

απόδειξη στα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση (B)

μαρία καλδρυμίδου

απόδειξη – γνωστική πλευρά

- αποδεικνύω είναι η διεργασία που χρησιμοποιείται από ένα άτομο για να εξαλείψει ή να θέσει αμφιβολίες για την αλήθεια μιας πρότασης (διατύπωσης)
- η διεργασία του αποδεικνύειν εμπεριέχει δύο υπο-διεργασίες: επιβεβαίωση και πειθώ

(Harel & Sowder, 1996)

απόδειξη στο ΑΠ

- Στη δεκαετία του 90 (NCTM Standards, 1989) η έννοια της απόδειξης σχεδόν εξαφανίστηκε δίνοντας προτεραιότητα στην εξέταση εικασιών, στην εύρεση αντιπαραδειγμάτων, την κατασκευή και εξέταση έγκυρων διατυπώσεων, καθώς και στην ικανότητα ανάπτυξης τεχνικών για την επίλυση μη συνηθισμένων προβλημάτων
- η Ευρετική πήρε τη θέση της Απόδειξης

απόδειξη στο ΑΠ

- Στην επόμενη δεκαετία (NCTM Principals and Standards, 2000) η τάση αντιστράφηκε και δόθηκε έμφαση στην ανάπτυξη του συλλογισμού και της απόδειξης ως μέρος όλου του ΑΠ των μαθηματικών από τα προνήπια μέχρι τη 12^η τάξη:

απόδειξη στο ΑΠ

- αναγνώριση του συλλογισμού και της απόδειξης ως θεμελιώδεις όψεις των μαθηματικών
- διατύπωση και εξερεύνηση μαθηματικών εικασιών
- ανάπτυξη και αξιολόγηση μαθηματικών επιχειρημάτων και αποδείξεων
- επιλογή και χρήση διάφορων τύπων συλλογισμού και μεθόδων απόδειξης

απόδειξη: διδακτική θεώρηση

- ανάλυση και κατηγοριοποίηση του «συλλογίζεσθαι» των μαθητών: Τα αποδεικτικά σχήματα
- δυσκολίες και εμπόδια ως προς την απόδειξη

αποδεικτικά σχήματα των μαθητών

- βασικό αντικείμενο διερεύνησης: οι αιτιολογήσεις (εξηγήσεις) των μαθητών
 - θεωρώντας ότι η απόδειξη είναι αιτιολόγηση αποδεκτή από τη μαθηματική (σχολική) κοινότητα

Harel & Sowder, 1996

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς
 - αυθεντία/αυταρχικό
 - τυπικό/τυποποιημένη μορφή
 - συμβολικό
- εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα
 - επαγωγικό
 - αντιληπτικό
- θεωρητικά αποδεικτικά σχήματα
 - μετασχηματιστικό
 - εικονικό-χωρικό
 - συμβολικο-μετασχηματιστικό
 - κατασκευαστικό
 - δομικό
 - postulate
 - spatial-postulate
 - αξιώματα

αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς

- αυταρχικό/αυθεντίας
 - όταν υπάρχουν αναφορές σε πηγές (βιβλίο, δάσκαλος...)
- τυπικό/σύνηθης μορφή
 - όταν η ορθότητα μιας απόδειξης (δεν) γίνεται αποδεκτή με βάση τη μορφή της
- συμβολικό
 - όταν χρησιμοποιούνται σύμβολα χωρίς αναφορά στη σημασία τους και τη λειτουργία τους

παραδείγματα

- A, B, Γ, Δ γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα και E ένα άλλο διάνυσμα. Τι θα είναι το σύνολο A, B, Γ, Δ, E ;
 - αφού τα αρχικά είναι γραμμικά εξαρτημένα, το ίδιο θα ισχύει και αν προσθέσουμε ακόμα ένα διάνυσμα.
- $|A| \leq 3, -3 \leq A \leq 3$, ενώ το A δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές

εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα

- επαγωγικό
 - όταν η επαλήθευση βασίζεται σε πεπερασμένο πλήθος περιπτώσεων
- αντιληπτικό
 - όταν βασίζεται αποκλειστικά σε οπτικά ή απτά χαρακτηριστικά

Θεωρητικά αποδεικτικά σχήματα

- μετασχηματιστικό: εμπλέκει γενικεύσεις και αποτελεί τη βάση όλων των θεωρητικών αποδεικτικών σχημάτων
 - εικονικό-χωρικό
 - συμβολικο-μετασχηματιστικό
 - κατασκευαστικό
- δομικό
 - postulate
 - spatial-postulate
 - αξιώματα

μετασχηματιστικό εικονικό-χωρικό

- σε ένα τρίγωνο με 2 ίσες γωνίες τι είναι οι απέναντι πλευρές;
- Εντ (4^η τάξη): αν εκτοξεύσω ένα πύραυλο από εδώ και έναν από εδώ, τότε θα συγκρουστούν και θα εκραγούν εδώ, και τα συντρίμια τους θα πάνε στο κατευθείαν κάτω, στη μέση, και θα κάνουν δύο τρίγωνα, που αν τα βάλουμε μαζί το ένα πάνω στο άλλο θα είναι ίσα.

συμβολικό - μετασχηματιστικό

- π.χ. αποδείξτε ότι για $x \geq 0$, $\ln(x+1) \leq x$
- μετασχηματισμός της ανισότητας σε ισοδύναμη $x+1 \leq e^x$
- και οι δύο συναρτήσεις $x+1$ και e^x είναι αύξουσες, αλλά η e^x αυξάνει πιο γρήγορα
- στο 0 είναι ίσες
- άρα το e^x πρέπει να είναι μεγαλύτερο

συμβολικό - κατασκευαστικό

- κατασκευή του αντικειμένου και όχι μόνο χρήση ιδιοτήτων
- π.χ.
 - ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι μοναδικός
 - το ευθύγραμμο τμήμα που περνάει από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλο προς μία άλλη, διχοτομεί την τρίτη.

μαθηματική επαγωγή

- επαγωγή
 - γενικότητα αποτελέσματος (εμπειρική κατά H&S)
 - γενικότητα διαδικασίας (μετασχηματιστική κατά H&S)
- μαθηματική επαγωγή
 - αναγνώριση γενικότητας στην υπολογιστική διαδικασία

απαιτεί άλμα επιχειρήματος

αποδείξεις με

- μαθηματική επαγωγή
- με την εις άτοπο απαγωγή
- με αντίφαση ή αντι-παράδειγμα

αποτελούν τις πιο δύσκολες, τουλάχιστον
γνωστικά και συναισθηματικά, για τους
μαθητές

γιατί δεν δείχνουν τι συμβαίνει

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Βασικές θέσεις

- μύηση από τα πρώτα σχολικά χρόνια
- ενίσχυση του **νοήματος** των μαθηματικών αντικειμένων, αναπαραστάσεων, εννοιών και διαδικασιών
- δημιουργία μαθηματικής κοινότητας στην τάξη, με την ανάπτυξη επιχειρημάτων, εξηγήσεων και **ελέγχου**

η μεταφορά του παιχνιδιού

- διαλεκτική της δράσης
ανάγκη για να πείσει κάποιος το συνομιλητή του
- διαλεκτική της εγκυροποίησης
ανάπτυξη επιχειρηματολογίας
- πλαίσιο αποδοχής της αντίφασης και των αντιπαραδειγμάτων ως εργαλεία πειθούς και απόδειξης (Balacheff)

ανάπτυξη κοινωνικο-μαθηματικών νορμών

- κοινωνική αλληλεπίδραση και διάδραση θεωρείται ως βασικός παράγοντας που διαμορφώνει, δίνει κίνητρο και προκαλεί τη διαλεκτική της εγκυροποίησης και την ανάδειξη της επιχειρηματολογίας για τα μαθηματικά
- π.χ βρες όλα τα τετράγωνα & και πως ξέρεις ότι τα βρήκες όλα (Zack, 1997)

1	4	9	16	25
25	16	9	4	1

μπορούμε να γενικεύσουμε;

μπορούμε να πείσουμε;

1	4	9	16	25	36
36	25	16	9	4	1

μπορούμε να γενικεύσουμε;

μπορούμε να πείσουμε;

Θεματικές περιοχές

- διερεύνηση πάτερνς
- διερεύνηση σχέσεων σχημάτων και αριθμών
- γεωμετρία, κυρίως με την ανάπτυξη δυναμικών εργαλείων

- δίνουν το πλαίσιο διερεύνησης, προβλημάτων πειραματισμού, μοντελοποίησης

διδακτικό ζήτημα

- ζήτημα της αντίθεσης μεταξύ προφανούς, ορατού και απόδειξης
- επιλογή καταστάσεων που θα απαιτούν τον έλεγχο και την αιτιολόγηση

βασικά χαρακτηριστικά της αποδεικτικής διαδικασίας:

επιβεβαίωση και πειθώ

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Balacheff, N. 2004. The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof.
<http://www-Leibniz.imag.fr/NEWLEIBNIZ/LesCahiers/Cahiers2004/Cahier2004.xhtml>
- Balacheff, N. 2009. Bridging knowing and proving in mathematics: a didactical perspective. in G. Hanna et al. (eds) *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Science: 115-135

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Hanna, G. 1989. More than formal proof. *FLM*, 9(1):20-25
- Hanna, G. 2000. Proof, explanations and exploration: an overview. *ESM*, 44:5-23
- G. Hanna et al. (eds). 2010. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Science
- Harel, G. & Sowder, L. 1996. Classifying processes of proving. *PME 20*, 3:69-65

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Mariotti, M.A. 2006. Proof and proving in mathematics education. in A. Guitierrez, P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers: 173-204

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Rav, Y. 1999. Why do we prove theorems? *Philosophica Mathematica*, 7(1): 5-41.
- Proceedings CERME9. 2015 στο <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9>
- Zack, V. 1997. You have to prove us wrong”: Proof at the elementary school level. In *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 291-298). Lahti: University of Helsinki

αναφορές

πρόβλημα της ίσιδος:

- The Isis problem as a probe of flexible expertise and views of proof, Brian Greer, Dirk De Bock and Wim Van Dooren, HUB RESEARCH PAPER 2008/51. OKTOBER 2008
- <https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/407385/1/08HRP51.pdf>