

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΔΥΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ

Παράδειγμα 1ο

Μαθητής: Είχαμε για τις κλασματικές αριθμητικές παραστάσεις

Καθ.: Και τι θα πει κλασματική αλγεβρική παράσταση; Να μας πει η Άγκη.

Άγκη: Είναι μια παράσταση που έχει παρονομαστή μεταβλητή.

Καθ.: Πολύ ωραία, είναι μια παράσταση που έχει παρονομαστή μεταβλητή. Έτσι; Να σηκωθεί τώρα η Αλεξία να μας γράψει μια τέτοια κλασματική αριθμητική παράσταση και να μου πει η Αφροδίτη τι ακριβώς είχαμε. [Η Αφροδίτη γράφει $1/x$]

Καθ.: Ωραία, $3/x$. Το x είναι μεταβλητή Χάρης;

Χάρης: Μάλιστα

Καθ.: Και δεν μου λες παίρνει όλες τις τιμές;

Χάρης: Εκτός από το μηδέν.

Καθ.: Εκτός από το 0, πολύ ωραία. Γιατί δεν παίρνει την τιμή μηδέν Χριστίνα;

Χριστίνα: Γιατί μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Καθ.: Δεν κατάλαβα τίποτα.

Χριστίνα: Μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Καθ.: Ε; και τι πειράζει;

Χριστίνα: Δεν τον θέλουμε μηδέν.

Καθ.: Δεν τον θέλουμε μηδέν γιατί;

Χριστίνα: Δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Καθ.: Δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή μηδέν, και πως το λέγαμε στο δημοτικό;

Γιώργος: Διαίρεση με το μηδέν.

Καθ.: Διαίρεση με το 0. Μπράβο καμάρι μου, ξυπνάς εσύ το πρωί. Κάθισε εσύ Αλεξία. Να σηκωθεί το ένα.

Θέλω και άλλες τέτοιες ιστορίες. Μου άρεσε αυτό. Θα σου δώσω εγώ μια αλγεβρική κλασματική παράσταση, να μου πείτε για ποια τιμή της μεταβλητής της ορίζεται, έτσι; $\alpha - 5/\alpha^2 - 1$. Να μου πείτε Βαγγελιάκη για ποια τιμή του α ορίζεται αυτό το κλάσμα, δηλαδή να έχει νόημα, ή ποια τιμή του α θέλουμε.

Βαγγ.: Το 1.

Καθ.: Μπράβο, πως το κατάλαβες;

Βαγγ.: 1^2 είναι 1

Καθ.: 1^2 είναι 1. Μπράβο, $\alpha \neq 1$. Άλλος θέλει τίποτε να πει;

Δημήτρης: Και $\neq 0$

Καθ.: Μπράβο ο Δημήτρης. Τι είπες Δημήτρη ότι πρέπει το α να είναι διάφορο από το 0. Πως σου ήρθε αυτό;

Δημήτρης: Αφού το μείον ένα στο τετράγωνο γίνεται +1. (-1) επί (-1) κάνει 1

Καθ.: Μάλιστα, τώρα αυτό ήταν λίγο.., ψάχναμε σαν να ψαρεύαμε σε μια θάλασσα λίγο θολή και δεν την ξέραμε. Υπάρχει κανένας ποιο ασφαλής τρόπος για να βρίσκουμε ποιες τιμές δεν θέλουμε στον

παρονομαστή;

Μαθητής: Μπορούμε να βρούμε άθροισμα και μετά να το εξισώσουμε με το 0.

Καθ.: Γράψε Βαγγελάκη, άρα ο ασφαλής τρόπος είναι ο εξής: λύνω την μικρή αυτή εξίσωση . Πως λύνω τέτοιες εξισώσεις;

Βαγγ.: $a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1$.

Καθ.: Ένας τρόπος είναι αυτός. Είμαστε σίγουροι ότι δεν θα χάσουμε εδώ; ρίζες?? Στον παρονομαστή;... και μετά τι θα πούμε;

Βαγγ: Θα πούμε $a=0$?

Καθ.: Ρίζα ένα επί ένα. άρα θα βγάλουμε το 1. Το -1 πως θα το βγάλουμε;

Ελένη: Το -1 δεν το βγάζουμε γιατί είναι - επί -, συν...

Καθ.: Πάλι ψαρεύουμε. Κανέναν ποιο ασφαλής τρόπος;

Θανάσης: Μήπως να βάλουμε συν;

Καθ.: Συν, όχι. Θα αλλάξει η παρένθεση. Το a^2-1 είναι a^2-1^2 . Σας θυμίζει τίποτε αυτή η παράσταση;

Μαθητές: Διαφορά τετραγώνου.

Καθ.: Διαφορά τετραγώνου, για να σβήσουμε το a^2-1 , και να κρατήσουμε μόνο τον επάνω και να τον παραγοντοποιήσουμε. Λέγε μας Ολυμπία, $a^2\dots$, Άρχισε την παραγοντοποίηση, διαφορά τετραγώνου.

Ολυμπία: $(a-1)(a+1)$.

Καθ.: Γρήγορα Αλέξη,.. $a+1=0$. Και τι έχω τώρα Γιώτα; Έχω γινόμενο δυο αριθμών, έτσι δεν είναι, δυο παραστάσεων μέσα σε παρενθέσεις που είναι 0. Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Γιώτα: Ότι κάποιος είναι 0 ή και οι δυο είναι μηδέν.

Καθ.: Μπράβο. Ή και οι δυο μπορεί να είναι 0 ή τουλάχιστον ο ένας. Αυτό ξέρετε πως το λέμε; Ή εσύ θα είσαι 0 ή εσύ. Έτσι; Γράφουμε λοιπόν από κάτω $a-1=0$ ή...Γιώργο, τι θα γράψουμε δίπλα;

Γιώργος: $a+1=0$

Καθ.: Μπράβο τον Γιώργο. Άντε λύστε αυτές τις εξισώσεις. Όλγα $a-1=0$, πόσο είναι το α Όλγα; Γιάννη...

Όλγα: Ένα, μπράβο, ή $a=-1$. Να ο ασφαλής τρόπος. Ποιος είναι λοιπόν ο ασφαλής τρόπος για να βρίσκουμε τις ρίζες στον παρονομαστή;

Γιάννης: Διαφορά τετραγώνου

Καθ.: Διαφορά τετραγώνου είναι σε αυτή την περίπτωση. Σε άλλη περίπτωση;

Όλγα: Παραγοντοποίηση.

Καθ.: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και μηδενίζουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά γιατί όλοι μας δίνουν ρίζες. Αν μηδενίσουμε μόνο τον ένα θα πάρουμε μια ρίζα, θέλουμε και τους δυο για να έχουμε όλες τις ρίζες. Άρα για ποιες τιμές έχει νόημα η παράσταση αυτή; Όταν το A [ο παρονομαστής] είναι διάφορο του μηδενός. Το καταλάβατε αυτό; Να κάνουμε ακόμα ένα ή όχι; Ο Μιχάλης. Να γράφει ο Αλέξης και να διαβάξει ο Μιχάλης. Συγκεντρώσου Μιχάλη. $5x+1/(a+1)$ και όλο εις την πέμπτη. Λοιπόν άντε Μιχαλάκη εδώ σε θέλω. Θέλω να μου πεις για ποιες τιμές του α έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Για ποιες τιμές ορίζεται το κλάσμα. Τι θα κάνουμε;

Μιχάλης: $a+1$ στην παρένθεση ίσον με το 0.

Καθ.: Μπράβο, γράψε αυτό που λει. Πάρα πολύ ωραία, και μετά;

Μιχάλης: Θα χρησιμοποιήσουμε διαφορά τετραγώνου.

Καθ.: Διαφορά τετραγώνου;

Αλέξης: Όχι, την ταυτότητα.

Καθ.: Και που θα μας οδηγήσει αυτό; Ξέρεις να αναπτύσσεις τέτοια ταυτότητα;

Μιχάλης: Όχι, αλλά μπορούμε να κάνουμε και το $(\alpha+1)^2$ επί $(\alpha+1)^3$

Καθ.: Μάλιστα και μετά;

Μιχάλης: Μετά;

Καθ.: Πάντα όταν κάνουμε κάτι πρέπει να έχουμε και έναν σκοπό, δηλαδή να μη βλέπουμε βραχυπρόθεσμα αλλά μακρυπρόθεσμα. Εντάξει, το εφαρμόσαμε.. τι καλά,.. μετά τι θα κάνουμε; Ποιος μπορεί να μας βοηθήσει; Θέλουμε απλές εξισώσεις, Δε μάθαμε πιο δύσκολες.

Παράδειγμα 2ο

Καθ.: Προσέξτε παιδιά, για να έχει έννοια το κλάσμα τι θα πρέπει να είναι ο παρανομαστής πάντα, Βασίλη; Βασίλης; Διάφορος του μηδενός.

Καθ.: Έτσι μπράβο, γιατί η διαίρεση με το 0 τι είναι;

Μαθητές: Αδύνατη!

Καθ.: Άρα πριν την απλοποίηση πρέπει να θέσετε τον παρανομαστή διάφορο το 0 ...

Καθ.: Για να δούμε παιδιά διάφορες από αυτές τις εξισώσεις.. γράφω την εξίσωση; $\chi^2-2\chi=0$, άλλη, $\chi^2-4=0$, και $\chi^2-3\chi+2=0$. Τι παρατηρείτε παντού σε όλες αυτές τις εξισώσεις; Υπάρχει χ με εκθέτη τι;

Μαθητές: Δυο.

Καθ.: Όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου, δηλαδή για την περίπτωση μας, η εξίσωση λέγεται δευτέρου βαθμού, γιατί ο εκθέτης που έχει μια μεταβλητή λέγεται βαθμός της μεταβλητής αυτής. Τίνος βαθμού είναι σε αυτόν τον όρο το χ ;

Μαθητές: Δευτέρας.

Καθ.: Η εξίσωση λοιπόν είναι δευτέρου βαθμού και στις 3 περιπτώσεις. Για να δούμε πως λύνετε μια τέτοια εξίσωση και στις 3 περιπτώσεις. Να ακούσω τη γνώμη σας παιδιά. Πως εσείς λέτε να λύσουμε την πρώτη εξίσωση; τι θα κάνουμε το πρώτο μέλος; Μήπως εσείς έχετε καμιά ιδέα; Πως θα λύσουμε την εξίσωση; [$\chi^2-2\chi=0$] Γιώργο;

Γιώργος: Να χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους.

Καθ.: Εσύ λες να κάνουμε χωρισμό; Δε γίνεται γιατί άγνωστος είναι και ο ένας όρος, άγνωστος είναι και ο άλλος. Είτε ο Γιώργος τη γνώμη του. Άλλος;

Μαργαρίτα: Δε μπορούμε να κάνουμε παραγοντοποίηση;

Καθ.: Έτσι μπράβο, θα κάνουμε παραγοντοποίηση στο πρώτο μέλος, και τι θα έχουμε Μαργαρίτα; Άρα τι θα γίνει το πρώτο μέλος; Βγάζουμε κοινό παράγοντα το χ και τι θα έχουμε μέσα Χάρη;

Καθ.: ...Πηγαίνουμε τώρα στη δεύτερη εξίσωση. $\chi^2-4=0$. Τι γνώμη έχετε εσείς να ακούσω. Γιώργο;

Γιώργος: Να βγάλουμε το $\chi-2$ και όλο εις το τετράγωνο.

Καθ.: Α! Για πρόσεξε λίγο Γιώργο! Μήπως θέλεις να πεις κάτι άλλο; Δεν είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.

Ελένη: Είναι διαφορά τετραγώνων

Καθ.: Α! Μπράβο. Και από εδώ τι θα έχουμε; x^2-2^2 ίσον με το 0. Και από εδώ τι γράφουμε; Διαφορά τετραγώνου, δηλαδή $(x+2)(x-2)=0$. Και τώρα έχουμε ένα γινόμενο που είναι 0. Άρα για να είναι 0 το πρέπει να συμβαίνει;

Καθ.: Τελειώσαμε με αυτόν τον τρόπο. Ακούστε όμως και έναν άλλο τρόπο. Από την Αργυρώ. Ποιος είναι αυτός ο τρόπος; Ξαναγράψω την εξίσωση $x^2-4=0$. Ακούω..

Αργυρώ: Δε θα παει το 4 στο άλλο μέλος και...

Καθ.: Μάλιστα, άρα τι έχουμε από εδώ; $x^2=4$. Για να ακούσω τώρα τι θα γράψω $x...$, ακούω και τους άλλους, τι θα γράψω;

Αργυρώ: x ίσον με ρίζα 4.

Καθ.: Μπράβο, x ίσον ρίζα 4. Προσεξτε παιδιά. Έτσι λέγαμε μέχρι πέρυσι. Γιατί όταν μάθαμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις το x ήταν ευθύγραμμο τμήμα. Το μάθαμε αν θυμάστε στο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Και τα ευθύγραμμα τμήματα τότε ήταν πάντα;

Μαθητές: Θετικά..

Καθ.: Θετικά, άρα τι βάζαμε τότε; Απλό ρίζα 4. Εδώ Δε χρειάζεται απλό ρίζα 4, θέλει $\pm\sqrt{4}$. Δηλαδή από εδώ τι συνεπάγεται; $x=\pm 2$. Γιατί το x παίρνει και την τιμή -2 και την τιμή +2. Αν θέσετε στην αρχική ή σε αυτήν όπου x το 2, επαληθεύεται αυτή η εξίσωση;

Μαθητές: Ναι.

Καθ.: Επαληθεύεται, άρα το $x=2$ είναι λύση. Αλλά και εάν θέσουμε όπου x το -2 πάλι επαληθεύεται;

Μαθητές: Ναι.

Καθ.: Και πάλι επαληθεύεται. Άρα δεν πρέπει να χάσουμε λύση. Πρέπει να θέσουμε $\pm\sqrt{4}$.. Κώστα;

Κώστας: Όταν λέμε $x^2=4$ δεν είναι $x^2=2^2$. Άρα αφού τα δυο τετράγωνα είναι ίσα δεν είναι και οι βάσεις τους ίσες;

Καθ.: Λοιπόν, κοιτάξτε. Όταν οι δυνάμεις είναι ίσες να εξισώνουμε τις βάσεις θα το μάθετε στο Λύκειο. Θα μάθετε τότε, όταν θέλουμε να εξισώνουμε βάσεις a εις την m ίσον με b εις την n , θα πρέπει το a και το b να είναι θετικοί αριθμοί... , άλλο είναι το πρόβλημα μας. Το πρόβλημα μας είναι να λύσουμε μια εξίσωση. Και τι παρατηρούμε σε αυτή την εξίσωση; Και το 2 στο τετράγωνο και το -2 στο τετράγωνο μας δίνει 4. Άρα επαληθεύεται η εξίσωση και με τις δυο τιμές. Άρα το -2 δεν πρέπει να το χάσουμε. Πάντα από εδώ και πέρα γράφουμε έτσι. Πέρυσι το βρήκαμε στη Γεωμετρία και το γράψαμε $\sqrt{4}$. Και άλγεβρα τι σημαίνει; με τι αριθμούς ασχολείται η άλγεβρα; Με αλγεβρικούς αριθμούς. Και ποιοι είναι οι αλγεβρικοί αριθμοί;

Θεοδώρα: Αυτοί που έχουν συν και πλην.

Καθ.: Έτσι μπράβο. Αυτοί που έχουν πρόσημο συν και πλην. Εδώ αυτό το παράδειγμα το βρήκαμε πέρυσι στο Πυθαγόρειο Θεώρημα, στα ευθύγραμμα τμήματα. Άρα εκεί δεν ήταν απαραίτητο να θέσουμε δυο πρόσημα. Εδώ όμως είναι. Γιατί βγάλαμε τη ρίζα. Όταν παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος φαίνεται καθαρά ποια είναι η μια λύση και ποια η άλλη. Ενώ, όταν χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο δεν φαίνεται καθαρά.

Άρα προσοχή μην είστε αφηρημένοι και σας φύγει καμιά ρίζα.. Δηλαδή η αρνητική ρίζα. Κώστα.

Κώστας: Κυρία το πρώτο το παράδειγμα που έχουμε x^2-2x , αν το κάνουμε x επί x ίσον $2x$; Το x απλοποιείται και μετά $x=2$..

Καθ.: Πρόσεξε!! Ποια x θα φύγουν.. αυτά τα x πολλαπλασιάζονται,.. προτεραιότητα πράξεων... πρώτα κάνουμε πολλαπλασιασμό...

Κώστας: Κυρία, θα κάνουμε $x^2=2x$.. $x \times x=2x$..

Καθ.: Μα έχεις ρίζα! Απαγορεύεται! Εντάξει; Χάνεις ρίζα. Μην κάνετε τέτοιες απλοποιήσεις γιατί χάνετε ρίζα. Καταλάβατε τι είπε ο Κώστας; $x^2=2x$, φεύγει λέει το ένα x με το x , χάνει όμως έτσι τη ρίζα. Εντάξει; Όταν όμως βγάζουμε κοινό παράγοντα Δε χάνουμε τη ρίζα. $x=0,ε$; βγαίνει το $x=0$. Να μην κάνετε αυτές τις απλοποιήσεις, γιατί χάνουμε μια ρίζα ξανά...για λίγο να ασχοληθούμε με αυτές τις τρεις μορφές. Εδώ είναι ολοκληρωμένη η εξίσωση. Υπάρχει και ο δευτεροβάθμιος όρος και ο πρωτοβάθμιος και ο σταθερός. Εδώ ποιος όρος λείπει; Για να μου πει κάποιος. Ποιος όρος; Χριστίνα;