

απόδειξη στα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση

μαρία καλδρυμίδου

Απόδειξη στα μαθηματικά

Δομή:

υπόθεση,, συμπέρασμα,

αποδεικτικά στοιχεία (ορισμοί, αξιώματα, προτάσεις που ισχύουν) και

κανόνες συλλογισμού που εξασφαλίζουν την πορεία από την υπόθεση στο συμπέρασμα

Τύποι αποδείξεων

Παραγωγικές, με χρήση συνεπαγωγών ή ισοδυναμίας

Άμεση απόδειξη

Συνθετική (με βάση την υπόθεση και συνεπαγωγή)

Αναλυτική (με βάση το συμπέρασμα και ισοδυναμίες)

Π.χ. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$

Εις άτοπο απαγωγή (π.χ το ρίζα 2 δεν είναι ρητός)

Αντιθετοαντιστροφή (π.χ αν το τετράγωνο του α είναι άρτιος τότε και ο α είναι άρτιος)

Επαγωγική: η μαθηματική επαγωγή

Αντιπαράδειγμα (όταν δεν ισχύει)

Ο ρόλος της απόδειξης;



πολύπλοκο ζήτημα που απασχόλησε και απασχολεί

φιλοσόφους και επιστημολόγους

μαθηματικούς

εκπαιδευτικούς και αναλυτικά προγράμματα

συνδέεται με την αντίληψη για τη φύση των
μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας και
πρακτικής

ένα κεντρικό ζήτημα

δράσεις όπως
πειραματισμός,
οπτικοποίηση,
διαγραμματική σκέψη

ήρθαν στο προσκήνιο και αποτέλεσαν
ζητήματα επιστημολογικά και
διδασκτικά

ένα
κεντρικό
ζήτημα

η κεντρική ερώτηση δεν είναι μόνο γιατί και πώς μια απόδειξη καθιστά **αληθή μια πρόταση**, αλλά επίσης πώς αυτή συμβάλλει σε μια επαρκή και κατάλληλη **κατανόηση της πρότασης** και ποιο ρόλο παίζει σε αυτή τη διεργασία εμπλέκοντας παράγοντες πέρα από τη λογική

ένα
κεντρικό
ζήτημα

η σχέση μεταξύ
αιτιολογικού και
επεξηγηματικού
ρόλου της απόδειξης

ένα άλλο κεντρικό ζήτημα

υπήρχαν και υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις για το ρόλο της απόδειξης και κυρίως για το τι κάνει μια απόδειξη αποδεκτή

το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός

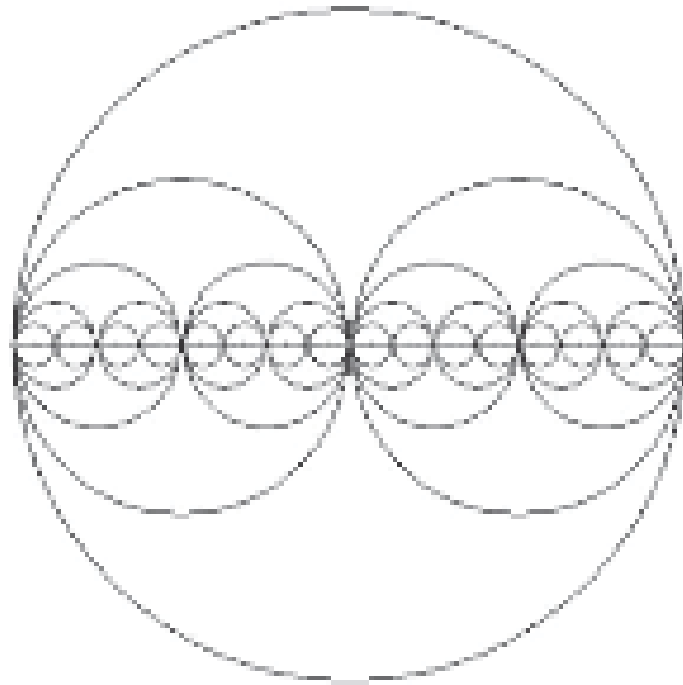
2,2 → 4	4,4 → 8	6,6 → 2	8,8 → 6
2,4 → 6	4,6 → 0	6,8 → 4	
2,6 → 8	4,8 → 2		
2,8 → 0			

έναν άρτιο λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8, το ίδιο συμβαίνει με το άθροισμά τους

έστω k και λ δύο άρτιοι αριθμοί και $\mu = k + \lambda$. Ο $k = 2\nu$ και ο $\lambda = 2\rho$. Τότε $\mu = 2\nu + 2\rho = 2(\nu + \rho)$, άρα είναι άρτιος

$$\begin{array}{r} \text{x x x} \quad \text{x x x... x} \quad \text{x x x x x ... x x} \\ + \quad \quad \quad = \\ \text{x x x} \quad \text{x x x ...x} \quad \text{x x x x x ... x x} \end{array}$$

je le vois, mais je ne le crois pas,
o Cantor στον Dedekind (1877)



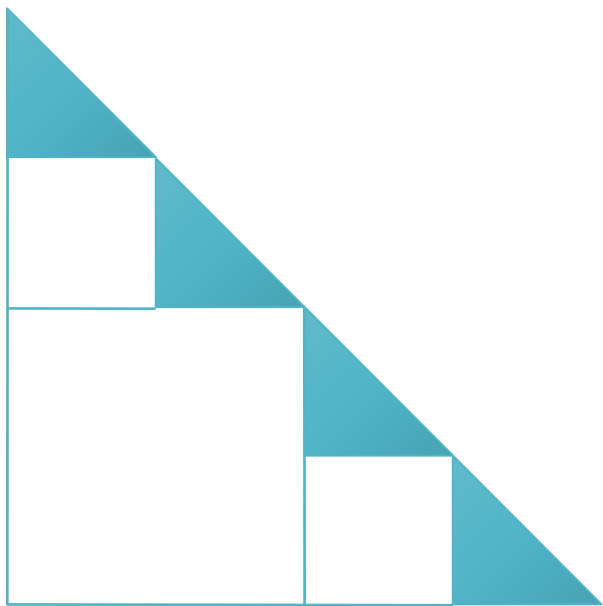
B: το εμβαδόν διαιρείται πάντα με το 2..., οπότε το όριο; το όριο είναι η ευθεία από την οποία ξεκινήσαμε

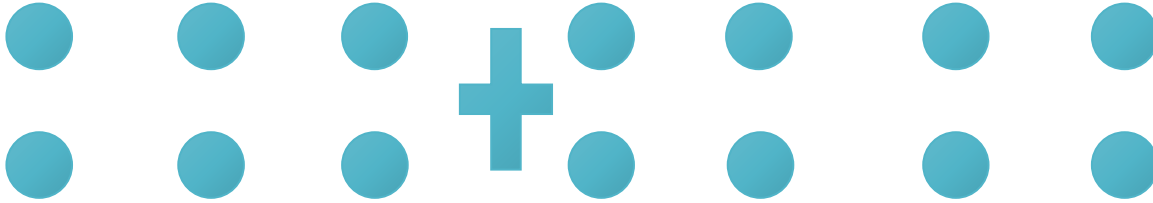
A: ...αλλά είναι πάντα $2\pi r$

B: Ναι, αλλά όταν το εμβαδόν τείνει στο 0, θα είναι σχεδόν ίσα

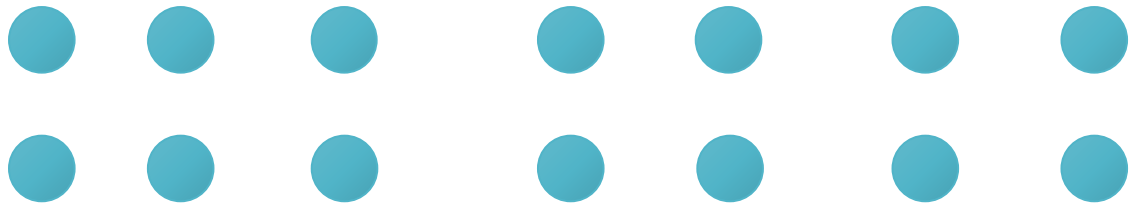
A: όχι, δεν το νομίζω

B: αν το εμβαδόν τείνει στο 0, τότε και η περίμετρος επίσης,... δεν ξέρω.....

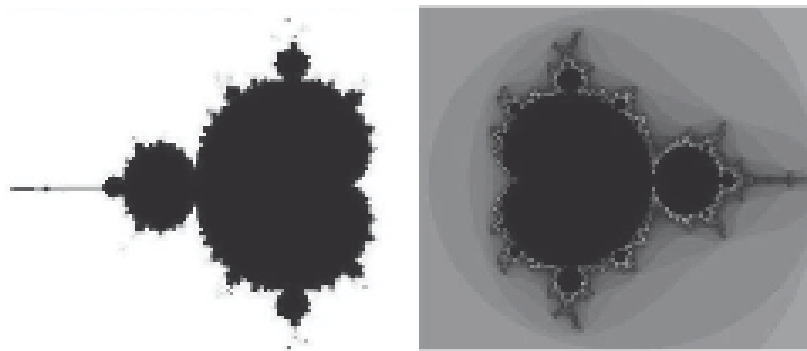




=



οπτική απόδειξη



The Mandelbrot set for $z \rightarrow z^2 + c$
before and after the Douady and Hubbard discovery

απόδειξη

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$$

οπτική απόδειξη

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$$

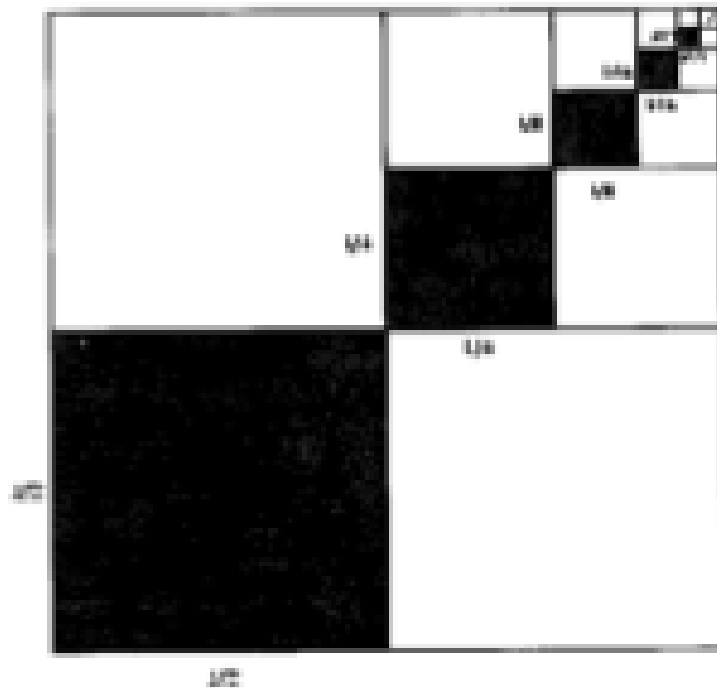
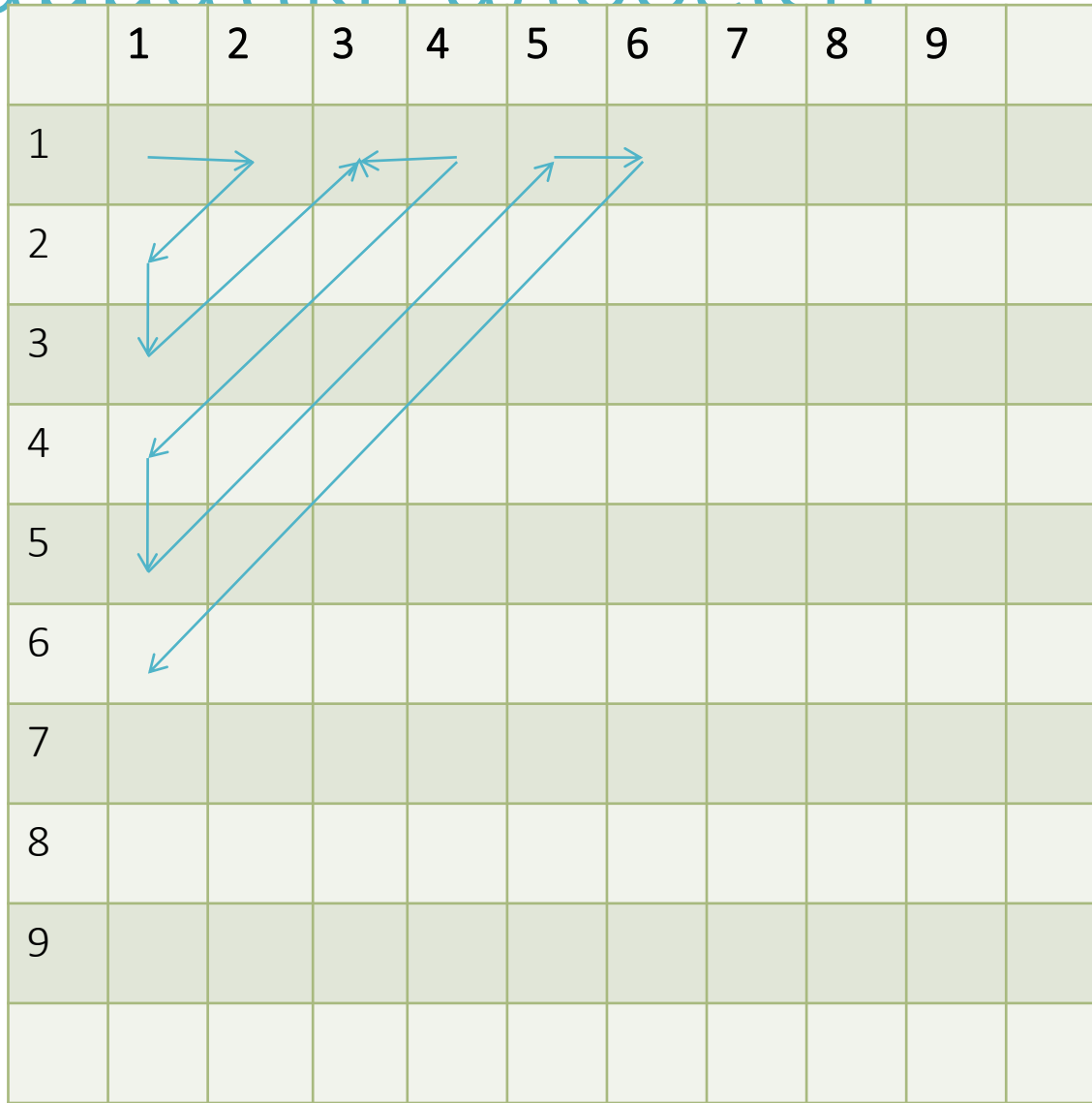
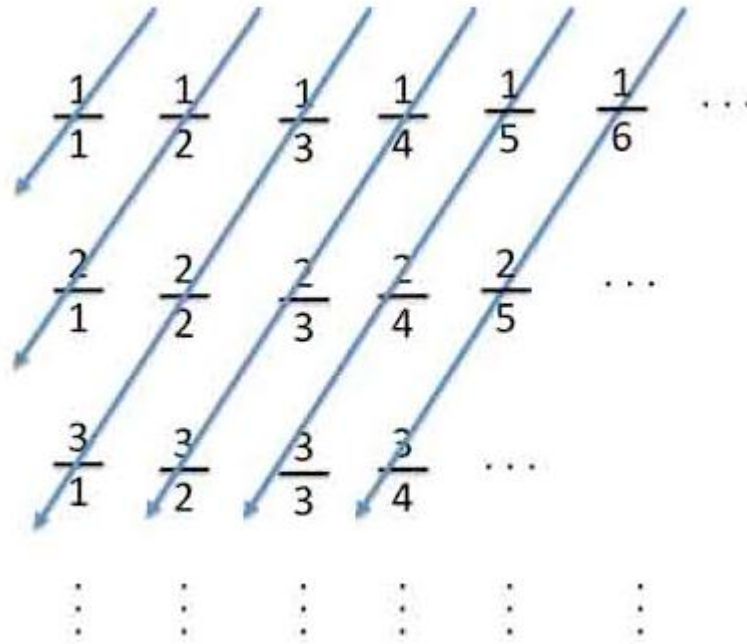


Figure 2.

διαγραμματική απόδειξη



διαγραμματική απόδειξη



<http://www.coopertoons.com/education/countingrationals/cantorsrationalnumbers.html>

Τύποι συλλογισμού και απόδειξη

τυπική απόδειξη

μαθηματική επιχειρηματολογία

επαγωγή

αναλογία

απαρίθμηση

αλγεβρικοί χειρισμοί

οπτικοποίηση

πειραματισμός με υπολογιστή

απόδειξη με υπολογιστή

μοντελοποίηση

απόδειξη – επιστημολογική οπτική

επαλήθευση

επεξήγηση

συστηματοποίηση (οργάνωση αποτελεσμάτων σε παραγωγικό σύστημα)

ανακάλυψη

επικοινωνία

κατασκευή εμπειρικής θεωρίας

εξερεύνηση του νοήματος μιας έννοιας

ενσωμάτωση γνωστού γεγονότος σε νέο πλαίσιο

μαθηματική απόδειξη

έχει ειδικά χαρακτηριστικά μεταξύ των οποίων μια τυπική μορφή κειμένου, μια ειδική οργάνωση και μια αδιαμφιλονίκτη δύναμη εφόσον είναι σωστή συντακτικά

μια μαθηματική πρόταση δεν είναι αλήθεια, αλλά έγκυρη εντός ενός καλά ορισμένου θεωρητικού πλαισίου

μαθηματική απόδειξη

η βεβαιότητα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αποτελεί θεμελιώδη αρχή για τη μαθηματική θεωρία

έτσι η έννοια της απόδειξης δεν μπορεί να σταθεί μόνη της, συνδέεται άμεσα με τις έννοια της εγκυρότητας μιας διατύπωσης και της θεωρίας στο πλαίσιο της οποίας ισχύει η διατύπωση αυτή

απόδειξη – μαθηματική κουλτούρα

Οι μαθηματικοί αποδέχονται ένα θεώρημα όταν:

κατανοούν το θεώρημα

το θεώρημα είναι αρκετά σημαντικό ώστε να έχει επιπτώσεις στα μαθηματικά

το θεώρημα είναι συναφές με τα ήδη υπάρχοντα

ο συγγραφέας έχει την απαραίτητη αξιοπιστία

εμπεριέχει πειστικά επιχειρήματα

αναγνώριση από την κοινότητα και ζήτημα επικοινωνίας

διαφοροποίηση στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών

Hanna, 1989

αποδείξεις ως κομιστές γνώσεις (Rav, 1999)

derivations (παραγωγές, τυπικές αποδείξεις)

συντακτικά αντικείμενα κάποιου τυπικού συστήματος που ακολουθεί τους κανόνες της λογικής συνεπαγωγής

conceptual proofs (εννοιολογικές αποδείξεις)

άτυπες μαθηματικές αποδείξεις με αμείωτο σημαντικό (semantic) περιεχόμενο. αποτελείται από αυστηρά επιχειρήματα αποδεκτά από τους μαθηματικούς, αλλά αναφέρεται στο νόημα των εννοιών και των τύπων που χρησιμοποιούνται. έτσι έχουν τη δυνατότητα να μεταφέρουν εργαλεία, μεθόδους, στρατηγικές και έννοιες για την επίλυση προβλημάτων

σύνταξη / σημασία (Balacheff, 2004, 2006)

απόδειξη είναι ένα κείμενο που περνάει από τρία στάδια:

εξήγηση

διεργασία αξιολόγησης

εγκυροποίηση

δράση – ενέργεια

διατύπωση (σημειωτικό σύστημα)

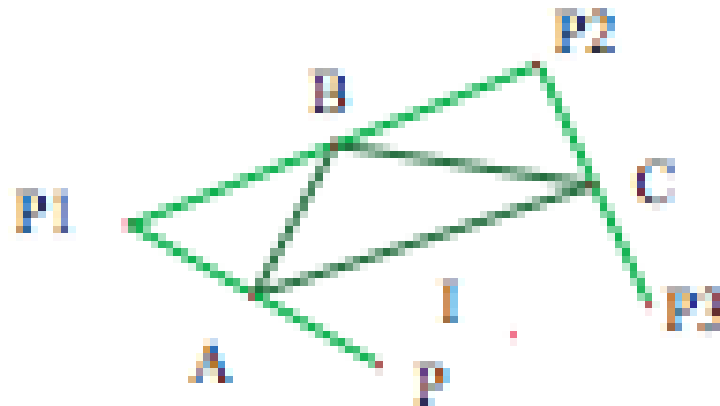
αξιολόγηση - εγκυροποίηση

βεβαιότητα – κατανόηση - επικοινωνία



Έστω τρίγωνο ABC . Παίρνουμε ένα σημείο P και κατασκευάζουμε το P_1 , συμμετρικό του P ως προς το A , το P_2 , συμμετρικό του P_1 ως προς το B και το P_3 , συμμετρικό του P_2 ως προς το C . Θεωρούμε το I το μέσον του PP_3 .

Αν το P κινείται στο επίπεδο, τι συμβαίνει με το I ;



Βρείτε όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που η περίμετρος είναι ίση με το εμβαδόν τους (μήκος πλευράς φυσικός αριθμός)

Παράδειγμα: το τετράγωνο με πλευρά 4

απόδειξη – γνωστική πλευρά

αποδεικνύω είναι η διεργασία που χρησιμοποιείται από ένα άτομο για να εξαλείψει ή να θέσει αμφιβολίες για την αλήθεια μιας πρότασης (διατύπωσης)

η διεργασία του αποδεικνύειν εμπεριέχει δύο υπο-διεργασίες: επιβεβαίωση και πειθώ

(Harel & Sowder, 1996)

απόδειξη στο ΑΠ

Στη δεκαετία του 90 (NCTM Standards, 1989) η έννοια της απόδειξης σχεδόν εξαφανίστηκε δίνοντας προτεραιότητα στην εξέταση εικασιών, στην εύρεση αντιπαραδειγμάτων, την κατασκευή και εξέταση έγκυρων διατυπώσεων, καθώς και στην ικανότητα ανάπτυξης τεχνικών για την επίλυση μη συνηθισμένων προβλημάτων

η Ευρετική πήρε τη θέση της Απόδειξης

απόδειξη στο ΑΠ

Στην επόμενη δεκαετία (NCTM Principals and Standards, 2000) η τάση αντιστράφηκε και δόθηκε έμφαση στην ανάπτυξη του συλλογισμού και της απόδειξης ως μέρος όλου του ΑΠ των μαθηματικών από τα προνήπια μέχρι τη 12^η τάξη:

απόδειξη στο ΑΠ

αναγνώριση του συλλογισμού και της απόδειξης ως θεμελιώδεις όψεις των μαθηματικών

διατύπωση και εξερεύνηση μαθηματικών εικασιών

ανάπτυξη και αξιολόγηση μαθηματικών επιχειρημάτων και αποδείξεων

επιλογή και χρήση διάφορων τύπων συλλογισμού και μεθόδων απόδειξης

Βιβλιογραφικές αναφορές

Balacheff, N. 2004. The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. <http://www-Leibniz.imag.fr/NEWLEIBNIZ/LesCahiers/Cahiers2004/Cahier2004.xhtml>

Balacheff, N. 2009. Bridging knowing and proving in mathematics: a didactical perspective. in G. Hanna et al. (eds) *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Science: 115-135

Βιβλιογραφικές αναφορές

Hanna, G. 1989. More than formal proof. *FLM*, 9(1):20-25

Hanna, G. 2000. Proof, explanations and exploration: an overview. *ESM*, 44:5-23

Harel, G. & Sowder, L. 1996. Classifying processes of proving. *PME 20*, 3:69-65

Βιβλιογραφικές αναφορές

Mariotti, M.A. 2006. Proof and proving in mathematics education. in A. Guitierrez, P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers: 173-204

Βιβλιογραφικές αναφορές

Rav, Y. 1999. Why do we prove theorems? *Philosophica Mathematica*, 7(1): 5-41.

Proceedings CERME9. 2015 στο <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9>