοί**	**Νίκη**	**Ισοπαλία**	**Ήττα**	**Αριθμός τερμάτων που έβαλαν**	**Αριθμός τερμάτων που δέχτηκαν**
Ελλάδα	2	4				3	2
Ισπανία	2	4				2	1
Πορτογαλία	2	3				3	2
Ρωσία	2	0				0	3

Έχουν μείνει ακόμη δυο αγώνες:

- ✓ Ένα παιχνίδι μεταξύ Ισπανίας & Πορτογαλίας
- ✓ Ένα παιχνίδι μεταξύ Ελλάδας & Ρωσίας

(α) Να συμπληρώσεις τα στοιχεία που λείπουν από τον πιο πάνω πίνακα.

(β) Ποια είναι τα αποτελέσματα των αγώνων που έχουν γίνει;

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ	**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ**
Πορτογαλία – Ελλάδα	
Ελλάδα – Ισπανία	
Ισπανία – Ρωσία	
Ρωσία – Πορτογαλία	

(γ) Ποιες δυο ομάδες από τις τέσσερις μπορούν να προκριθούν στους 16; Να εξηγήσεις.

Σημείωση: Σε περίπτωση που δυο ομάδες πάρουν ίδιους βαθμούς στο τέλος των έξι αγώνων, η ομάδα που έβαλε τα περισσότερα τέρματα θα προκριθεί. Αν όμως και οι δυο ομάδες έβαλαν ίδιο αριθμό τερμάτων, θα προκριθεί η ομάδα που δέχτηκε λιγότερα τέρματα από αντίπαλες ομάδες.

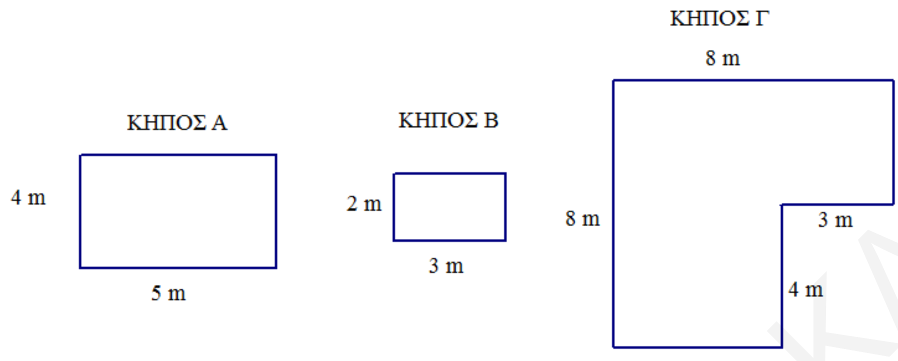
(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

(Σ2: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης)

3. Μια εταιρεία που φροντίζει κήπους χρεώνει ως εξής:

Για το κούρεμα του γρασιδιού και της περίφραξης του κήπου Α €74.
Για το κούρεμα του γρασιδιού και της περίφραξης του κήπου Β €36.

Πόσα θα χρεώσει για τον κήπο Γ;



(Οι κήποι δεν είναι σχεδιασμένοι με ακρίβεια.)

(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

(Σ3: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων με βάση δεδομένα)

4. Πιο κάτω δίνονται οι τιμές για την είσοδο στο ζωολογικό κήπο Λεμεσού.

	ΤΙΜΕΣ
Ενήλικας	€12
Παιδί (4 μέχρι 16 ετών)	€6
Παιδί (μικρότερο από 4 ετών)	Δωρεάν
Συνταξιούχος	€8
Οικογενειακό πακέτο (2 ενήλικες και 2 παιδιά)	€30
Για κάθε επιπρόσθετο παιδί ηλικίας 4 μέχρι 16 χρονών ή συνταξιούχο	€5
Για κάθε επιπρόσθετο ενήλικα	€10
Οικογενειακό πακέτο (1 ενήλικας και 2 παιδιά)	€20
Για κάθε επιπρόσθετο παιδί ηλικίας 4 μέχρι 16 χρονών ή συνταξιούχο	€5
Για κάθε επιπρόσθετο ενήλικα	€10

Η Μαρία θα πάει στο ζωολογικό κήπο και θα πάρει μαζί της τα τρία της παιδιά ηλικίας 3, 7 και 10 ετών, καθώς και δυο φίλους των μεγαλύτερών της παιδιών (ηλικίας 7 και 10 ετών). Ακόμη, θα πάρει μαζί της τη μητέρα της που είναι συνταξιούχος. Πόσα θα πληρώσει για την είσοδο τους στο ζωολογικό κήπο; Να βρεις τη μικρότερη δυνατή τιμή.

(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

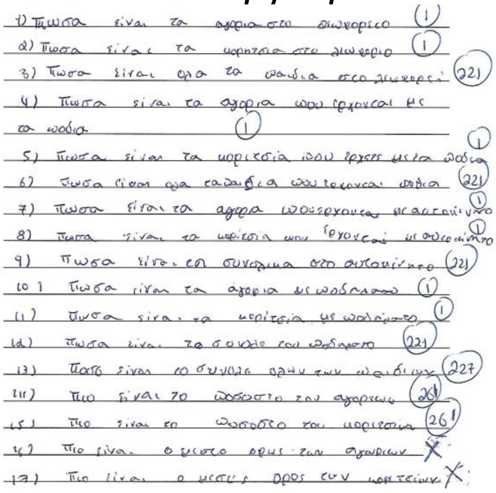
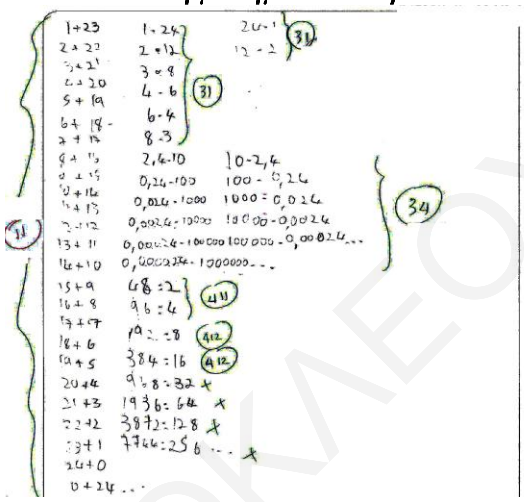
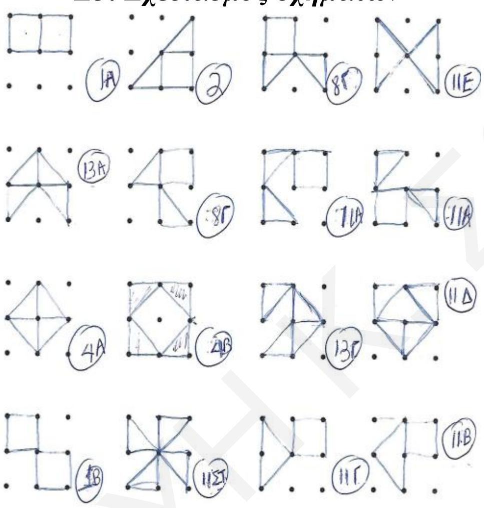
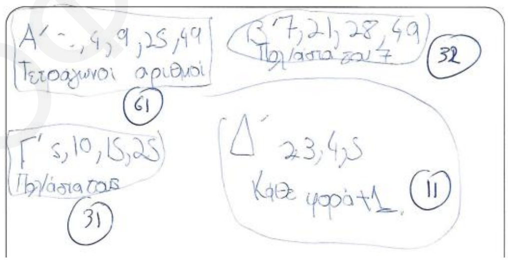
(Σ4: Επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης με βάση δεδομένα σε πίνακα)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Δημιουργικά Έργα: Δείγματα Απαντήσεων, Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων, Περιγραφικά Στοιχεία

Πίνακας Β1

Παραδείγματα Απαντήσεων στα Έργα Δημιουργικής Σκέψης

	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	
Έργα Σύνθεσης (Συστηματικός τρόπος καταγραφής απαντήσεων)	***Δ1: Κατασκευή ερωτήσεων*** 	***Δ2: Κατασκευή μαθηματικών προτάσεων*** 
Έργα Νοητικής Δημιουργίας (Χρήση νοερών διαδικασιών)	***Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων*** 	***Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα*** 

Σημείωση. Ο διαφορετικές αριθμός που δίνεται δίπλα από κάθε απάντηση σε κάθε έργο δηλώνει την διαφορετική ιδέα που χρησιμοποιείται στην απάντηση.

Πίνακας Β2

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
Ι. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση Δεδομένων: Είναι ερωτήσεις που καλούν τον ερωτηθέντα να αναφέρει αυτά που φαίνονται στη γραφική παράσταση, δηλαδή τις πληροφορίες που βρίσκει στο τίτλο της γραφικής παράστασης και στους άξονες της. (π.χ., *Πόσα αγόρια παίρνουν το λεωφορείο και πόσα κορίτσια;*)	443	1	9
ΙΙ. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση μεταξύ των Δεδομένων: Οι ερωτήσεις αυτές καλούν τον ερωτηθέντα να ερμηνεύσει και να αναλύσει την εφαρμογή των δεδομένων της γραφικής παράστασης. Δηλαδή, να συγκρίνει ποσότητες (π.χ., μεγαλύτερο από, ψηλότερο, χαμηλότερο) και να χρησιμοποιεί άλλες μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες (π.χ., πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) που επιτρέπουν σε αυτό να συνδυάζει και να εφαρμόζει τα δεδομένα και να επισημάνει μαθηματικές σχέσεις που εκφράζονται στη γραφική παράσταση.			
1. Απλές Ερωτήσεις Σύγκρισης (π.χ., *Τα κορίτσια μετακινούνται περισσότερο με τα πόδια ή το ποδήλατο;*)	180	1	8
2. Ερωτήσεις Ομαδοποίησης			
(α) Ομαδοποίηση δύο προσθετέων με αναφορά στα δύο φύλα (π.χ., *Πόσα είναι τα άτομα που πάνε με αυτοκίνητο;*)	424	1	7
(β) Ομαδοποίηση δύο προσθετέων με αναφορά σε ένα φύλο και δύο μέσα (π.χ., *Πόσα αγόρια πήγαν με αυτοκίνητο και με το ποδήλατο μαζί;*)	63	1	12
(γ) Ομαδοποίηση τριών προσθετέων με αναφορά σε ένα φύλο και τρία μέσα (π.χ., *Πόσα είναι τα αγόρια που πηγαίνουν με το λεωφορείο, με τα πόδια και με το ποδήλατο;*)	15	1	2
(δ) Ομαδοποίηση τριών προσθετέων με αναφορά στα δύο φύλα (π.χ., *Πόσα είναι τα κορίτσια που πηγαίνουν με το αυτοκίνητο μαζί με τα αγόρια που πηγαίνουν με το λεωφορείο και το ποδήλατο;*)	2	1	1
(ε) Ομαδοποίηση τεσσάρων προσθετέων με αναφορά σε ένα φύλο και σε όλα τα μεταφορικά (π.χ., *Πόσα είναι όλα τα αγόρια που πάνε στο σχολείο με μεταφορικό μέσο;*)	219	1	4
(στ) Ομαδοποίηση τεσσάρων προσθετέων με αναφορά στα δύο φύλα και σε δύο μέσα (π.χ., *Πόσα είναι συνολικά τα παιδιά που πάνε με τα πόδια μαζί με τα παιδιά που πάνε με αυτοκίνητο;*)	79	1	6
(ζ) Ομαδοποίηση έξι προσθετέων με αναφορά στα δύο φύλα και σε τρία ή σε όλα τα μέσα (π.χ., *Πόσα συνολικά είναι τα παιδιά που πηγαίνουν με ποδήλατο, αυτοκίνητο και λεωφορείο;*)	22	1	3
(η) Ομαδοποίηση οχτώ προσθετέων (π.χ., *Πόσα είναι όλα τα παιδιά του σχολείου;*)	257	1	2
(θ) Ομαδοποίηση με άρνηση (π.χ., *Πόσα αγόρια δεν πηγαίνουν με τα πόδια;*)	15	1	9
(ι) Ομαδοποίηση με άγνωστο μία από τις δύο ποσότητες και δοσμένη την τελική ποσότητα (π.χ., *Με ποιο μεταφορικό μέσο πάνε 60 παιδιά;*)	7	1	3

Πίνακας Β2 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
3. Ερωτήσεις Σύγκρισης Προσθετικής Δομής			
(α) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών για το ίδιο μεταφορικό μέσο (π.χ., *Πόσα αγόρια ακόμη χρειάζονται για να είναι ίσα με τα κορίτσια που θα πάνε με το αυτοκίνητο;*)	401	1	8
(β) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών για το ίδιο μεταφορικό μέσο με δοσμένη τη διαφορά (π.χ., *Σε ποια κατηγορία τα αγόρια είναι πέντε περισσότερα από τα κορίτσια;*)	5	1	1
(γ) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών με αναφορά σε διαφορετικό μεταφορικό μέσο (π.χ., *Πόσα λιγότερα κορίτσια πάνε με λεωφορείο από τα αγόρια που πάνε με τα πόδια;*)	46	1	4
(δ) Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεταφορικών μέσων για το ίδιο φύλο (π.χ., *Πόσα περισσότερα αγόρια πηγαίνουν με το ποδήλατο από εκείνα που πηγαίνουν με το αυτοκίνητο;*)	141	1	12
(ε) Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεταφορικών μέσων για το ίδιο φύλο με δοσμένη τη διαφορά (π.χ., *Ποια είναι τα δύο μεταφορικά μέσα που χρησιμοποιούν 75 αγόρια, εάν χρησιμοποιούν το ένα μεταφορικό μέσο 5 περισσότερα αγόρια σε σχέση με το δεύτερο μεταφορικό μέσο;*)	1	1	1
4. Ερωτήσεις Σύγκρισης Πολλαπλασιαστικής Δομής			
(α) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών για το ίδιο μεταφορικό μέσο (π.χ., *Πόσες φορές πιο πολλά κορίτσια χρησιμοποιούν αυτοκίνητο από τα αγόρια;*)	7	1	3
(β) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών για το ίδιο μεταφορικό μέσο με δοσμένη τη μαθηματική σχέση (π.χ., *Σε ποιο μεταφορικό μέσο τα κορίτσια είναι το 1/3 των αγοριών;*)	8	1	2
(γ) Σύγκριση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών με αναφορά σε διαφορετικό μεταφορικό μέσο (π.χ., *Πόσες φορές μικρότερο είναι το σύνολο των αγοριών που πηγαίνουν με λεωφορείο από τα κορίτσια που πηγαίνουν με αυτοκίνητο;*)	2	1	1
(δ) Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεταφορικών μέσων για το ίδιο φύλο (π.χ., *Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το σύνολο των κοριτσιών που πηγαίνουν με αυτοκίνητο από αυτά που περπατούν;*)	2	1	3
(ε) Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μεταφορικών μέσων για το ίδιο φύλο με δοσμένη τη μαθηματική σχέση (π.χ., *Είναι τριπλάσια τα κορίτσια με αυτοκίνητο σε σχέση με τα πόδια;*)	1	1	1
5. Ερωτήσεις Σύγκρισης Προσθετικής Δομής και Απλής Σύγκρισης			
(α) Σύγκριση προσθετικής δομής συνδυάζοντας και απλή σύγκριση (π.χ., *Σε ποιο μεταφορικό μέσο τα αγόρια και τα κορίτσια έχουν την πιο μικρή διαφορά;*)	3	1	2

Πίνακας Β2 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
(β) Απλή σύγκριση συνδυάζοντας και σύγκριση προσθετικής δομής (π.χ., *Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του μέσου που χρησιμοποιείται από τα περισσότερα αγόρια και αυτού που χρησιμοποιείται περισσότερο από τα κορίτσια;*)	1	1	1
6. Ερωτήσεις Σύγκρισης Προσθετικής Δομής και Ομαδοποίησης			
(α) Σύγκριση προσθετικής δομής μεταξύ του συνόλου των αγοριών και του συνόλου των κοριτσιών (π.χ., *Πόσα περισσότερα είναι τα αγόρια από τα κορίτσια;*)	57	1	2
(β) Σύγκριση προσθετικής δομής στο σύνολο των παιδιών μεταξύ δύο διαφορετικών μέσων (π.χ., *Πόσα περισσότερα παιδιά πάνε με αυτοκίνητο σε σχέση με ποδήλατο;*)	118	1	6
(γ) Σύγκριση προσθετικής δομής στο σύνολο των παιδιών μεταξύ ενός μέσου και του συνόλου από δύο ή περισσότερα μέσα (π.χ., *Πόσοι λιγότεροι μαθητές πηγαίνουν με τα πόδια από αυτούς που πηγαίνουν με αυτοκίνητο και λεωφορείο;*)	11	1	2
(δ) Σύγκριση προσθετικής δομής μεταξύ ενός φύλου και του αντίθετου φύλου ή ενός φύλου με το σύνολο των παιδιών ή στο ίδιο το φύλο για ένα ή συνδυασμό μέσων (π.χ., *Πόσα περισσότερα κορίτσια χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και ποδήλατο σε σύγκριση με την αντίστοιχη περίπτωση των αγοριών;*)	14	1	2
7. Ερωτήσεις Απλής Σύγκρισης και Ομαδοποίησης			
(α) Απλή σύγκριση του συνόλου των αγοριών με το σύνολο των κοριτσιών (π.χ., *Ποια είναι περισσότερα, τα αγόρια ή τα κορίτσια;*)	45	1	2
(β) Απλή σύγκριση των τεσσάρων μέσων μεταφοράς με αναφορά στο σύνολο των παιδιών (π.χ., *Με ποιο μεταφορικό μέσο πηγαίνουν τα πιο πολλά παιδιά;*)	86	1	2
(γ) Απλή σύγκριση δύο διαφορετικών μέσων μεταφοράς με αναφορά στο σύνολο των παιδιών (π.χ., *Είναι περισσότερα τα παιδιά που πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια ή τα παιδιά που πηγαίνουν με το λεωφορείο;*)	16	1	6
(δ) Απλή σύγκριση μεταξύ του συνόλου των αγοριών και του συνόλου των κοριτσιών με αναφορά σε δύο ή περισσότερα μεταφορικά μέσα (π.χ., *Περισσότερα κορίτσια πηγαίνουν με αυτοκίνητο και με τα πόδια ή περισσότερα αγόρια;*)	5	1	1
(ε) Απλή σύγκριση είτε του συνόλου των αγοριών είτε του συνόλου των κοριτσιών με έναν αριθμό (π.χ., *Συνολικά τα κορίτσια είναι λιγότερα από 120 ή περισσότερα;*)	4	1	2
(στ) Απλή σύγκριση των τεσσάρων μέσων μεταφοράς για σκοπούς κατάταξης, αρχίζοντας από αυτό που χρησιμοποιείται συχνότερα (π.χ., *Ποιο είναι το δεύτερο μεταφορικό μέσο που χρησιμοποιούν τα παιδιά;*)	4	1	1

Πίνακας Β2 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
8. Ερωτήσεις Λόγου (π.χ., *Τι μέρος από τα κορίτσια είναι τα αγόρια που πηγαίνουν με το αυτοκίνητο;*)	1	1	1
9. Ερωτήσεις Λόγου-Ποσοστού-Κλάσματος και Ομαδοποίησης			
(α) Ομαδοποίηση και ποσοστό (π.χ., *Ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών που πηγαίνουν με ποδήλατο, πόδια και λεωφορείο;*)	14	1	12
(β) Ομαδοποίηση και λόγος (π.χ., *Ποιος είναι ο λόγος των παιδιών που έρχονται στο σχολείο με τα πόδια σε σχέση με αυτά που έρχονται στο σχολείο με το ποδήλατο;*)	9	1	8
(γ) Ομαδοποίηση και κλάσμα (π.χ., *Τι μέρος των παιδιών του σχολείου είναι τα κορίτσια;*)	8	1	4
10. Ερωτήσεις Λόγου-Ποσοστού-Κλάσματος, Σύγκρισης και Ομαδοποίησης (π.χ., *Ποιο είναι το μεγαλύτερο ποσοστό κοριτσιών;*)	2	1	1
ΙΙΙ. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση πέρα των Δεδομένων: Σε αυτό το επίπεδο απαιτείται από τον ερωτηθέντα να προβλέψει ή να βγάλει συμπεράσματα από τα δεδομένα, βασιζόμενος σε νοητικά σχήματα που έχει αναπτύξει (προϋπάρχουσα γνώση) για πληροφορίες που δεν δίνονται ούτε άμεσα ούτε έμμεσα στη γραφική παράσταση (π.χ., *Γιατί τα παιδιά επιλέγουν να πάνε με τα πόδια;*)	45	1	8
IV. Ερωτήσεις που αφορούν Αριθμητικές Σχέσεις (π.χ., *Αν βρω το 1/5 των κοριτσιών που πηγαίνουν με το αυτοκίνητο και το διαιρέσω με το 7 ποιος είναι αριθμός που θα βρω;*)	8	1	12
V. Ερωτήσεις που χρησιμοποιούν και δικά τους Δεδομένα			
(α) Αλλαγή (π.χ., *Αν έρθουν στο σχολείο ακόμη 4 κορίτσια και αυτά πηγαίνουν με τα πόδια, πόσα κορίτσια θα πηγαίνουν στο σύνολο με τα πόδια;*)	3	1	2
(β) Σύγκριση (π.χ., *Αν διπλασιαστούν τα κορίτσια που πηγαίνουν με τα πόδια, πόσα θα είναι;*)	1	2	2
(γ) Αναλογία (π.χ., *Πόσα αγόρια θα πήγαιναν με τα πόδια, αν τα κορίτσια ήταν 40;*)	1	2	2
(δ) Αλλαγή και σύγκριση (π.χ., *Αν τα κορίτσια που πηγαίνουν με το λεωφορείο στο σχολείο αυξηθούν κατά 20, και τα κορίτσια που πηγαίνουν στο σχολείο με το αυτοκίνητο μειωθούν κατά 20, πόσα περισσότερα θα είναι τα κορίτσια από τα αγόρια που θα πηγαίνουν στο σχολείο με το λεωφορείο;*)	5	1	1
(ε) Αλλαγή και ομαδοποίηση (π.χ., *Αν του χρόνου οι μαθητές αυξηθούν κατά 75 και φύγουν οι τελειόφοιτοι που είναι 69, πόσοι μαθητές θα είναι στο σύνολο;*)	3	1	2

Πίνακας Β2 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
(στ) Ομαδοποίηση και ομαδοποίηση (π.χ., *Αν οι δασκάλοι του σχολείου είναι 35, πόσοι είναι όλοι μαζί, παιδιά και δασκάλοι;)*	3	1	2
(ζ) Ομαδοποίηση και σύγκριση (π.χ., *Αν τα μισά κορίτσια του σχολείου φύγουν, πόσα θα μείνουν στο σχολείο;*)	3	1	2
(η) Ομαδοποίηση και αναλογία (π.χ., *Αν τα κόμιστρα για το λεωφορείο ήταν €50 για ένα μήνα, πόσα θα εισπράξει ο λεωφορειούχος;*)	12	1	3
(θ) Ομαδοποίηση, σύγκριση και αλλαγή (π.χ., *Αν οι μαθητές που πηγαίνουν με λεωφορείο στο σχολείο, παίρνουν δυο διαφορετικά λεωφορεία, 50% στο ένα και 50% στο άλλο, και αν το ένα λεωφορείο δεν έρθει και τους μισούς θα τους πάρουν οι γονείς και από εκείνους που έμειναν οι μισοί δεν θα πάνε σχολείο πόσα παιδιά θα πάνε σχολείο;*)	3	1	1

Πίνακας Β3

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο Δ2: Κατασκευή Μαθηματικών Προτάσεων με Αποτέλεσμα 24

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
1. Πρόσθεση με Ακέραιους Αριθμούς			
(α) Μία πρόσθεση με ακέραιους (π.χ., *15+9*)	704	1	46
(β) Δύο προσθέσεις με ακέραιους (π.χ., *7+8+9*)	121	1	14
(γ) Τρεις ή περισσότερες προσθέσεις με ακέραιους (π.χ., *2+3+5+14*)	112	1	12
2. Πρόσθεση με Δεκαδικούς/Κλάσματα			
(α) Μία πρόσθεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο προσθετέους να είναι δεκαδικός (π.χ., *21,9+2,1*)	22	1	22
(β) Δύο προσθέσεις με τον έναν, τουλάχιστον, από τους τρεις προσθετέους να είναι δεκαδικός (π.χ., *0,1+0,1+23,8*)	2	1	2
(γ) Τρεις ή περισσότερες προσθέσεις με τον έναν, τουλάχιστον, από τους προσθετέους να είναι δεκαδικός (π.χ., *15+5,1+0,9+2,9+0,1*)	3	1	1
(δ) Μία πρόσθεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο προσθετέους να είναι κλάσμα (π.χ., $23\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$)	12	1	14
(ε) Δύο προσθέσεις με τον έναν, τουλάχιστον, από τους προσθετέους να είναι κλάσμα (π.χ., $18\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3$)	3	1	1
(στ) Τρεις ή περισσότερες προσθέσεις με τον έναν, τουλάχιστον, από τους προσθετέους να είναι κλάσμα (π.χ., $15\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$)	1	1	1
3. Αφαίρεση με Ακέραιους Αριθμούς			
(α) Μία αφαίρεση με ακέραιους μέχρι και τέσσερα ψηφία (π.χ., *50-26)*	546	1	77
(β) Μία αφαίρεση με ακέραιους μεγαλύτερους από πενταψήφιους (π.χ., *1 000 000 - 999 976)*	16	1	3
(γ) Δύο αφαιρέσεις με ακέραιους (π.χ., *60-30-6)*	21	1	4
(δ) Τρεις ή περισσότερες αφαιρέσεις με ακέραιους (π.χ., *100-50-20-6)*	5	1	2
4. Αφαίρεση με Δεκαδικούς/Κλάσματα			
(α) Μία αφαίρεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι δεκαδικός (π.χ, *124,81-100,81*)	5	1	3
(β) Μία αφαίρεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι κλάσμα (π.χ., $24\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$)	2	1	1

Πίνακας Β3 (συνέχεια)

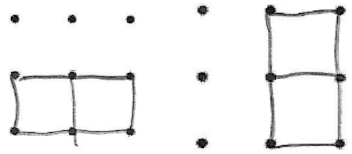
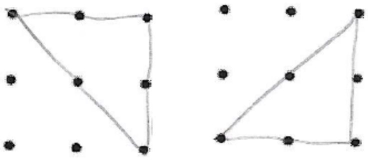
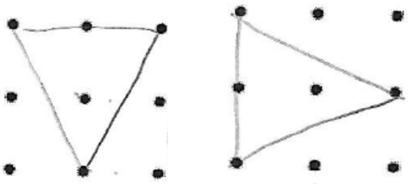
Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
5. Πολλαπλασιασμός με Ακέραιους Αριθμούς			
(α) Ένας πολλαπλασιασμός με ακέραιους (π.χ., *12x2*)	796	1	9
(β) Δύο πολλαπλασιασμοί με ακέραιους (π.χ., *6x2x2*)	32	1	9
(γ) Τρεις ή περισσότεροι πολλαπλασιασμοί με ακέραιους (π.χ., *3x2x x2*)	13	1	4
6. Πολλαπλασιασμός με Δεκαδικούς/Κλάσματα/ Ποσοστά			
(α) Ένας πολλαπλασιασμός με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι δεκαδικός (π.χ., *480x0,05*)	38	1	16
(β) Δύο πολλαπλασιασμοί με τον έναν, τουλάχιστον, από τους τρεις όρους να είναι δεκαδικός (π.χ., *6x8x0,5*)	2	1	5
(γ) Τρεις ή περισσότεροι πολλαπλασιασμοί με τον έναν, τουλάχιστον, από τους όρους να είναι δεκαδικός (π.χ., *(0.24x10)x(5x2)*)	2	1	2
(δ) Ένας πολλαπλασιασμός με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι κλάσμα (π.χ., $48x\frac{1}{2}$)	9	1	4
(ε) Ένας πολλαπλασιασμός με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι ποσοστό (π.χ., $48x\,50\%$)	1	1	1
7. Διαίρεση με Ακέραιους Αριθμούς			
(α) Μία διαίρεση με διψήφιους αριθμούς (π.χ., $48 \div 2$)	322	1	11
(β) Μία διαίρεση με τριψήφιους ή μεγαλύτερους αριθμούς (π.χ., $360 \div 15$)	88	1	38
(γ) Δύο διαιρέσεις με ακέραιους (π.χ., $96 \div 2 \div 2$)	1	1	1
8. Διαίρεση με Δεκαδικούς/Κλάσματα			
(α) Μία διαίρεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι δεκαδικός (π.χ., $12 \div 0{,}5$)	2	3	5
(β) Μία διαίρεση με τον έναν, τουλάχιστον, από τους δύο όρους να είναι κλάσμα (π.χ., $12 \div \frac{1}{2}$)	4	1	1
9. Συνδυασμός Πράξεων με Ακέραιους Αριθμούς			
(α) Δύο πράξεις προσθετικής δομής, δηλαδή συνδυασμός πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., *10+20-6*)	82	1	60
(β) Δύο πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής, δηλαδή συνδυασμός πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (π.χ., $8x6 \div 2$)	29	1	11
(γ) Δύο πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής (π.χ., *5x5-1*)	140	1	18
(δ) Τρεις και περισσότερες πράξεις προσθετικής δομής, δηλαδή συνδυασμοί πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., *(56-30)-(1+1))*	28	1	5
(ε) Τρεις και περισσότερες πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής, δηλαδή συνδυασμοί πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (π.χ., $6x2 \div 2x4$)	6	1	3
(στ) Τρεις και περισσότερες πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής (π.χ., *(35-21)+(2x5))*	51	1	4

Πίνακας Β3 (συνέχεια)

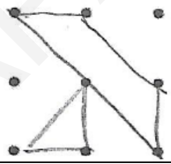
Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
10. Συνδυασμός Πράξεων με Δεκαδικούς/ Κλάσματα/Ποσοστά			
(α) Δύο πράξεις προσθετικής δομής με δεκαδικούς (π.χ., *(50+0,4)-26,4)*	1	1	1
(β) Δύο πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής με δεκαδικούς (π.χ., *(4,8x100)*$\div$*20)*	1	1	1
(γ) Δύο πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής με δεκαδικούς (π.χ., *(40+8)x0,5)*	3	1	1
(δ) Τρεις και περισσότερες πράξεις προσθετικής δομής με δεκαδικούς (π.χ.,23,9+4,2-0,1-4*)*	1	1	1
(ε) Τρεις και περισσότερες πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής με δεκαδικούς (π.χ., *(0,5x12)x2x4*$\div$*2)*	1	1	1
(στ) Τρεις και περισσότερες πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής με δεκαδικούς (π.χ., *(0,5x10)+(20-1))*	1	2	2
(ζ) Δύο πράξεις προσθετικής δομής με κλάσματα/ποσοστά (π.χ., $24+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$)	1	1	1
(η) Δύο πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής με κλάσματα/ποσοστά (π.χ., $48x\frac{1}{2}\div 1$)	1	1	1
(θ) Δύο πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής με κλάσματα/ποσοστά (π.χ., $(4+8)\div\frac{1}{2}$)	2	1	2
(ι) Τρεις και περισσότερες πράξεις πολλαπλασιαστικής δομής με κλάσματα/ποσοστά (π.χ., $48x\frac{1}{2}\div 2\,x\,2$)	2	1	1
(κ) Τρεις και περισσότερες πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής με κλάσματα/ποσοστά (π.χ., $\frac{1}{2}\times 10\times 4+4$)	3	1	3
11. Συνδυασμός Πράξεων με Δυνάμεις/Ρίζες			
(α) Δύο πράξεις προσθετικής δομής, δηλαδή συνδυασμός πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., 2^4+8)	3	1	4
(β) Τρεις και περισσότερες πράξεις συνδυάζοντας πράξεις προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής (π.χ., 2^2x2^2+8)	1	1	1
12. Αρνητικοί Αριθμοί (π.χ.,-1+25)	2	1	2

Πίνακας Β4

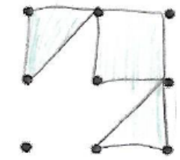
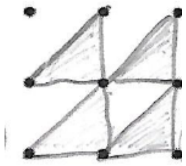
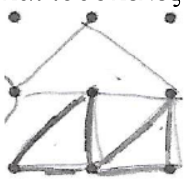
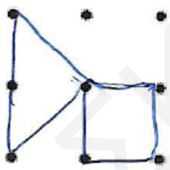
Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο Δ3: Σχεδιασμός Σχημάτων με Εμβαδόν 2 cm^2

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
1. Δυο τετράγωνα 1 cm X 1 cm			
(α) Ορθογώνιο 2 cm X 1 cm	761	1	10
			
(β) Δυο διακριτά τετράγωνα 1 cm X 1 cm	287	1	32
			
2. Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 2 cm και ύψος 2 cm	403	1	4
			
3. Ισοσκελές τρίγωνο με βάση 2 cm και ύψος 2 cm	148	1	4
			
4. Τετράγωνο με μήκος √2 cm και πλάτος √2 cm			
 (α)	333	1	2
 (β)	88	1	1
5. Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm	35	1	4
			

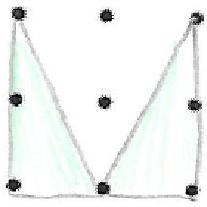
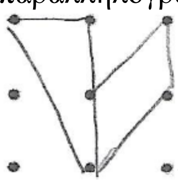
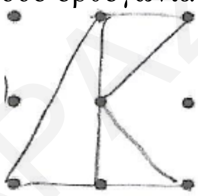
Πίνακας Β4 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
6. Κυκλικό σχήμα	2	2	3
			
7. Σύνθετο Σχήμα	9	1	4
			
8. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 2 cm και 1 cm και ύψος 1 cm και ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm			
(α) Πεντάπλευρο	112	1	8
			
(β) Εξάπλευρο	164	1	12
			
(γ) Εφτάπλευρο	135	1	16
			
9. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Ισοσκελές τραπέζιο με βάση √8 cm και √2 cm και ύψος √2/2 cm και ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm	15	1	2
			

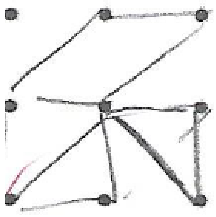
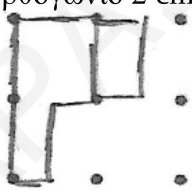
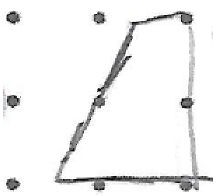
Πίνακας Β4 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
10. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Δυο ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2			
(α) Δυο ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και τετράγωνο με εμβαδόν 1 cm^2 	82	1	8
(β) Τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm 	101	1	6
(γ) Δυο ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδόν 1 cm^2 	75	1	6
11. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Τρίγωνο ισοσκελές με βάση 2 cm και ύψος 1 cm και τετράγωνο 1 cm X 1cm			
 (α)	152	1	8
 (β)	71	1	8
12. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Τρίγωνο αμβλυγώνιο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 2 cm και 1 cm και ύψος 1 cm 	5	1	1

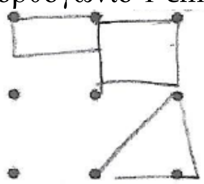
Πίνακας Β4 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
13. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2			
(α) Δυο ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 2 cm	14	1	4
			
(β) Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδόν 1 cm^2	14	1	4
			
(γ) Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και τετράγωνο με εμβαδόν 1 cm^2	17	1	8
			
(δ) Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 1 cm^2	4	1	1
			
(ε) Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και δυο ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδόν 1 cm^2	8	1	2
			

Πίνακας Β4 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	Αριθμός Μαθητών	Μικρότερη Τιμή	Μέγιστη Τιμή
14. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2			
(α) Δυο παραλληλόγραμμα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm 	119	1	8
(β) Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδόν 1 cm^2 	36	1	5
(γ) Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και δυο ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδόν 1 cm^2 	26	1	2
(δ) Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και τετράγωνο με εμβαδόν 1 cm^2 	17	1	3
15. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων τα οποία προκύπτουν από επεξεργασία των προαναφερόμενων σχημάτων			
(α) Σχήμα που προκύπτει από κόψιμο ορθογωνίου από το ορθογώνιο 2 cm x 1 cm 	12	1	4
(β) Σχήμα που προκύπτει από κόψιμο τριγώνου από το ορθογώνιο 2 cm x 1 cm 	4	4	8

Πίνακας Β4 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
(γ) Σχήμα που προκύπτει από κόψιμο του ορθογωνίου τραπεζίου με βάσεις 2 cm και 1 cm και ύψος 1 cm που είναι σε συνδυασμό με ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm 	2	1	3
(δ) Σχήμα που αποτελείται από τετράγωνο 1 cm x 1 cm, ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος 1 cm και βάση 1 cm και ορθογώνιο 1 cm x 0,5 cm 	2	1	1
(ε) Σχήμα που αποτελείται από ισοσκελές τρίγωνο με βάση 2 cm και ύψος 1 cm και ένα άλλο/α σχήμα/τα που προκύπτουν από μοίρασμα άλλων   	5	1	1

Πίνακας Β5

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων στο Έργο Δ4: Δημιουργία Ομάδας Αριθμών με Κοινή Ιδιότητα

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
1. Απλά Μοτίβα			
(α) Διαδοχικοί αριθμοί ή αριθμοί αυξάνονται κατά 1 (*2, 3, 4, 5*)	313	1	2
(β) Μοτίβο όπου οι αριθμοί μειώνονται κατά 1 (*5, 4, 3, 2*)	31	1	2
(γ) Μοτίβο όπου οι αριθμοί αυξάνονται κατά 2 (*3, 5, 7, 9*)	94	1	1
(δ) Μοτίβο όπου οι αριθμοί μειώνονται κατά 2 (*9, 7, 5, 3*)	12	1	1
(ε) Μοτίβο όπου οι αριθμοί αυξάνονται κατά 6 (*3, 9, 15. 21*)	9	1	1
(στ) Μοτίβο όπου οι αριθμοί μειώνονται κατά 6 (*21, 15, 9, 3*)	3	1	1
2. Ακέραιοι Αριθμοί (π.χ., *2, 3, 4, 5*)	10	1	1
3. Δομή του Αριθμού (Μονάδες/Δεκάδες)			
(α) Μονοψήφιοι αριθμοί ή μικρότεροι του 10 (π.χ., *2, 3, 4, 5*)	121	1	3
(β) Διψήφιοι αριθμοί ή μεγαλύτεροι του 10 (π.χ., *15, 21, 25, 49*)	126	1	4
(γ) Αριθμοί που έχουν τον αριθμό 2 είτε στη θέση των μονάδων είτε στη θέση των δεκάδων (*2, 21, 25, 28*)	9	1	2
4. Άρτιοι/Περιττοί			
(α) Ζυγοί / Άρτιοι αριθμοί (*2, 4, 10, 28*)	382	1	4
(β) Πολλαπλάσια του αριθμού 2 (*2, 4, 10, 28*)	106	1	1
(γ) Μονοί / Περιττοί αριθμοί (*3, 5, 7, 9*)	375	1	8
(δ) Αριθμοί που όταν διαιρεθούν με το 2 αφήνουν υπόλοιπο 1 (*3, 5, 7, 9*)	3	1	1
5. Μέγεθος Αριθμού			
(α) Αριθμοί μεγαλύτεροι από έναν αριθμό (π.χ., *αριθμοί μεγαλύτεροι του 20: 21, 25, 28, 49*)	32	1	1
(β) Αριθμοί μικρότεροι από έναν αριθμό (π.χ., *αριθμοί μικρότεροι του 7: 2, 3, 4, 5*)	24	1	4
(γ) Αριθμοί μεταξύ δυο αριθμών (π.χ., *αριθμοί μεταξύ του 7 και του 22: 9, 10, 15, 21*)	5	1	4
6. Συνδυασμός Άρτιων/Περιττών και Μέγεθος Αριθμού (π.χ., *μονοί αριθμοί μικρότεροι του 10: 3, 5, 7, 9*)	15	1	5

Πίνακας Β5 (συνέχεια)

Κατηγορίες και Υποκατηγορίες Απαντήσεων	**Αριθμός Μαθητών**	**Μικρότερη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
7. Πολλαπλάσια ενός Αριθμού			
(α) Πολλαπλάσια του αριθμού 5 (*5, 10, 15, 25*)	226	1	2
(β) Διαιρούνται με τον αριθμό 5 και αφήνουν υπόλοιπο (π.χ., *9, 21, 28, 49*)	1	2	2
(γ) Πολλαπλάσια του αριθμού 7 (*7, 21, 28, 49*)	133	1	2
(δ) Πολλαπλάσια του αριθμού 3 (*3, 9, 21, 15*)	126	1	1
(ε) Διαιρούνται με τον αριθμό 3 και αφήνουν υπόλοιπο (π.χ., *7, 10, 25, 28*)	1	1	1
(στ) Πολλαπλάσια του αριθμού 1 (π.χ., *10, 15, 21, 25*)	9	1	4
8. Παράγοντες ενός Αριθμού			
(α) Αριθμοί που είναι παράγοντες ενός αριθμού (π.χ., *παράγοντες του 30: 15, 2, 3, 5*)	5	1	2
(β) Αριθμοί που δεν είναι παράγοντες ενός αριθμού π.χ., *δεν είναι παράγοντες του 100: 3, 21, 28, 49*)	1	2	2
9. Πρώτοι και Σύνθετοι Αριθμοί			
(α) Πρώτοι αριθμοί ή αριθμοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και το ένα (*2, 3, 5, 7*)	50	1	1
(β) Ομάδες αριθμών που είναι πρώτοι αριθμοί μαζί με μια άλλη ιδιότητα (π.χ., *πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 10: 2, 3, 5, 7)*	2	1	1
(γ) Πολλαπλάσια των πρώτων αριθμών (π.χ., *4, 9, 15, 21*)	2	1	1
(δ) Σύνθετοι αριθμοί (*4, 9, 10, 15*)	26	1	2
10. Σχηματικοί Αριθμοί			
(α) Τετράγωνοι αριθμοί (*4, 9, 25, 49*)	34	1	2
(β) Τρίγωνοι αριθμοί (*10, 15, 21, 28*)	11	1	1
11. Σύνθετες Σχέσεις			
(α) Ομάδα αριθμών που προκύπτει με βάση τον προηγούμενο με βάση τη σχέση: Χ2-1 (*2, 3, 5, 9*)	1	1	1
(β) Ομάδα αριθμών όπου ο τρίτος όρος προκύπτει από το άθροισμα των δυο πρώτων όρων και ο τέταρτος όρος από το άθροισμα του δεύτερου και του τρίτου όρου (*7, 21, 28, 49*)	2	1	1

Πίνακας Β6

Κατηγορίες Απαντήσεων στα Δημιουργικά Έργα και ο Βαθμός Πρωτοτυπίας τους με βάση το Ποσοστό των Μαθητών που τις Χρησιμοποίησαν

ΕΡΓΟ	**Κατηγορίες Απαντήσεων**	**Ποσοστό**	**Βαθμός Πρωτοτυπίας**
Δ1: Κατασκευή Ερωτήσεων	I. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση Δεδομένων	47.79	0.1
	II. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση Μεταξύ των Δεδομένων:		
	1. Απλές Ερωτήσεις Σύγκρισης	19.82	1
	2. Ερωτήσεις Ομαδοποίησης	62.44	0.1
	3. Ερωτήσεις Σύγκρισης Προσθετικής Δομής	51.54	0.1
	4. Ερωτήσεις Σύγκρισης Πολλαπλασιαστικής Δομής	1.87	10
	5. Ερωτήσεις που συνδυάζουν Σύγκριση Προσθετικής Δομής και Απλή Σύγκριση	0.44	10
	6. Ερωτήσεις που συνδυάζουν Συγκριση Προσθετικής Δομής και Ομαδοποίηση	19.71	1
	7. Ερωτήσεις που συνδυάζουν Απλή Σύγκριση και Ομαδοποίηση	15	1
	8. Ερωτήσεις Λόγου	0.11	10
	9. Ερωτήσεις που συνδυάζουν Λόγο-Ποσοστό-Κλάσμα και Ομαδοποίηση	2.75	10
	10. Ερωτήσεις που συνδυάζουν Λόγο-Ποσοστό-Κλάσμα, Σύγκριση και Ομαδοποίηση	0.22	10
	III. Ερωτήσεις που αφορούν Ανάγνωση Πέρα των Δεδομένων	4.96	10
	IV. Ερωτήσεις που αφορούν Αριθμητικές Σχέσεις	0.88	10
	V. Ερωτήσεις που διαμορφώνονται με βάση και δικά τους Δεδομένα	2.97	10
Δ2: Κατασκευή μαθηματικών προτάσεων με αποτέλεσμα 24	1. Πρόσθεση με Ακέραιους Αριθμούς	79.41	0.1
	2. Πρόσθεση με Δεκαδικούς/Κλασματικούς Αριθμούς	4.30	10
	3. Αφαίρεση με Ακέραιους Αριθμούς	61.01	0.1
	4. Αφαίρεση με Δεκαδικούς/Κλάσματα	0.77	10
	5. Πολλαπλασιασμός με Ακέραιους Αριθμούς	88	0.1
	6. Πολλαπλασιασμός με Δεκαδικούς/Κλασματικούς Αριθμούς	5.62	10
	7. Διαίρεση με Ακέραιους Αριθμούς	32.23	0.1
	8. Διαίρεση με Δεκαδικούς/Κλασματικούς Αριθμούς	0.66	10
	9. Συνδυασμός Πράξεων με Ακέραιους Αριθμούς	22.69	1
	10. Συνδυασμός Πράξεων με Δεκαδικούς/Κλασματικούς Αριθμούς	1.32	10
	11. Συνδυασμός Πράξεων με Δυνάμεις/Ρίζες	0.33	10
	12. Αρνητικοί Αριθμοί	0.22	10

Πίνακας Β6 (συνέχεια)

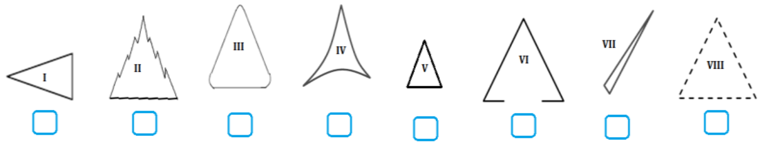
	Κατηγορίες Απαντήσεων	**Ποσοστό**	**Βαθμός Πρωτοτυπίας**
Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm^2	1. Δυο τετράγωνα 1 cm X 1cm	84.15	0.1
	2. Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 2 cm και ύψος 2 cm	44.38	0.1
	3. Ισοσκελές τρίγωνο με βάση 2 cm και ύψος 2 cm	16.30	1
	4. Τετράγωνο με μήκος $\sqrt{2}$ cm και πλάτος $\sqrt{2}$ cm	46.37	0.1
	5. Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm	3.85	10
	6. Κυκλικό σχήμα	0.22	10
	7. Σύνθετο Σχήμα	0.99	10
	8. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 2 cm και 1 cm και ύψος 1 cm και ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm	29.52	1
	9. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Ισοσκελές τραπέζιο με βάση $\sqrt{8}$ cm και $\sqrt{2}$ cm και ύψος $\sqrt{2}/2$ cm και ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm	1.65	10
	10. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Δυο ορθογώνια τρίγωνα με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2	33.81	1
	11. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Τρίγωνο ισοσκελές με βάση 2 cm και ύψος 1 cm και τετράγωνο 1 cm X 1cm	24.56	1
	12. Συνδυασμός δυο σχημάτων: Τρίγωνο αμβλυγώνιο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 2 cm και 1 cm και ύψος 1 cm	0.66	10
	13. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 1 cm και ύψος 2 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2	5.18	10
	14. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων: Παραλληλόγραμμο με βάση 1 cm και ύψος 1 cm και άλλο/α σχήμα/τα με εμβαδόν 1 cm^2	16.74	1
	15. Συνδυασμός δυο ή περισσότερων σχημάτων τα οποία προκύπτουν από επεξεργασία των προαναφερόμενων σχημάτων	2.75	10
Δ4: Δημιουργία ομάδας αριθμών με κοινή ιδιότητα	1. Απλά Μοτίβα	34.58	0.1
	2. Ακέραιοι Αριθμοί	1.10	10
	3. Δομή του Αριθμού (Μονάδες/Δεκάδες)	17.18	1
	4. Άρτιοι/Περιττοί	50.88	0.1
	5. Μέγεθος Αριθμού	3.74	10
	6. Συνδυασμός Άρτιων/Περιττών και Μέγεθος Αριθμού	1.76	10
	7. Πολλαπλάσια ενός Αριθμού	29.41	1
	8. Παράγοντες ενός Αριθμού	0.55	10
	9. Πρώτοι και Σύνθετοι Αριθμοί	6.06	10
	10. Σχηματικοί Αριθμοί	4.41	10
	11. Σύνθετες Σχέσεις	0.33	10

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

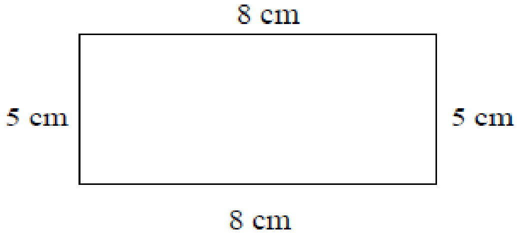
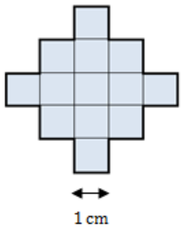
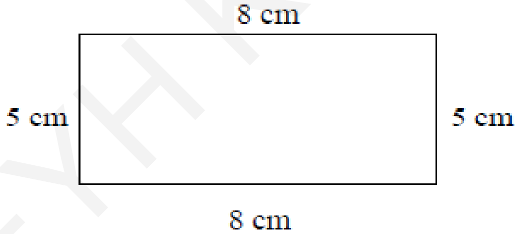
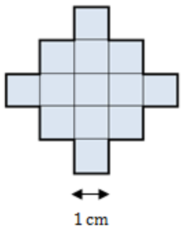
Οδηγός Διόρθωσης των Έργων του Δοκιμίου Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά

Πίνακας Γ1

Αξιολόγηση των Έργων Βασικής Γνώσης Περιεχομένου στα Μαθηματικά – Οδηγός Διόρθωσης

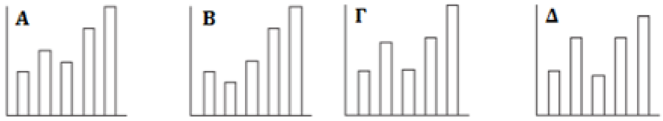
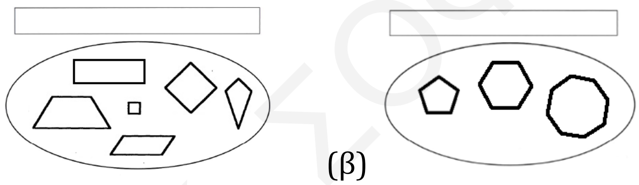
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	**ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**
Β1: Αναγνώριση τριγώνων	 ▪ Επιλογή Ι, VII (παραδείγματα τριγώνου, μη διαισθητικά)→**0,75 μονάδες για το καθένα** ▪ Μη επιλογή ΙΙΙ, VIII (μη παραδείγματα τριγώνου που δεν είναι άμεσα αναγνωρίσιμα για το δείγμα)→**0,75 μονάδες για το καθένα** ▪ Επιλογή V (διαισθητικό παράδειγμα τριγώνου)→**0,25 μονάδες** ▪ Μη επιλογή ΙΙ, IV, VI (μη παραδείγματα τριγώνου που είναι άμεσα αναγνωρίσιμα για το δείγμα) →**0,25 μονάδες για το καθένα**
Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων	 ▪ Επιλογή Ι, V (διαισθητικά παραδείγματα ορθογωνίου)→**0,4 μονάδες** ▪ Μη επιλογή ΙΙ, IV, VI (μη παραδείγματα ορθογωνίου)→**0,4 μονάδες** ▪ Επιλογή ΙΙΙ, VII(παραδείγματα ορθογωνίου, μη διαισθητικά)→**1 μονάδα για το καθένα**
Β3: Σύγκριση μεγέθους αριθμών	(α) 238 ☐ 2380 (β) 0,06 ☐ 0,6 (γ) 2,42 ☐ 2,420 ▪ Ορθή απάντηση στο (α) →**1 μονάδα** ▪ Ορθή απάντηση στα (β), (γ) → **1,5 μονάδα στο καθένα**
Β4: Απάντηση σε ερωτήσεις κατανόησης δεδομένων ραβδογράμματος	*Βαθμολογία για κάθε ερώτηση του ραβδογράμματος:* (α) Σε πόσα παιδιά αρέσει να διαβάζουν βιβλία στον ελεύθερό τους χρόνο; → **Ορθή απάντηση** (*15 παιδιά*) **– 1 μονάδα** (Σημείωση: 15/100 – 0,5 μονάδα) (β) Τι αρέσει στα περισσότερα παιδιά να κάνουν στον ελεύθερό τους χρόνο; → **Ορθή απάντηση** (*Να παίζουν ηλεκτρονικά παιχνίδια*) **– 1,25 μονάδες** (γ) Πόσα περισσότερα είναι τα παιδιά που τους αρέσει να παίζουν ηλεκτρονικά παιχνίδια από τα παιδιά που τους αρέσει να διαβάζουν βιβλία στον ελεύθερό τους χρόνο; → **Ορθή απάντηση** (*15 παιδιά*) **– 1,75 μονάδες**
Β5: Επίλυση προβλήματος αφαίρεσης τριψήφιων αριθμών με δομή σύγκρισης	▪ Ορθό αποτέλεσμα στο πρόβλημα, ορθή πράξη, ολοκληρωμένη απάντηση (650-583=67 *θεατές*) → **4 μονάδες** ▪ Ορθό αποτέλεσμα στο πρόβλημα, ορθή πράξη, όχι ολοκληρωμένη απάντηση (650-583=67) → **3 μονάδες** ▪ Ορθή πράξη, αλλά λάθος αποτέλεσμα στο πρόβλημα, ολοκληρωμένη απάντηση (π.χ., 650-583=177 θεατές) → **2 μονάδες** ▪ Ορθή πράξη, αλλά λάθος αποτέλεσμα στο πρόβλημα, μη ολοκληρωμένη απάντηση (π.χ., 650-583=77) → **1 μονάδα** ▪ Λάθος πράξη/τρόπος (π.χ., 650+583=1233) → **0**

Πίνακας Γ1 (συνέχεια)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
Β6: Υπολογισμός περιμέτρου σχημάτων	Μέσος όρος των βαθμολογιών για την περίμετρο του κάθε σχήματος:  (i)  (ii) ▪ Ορθή απάντηση με μονάδες μέτρησης ((i) 26 cm και (ii) 20 cm) → **4 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Ορθή απάντηση χωρίς μονάδες μέτρησης ((i) 26 και (ii) 20) → **3 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση αλλά ορθός τρόπος υπολογισμού με μονάδες μέτρησης ((i) ορθή χρήση του τύπου αλλά λάθος στην πράξη π.χ. 8+5=12x2=24 cm και (ii) φαίνεται ότι μετρά την περιφέρεια αλλά λανθασμένα π.χ., 18 cm) → **2 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση αλλά ορθός τρόπος υπολογισμού χωρίς μονάδες μέτρησης ((i) ορθή χρήση του τύπου αλλά λάθος στην πράξη π.χ. 8+5=12x2=24 και (ii) φαίνεται ότι μετρά την περιφέρεια αλλά λανθασμένα π.χ., 18) → **1 μονάδα για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση, λάθος τρόπος υπολογισμού (με ή χωρίς μονάδες μέτρησης) → **0**
Β7: Υπολογισμός εμβαδού σχημάτων	Μέσος όρος των βαθμολογιών για το εμβαδόν του κάθε σχήματος:  (i)  (ii) ▪ Ορθή απάντηση με μονάδες μέτρησης ((i) 40 cm^2 και (ii) 13 cm^2) → **4 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Ορθή απάντηση χωρίς μονάδες μέτρησης ((i) 40 και (ii) 13) → **3 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση αλλά ορθός τρόπος υπολογισμού με μονάδες μέτρησης ((i) ορθή χρήση του τύπου αλλά λάθος στην πράξη π.χ. 8x5=45 cm^2 και (ii) φαίνεται ότι μετρά τα τετράγωνα αλλά λανθασμένα π.χ., 12 cm^2) → **2 μονάδες για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση αλλά ορθός τρόπος υπολογισμού χωρίς μονάδες μέτρησης ((i) ορθή χρήση του τύπου αλλά λάθος στην πράξη π.χ. 8x5=45 και (ii) φαίνεται ότι μετρά τα τετράγωνα αλλά λανθασμένα π.χ., 12) → **1 μονάδα για κάθε σχήμα** ▪ Λάθος απάντηση, λάθος τρόπος υπολογισμού (με ή χωρίς μονάδες μέτρησης) → **0**

Πίνακας Γ2

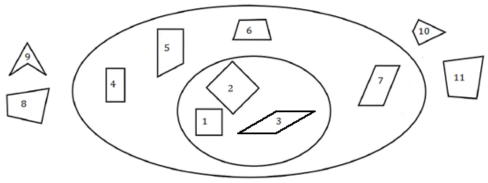
Αξιολόγηση των Έργων Κριτικής Σκέψης στα Μαθηματικά – Οδηγός Διόρθωσης

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
Κ4: Επιλογή κατάλληλου ραβδογράμματος για αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων που δίνονται σε πίνακα	 Επιλογή Α → **4 μονάδες** Επιλογή Γ → **2 μονάδες** Επιλογή Β ή Δ→ **0**
Κ5: Επιλογή συμπεράσματος με βάση λεκτικά δεδομένα	Με βάση αυτές τις πληροφορίες, ποιο από τα πιο κάτω ισχύει; Να το βάλεις σε κύκλο. (i) Μια μπάλα στοιχίζει περισσότερο από μια κούκλα. (ii) Ένα αυτοκινητάκι στοιχίζει περισσότερο από μια κούκλα. (iii) Μια κούκλα στοιχίζει περισσότερο από €1. (iv) Μια μπάλα στοιχίζει λιγότερο από €1. Επιλογή (iii) → **4 μονάδες** Επιλογή (iv) ή (ii) → **2 μονάδες** Επιλογή (i)→ **0**
Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων	Μέσος όρος των βαθμολογιών του (α), (β) και (γ):  (α) (β) ▪ Ορθή απάντηση με αναφορά σε ιδιότητες (τυπική ορολογία) που ισχύουν σε όλα τα σχήματα και δεν βασίζεται σε οπτικά δεδομένα, αλλά σε σχέσεις μεταξύ των δεδομένων (Επίπεδο 3 – Άτυπη παραγωγική σκέψη, Battista, 2007) (Απαντήσεις για το (α): *τετράπλευρα/έχουν τουλάχιστον δυο ίσες πλευρές ή γωνίες* και για το (β): *πολύγωνα/κανονικά πολύγωνα*) → **4 μονάδες** ▪ Ορθή απάντηση με αναφορά σε ιδιότητες (τυπική ορολογία) που ισχύουν σε όλα τα σχήματα και βασίζεται σε οπτικά δεδομένα (Επίπεδο 2 – Ανάλυση, Battista, 2007) (Απαντήσεις για το (α): *τέσσερις πλευρές ή γωνίες* και για το (β): *έχουν περισσότερες από 4 ή 5 πλευρές / δεν έχουν ορθή γωνία*) → **3 μονάδες** ▪ Μερικώς ορθή απάντηση - Αναφορά σε ιδιότητες με άτυπη ορολογία που ισχύει για όλα τα σχήματα της ομάδας (Επίπεδο 2 – Ανάλυση, Battista, 2007) (Απαντήσεις για το (α): *έχουν τέσσερις γραμμές* και για το (β): *αυξάνονται οι γωνίες τους ή οι πλευρές τους κατά ένα / δεν έχουν τον ίδιο αριθμό γωνιών*) → **2 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά γράφουν τα ονόματα των σχημάτων που βλέπουν και φανταστικούς μετασχηματισμούς (Επίπεδο 1.2-ολική αναγνώριση, Battista, 2007) Απαντήσεις για το (α): *τετράγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα/μπορούν να σχηματιστούν από τετράγωνα και ορθογώνια* και για το (β): *πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο/πέντε πλευρές, έξι γωνίες, επτά πλευρές*) → **1 μονάδα** ▪ Λάθος απάντηση (Επίπεδο 1.1 - προαναγνώρισης του Battista, 2007) (Απαντήσεις για το (α): *σχήματα/όλα είναι διαφορετικά/αλλάζει το σχήμα/έχουν γωνίες/έχουν περισσότερες από 4 πλευρές/έχουν γωνίες/ευθείες γραμμές* και για το (β): σχήματα/μοιάζουν με κύκλοι/το ένα είναι πιο μεγάλο από το άλλο/έχουν το ίδιο στυλ/έχουν γωνίες) → **0**

Πίνακας Γ2 (συνέχεια)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Κ6: Ονομασία ομάδας σχημάτων (συνέχεια)



(γ)

- Ορθή απάντηση - Αναγνωρίζουν ορθά τις σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των συνόλων των σχημάτων (π.χ., *Σχήματα 1, 2, 3: ρόμβοι, Σχήματα 4, 5, 6, 7: τετράπλευρα με ένα ζεύγος παράλληλος πλευρών, Σχήματα 8, 9, 10, 11: τετράπλευρα)*→ **4 μονάδες**
- Μερικώς ορθή απάντηση - Αναγνωρίζουν ορθά τις σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ δυο από τα τρία σύνολα (π.χ., *Σχήματα 1, 2, 3: ρόμβοι, Σχήματα 4, 5, 6, 7: παράλληλες γραμμές, Σχήματα 8, 9, 10, 11: τέσσερις γωνίες*) → **3 μονάδες**
- Μερικώς ορθή απάντηση - Αναγνωρίζουν σχέσεις εγκλεισμού, αλλά δεν είναι πλήρως συμπληρωμένα/ορθά (π.χ., *Σχήματα 1, 2, 3: ρόμβοι, Σχήματα 4, 5, 6, 7: έχουν τέσσερις πλευρές, Σχήματα 8, 9, 10, 11: αν τα ενώσεις γίνονται ορθογώνια*) → **2 μονάδες**
- Λάθος απάντηση, αλλά αντιλαμβάνονται την ομάδα σχημάτων που ανήκουν και τα τρία σύνολα *(γράφοντας την ίδια ορθή ιδιότητα και για τα τρία: 4 πλευρές)* ή γράφουν διακριτές ορθές κοινές ιδιότητες για τουλάχιστον για δυο από τα τρία σύνολα χωρίς να αναγνωρίζουν σχέσεις εγκλεισμού (π.χ., *Σχήματα 1, 2, 3: τετράγωνα, Σχήματα 4, 5, 6, 7: κανένα δεν είναι τετράγωνο, Σχήματα 8, 9, 10, 11: δεν έχουν ορθές γωνίες*) → **1 μονάδα**
- **Λάθος απάντηση –** Δίνουν λάθος απάντηση και στα τρία σύνολα ή δίνουν ορθή κοινή ιδιότητα για το ένα σύνολο αλλά για τα άλλα δυο είναι λάθος, χωρίς να αναγνωρίζουν σχέσεις εγκλεισμού (π.χ., *Σχήματα 1, 2, 3: ρόμβοι, Σχήματα 4, 5, 6, 7: έχουν γωνίες, Σχήματα 8, 9, 10, 11: έχουν μια ορθή γωνία*) →**0**

Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο

- Ορθή απάντηση - Ορθός αριθμός των άσπρων και των μαύρων τετραγώνων και είναι στη διάταξη των προηγούμενων όρων → **4 μονάδες**
- Ορθός αριθμός των άσπρων και των μαύρων τετραγώνων, αλλά δεν είναι στη διάταξη των προηγούμενων όρων → **3 μονάδες**
- Ορθός αριθμός των άσπρων ή των μαύρων τετραγώνων και είναι στη διάταξη των προηγούμενων όρων → **2 μονάδες**
- Λάθος αριθμός των άσπρων και των μαύρων τετραγώνων, αλλά είναι στη διάταξη των προηγούμενων όρων ή Ορθός αριθμός των άσπρων ή των μαύρων τετραγώνων και δεν είναι στη διάταξη των προηγούμενων όρων → **1 μονάδα**
- Λάθος σχήμα (δεν υπάρχει κάτι ορθό) → **0**

Κ2: Συμπλήρωση των επόμενων όρων αριθμητικών μοτίβων

Κάθε ορθή απάντηση στον πίνακα παίρνει τις μονάδες που φαίνονται. Η ορθή συμπλήρωση του πίνακα παίρνει 3 μονάδες και γίνεται αναγωγή στις 4 μονάδες.

	Αριθμός άσπρων τετραγώνων (□)	**Αριθμός μαύρων τετραγώνων(■)**	**Συνολικός αριθμός τετραγώνων (□ και ■)**
Σχήμα 1	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**
Σχήμα 2	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**
Σχήμα 3	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**	**0,1 μονάδες**
Σχήμα 4	**0,35 μονάδες**	**0,35 μονάδες**	**0,35 μονάδες**
Σχήμα 5	**0,35 μονάδες**	**0,35 μονάδες**	**0,35 μονάδες**

Πίνακας Γ2 (συνέχεια)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
Κ3: Επέκταση αριθμητικού μοτίβου	▪ Ορθή απάντηση (*20 άσπρα τετράγωνα*) → **4 μονάδες** ▪ Μερικώς ορθή απάντηση – 27 (θεωρείται ότι ο μαθητής βρήκε τον αριθμό των άσπρων τετραγώνων του Σχήματος 7 και τα πρόσθεσε με τα μαύρα τετράγωνά του) → **3 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση με ένδειξη κατανόησης του μοτίβου των άσπρων τετραγώνων (δηλαδή ο αριθμός που δίνεται είναι ζυγός μεγαλύτερος του 16) → **2 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση με ένδειξη μερικής κατανόησης του μοτίβου των άσπρων τετραγώνων (δηλαδή ο αριθμός που δίνεται είναι ζυγός) → **1 μονάδα** ▪ Λάθος απάντηση → **0**
Κ7: Αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο άρτιων αριθμών-επεξήγηση κανόνα & Κ8: Αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε μοτίβο με γενικό κανόνα 3ν+6 – επεξήγηση κανόνα	▪ Ορθή απάντηση και ορθή αιτιολόγηση με ρητή γενίκευση (explicit generalization, Lannin, 2005) (Απαντήσεις για το Κ7: *Όχι, δεν μπορεί γιατί είναι ζυγοί αριθμοί / Όχι, δεν μπορεί γιατί όλοι οι αριθμοί των άσπρων είναι ζυγοί και ο 11 είναι μονός / Όχι, δεν μπορεί γιατί πάντα έχει κάθετα 6 τετράγωνα και έχει πάνω κάτω τον ίδιο αριθμό τετραγώνων 11-6=5→5:2=2,5* και Κ8: *Όχι, δεν μπορεί αφού το 59 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 / Όχι, δεν μπορεί επειδή 59:3 δεν γίνεται / Όχι, δεν μπορεί γιατί το 59 είναι πρώτος αριθμός / Όχι, δεν μπορεί γιατί 59-6=53 -> 53:3=17 και περισσεύουν 2*) → **4 μονάδες** ▪ Ορθή απάντηση και ορθή αιτιολόγηση με γενίκευση του μοτίβου με βάση επαναληπτικό συλλογισμό (recursive generalization, Lannin, 2005) (Απαντήσεις για το Κ7: *Όχι, δεν μπορεί γιατί ο ένας αριθμός από τον άλλο έχει διαφορά 2/ Όχι, δεν μπορεί γιατί ξεκινά από το 8 και πάει 2-2 / Όχι, δεν μπορεί επειδή το Σχήμα 2 έχει 10 άσπρα και το σχήμα 3 έχει 12, το μοτίβο πάει δυο δυο / Όχι, δεν μπορεί γιατί το μοτίβο προσθέτει πάντα 2 τετραγωνάκια / Όχι, δεν μπορεί γιατί όταν προστίθεται ένα μαύρο προστίθενται 2 άσπρα* και Κ8: Όχι δεν μπορεί *γιατί προσθέτει κάθε φορά 3 τετράγωνα / Όχι, δεν μπορεί γιατί το μοτίβο έχει 60 και 57 / Όχι, δεν μπορεί γιατί παίρνω 2 άσπρα και 1 μαύρο*)→ **3 μονάδες** ▪ Ορθή απάντηση και αιτιολόγηση με βάση το σχήμα (Απαντήσεις για το Κ7: *Όχι γιατί δεν μπορεί να σχηματιστεί ορθογώνιο / Όχι, δεν μπορεί γιατί το Σχήμα 3 έχει 12 άρα με έντεκα δεν θα κλείνει* - Σχεδιάζουν το σχήμα και φαίνεται ότι δεν κλείνει και Κ8: *Όχι, δεν μπορεί γιατί δεν μπορεί να σχηματιστεί ορθογώνιο / Όχι, δεν μπορεί γιατί το σχήμα δεν θα κλείνει*) → **2 μονάδες** ▪ Ορθή απάντηση και λανθασμένη αιτιολόγηση (Απαντήσεις για το Κ7: *Όχι, δεν μπορεί γιατί δεν θα σχηματίζει τετράγωνο / Όχι, δεν μπορεί γιατί σχηματίζεται από μονούς αριθμούς* και Κ8: Όχι, δεν μπορεί *γιατί πρέπει να είναι ζυγός για να μπορεί / Όχι δεν μπορεί γιατί το 9 είναι μονός αριθμός*) ή γενική αιτιολόγηση (Όχι, δεν μπορεί *επειδή δεν ταιριάζει με το μοτίβο / Όχι, γιατί αν κάνεις τις δοκιμές θα δεις ότι δεν μπορεί*) ή με αναφορά στο λεκτικό (Όχι δεν μπορεί, *επειδή δεν μπορεί να είναι*) ή χωρίς αιτιολόγηση → **1 μονάδα** ▪ Λανθασμένη απάντηση με λανθασμένη/γενική αιτιολόγηση (Απαντήσεις για το Κ7: *Ναι μπορεί γιατί οι αριθμοί των άσπρων τετραγώνων πάνε μοτίβο* και για το Κ8: Ναι μπορεί *επειδή στους συνολικούς αριθμούς των τετραγώνων είναι και ζυγοί και μονοί αριθμοί*) → **0**
Κ9: Τεκμηρίωση της δομής δοσμένου αριθμού του μοτίβου με γενικό κανόνα 3ν+6	▪ Ορθή απάντηση (22 άσπρα και 8 μαύρα τετράγωνα) → **4 μονάδες** ▪ Μερικώς ορθή απάντηση (22 άσπρα και 7 μαύρα τετράγωνα / 24 άσπρα και 8 μαύρα τετράγωνα / 8 μαύρα τετράγωνα) → **3 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά ο αριθμός των άσπρων τετραγώνων που δίνεται είναι ζυγός και των μαύρων είναι μονοψήφιος → **2 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά ο αριθμός των άσπρων τετραγώνων που δίνεται είναι ζυγός → **1 μονάδα** ▪ Λάθος απάντηση → **0**

Πίνακας Γ3

Αξιολόγηση των Έργων Σύνθετων Διαδικασιών Σκέψης στα Μαθηματικά – Οδηγός Διόρθωσης

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Σ1: Σχεδιασμός επιχειρήματος με βάση δεδομένα διπλού ραβδογράμματος

- Ορθή απάντηση και τεκμηρίωση σε συσχετιστικό επίπεδο (Watson & Moritz, 1998): Συμφωνούν ότι η ομάδα Α έχει καλύτερους βαθμούς από την ομάδα Β, χρησιμοποιώντας το μέσο όρο κατάλληλα (π.χ.,

  A: 9+(59·3)+(4·69)+(2·79)+(2·89)= 9+177+277+158+178=

  798

  798:12=66,5

  B:(40·2)+50+(5·60)+(3·70)+80=720

  720:12=60

)→ **4 μονάδες**
- Ορθή απάντηση και τεκμηρίωση με πολλαπλές συγκρίσεις (Πολυδομικό επίπεδο - Watson & Moritz, 1998): Συμφωνούν ότι η ομάδα Α έχει καλύτερους βαθμούς από την ομάδα Β και τεκμηριώνουν την απάντησή τους κάνοντας συγκρίσεις μεταξύ των ομάδων ως προς τις βαθμολογίες τους και τον αριθμό των ατόμων που πέρασαν τη βάση (π.χ., *Κάτω από 50 έπιασαν παραπάνω από την Β ομάδα. Έπιασαν παραπάνω 80-89 από την Α ομάδα / Από την ομάδα Α πέρασαν 11 άτομα, ενώ από την ομάδα Β πέρασαν 10 άτομα. / Η ομάδα Α πήρε περισσότερα διαγωνίσματα με 80-89 και 50-59. Ενώ η Β πήρε περισσότερα διαγωνίσματα με 60-69 και 70-79 που σημαίνει ότι οι περισσότεροι μαθητές πήραν μεγαλύτερο βαθμό η Α. / Ναι μεν η ομάδα Β έχουν τους περισσότερους που πήραν 60-69, αλλά εμείς είμαστε περισσότεροι που πήραν μεγαλύτερους βαθμούς. Επίσης ίσα άτομα πέρασαν τις εξετάσεις. Οπότε είναι άδικο να λέτε ότι η Β είναι καλύτερη.*) → **3 μονάδες**
- Ορθή απάντηση και τεκμηρίωση με εστίαση σε ένα σημείο (Μονοδομικό επίπεδο - Watson & Moritz, 1998): Συμφωνούν ότι η ομάδα Α έχει καλύτερους βαθμούς από την ομάδα Β, περιγράφοντας τα δεδομένα της ομάδας Α, χωρίς να γίνεται σύγκριση με την ομάδα Β (π.χ., *Η ομάδα Α τα πήγε καλύτερα γιατί δυο μαθητές της πήραν 80-89 δηλαδή τους πρώτους καλύτερους βαθμούς / Είναι η ομάδα Α καλύτερη αφού οι βαθμοί της είναι πιο κοντά στο 100*) → **2 μονάδες**
- Ορθή απάντηση και καθόλου ή γενική τεκμηρίωση (π.χ., *Η ομάδα Α έχει καλύτερους βαθμούς*) ή Λάθος απάντηση και τεκμηρίωση σε συσχετιστικό επίπεδο (υπολογισμός μέσου όρου)→ **1 μονάδα**
- Λάθος απάντηση και καθόλου τεκμηρίωση → **0**

Σ2: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος λογικής σκέψης

Μέσος όρος των βαθμολογιών του κάθε ερωτήματος:

(α) Για κάθε ορθή συμπλήρωση του πίνακα, οι μονάδες που παίρνουν οι μαθητές φαίνονται πιο κάτω:

Ομάδα	Αριθμός παιχνιδιών που έπαιξαν μέχρι στιγμής	Βαθμοί	Νίκη	Ισοπαλία	Ήττα	Αριθμός τερμάτων που έβαλαν	Αριθμός τερμάτων που δέχτηκαν
Ελλάδα	2	4	**0,4 μ.**	**0,4 μ.**	**0,2 μ.**	3	2
Ισπανία	2	4	**0,4 μ.**	**0,4 μ.**	**0,2 μ.**	2	1
Πορτογαλία	2	3	**0,4 μ.**	**0,2 μ.**	**0,4 μ.**	3	2
Ρωσία	2	0	**0,2 μ.**	**0,2 μ.**	**0,6 μ.**	0	3

μ.=μονάδα

Μισές μονάδες: όταν έβαζαν √ και δεν έγραφαν αριθμό για νίκη ή ισοπαλία ή ήττα

(β) Κάθε ορθή συμπλήρωση του αποτελέσματος του κάθε παιχνιδιού βαθμολογείται με μία μονάδα και μισή μονάδα δίνεται αν αναφέρεται απλώς το αποτέλεσμα (νίκη της Χ χώρας ή ισοπαλία).

Πίνακας Γ3 (συνέχεια)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
Σ2 (συνέχεια)	(γ) ▪ Απάντηση που προκύπτει από συστηματικό πλάνο εργασίας και συσχετισμούς: Παρουσίαση σχεδόν όλων των περιπτώσεων σχετικά με τις διαφορετικές εκβάσεις των δυο αγώνων που απέμειναν, συνδυασμός με τα δεδομένα του (α) και του (β) και διαπίστωση ότι έχει περισσότερες πιθανότητες να περάσει στους 16 η Ελλάδα με την Ισπανία. → **4 μονάδες** ▪ Απάντηση που προκύπτει από μη ολοκληρωμένο συστηματικό πλάνο εργασίας και συσχετισμούς: Γίνονται υποθέσεις για τα αποτελέσματα των δυο αγώνων που απέμειναν, αλλά όχι πλήρης καταγραφή όλων των περιπτώσεων και συνδυασμός με τα δεδομένα του (α) και (β) → **3 μονάδες** ▪ Απάντηση που προκύπτει από απλούς συσχετισμούς: Χρήση των δεδομένων του (α) και (β), χωρίς να γίνονται υποθέσεις σχετικά με τα αποτελέσματα των δυο αγώνων που απομένουν (π.χ., *Περνά η Ελλάδα και Πορτογαλία αφού έχουν τα περισσότερα τέρματα / Περνά η Ελλάδα και η Ισπανία επειδή έχουν τη μεγαλύτερη βαθμολογία ή δεν έχουν ήττες ή τους καλύτερους βαθμούς ή γιατί είναι ισοπαλία*) → **2 μονάδες** ▪ Απάντηση που αναφέρει απλώς ότι θα προκριθούν η Ελλάδα και η Ισπανία ή Ελλάδα και Πορτογαλία → **1 μονάδα** ▪ Απάντηση που συμπεριλαμβάνει τη Ρωσία ότι θα περάσει στους 16 ή ότι θα περάσουν τρεις χώρες ή μια χώρα → **0**
Σ3: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων με βάση δεδομένα	▪ Ορθή απάντηση (€148) με ορθό υπολογισμό των τιμών για την περίφραξη (€3) και για το κούρεμα του γρασιδιού (€1) → **4 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά με ορθό υπολογισμό των τιμών για την περίφραξη (€3) και για το κούρεμα του γρασιδιού (€1) → **3 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά εμφανής προσπάθεια εύρεσης σχέσεων είτε μεταξύ των μεγεθών των κήπων (δηλαδή αντιλαμβάνεται ότι ο κήπος Γ χωρεί δυο φορές το κήπο Α και δυο φορές το κήπο Β και έτσι κάνει 74Χ2 + 36Χ2) είτε μεταξύ τη τιμής του εμβαδού/περιμέτρου με τα χρήματα (π.χ., χρήση αναλογικού συλλογισμού: αφού τα 10 m είναι 36 ευρώ, πόσα θα είναι τα 32 m;) → **2 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά υπάρχει προσπάθεια υπολογισμού του εμβαδού και της περιμέτρου του κάθε κήπου (ορθά ή μη) (περιλαμβάνει κατανόηση τουλάχιστον του προβλήματος) → **1 μονάδα** ▪ Λάθος απάντηση (πράξεις χωρίς λογική που φαίνεται ότι δεν κατανοεί τα δεδομένα) → **0**
Σ4: Επίλυση προβλήματος λήψης απόφασης με βάση δεδομένα σε πίνακα	▪ Ορθή απάντηση (επιλογή ορθού πακέτου χρέωσης και ορθή χρήση δεδομένων για τα άτομα με βάση την ηλικία) → **4 μονάδες** ▪ Μερικώς ορθή απάντηση (επιλογή ορθού πακέτου χρέωσης, κατανόηση του αριθμού και των ηλικιών των ατόμων που δίνονται στον πρόβλημα, αλλά δεν κατανοεί ότι το παιδί κάτω από 4 ετών δεν χρεώνεται) → **3 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά περιλαμβάνει κατανόηση του αριθμού και των ηλικιών των ατόμων που δίνονται στον πρόβλημα και επιλογή του ορθού πακέτου χρέωσης, αλλά συνδυάζεται με τιμές από άλλα πακέτα → **2 μονάδες** ▪ Λάθος απάντηση, αλλά περιλαμβάνει κατανόηση του αριθμού και των ηλικιών των ατόμων που δίνονται στο πρόβλημα → **1 μονάδα** ▪ Λάθος απάντηση (Μη κατανόηση δεδομένων) → 0

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Οργάνωση μαθημάτων

Πίνακας Δ1

Οργάνωση των Μαθημάτων ως προς το Μαθηματικό τους Περιεχόμενο και τους Μαθησιακούς Στόχους

Μάθημα	**Μαθηματικό περιεχόμενο**	**Μαθησιακοί στόχοι**
1 (1Χ40΄)	Επαναλαμβανόμενα μοτίβα	Οι μαθητές: 1. Να παρατηρούν προσεκτικά μοτίβα. 2. Να κάνουν υποθέσεις και να τις ελέγχουν σχετικά με τα μοτίβα που παρατηρούν. 3. Να διατυπώνουν συμπεράσματα σχετικά με τα μοτίβα που παρατηρούν.
2 (2Χ40΄)	Αξία θέση ψηφίου – Σύγκριση αριθμών	Οι μαθητές: 1. Να εξηγούν την αξία κάθε ψηφίου σε έναν ακέραιο αριθμό. 2. Να αναλύουν και να συνθέτουν ακέραιους αριθμούς. 3. Να συγκρίνουν και να σειροθετούν ακέραιους αριθμούς.
3 (2Χ40΄)	Εκτίμηση	Οι μαθητές: 1. Να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους εκτίμησης του πληθικού αριθμού ενός συνόλου. 2. Να εκτιμούν το μήκος μιας απόστασης, χρησιμοποιώντας διάφορους τρόπους. 3. Να χρησιμοποιούν την κατάλληλη μονάδα μέτρησης μήκους ανάλογα με την περίπτωση.
4 (4Χ40΄)	Ευελιξία στις πράξεις-Νοεροί υπολογισμοί	Οι μαθητές: 1. Να χρησιμοποιούν διάφορες στρατηγικές και ιδιότητες πράξεων κατά την εκτέλεση νοερών και γραπτών υπολογισμών με ακέραιους αριθμούς. 2. Να δημιουργούν ένα αποτέλεσμα (άθροισμα, διαφορά, γινόμενο) με πολλούς τρόπους. 3. Να δημιουργούν μαθηματικές προτάσεις, αξιολογώντας τους αριθμούς και τις πράξεις που δίνονται.
5 (2Χ40΄)	Αλγεβρικές εκφράσεις	Οι μαθητές: 1. Να απλοποιούν μαθηματικές εκφράσεις, εξηγώντας τον τρόπο σκέψης τους. 2. Να υπολογίζουν την τιμή μαθηματικών εκφράσεων για συγκεκριμένες τιμές μεταβλητών. 3. Να επιλύουν και να χειρίζονται εξισώσεις.
6 (3Χ40΄)	Αναπτυσσόμενα μοτίβα – Γενικός τύπος	Οι μαθητές: 1. Να περιγράφουν, να συμπληρώνουν, να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. 2. Να βρίσκουν με επαγωγικό τρόπο τον γενικό όρο αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων, δίνοντας τις απαραίτητες εξηγήσεις. 3. Να εκφράζουν τον νιοστό όρο σε συμβολική μορφή.
7 (3Χ40΄)	Ιδιότητες αριθμών	Οι μαθητές: 1. Να αξιολογούν ομάδα αριθμών ως προς την ιδιότητα που την χαρακτηρίζει.
8 (2Χ40΄)	Οπτικοποίηση – Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων	Οι μαθητές: 1. Να διαχωρίζουν και να συνθέτουν δισδιάστατα σχήματα.

Πίνακας Δ1 (συνέχεια)

Μάθημα	Μαθηματικό περιεχόμενο	Μαθησιακοί στόχοι
9 (3Χ40΄)	Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων	Οι μαθητές: 1. Να κατασκευάζουν όσα περισσότερα σχήματα μπορούν σε διάφορα πλαίσια που δίνονται, εξηγώντας τις στρατηγικές που εφαρμόζουν 2. Να διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος. 3. Να συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.
10 (5Χ40΄)	Περίμετρος & εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων	Οι μαθητές: 1. Να εκτιμούν και να υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων. 2. Να διερευνούν ισοδύναμα σχήματα και να εξετάζουν σε ποιες περιπτώσεις έχουν και την ίδια περίμετρο. 3. Να λύνουν προβλήματα λήψης απόφασης και σχεδιασμού σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων.
11 (1Χ40΄)	Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων	Οι μαθητές: 1. Να διαβάζουν και να κατασκευάζουν ραβδογράμματα. 2. Να αξιολογούν διάφορους τρόπους παρουσίασης δεδομένων σε σχέση με τη συνέπειά τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Παράδειγμα Ανοικτού Περιβάλλοντος Διερευνητικής Μάθησης: Φύλλα Εργασίας

ΜΑΘΗΜΑ 10

Περίμετρος & Εμβαδόν Γεωμετρικών Σχημάτων

Στόχοι

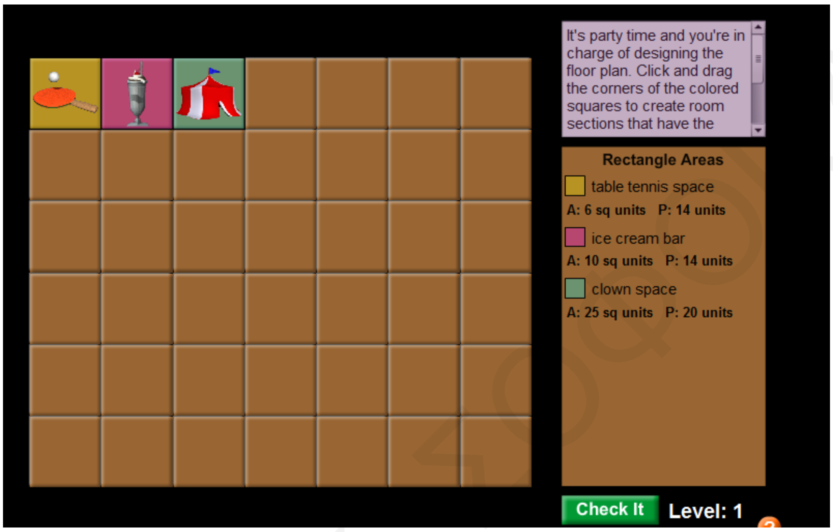
- Στο μάθημα αυτό θα μάθουμε:
  - Να εκτιμούμε και να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων.
  - Να διερευνούμε ισοδύναμα σχήματα και να εξετάζουμε σε ποιες περίπτώσεις έχουν και την ίδια περιμετρο.
  - Να λύνουμε προβλήματα λήψης αποφάσης και σχεδιασμού σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων.

Ο ΣΧΕΔΙΑΣΤΗΣ

Δραστηριότητα 1

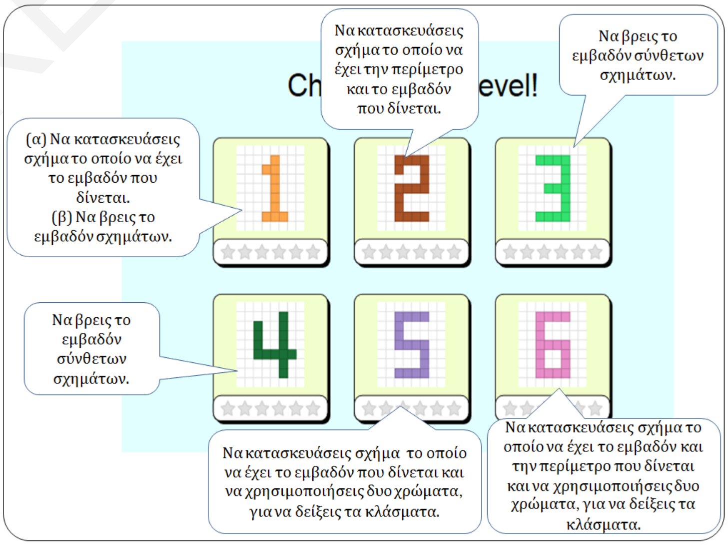
Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.mathplayground.com/PartyDesigner/PartyDesigner.swf. Να κατασκευάσεις τους ορθογώνιους χώρους που σου δίνονται με βάση το εμβαδόν και την περίμετρό τους.

Προσοχή δεν μπορεί ένας χώρος να καλύπτει τον άλλο.



Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_en.html. Να λύσεις τους προβληματισμούς 2 και 4 που δίνονται.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ & ΤΗΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟ

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=1011 και να απαντήσεις στα πιο κάτω.

Συμφωνείς ή διαφωνείς με τις απόψεις των πιο κάτω μαθητών; Να δώσεις κατάλληλες εξηγήσεις.

Ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν ενός σχήματος είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αριθμό που δείχνει την περίμετρό του.

Δεν υπάρχει σχήμα που ο αριθμός που δείχνει την περίμετρό του να είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει το εμβαδόν του.

Τα σχήματα που έχουν ίδια περίμετρο, έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Ανάμεσα στα ορθογώνια που έχουν την ίδια περίμετρο, το τετράγωνο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Το σχήμα που έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο, έχει και το μεγαλύτερο εμβαδόν.

ΓΙΝΟΜΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΑΣ!

Δραστηριότητα

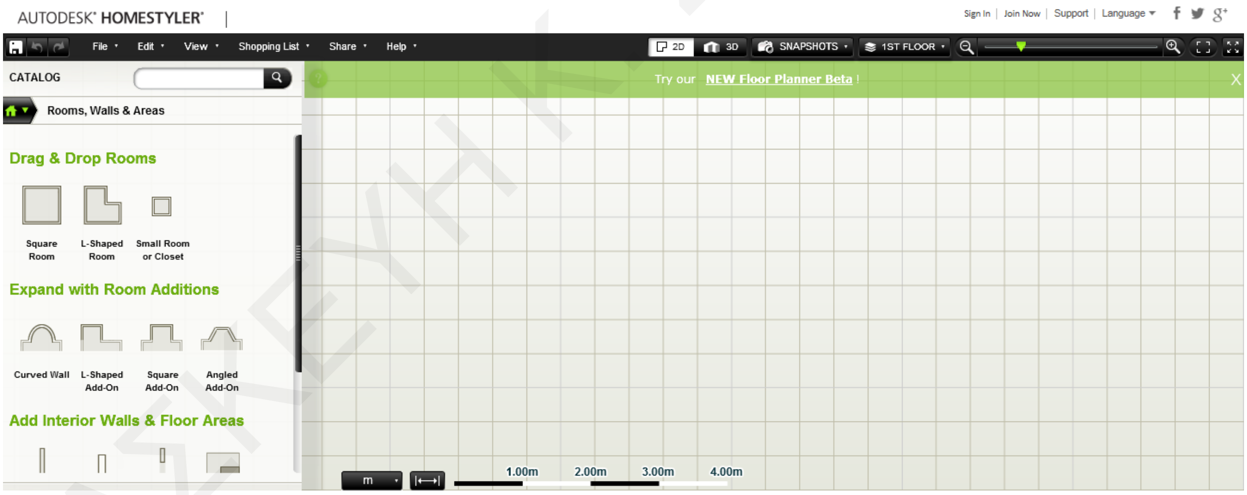
Υπάρχει ο πιο κάτω διαγωνισμός στο διαδίκτυο:

Σας αρέσει να σχεδιάζετε σπίτια; Δεν είστε όμως αρχιτέκτονες; Επιτέλους βρήκατε τον τρόπο να δείξετε τη δουλειά σας και να κερδίσετε ένα δώρο έκπληξη.

Ψάχνουμε να βρούμε το καλύτερο σπίτι που θα μπορούσε να χτιστεί σε οικόπεδο των 100 m^2. Το σπίτι θα πρέπει να είναι ενός ορόφου.

Οι επισκέπτες της ιστοσελίδας θα ψηφίσουν το καλύτερο σπίτι. Ο νικητής θα κερδίσει έναν δώρο έκπληξη.

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.homestyler.com/designer, για να αρχίσεις να σχεδιάζεις το σπίτι σου.



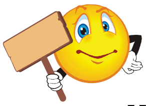
Ποια κριτήρια ακολούθησες, για να σχεδιάσεις το καλύτερο σπίτι; Πόσα θα το πουλούσες;

____

____

____

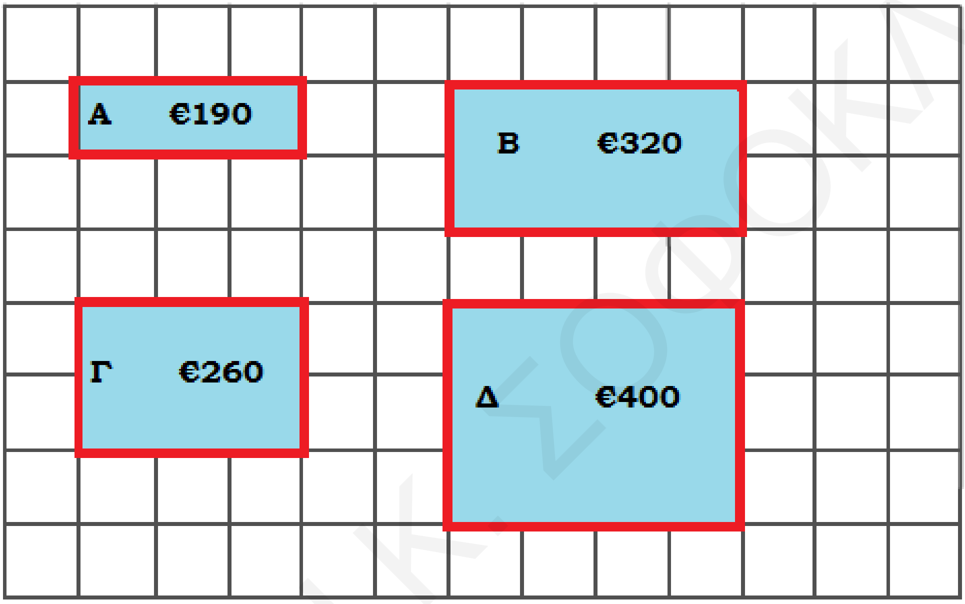
ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΠΑΡΑΘΥΡΩΝ



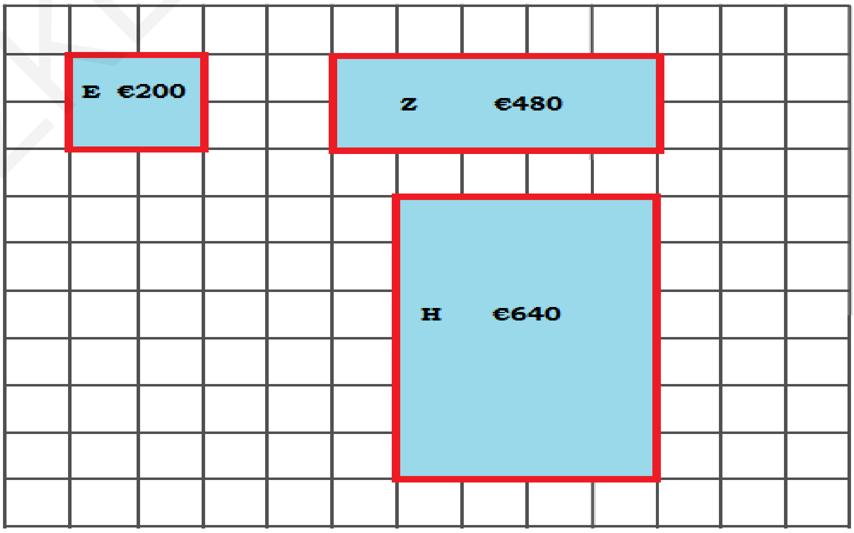
Δραστηριότητα

Η εταιρεία “Warmsnug” υπολογίζει τις τιμές πώλησης των παραθύρων που κατασκευάζει με βάση το εμβαδόν του γυαλιού που χρησιμοποιεί και το μήκος του πλαισίου που τοποθετεί γύρω από το γυαλί.

(α) Να βρεις με ποιο τρόπο υπολογίζει η εταιρεία “Warmsnug” τις τιμές πώλησης των παραθύρων της, με βάση τα πιο κάτω.



(β) Σε ποιο από τα πιο κάτω παράθυρα το κόστος που αναγράφεται δεν ισχύει με βάση τον τρόπο υπολογισμού της εταιρείας “Warmsnug”;



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

Παράδειγμα Καθοδηγούμενου Περιβάλλοντος Διερευνητικής Μάθησης: Φύλλα Εργασίας

ΜΑΘΗΜΑ 10

Περίμετρος & Εμβαδόν Γεωμετρικών Σχημάτων

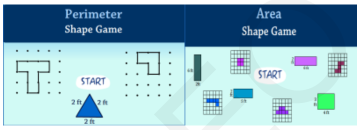
Στόχοι

- Στο μάθημα αυτό θα μάθουμε:
  - Να εκτιμούμε και να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων.
  - Να διερευνούμε ισοδύναμα σχήματα και να εξετάζουμε σε ποιες περίπτώσεις έχουν και την ίδια περιμετρο.
  - Να λύνουμε προβλήματα λήψης αποφάσης και σχεδιασμού σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων.

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΕΜΒΑΔΟΥ & ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

Δραστηριότητα 1

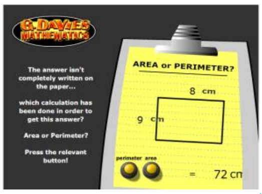
Να ανοίξεις τα εφαρμογίδια: http://www.sheppardsoftware.com/mathgames/geometry/shapeshoot/PerimeterShapesShoot.htm & http://www.sheppardsoftware.com/mathgames/geometry/shapeshoot/AreaShapesShoot.htm.



Να βρεις τα σχήματα που έχουν περίμετρο ή εμβαδόν τον αριθμό που δίνεται.

Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.broadoak.n-somerset.sch.uk/gdaviesmaths/AP%20Paintball.html.



Να βρεις τι δείχνει ο αριθμός που δίνεται: εμβαδόν ή περίμετρο.

Δραστηριότητα 3

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://mrnussbaum.com/zoo-play/.

Να λύσεις τους προβληματισμούς που δίνονται.

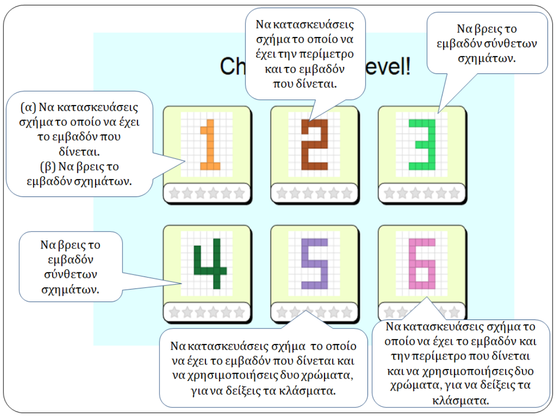
(α) Να σχεδιάσεις ορθογώνιους χώρους με συγκεκριμένο εμβαδόν.

(β) Να σχεδιάσεις ορθογώνιους χώρους με συγκεκριμένη περίμετρο.

(γ) Να σχεδιάσεις ορθογώνιους χώρους με συγκεκριμένο εμβαδόν και περίμετρο.

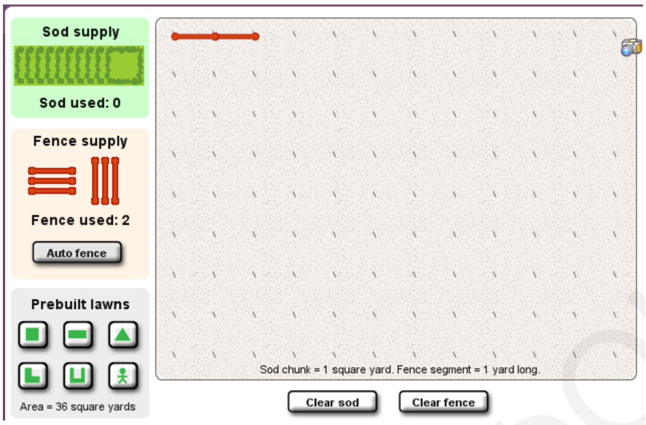
Δραστηριότητα 4

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_en.html. Να λύσεις τους προβληματισμούς που δίνονται.



ΣΧΕΔΙΑΣΤΕΣ ΚΗΠΩΝ

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=1011 και να απαντήσεις στα πιο κάτω.



Δραστηριότητα 1

Να σχεδιάσεις διαφορετικούς κήπους που να έχουν εμβαδόν 8 m². Μπορεί να έχουν όποιο σχήμα θέλεις, αλλά να είναι πολύγωνα.

Ο κύριος Γιώργος θέλει να περιφράξει το κήπο του που έχει εμβαδόν 8 m².

Ποιο είναι το μικρότερο μήκος φράκτη που θα χρειαστεί; ____________________

Ποιο είναι το μεγαλύτερο μήκος φράκτη που θα χρειαστεί; ____________________

Δραστηριότητα 2

(α) Συμφωνείς με την πιο πάνω άποψη; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

(β) Να ελέγξεις την πρόβλεψη σου, μελετώντας τους κήπους που είναι ήδη σχεδιασμένοι στο εφαρμογίδιο και έχουν εμβαδόν 36 m². Έχουν όλοι οι κήποι με εμβαδόν 36 m² την ίδια περίμετρο; Να εξηγήσεις.

(γ)

Δραστηριότητα 3

Να σχεδιάσεις διαφορετικούς ορθογώνιους κήπους, οι οποίοι να έχουν εμβαδόν 12 m² και 16 m².

(α) Να συμπληρώσεις τον πίνακα.

ΣΧΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΠΛΑΤΟΣ	ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ	ΕΜΒΑΔΟΝ
1ο				12 m²
2ο				12 m²
3ο				12 m²
4ο				16 m²
5ο				16 m²
6ο				16 m²

(β) Να μελετήσεις τον πίνακα και να γράψεις τις διαστάσεις των σχημάτων, των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους.

____

____

(γ) Να βρεις και άλλα σχήματα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους.

____

____

Δραστηριότητα 4

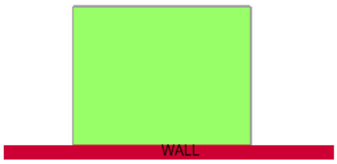
Να σχεδιάσεις διαφορετικούς ορθογώνιους κήπους, οι οποίοι για την περίφραξή τους χρειάζονται 24 m φράκτη.

(α) Να γράψεις τις διαστάσεις των ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 24 m στον πιο κάτω πίνακα.

ΣΧΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΠΛΑΤΟΣ	ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ	ΕΜΒΑΔΟΝ
1ο			24 m	
2ο			24 m	
3ο			24 m	
4ο			24 m	
5ο			24 m	
6ο			24 m	

(β) Ποιες διαστάσεις έχει ο ορθογώνιος κήπος, ο οποίος έχει περίμετρο 24 m και το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν;

(γ) Σου ανατέθηκε να φτιάξεις ορθογώνιο κήπο με περίμετρο 24 m, αλλά η μια πλευρά του να είναι ο τοίχος (όπως φαίνεται δίπλα). Δηλαδή, θα χρειαστεί φράκτη για τις τρεις πλευρές του. Ποιες διαστάσεις μπορεί να έχει ο κήπος ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν;



____

____

____

____

ΓΙΝΟΜΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΑΣ!

Δραστηριότητα

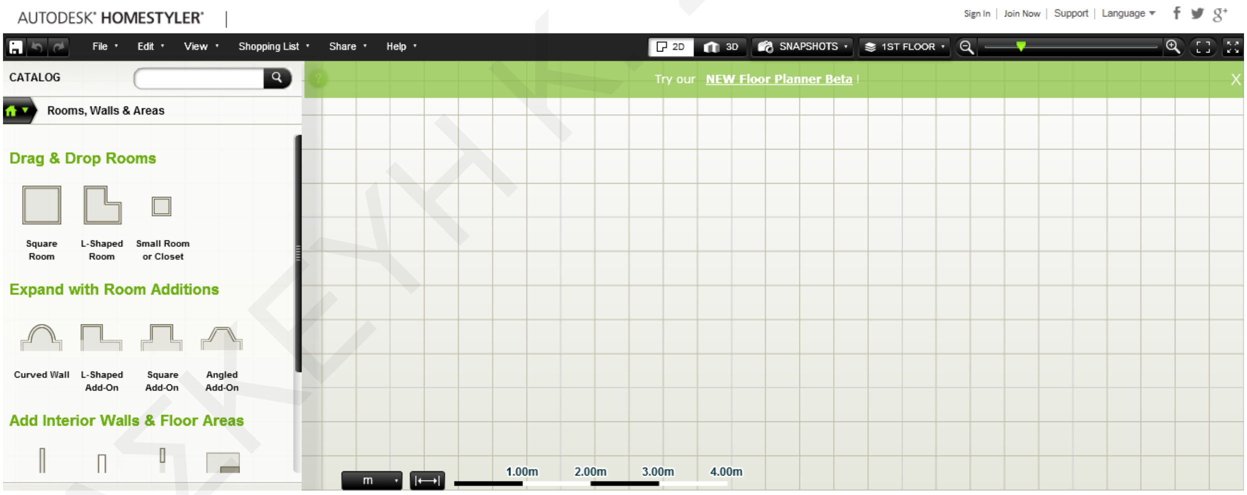
Υπάρχει ο πιο κάτω διαγωνισμός στο διαδίκτυο:

Σας αρέσει να σχεδιάζετε σπίτια; Δεν είστε όμως αρχιτέκτονες; Επιτέλους βρήκατε τον τρόπο να δείξετε τη δουλειά σας και να κερδίσετε ένα δώρο έκπληξη.

Ψάχνουμε να βρούμε το καλύτερο σπίτι που θα μπορούσε να χτιστεί σε οικόπεδο των 100 m^2. Το σπίτι θα πρέπει να είναι ενός ορόφου.

Οι επισκέπτες της ιστοσελίδας θα ψηφίσουν το καλύτερο σπίτι. Ο νικητής θα κερδίσει έναν δώρο έκπληξη.

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.homestyler.com/designer, για να αρχίσεις να σχεδιάζεις το σπίτι σου.



Ποια κριτήρια ακολούθησες, για να σχεδιάσεις το καλύτερο σπίτι; Πόσα θα το πουλούσες;

____

____

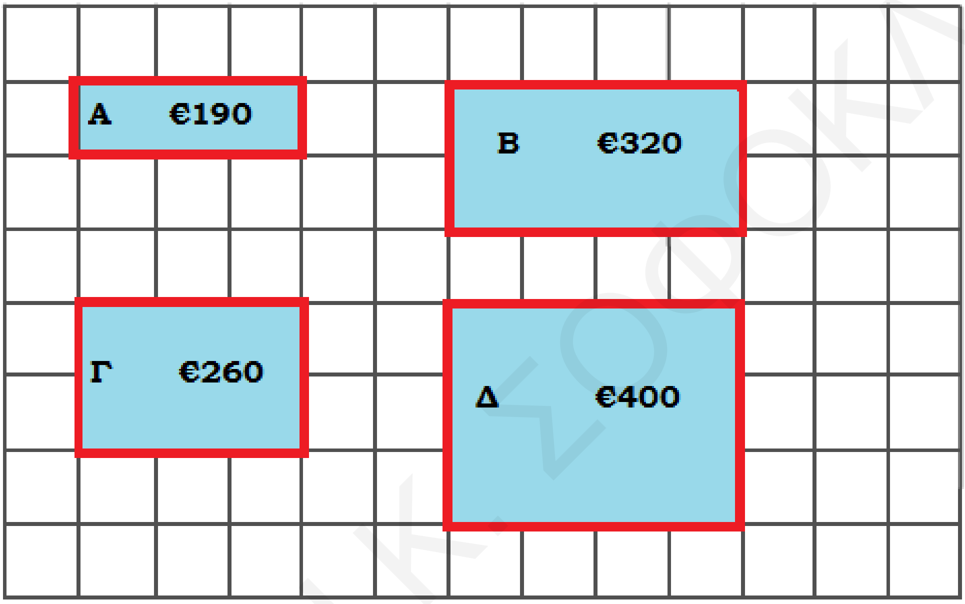
____

ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΠΑΡΑΘΥΡΩΝ

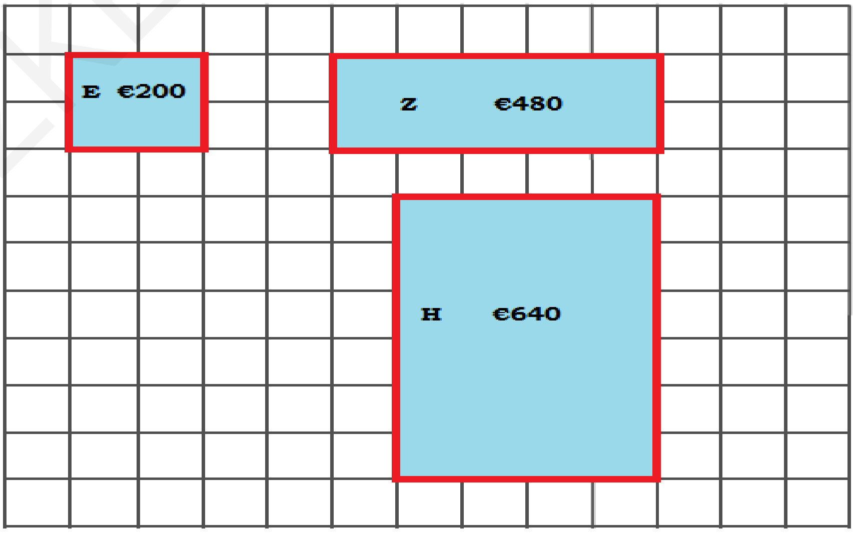
Δραστηριότητα

Η εταιρεία “Warmsnug” υπολογίζει τις τιμές πώλησης των παραθύρων που κατασκευάζει με βάση το εμβαδόν του γυαλιού που χρησιμοποιεί και το μήκος του πλαισίου που τοποθετεί γύρω από το γυαλί.

(α) Να βρεις με ποιο τρόπο υπολογίζει η εταιρεία “Warmsnug” τις τιμές πώλησης των παραθύρων της, με βάση τα πιο κάτω.



(β) Σε ποιο από τα πιο κάτω παράθυρα το κόστος που αναγράφεται δεν ισχύει με βάση τον τρόπο υπολογισμού της εταιρείας “Warmsnug”;



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ

Παράδειγμα Μικτού Περιβάλλοντος Διερευνητικής Μάθησης: Φύλλα Εργασίας

ΜΑΘΗΜΑ 10

Περίμετρος & Εμβαδόν Γεωμετρικών Σχημάτων

Στόχοι

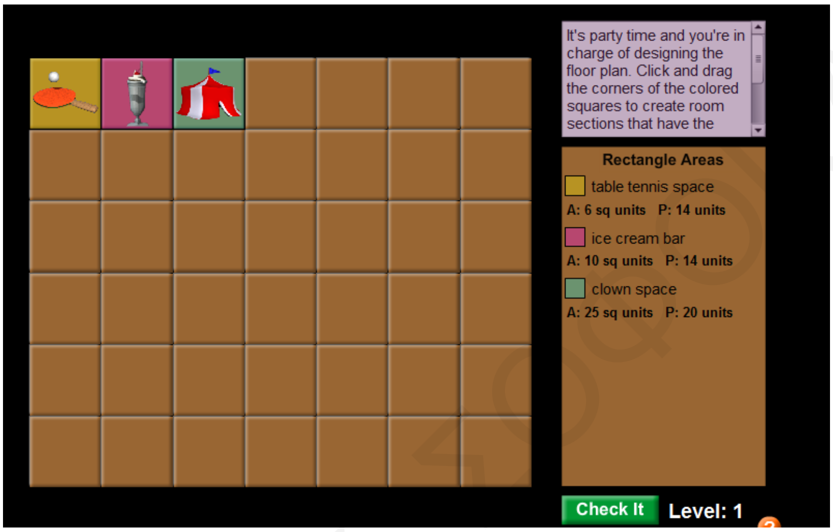
- Στο μάθημα αυτό θα μάθουμε:
  - Να εκτιμούμε και να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων.
  - Να διερευνούμε ισοδύναμα σχήματα και να εξετάζουμε σε ποιες περίπτώσεις έχουν και την ίδια περιμετρο.
  - Να λύνουμε προβλήματα λήψης αποφάσης και σχεδιασμού σχετικά με το εμβαδόν και την περίμετρο σχημάτων.

Ο ΣΧΕΔΙΑΣΤΗΣ

Δραστηριότητα 1

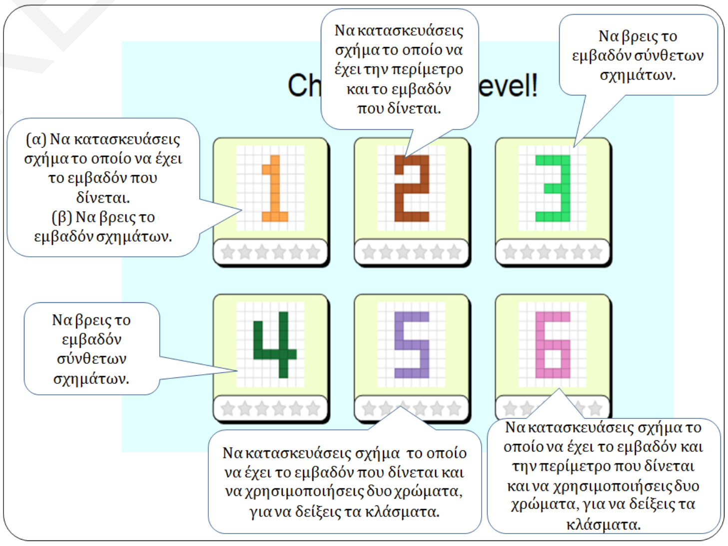
Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.mathplayground.com/PartyDesigner/PartyDesigner.swf. Να κατασκευάσεις τους ορθογώνιους χώρους που σου δίνονται με βάση το εμβαδόν και την περίμετρό τους.

Προσοχή δεν μπορεί ένας χώρος να καλύπτει τον άλλο.



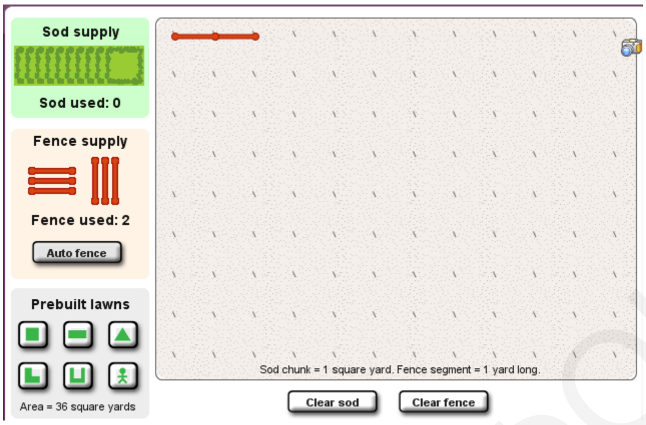
Δραστηριότητα 2

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_en.html. Να λύσεις τους προβληματισμούς 2 και 4 που δίνονται.



ΣΧΕΔΙΑΣΤΕΣ ΚΗΠΩΝ

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=1011 και να απαντήσεις στα πιο κάτω.



Δραστηριότητα 1

Να σχεδιάσεις διαφορετικούς κήπους που να έχουν εμβαδόν 8 m². Μπορεί να έχουν όποιο σχήμα θέλεις, αλλά να είναι πολύγωνα.

Ο κύριος Γιώργος θέλει να περιφράξει το κήπο του που έχει εμβαδόν 8 m².

Ποιο είναι το μικρότερο μήκος φράκτη που θα χρειαστεί; ____________________

Ποιο είναι το μεγαλύτερο μήκος φράκτη που θα χρειαστεί; ____________________

Δραστηριότητα 2

Όλοι οι κήποι με εμβαδόν 36 m^2, έχουν την ίδια περίμετρο.

(α) Συμφωνείς με την πιο πάνω άποψη; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

(β) Να ελέγξεις την πρόβλεψη σου, μελετώντας τους κήπους που είναι ήδη σχεδιασμένοι στο εφαρμογίδιο και έχουν εμβαδόν 36 m^2. Έχουν όλοι οι κήποι με εμβαδόν 36 m^2 την ίδια περίμετρο; Να εξηγήσεις.

(γ)

Θέλω να φτιάξω έναν κήπο με εμβαδόν 36 m^2, αλλά να χρησιμοποιήσω το μικρότερο δυνατόν μήκος σε φράκτη. Ποιο κήπο θα πρέπει να φτιάξω; Να μου δώσεις κατάλληλες εξηγήσεις.

Δραστηριότητα 3

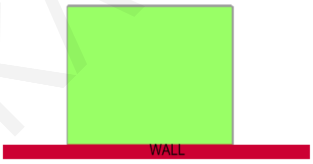
Να σχεδιάσεις διαφορετικούς ορθογώνιους κήπους, των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους.

Δραστηριότητα 4

Να σχεδιάσεις διαφορετικούς ορθογώνιους κήπους, οι οποίοι για την περίφραξή τους χρειάζονται 24 m φράκτη.

(α) Ποιες διαστάσεις έχει ο ορθογώνιος κήπος. ο οποίος έχει περίμετρο 24 m και το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν;

(β) Σου ανατέθηκε να φτιάξεις ορθογώνιο κήπο με περίμετρο 24 m, αλλά η μια πλευρά του να είναι ο τοίχος (όπως φαίνεται δίπλα). Δηλαδή, θα χρειαστεί φράκτη για τις τρεις πλευρές του. Ποιες διαστάσεις μπορεί να έχει ο κήπος ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν;



ΓΙΝΟΜΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΑΣ!

Δραστηριότητα

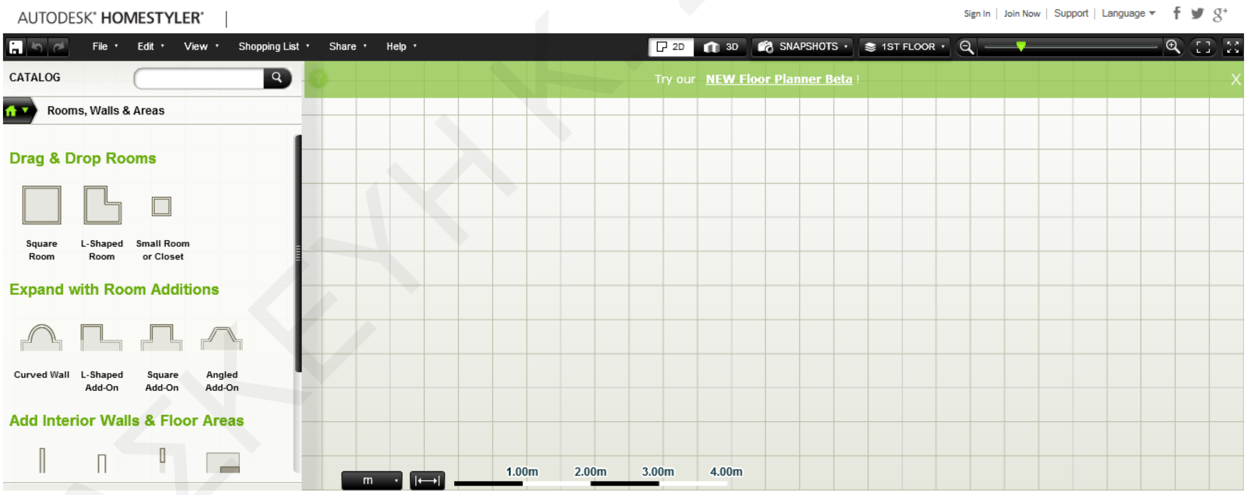
Υπάρχει ο πιο κάτω διαγωνισμός στο διαδίκτυο:

Σας αρέσει να σχεδιάζετε σπίτια; Δεν είστε όμως αρχιτέκτονες; Επιτέλους βρήκατε τον τρόπο να δείξετε τη δουλειά σας και να κερδίσετε ένα δώρο έκπληξη.

Ψάχνουμε να βρούμε το καλύτερο σπίτι που θα μπορούσε να χτιστεί σε οικόπεδο των 100 m². Το σπίτι θα πρέπει να είναι ενός ορόφου.

Οι επισκέπτες της ιστοσελίδας θα ψηφίσουν το καλύτερο σπίτι. Ο νικητής θα κερδίσει έναν δώρο έκπληξη.

Να ανοίξεις το εφαρμογίδιο: http://www.homestyler.com/designer, για να αρχίσεις να σχεδιάζεις το σπίτι σου.



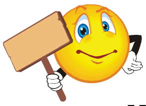
Ποια κριτήρια ακολούθησες, για να σχεδιάσεις το καλύτερο σπίτι; Πόσα θα το πουλούσες;

____

____

____

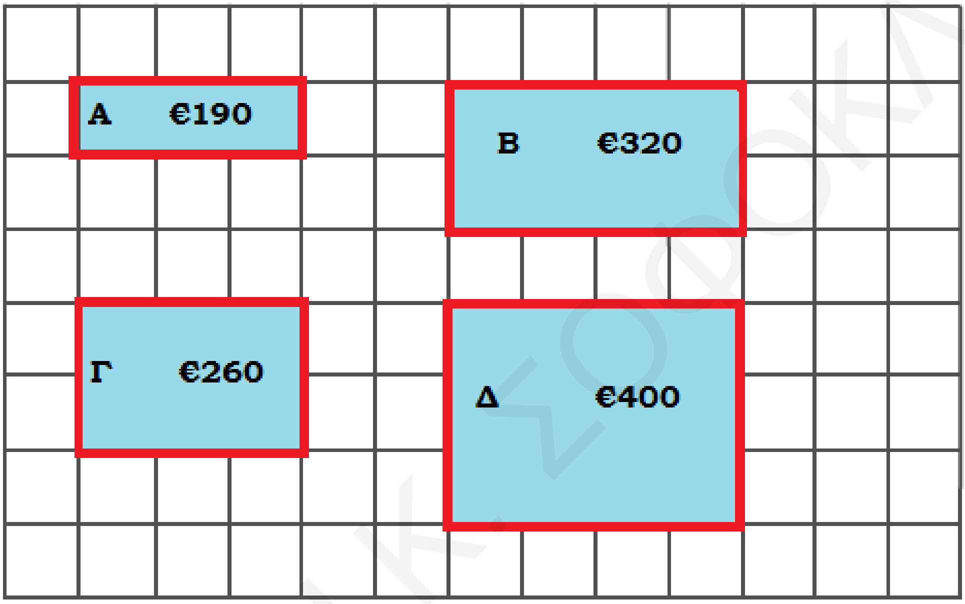
ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΠΑΡΑΘΥΡΩΝ



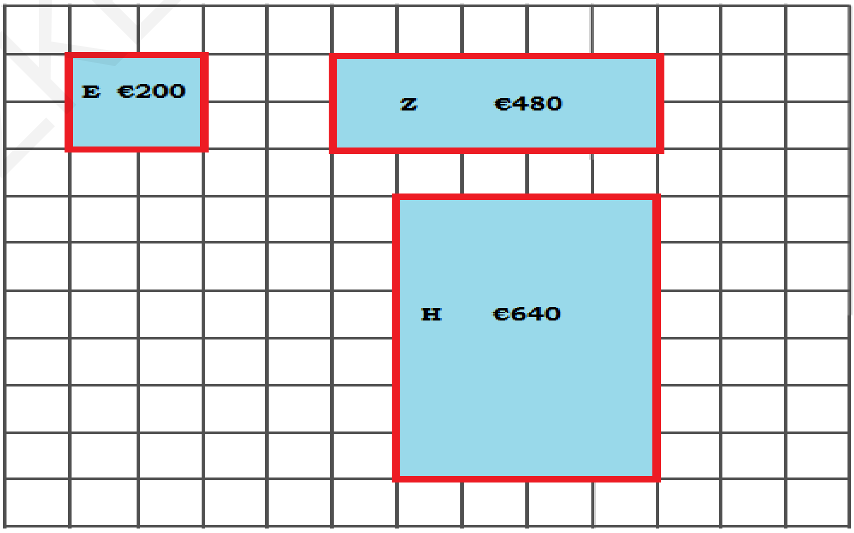
Δραστηριότητα

Η εταιρεία “Warmsnug” υπολογίζει τις τιμές πώλησης των παραθύρων που κατασκευάζει με βάση το εμβαδόν του γυαλιού που χρησιμοποιεί και το μήκος του πλαισίου που τοποθετεί γύρω από το γυαλί.

(α) Να βρεις με ποιο τρόπο υπολογίζει η εταιρεία “Warmsnug” τις τιμές πώλησης των παραθύρων της, με βάση τα πιο κάτω.



(β) Σε ποιο από τα πιο κάτω παράθυρα το κόστος που αναγράφεται δεν ισχύει με βάση τον τρόπο υπολογισμού της εταιρείας “Warmsnug”;



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η

Πίνακες Ποσοτικής Ανάλυσης

Πίνακας Η1

Συσχετίσεις μεταξύ της Επίδοσης των Μαθητών του Δείγματος στις Μεταβλητές του Δοκιμίου της Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψης στα Μαθηματικά

	Β1	Β2	Β3	Β4	Β5	Β6	Β7	Κ1	Κ2	Κ3	Κ4	Κ5	Κ6	Κ7	Κ8	Κ9
Β1	1															
Β2	**.26***	1														
Β3	**.30***	**.21***	1													
Β4	**.22***	**.10***	**.23***	1												
Β5	**.19***	**.10***	**.25***	**.35***	1											
Β6	**.31***	**.12***	**.30***	**.27***	**.32***	1										
Β7	**.32***	**.18***	**.29***	**.25***	**.33***	**.55***	1									
Κ1	.19*	.14*	.13*	.14*	.17*	.20*	.19*	1								
Κ2	.25*	.13*	.21*	.17*	.19*	.26*	.18*	**.42***	1							
Κ3	.23*	.10*	.25*	.24*	.22*	.27*	.17*	**.29***	**.52***	1						
Κ4	.26*	.15*	.29*	.14*	.16*	.20*	.22*	.14*	.18*	.21*	1					
Κ5	.10*	.04	.10	.10	.03	.10*	.12*	.13*	.13*	.10*	**.13***	1				
Κ6	.26*	.17*	.26*	.21*	.20*	.28*	.36*	.16*	.25*	.25*	**.23***	**.15***	1			
Κ7	.24*	.10*	.22*	.21*	.22*	.21*	.18*	.23*	.42*	.43*	.25*	.11*	.26*	1		
Κ8	.26*	.16*	.21*	.14*	.20*	.28*	.29*	.22*	.31*	.28*	.18*	.17*	.30*	**.40***	1	
Κ9	.27*	.17*	.30*	.15*	.24*	.32*	.31*	.26*	.41*	.46*	.28*	.13*	.30*	**.46***	**.46***	1
ΕΥΧΔ1	.16*	.18*	.21*	.22*	.17*	.20*	.19*	.20*	.18*	.20*	.19*	.11*	.24*	.26*	.28*	.24*
ΕΥΕΔ1	.21*	.16*	.24*	.24*	.15*	.26*	.21*	.20*	.20*	.22*	.17*	.10*	.30*	.31*	.29*	.24*
ΠΡΩΔ1	.16*	.11*	.17*	.18*	.10	.16*	.12*	.10*	.13*	.12*	.15*	.10	.22*	.22*	.21*	.15*
ΕΥΧΔ2	.22*	.11*	.26*	.25*	.20*	.26*	.19*	.13*	.21*	.26*	.22*	.10*	.23*	.26*	.27*	.30*
ΕΥΕΔ2	.21*	.14*	.26*	.25*	.22*	.30*	.27*	.21*	.22*	.23*	.21*	.10*	.28*	.23*	.27*	.27*
ΠΡΩΔ2	.28*	.16*	.25*	.27*	.23*	.27*	.24*	.14*	.22*	.23*	.22*	.13*	.25*	.22*	.25*	.25*
ΕΥΧΔ3	.18*	.20*	.15*	.13*	.12*	.19*	.23*	.14*	.19*	.19*	.17*	.02	.26*	.18*	.17*	.27*
ΕΥΕΔ3	.16*	.16*	.10*	.11*	.10*	.19*	.23*	.14*	.17*	.17*	.13*	.01	.22*	.16*	.15*	.23*
ΠΡΩΔ3	.14*	.18*	.12*	.11*	.12*	.19*	.24*	.13*	.15*	.14*	.14*	.004	.21*	.15*	.13*	.21*
ΕΥΧΔ4	.16*	.17*	.19*	.18*	.16*	.22*	.23*	.17*	.14*	.20*	.15*	.10*	.32*	.20*	.23*	.20*
ΕΥΕΔ4	.14*	.18*	.19*	.17*	.16*	.21*	.22*	.18*	.15*	.20*	.13*	.10*	.31*	.20*	.24*	.20*
ΠΡΩΔ4	.10*	.19*	.16*	.12*	.12*	.17*	.18*	.15*	.13*	.17*	.10*	.02	.25*	.16*	.21*	.18*
Σ1	.16*	.14*	.16*	.15*	.15*	.20*	.22*	.10*	.15*	.21*	.13*	.12*	.24*	.18*	.19*	.23*
Σ2	.20*	.10*	.23*	.22*	.22*	.26*	.24*	.12*	.25*	.27*	.17*	.10*	.25*	.18*	.25*	.31*
Σ3	.32*	.19*	.21*	.14*	.12*	.24*	.32*	.11*	.16*	.21*	.20*	.10*	.25*	.21*	.32*	.27*
Σ4	.17*	.10*	.20*	.14*	.13*	.28*	.27*	.10*	.15*	.23*	.13*	.10*	.24*	.20*	.23*	.30*

*p<.05

Πίνακας Η1 (συνέχεια)

	ΕΥΧΔ1	ΕΥΕΔ1	ΠΡΩΤΔ1	ΕΥΧΔ2	ΕΥΕΔ2	ΠΡΩΤΔ2	ΕΥΧΔ3	ΕΥΕΔ3	ΠΡΩΤΔ3	ΕΥΧΔ4	ΕΥΕΔ4	ΠΡΩΤΔ4	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4
ΕΥΧΔ1	1															
ΕΥΕΔ1	**.56***	1														
ΠΡΩΔ1	**.43***	**.57***	1													
ΕΥΧΔ2	.34*	.32*	.27*	1												
ΕΥΕΔ2	.28*	.38*	.24*	**.58***	1											
ΠΡΩΔ2	.31*	.32*	.26*	**.56***	**.68***	1										
ΕΥΧΔ3	.23*	.24*	.16*	.24*	.29*	.30*	1									
ΕΥΕΔ3	.18*	.23*	.14*	.19*	.25*	.25*	**.90***	1								
ΠΡΩΔ3	.18*	.21*	.16*	.20*	.24*	.26*	**.78***	**.81***	1							
ΕΥΧΔ4	.26*	.34*	.22*	.28*	.35*	.33*	.36*	.31*	.28*	1						
ΕΥΕΔ4	.25*	.35*	.23*	.27*	.35*	.32*	.37*	.32*	.28*	**.94***	1					
ΠΡΩΔ4	.21*	.32*	.21*	.21*	.34*	.30*	.35*	.31*	.28*	**.82***	**.85***	1				
Σ1	.24*	.27*	.12*	.16*	.16*	.21*	.15*	.11*	.11*	.31*	.31*	.30*	1			
Σ2	,21*	.22*	.18*	.30*	.29*	.27*	.26*	.23*	.21*	.26*	.27*	.26*	**.30***	1		
Σ3	.21*	.28*	.23*	.26*	.27*	.33*	.22*	.21*	.22*	.29*	.28*	.26*	**.27***	**.36***	1	
Σ4	.16*	.25*	.20*	.25*	.21*	.20*	.21*	.18*	.18*	.24*	.24*	.24*	**.13***	**.27***	**.27***	1

*p<.05