

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδάσκοντες: Μ. Καλδρυμίδου, Μ. Τζεκάκη, Χ. Λεμονίδης

**Επιλογή, τροποποίηση, Κατασκευή τριών προβλημάτων μοντελοποίησης για τη
διδασκαλία.**

«Τα γενέθλιά μου»

«Αντικαπνιστικό κίνημα»

«Α α α ... Κρουαζιέρα θα σε πάω»

Γιάντση Μαρία Α.Μ. 1085
Δημητριάδου Αναστασία Α.Μ. 1087
Ζαμανάκου Ευτυχία Α.Μ. 1088

Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Περιεχόμενα

Πρόβλημα 1.....	3
Αρχικό πρόβλημα	3
Λύση αρχικού προβλήματος	3
Προτεινόμενο τροποποιημένο πρόβλημα μοντελοποίησης	4
Ταξινόμηση.....	4
«Τα γενέθλια μου».....	6
Μέθοδος Διδασκαλίας.....	6
Ενδεικτική λύση από τους μαθητές της Α' Ομάδας.....	8
Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης	12
Επαναλάβετε	13
Πρόβλημα 2.....	14
Αρχικό πρόβλημα	14
Λύση αρχικού προβλήματος	14
Προτεινόμενο τροποποιημένο πρόβλημα μοντελοποίησης	15
Ταξινόμηση.....	16
«Αντικαπνιστικό κίνημα»	18
Μέθοδος Διδασκαλίας.....	18
Ενδεικτική προσέγγιση προβλήματος μοντελοποίησης.....	18
Προσδιορισμός προβλήματος.....	20
Υποθέσεις	20
Ορισμός Μεταβλητών	21
Εκτέλεση Μαθηματικών.....	21
Τελικό μοντέλο της ομάδας Α	22
Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης	22
Επαναλάβετε	23
Εφαρμόστε το μοντέλο.....	24
Πρόβλημα 3.....	25
Αρχικό πρόβλημα	25
Λύση αρχικού προβλήματος	25
Προτεινόμενο τροποποιημένο πρόβλημα μοντελοποίησης	26
Ταξινόμηση.....	26
«Α α α ... κρουαζιέρα θα σε πάω»	28
Μέθοδος Διδασκαλίας.....	28
Ενδεικτική προσέγγιση προβλήματος μοντελοποίησης.....	29

Προσδιορισμός του προβλήματος	33
Υποθέσεις	33
Ορισμός μεταβλητών	34
Εκτέλεση Μαθηματικών.....	34
Μοντέλο της Ομάδας A.....	36
Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης	37
Επαναλάβετε	38
Εφαρμόστε το μοντέλο.....	39

Πρόβλημα 1

Αρχικό πρόβλημα

Σχολικό εγχειρίδιο: Μαθηματικά Γ' Δημοτικού Σχολείου, Βιβλίο Μαθητή

Ενότητα 2^η: Μετρήσεις μήκους - Πράξεις αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού - Στερεά σώματα

Κεφάλαιο 12: Προβλήματα

 **Τα μπαλόνια** 

Ο Μάρκος θέλει να αγοράσει μπαλόνια για τα γενέθλιά του. Στο κατάστημα «Η φτήνια» το μπαλόνι κοστίζει 3 ευρώ! Ο Μάρκος έχει 25 ευρώ. Πόσα μπαλόνια μπορεί να αγοράσει; Θα του περισσέψουν χρήματα;



Μπορεί να αγοράσει μπαλόνια.
Θα του περισσέψουν ευρώ.

Λύση αρχικού προβλήματος

Μπορεί να αγοράσει **8** μπαλόνια. ($8 \times 3 = 24$)

Θα του περισσέψουν **1** ευρώ. ($25 - 24 = 1$)

Προτεινόμενο τροποποιημένο πρόβλημα μοντελοποίησης

«Τα γενέθλια μου»

Πλησιάζουν τα γενέθλια μου και ανυπομονώ πολύ! Οι γονείς μου, μου είπαν πως μπορούν να διαθέσουν 250 ευρώ και ότι μπορώ να επιλέξω εγώ τον παιδότοπο στον οποίο θα γίνει το party μου. Πόσους φίλους μου μπορώ να καλέσω με αυτά τα χρήματα;

Ταξινόμηση

1^η ταξινόμηση: Περιοχή του πραγματικού κόσμου

Ως προς την περιοχή του πραγματικού κόσμου, το πρόβλημα ταξινομείται στην κοινωνική και οικονομική ζωή.

2^η ταξινόμηση: Εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών

Το έργο αντιστοιχεί πλήρως στις επίσημες προδιαγραφές του Α.Π.Σ καθώς στοχεύει στη συλλογή, καταγραφή αλλά και ταξινόμηση των δεδομένων σε πίνακες.

Α' βάρθια 3^η ομάδα: Στ' τάξη

3^η ταξινόμηση: Άνοιγμα του έργου

Το πρόβλημα μοντελοποίησης «Τα γενέθλια μου», είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα, καθώς δεν έχει μία συγκεκριμένη ή μοναδική λύση. Δεν δίνονται όλα τα στοιχεία για την επίλυση του και οι μαθητές καλούνται να τα αναζητήσουν διαδικτυακά ή να υποθέσουν. Κατ' αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και να οδηγήσει τους μαθητές/τριες σε ποικίλες λύσεις.

4^η ταξινόμηση: Ρεαλιστικότητα και Αυθεντικότητα του προβλήματος

Η κατάσταση και το πρόβλημα είναι ρεαλιστικά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Το πρόβλημα θέτει οικονομικούς περιορισμούς γεγονός το οποίο μας αφορά όλους και είναι εξαιρετικά επίκαιρο στη χώρα μας. Οι μαθητές βρίσκονται σε μια ηλικία κατά την οποία λαμβάνουν ερεθίσματα για οικονομικά ζητήματα και συμμετέχουν είτε ενεργά είτε ως ακροατές σε συζητήσεις που αφορούν

την «οικονομία», το «κέρδος» κ.α. Επιπροσθέτως οι μαθητές εμπλέκονται άμεσα στο πρόβλημα και αυξάνεται το ενδιαφέρον για την επίλυση του καθώς σχετίζεται με ένα θέμα που τους αφορά σημαντικά όλους, το πάρτι των γενεθλίων τους.

5η ταξινόμηση: Μαθηματική περιοχή

Το πρόβλημα, ως προς τη Μαθηματική περιοχή ανήκει στην επίλυση προβλήματος με συλλογή και επεξεργασία δεδομένων καθώς εμπεριέχονται και πράξεις με αριθμούς.

«Τα γενέθλια μου»

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το παρόν πρόβλημα μοντελοποίησης θα δοθεί σε μαθητές της Στ' Δημοτικού οι οποίοι θα έχουν ήδη ασχοληθεί με την οργάνωση και συλλογή των δεδομένων μέσα από την ενότητα του Α.Π.Σ και είναι πιο εξοικειωμένοι με την χρήση της τεχνολογίας και την αναζήτηση στο διαδίκτυο.

Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, θα χρειαστούν δύο διδακτικές ώρες. Κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας οι μαθητές/τριες θα εργαστούν ανά ομάδες των 3-4 ατόμων προκειμένου να ανταλλάσσουν απόψεις. Κάθε ομάδα θα έχει στη διάθεση της έναν φορητό υπολογιστή ή ένα tablet προκειμένου να μπορέσουν να αντλήσουν μετέπειτα πληροφορίες για την επίλυση του προβλήματος από το διαδίκτυο. Αρχικά θα προβληθεί το πρόβλημα μοντελοποίησης στον προτζέκτορα της τάξης και θα αναγνωστεί από τον εκπαιδευτικό δυνατά. Στην συνέχεια θα συζητηθεί στην ολομέλεια το θέμα και κατά πόσο ο όρος της οικονομίας τους είναι οικείος. Οι μαθητές/τριες καλούνται να σκεφτούν μόνοι τους τι ζητάει αυτό το πρόβλημα, να το κατανοήσουν και να προτείνουν τρόπους επίλυσης. Κάποια ερωτήματα τα οποία θα βοηθήσουν στην επίλυση του, μπορούν να συζητηθούν στο σύνολο της τάξης, ενώ σίγουρα θα προκύψουν και κάποια νέα κατά τη διάρκεια επεξεργασίας του προβλήματος στις ομάδες.

Οι μαθητές θα συζητήσουν αναλυτικά το πρόβλημα και το τι πρέπει να κάνουν, θα καταγράψουν τα βασικά τους ερωτήματα, θα οργανώσουν τα δεδομένα τους και θα προχωρήσουν στην επίλυση του.

Κάποια πιθανά ερωτήματα τα οποία ενδεχομένως οι μαθητές/τριες να σκεφτούν και θα πρέπει να συνυπολογίσουν είναι τα εξής:

- Πόσους φίλους μου θέλω να καλέσω;
- Με τι σχετίζεται το πόσους φίλους μπορώ να καλέσω και επομένως τι θα πρέπει να σκεφτώ;
- Που θα ήθελα ιδανικά να κάνω τα γενέθλια μου; Ποιες άλλες επιλογές παιδότοπων έχω;
- Ποιο είναι το κόστος ανά άτομο σε διάφορους παιδότοπους;

- Υπάρχει κάποιο πακέτο προσφοράς για πολλά άτομα;
- Συμπεριλαμβάνεται το φαγητό στη τιμή κατ' άτομο;

Στη συνέχεια μοιράζεται σε όλες τις ομάδες το φύλλο εργασίας με το πρόβλημα και τους ζητείται να καταγράψουν όλα τα ερωτήματα που θέτουν, καθώς τους δίνεται ο απαραίτητος χρόνος για να περάσουν στο σχέδιο επίλυσης του. Η κάθε ομάδα τώρα, με γνώμονα τις απαντήσεις που επιλέγει να δώσει στις παραπάνω ερωτήσεις, συλλέγει όσα περισσότερα δεδομένα μπορεί και τα καταγράφει αναλυτικά προκειμένου να δύναται να τα μελετήσει αργότερα και να τα συγκρίνει.

Αναζητούν στο διαδίκτυο το κόστος κατ' άτομο σε διαφορετικούς παιδότοπους και προσπαθούν να δουν αν υπάρχουν πακέτα προσφοράς για πολλά άτομα, καθώς και τι περιλαμβάνεται σε αυτά. Η συλλογή αυτών των δεδομένων θα είναι ανάλογη με τις επιθυμίες της κάθε ομάδας. Για παράδειγμα, αν κάποια ομάδα θέλει να καλέσει λίγα άτομα προκειμένου να κάνει τα γενέθλια στον αγαπημένο της παιδότοπο θα επιλέξει κάτι τελείως διαφορετικό από μια ομάδα η οποία θα θέλει στο party να έρθουν πολλοί φίλοι με συνοδεία.

Είναι εξαιρετικά πιθανό κατά την αναζήτηση αυτών των πληροφοριών να υπάρξουν και νέες υποθέσεις στις ομάδες, όπως για παράδειγμα, αν στα άτομα τα οποία μπορούν να καλέσουν πρέπει να υπολογίσουν και τον γονέα/συνοδό του κάθε παιδιού;

Έπειτα, κατά τη διάρκεια της δεύτερης διδακτικής ώρας, η κάθε ομάδα αξιολογεί σύμφωνα με τις προϋποθέσεις που έχει θέσει τα ευρήματά της και ξεκινάει τους μαθηματικούς υπολογισμούς, προκειμένου να δώσει κάποιες πιθανές απαντήσεις για το πρόβλημα.

Ενδεικτική λύση από τους μαθητές της Α΄ Ομάδας

Οι μαθητές/τριες ξεκινούν και συζητούν στις ομάδες τους προκειμένου να αποφασίσουν τι θα ήθελαν για τα γενέθλια τους και έπειτα να ερευνήσουν για τις επιλογές τους. Η ομάδα Α αναλύοντας ένα-ένα τα ερωτήματα, καταλήγει στο ότι θέλει να μπορέσει να καλέσει όσους περισσότερους φίλους γίνεται, αλλά ταυτοχρόνως θα πρέπει να υπολογίσει και τους συνοδούς των παιδιών, καθώς όπως επισημαίνει ένα παιδί της ομάδας, είναι πολύ πιθανό σε κάποια παιδιά να μην τους επιτραπεί να έρθουν χωρίς συνοδό. Ένας άλλος μαθητής θέτει επιπροσθέτως το θέμα της ημέρας, καθώς αναφέρει πως εφόσον τα γενέθλια είναι καλοκαίρι, δύναται να τα γιορτάσουν και καθημερινή αφού τα σχολεία είναι κλειστά. Γι' αυτόν τον λόγο, αποφασίζουν να ερευνήσουν το κόστος κατ' άτομο τόσο για καθημερινές όσο και για Σαββατοκύριακα.

ΠΑΙΔΙΚΟ ΠΑΡΤΙ
(ΤΙΜΟΚΑΤΑΛΟΓΟΣ - ΠΑΡΟΧΕΣ)

Δευτέρα - Παρασκευή

Για κάθε παιδί: 6,50 €
Παιδικό μενού: Τσάκι, Πίτσα, Πατατόκια, Χυμός

Για τον ενήλικα: 6,50€ ή 7,50€ :
Μενού 1: 6,50€ Τυροπιτάκι, Κλαμπ, Πίτσα, + ρόφημα (εκτός αλκοόλ)
Μενού 2: 7,50€ Χωριότικο τυροπιτάκι, Burger, Τορτίγια (γαλοπούλα – κοσέρι), Πίτσα + Απεριόριστο ροφήματα (εκτός αλκοόλ)

Σάββατο - Κυριακή

Για κάθε παιδί: 7,50 €
Παιδικό μενού: Τσάκι, Πίτσα, Πατατόκια, Χυμός

Για τον ενήλικα: 7,50€ ή 9,00€ :
Μενού 1: 7,50€ Τυροπιτάκι, Κλαμπ, Πίτσα, + ρόφημα (εκτός αλκοόλ)
Μενού 2: 9,00€ Χωριότικο τυροπιτάκι, Burger, Τορτίγια (γαλοπούλα – κοσέρι), Πίτσα + Απεριόριστο ροφήματα (εκτός αλκοόλ)

Παροχές

Αποκλειστική καφέλα για το πάρτι (Φαγητά παιδιών, Τούρτα, Event)
Επιπλέον δραστηριότητες: Face Painting, Μουσικές καρέκλες,
Δωρεάν προσκλήσεις
Φωτογράφος
Μάγος ή Ανιματέρ - Παιδικό σόου
(Extra χρέωση από 80€ για 1 ώρα απασχόλησης των παιδιών)

Εικόνα 1. Παιδότοπος Α

Χρέωση παιδιών

- €7 παιδί. Στη τιμή περιλαμβάνεται φαγητό (Προσάκι τυρί, Προσάκι λουκάνικο, Κοτομπουκό, Κρουασανάκια (ζυμόν τυρί πατατόκια) & χυμός HBH Go. Περιλαμβάνει την είσοδο των παιδιών του Party.
- €7.50 παιδί. Στην τιμή περιλαμβάνεται 3χρησ πίκας μαργαρίτα από την Pizza Fan, πατατόκια & χυμός HBH Go, καθώς και η είσοδος των παιδιών του party.

Χρέωση συνοδών

- €41 άτομο/περιλαμβάνει ρόφημα, καφέ, αλκοολούχα ποτά καθώς επίσης και συνοδευτικά καφέ(πατίλες με κέικ & μπισκότα). Κάθε έξτρα πατίτσα κέικ €6.
- MINI DONUTS. Χρέωση €3/άτομο mini donuts 3 γεύσεων (πράσινο, κρέμα, μπισκότο).
- ΠΡΟΣΑΚΙ. Χρέωση €3/άτομο για πατίτσα με 2 είδη προσάκι (τυρό, λουκάνικο) + πίκας.
- FULL MENU. Χρέωση €6/άτομο για μενού συνοδών (2 είδη μπίρας, 2 είδη προσάκι, πίκας, κοτομπουκό).
- SPECIAL MENU. Χρέωση €6/άτομο για 2 χρονών καλαμάκια ή κικιπέτ, πατίτσες, πίκας, και πίκας.
- DOMINOS. Διαμοιράζεται το δικό σας μενού, από τον κατάλογο της DOMINO'S pizza.

Εικόνα 2. Παιδότοπος Β

ΣΑΒΒΑΤΟ + ΚΥΡΙΑΚΗ
9€/ΑΤΟΜΟ (παιδιά και ενήλικες)
ΔΕΥΤΕΡΑ + ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ
8€/ΑΤΟΜΟ (παιδιά και ενήλικες)

ΠΑΡΟΧΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΩΝ PARTY ΜΑΣ


1.Μενού ενηλίκων και ένα ρόφημα της επιλογής τους ή μπόρο βαρρίν μικρό
Απολαύστε πιάτα ενηλίκων το οποίο περιλαμβάνει 4 είδη

- Κίεττι για μεγάλους με μαρούλι, ζυμαρόν, καϊνί και σως
- Πιπίτσες ηγανητές country
- Mini Hot dog
- Κέικ

2.Μενού παιδιών + απολαύστε χυμός 250ml
Διαλέγετε το φαγητό των παιδιών 1 είδος όλο το παιδί

- Ψωτ με πατατόκια ή
- Hot dog με πατατόκια ή
- Burger με πατατόκια

(τα παιδικά πιάτα μπορούν αντί για πατατόκια να έχουν πατίτσες ηγανητές με extra χρέωση + 0,50€)



- 1.Περιχόμενα πιάτα και κουτάλια με χρήση για την πόρτα
- 2.Μαργαρίτα την ώρα της τούρτας με μια στολή της αρεσκείας σας (μίλι, Είσα, τρικέτσας, Χιονάτος, νεράδει, Σπίδελμακ, Βελίμακ, Πετρατός, Star Wars, Μίκι, σκύλος, κομψοπαρδαλή)
- 3.Απεριόριστη χρήση όλων μας των παιχνιδιών, φουσκαλά, τραμπούκο, γήπεδο ποδοσφαίρου, κατασκευή κ.α (εκτός από αυτά που είναι με κέρμα)
- 4.Περιχόμενα εμψυχωμένα νερά 1 λίτρο ανά 4 άτομα (τα εξτρα είναι 1€ το ένα)
- 5.Τα ροφήματα και τα μενού σερβίρονται από εμάς

Εικόνα 3. Παιδότοπος Γ

Έπειτα από αναζήτηση στον διαδικτυο βρίσκουν τρεις κύριες επιλογές παιδότοπων που βρίσκονται κοντά στην περιοχή τους. Συμφωνούν μεταξύ τους πως ο αγαπημένος τους παιδότοπος είναι η επιλογή Α, αλλά αποφασίζουν πως είναι προτιμότερο να συγκρίνουν το κόστος του και με τους άλλους. Κατά τη διάρκεια συλλογής πληροφοριών, ένα παιδί παρατηρεί, πως υπάρχουν διαφορετικές τιμές τόσο για τα παιδιά όσο και για τους ενήλικες, ανάλογα με το μενού φαγητού και ποτού που περιλαμβάνουν. Προτείνεται λοιπόν να λάβουν υπόψη τους το πιο απλό μενού του κάθε παιδότοπου, προκειμένου να είναι πιο χαμηλό το κόστος. Οι μαθητές ξεκινούν και οργανώνουν τα δεδομένα τους όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα ([Πίνακας 1](#)).

Πίνακας 1. Κόστος ανά άτομο για κάθε παιδότοπο

			Παιδότοπος Α	Παιδότοπος Β	Παιδότοπος Γ
Κόστος ανά άτομο	Καθημερινή	ανά παιδί	6,50 €	7 €	8 €
		ανά ενήλικα	6,50 €	4 €	8 €
	Σαβ/κο	ανά παιδί	7,50 €	7 €	9 €
		ανά ενήλικα	7,50 €	4 €	9 €

Στη συνέχεια, αφού οι μαθητές/τριες οργανώσουν και καταγράψουν τα δεδομένα τους, κάνουν διάφορες δοκιμές και υπολογίζουν το κόστος σε κάθε παιδότοπο, τόσο για τα άτομα όσο και για τους συνοδούς. Θεωρείται πως κάθε ένα παιδί θα έχει από έναν συνοδό μαζί και όχι παραπάνω. Αφού κάνουν αυτούς τους υπολογισμούς (χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι), προσθέτουν τα ποσά προκειμένου να βρουν το συνολικό κόστος για κάθε παιδότοπο. Ξεκινάνε τις δοκιμές λαμβάνοντας υπόψη 10 παιδιά και 10 συνοδούς και καθώς βλέπουν πως έχουν ακόμη αρκετά χρήματα προκειμένου να καλέσουν περισσότερους φίλους τους, συνεχίζουν έως ότου δουν, πως το συνολικό κόστος όλων των παιδότοπων ξεπερνάει τα 250€. Τέλος, προκειμένου να μπορέσουν να καταλήξουν στην καταλληλότερη επιλογή, επισημαίνουν με κόκκινο τις επιλογές που δεν τους εξυπηρετούν και συζητούν πάνω στις υπόλοιπες ([Πίνακας 2](#)).

Τα παιδιά συμπεραίνουν πως τα περισσότερα άτομα που μπορούν να καλέσουν είναι 22, αν επιλέξουν τον παιδότοπο Β, στον οποίο μάλιστα υπάρχει η ίδια τιμή τόσο για καθημερινή όσο και για Σαββατοκύριακο. Ενώ, αν θέλουν να κάνουν το πάρτι στον αγαπημένο τους παιδότοπο, δύνανται να καλέσουν μόνο 19 παιδιά με τους συνοδούς τους. Ωστόσο, θα πρέπει το πάρτι να γίνει καθημερινή, καθώς το Σαββατοκύριακο είναι άλλο το κόστος και έτσι θα έρθουν ακόμα λιγότεροι φίλοι τους. Η λιγότερο συμφέρουσα επιλογή είναι αυτή του παιδότοπου Γ, όπου εάν

θέλουν να κάνουν εκεί το πάρτι τους, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί καθημερινή και θα δύνανται να καλέσουν μόνο 15 φίλους τους

Πίνακας 2. Υπολογισμός κόστους συνολικά

Αριθμός παιδιών	Τι ημέρα;	Κόστος παιδιών			Αριθμός ενηλίκων	Κόστος ενηλίκων			Συνολικό κόστος		
		A	B	Γ		A	B	Γ	A	B	Γ
10	Καθημερινή	65	70	80	10	65	40	80	130	110	160
	Σαβ/κο	75	70	90		75	40	90	150	110	180
13	Καθημερινή	84,5	91	104	13	84,5	52	104	169	143	208
	Σαβ/κο	97,5	91	117		97,5	52	117	195	143	234
15	Καθημερινή	97,5	105	120	15	97,5	60	120	195	165	240
	Σαβ/κο	112,5	105	135		112,5	60	135	225	165	270
16	Καθημερινή	104	112	128	16	104	64	128	208	176	256
	Σαβ/κο	120	112	144		120	64	144	240	176	288
.....											
19	Καθημερινή	123,5	133	152	19	123,5	76	152	247	209	304
	Σαβ/κο	142,5	133	171		142,5	76	171	285	209	342
20	Καθημερινή	130	140	160	20	130	80	160	260	220	320
	Σαβ/κο	150	140	180		150	80	180	300	220	360
21	Καθημερινή	136,5	147	168	21	136,5	84	168	273	231	336
	Σαβ/κο	157,5	147	189		157,5	84	189	315	231	378
22	Καθημερινή	143	154	176	22	143	88	176	286	242	352
	Σαβ/κο	165	154	198		165	88	198	330	242	396
23	Καθημερινή	149,5	161	184	23	149,5	92	184	299	253	368
	Σαβ/κο	172,5	161	207		172,5	92	207	345	253	414

Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης

Διαμορφωτική αξιολόγηση

Η διαμορφωτική αξιολόγηση αφορά την αξιολόγηση για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Αφορά μέρος της διδασκαλίας και την ρυθμίζει. Ενώ λοιπόν ο εκπαιδευτικός αντιπροσωπεύει τον διαμεσολαβητή που θα ωθήσει τους/τις μαθητές/τριες στη μάθηση, αναγνωρίζει τα δυνατά και αδύνατα σημεία του κάθε μαθητή και γνωρίζει πως να τον βοηθήσει κατάλληλα. Μέσω μιας διαμορφωτικής ανατροφοδότησης αναπτύσσεται ένας διάλογος μεταξύ των μαθητών/τριων και του δασκάλου που θα οδηγήσει στην αποδοτικότερη διδασκαλία. Στη διαμορφωτική αξιολόγηση συμπεριλαμβάνεται και η αυτοαξιολόγηση αλλά και η αξιολόγηση συμμαθητών. Επομένως, οι μαθητές/τριες θα αξιολογηθούν για τη συμμετοχή τους καθ' όλη τη διάρκεια του διδακτικού έργου, ως προς τις ερωτήσεις που θα υποβάλλουν, την επεξεργασία κατά την ανατροφοδότηση που θα λάβουν, την ικανότητα αυτοαξιολόγησης αλλά και αξιολόγησης των συμμαθητών τους.

Συγκριτική αξιολόγηση

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μαθητές δεν έχουν ασχοληθεί εκτενώς με Μαθηματικά προβλήματα μοντελοποίησης, κατά τη διάρκεια που οι μαθητές/τριες συνεργάζονται και κρατούν σημειώσεις ο εκπαιδευτικός θα συλλέξει κάποιες πληροφορίες προκειμένου να τις αξιολογήσει.

Η συγκριτική αξιολόγηση αφορά πέντε διαφορετικά κριτήρια: 1. Οικοδομώντας το μοντέλο, 2. Δουλεύοντας με ακρίβεια, 3. Ερμηνεύοντας, 4. Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός, και 5. Παρουσίαση.

Αναφορικά με το 1^ο κριτήριο (Οικοδομώντας το μοντέλο), ο εκπαιδευτικός θα ελέγξει αν οι μαθητές/τριες έχουν κατανοήσει τα χρήσιμα δεδομένα που τους δίνονται, αν λαμβάνουν αποφάσεις και αν θέτουν ερωτήματα προκειμένου να απλοποιήσουν το πρόβλημα που τους δίνεται.

Αναφορικά με το 2^ο κριτήριο (Δουλεύοντας με ακρίβεια), ο εκπαιδευτικός θα δει αν χρησιμοποιούν τις Μαθηματικές πράξεις και τα σύμβολα με ακρίβεια.

Αναφορικά με το 3^ο κριτήριο (Ερμηνεύοντας), ο εκπαιδευτικός θα ελέγξει αν οι μαθητές ερμηνεύουν κατάλληλα την κατάσταση που τους δόθηκε.

Αναφορικά με το 4^ο κριτήριο (Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός), θα δει κατά πόσο οι μαθητές/τριες έχουν κατανοήσει την εγκυρότητα αλλά και τους περιορισμούς του μοντέλου αυτού.

Αναφορικά με το 5^ο κριτήριο (Παρουσίαση), θα ελεγχθεί αν δημιουργούν μια επαρκή, κατανοητή και περιεκτική παρουσίαση της δουλειάς τους.

Επανάλαβετε

Κατά την επανάληψη της διαδικασίας είναι πολύ πιθανό οι μαθητές/τριες να παρατηρήσουν τυχών σφάλματα ή παραλείψεις που προέκυψαν κατά την διαδικασία επίλυσης τους προβλήματος. Επομένως είναι πιθανό να θελήσουν να ασχοληθούν με διαφορετικούς παράγοντες και να θελήσουν να ασχοληθούν με διαφορετικούς παράγοντες.

Πρόβλημα 2

Αρχικό πρόβλημα

Σχολικό εγχειρίδιο: Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

Μέρος Β', Κεφάλαιο 4: Γεωμετρικά Στερεά- Μέτρηση Στερεών

Ενότητα: 4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου - Ασκήσεις (Σελ. 215)

7 Ένα τσιγάρο έχει μήκος 8,5 cm από τα οποία τα 2,5 cm καταλαμβάνει το φίλτρο. Η διάμετρος μιας βάσης του είναι 0,8 cm. Οι αναλύσεις του Υπουργείου Υγείας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι περιέχει 0,5 mg πίσσας ανά κυβικό εκατοστό καπνού και ότι το τσιγαρόχαρτο περιέχει 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού. Πόσα mg πίσσας εισπνέει ημερησίως ένας καπνιστής που καπνίζει 15 τσιγάρα την ημέρα; (Να θεωρήσετε ότι ο καπνιστής πετάει το τσιγάρο έχοντας καπνίσει τα 5 από τα 6 cm του τσιγάρου).

Λύση αρχικού προβλήματος

Απάντηση:

Το μήκος του τσιγάρου που καπνίζει ο καπνιστής είναι 5 cm.

Ο όγκος του καπνού που περιέχεται σε αυτό είναι

$$V = \pi r^2 \cdot u = 3,14 \cdot 0,4^2 \cdot 5 = 2,512 \text{ cm}^3$$

Το τσιγαρόχαρτο έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του τσιγάρου του οποίου το ύψος είναι 5 cm. Το εμβαδόν αυτό είναι :

$$E_{\pi} = 2\pi ru = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot 5 = 12,56 \text{ cm}^2$$

Η πίσσα που περιέχεται στον καπνό του ενός τσιγάρου είναι :

$$2,512 \cdot 0,5 = 1,256 \text{ mg και στο τσιγαρόχαρτο } 12,56 \cdot 0,05 = 0,628 \text{ mg .}$$

Προτεινόμενο τροποποιημένο πρόβλημα μοντελοποίησης

Ο Δήμος σας, οργανώνει μία ημερίδα για την Παγκόσμια Ημέρα κατά του καπνίσματος. Για τον σκοπό αυτό, καθ' όλη τη διάρκεια της εβδομάδας, έχουν προγραμματιστεί δράσεις, με στόχο την ενημέρωση και ευαισθητοποίηση. Η δράση του δικού σας σχολείου, αφορά το στήσιμο ενός περιπτέρου ενημέρωσης. Οι καπνίζοντες πολίτες του δήμου σας, θα προσέρχονται και θα τους ενημερώνετε αναφορικά με την ποσότητα της πίσσας (σε mg) που εισπνέει ο καθένας ημερησίως, με σκοπό να τους παροτρύνετε να διακόψουν το κάπνισμα. Ο Δήμος, σας έχει δώσει ήδη φυλλάδια ενημέρωσης, όπου αναγράφονται, βάσει ερευνών, οι βλαβερές συνέπειες της πίσσας στον οργανισμό, καθώς ότι, ακόμα και σε κάθε τσιγαρόχαρτο περιέχονται 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού.

Η προσέλευση αναμένεται να είναι μεγάλη, επομένως προτείνεται να οργανωθείτε, ώστε σε όλη αυτή τη διαδικασία να είστε άμεσοι απαντώντας τους απευθείας στο "Πόση πίσσα εισπνέει ο καθένας, ανάλογα με το πόσα τσιγάρα καπνίζει ημερησίως;"



Ήξερες ότι, ακόμα και στο τσιγαρόχαρτο περιέχονται 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού;

Η πίσσα είναι ουσιαστικά αυτό που απομένει μετά την απομάκρυνση της νικοτίνης και της υγρασίας. Πρόκειται για ένωση πολλών και καρκινογόνων ουσιών, έχει σκούρο χρώμα και κολλώδη υφή. Επικάθεται στους βλεννογόνους του στόματος, των πνευμόνων, του στομάχου και του εντέρου, συμβάλλοντας στην πρόκληση καρκίνου αυτών των περιοχών, αλλά και στην εκδήλωση εμφυσήματος και άλλων χρόνιων αναπνευστικών και συστηματικών νοσημάτων.

Εσύ ακόμα καπνίζεις;

Δήμος Αλμυρού

Εικόνα 4. Φυλλάδιο του Δήμου

Ταξινόμηση

1η ταξινόμηση: Περιοχή του πραγματικού κόσμου

Το πρόβλημα αφορά περιοχή του πραγματικού κόσμου και πιο συγκεκριμένα, την κοινωνική ευαισθητοποίηση πάνω θέματα που επηρεάζουν την υγεία.

2η ταξινόμηση: Εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών

Το έργο έχει εφαρμογή σύμφωνα με τις επίσημες προδιαγραφές και τις προσδοκίες του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, κάποιες από τις οποίες είναι:

- Να γνωρίσουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά (πρίσμα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος και σφαίρα) και τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους.
- Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας ορθού κυλίνδρου.
- Να γνωρίσουν τις μονάδες μέτρησης όγκου στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τις μεταξύ τους σχέσεις και το διεθνή συμβολισμό τους.
- Να υπολογίζουν τον όγκο.

Ακόμα, βάσει του νέου προγράμματος σπουδών, το πρόβλημα μοντελοποίησης βρίσκει εφαρμογή και στα προσδοκώμενα Μαθησιακά αποτελέσματα:

- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και πυραμίδων με ψηφιακά εργαλεία, ισομετρικό χαρτί, γεωπίνακα ή με ελεύθερη σχεδίαση.
- Να αναγνωρίζουν τα στερεά (κύλινδρο, κώνο και σφαίρα) και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους.
- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα κυλίνδρων και κώνων με ψηφιακά εργαλεία ή με ελεύθερη σχεδίαση.
- Να λύνουν πραγματικά και μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να συνθέτουν προβλήματα τα οποία λύνονται με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων.
- Να διερευνούν και να διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές.

Β' βάθμια: Β' Γυμνασίου

3η ταξινόμηση: Άνοιγμα του έργου

Το προτεινόμενο πρόβλημα μοντελοποίησης είναι ανοιχτό καθώς δεν υπάρχει μια αποκλειστική λύση. Δεν δίνονται συγκεκριμένα δεδομένα στους μαθητές αλλά αντιθέτως καλούνται οι ίδιοι να τα ερευνήσουν ή να τα υποθέσουν και μέσω αυτών να οδηγηθούν σε διαφορετικές λύσεις.

4η ταξινόμηση: Ρεαλιστικότητα και Αυθεντικότητα του προβλήματος

Η κατάσταση που δίνεται είναι ρεαλιστική καθώς το κάπνισμα είναι ένα ζήτημα που αφορά μεγάλο μέρος της κοινωνίας, διότι βάσει ερευνών αποτελεί μια βλαβερή για τον άνθρωπο συνήθεια και συναντάται σε μεγάλο μέρος του πληθυσμού. Επομένως θεωρείται αυθεντικό, καθώς οι μαθητές/τριες ενδέχεται να έχουν στο κοντινό τους περιβάλλον καπνίζοντες, τους οποίους θέλουν να ενημερώσουν καταλληλότερα και να ευαισθητοποιήσουν σχετικά με την συνήθεια αυτή

5η ταξινόμηση: Μαθηματική περιοχή

Το έργο ανήκει στο πεδίο της Γεωμετρίας και έχει ως προαπαιτούμενα στοιχεία από Γεωμετρία και Άλγεβρα. Κατά την διαδικασία επίλυσης του, θα χρειαστούν οι τύποι εύρεσης όγκου κυλίνδρου και εμβαδού παράπλευρης επιφάνειας, καθώς και βασικές αλγεβρικές πράξεις.

«Αντικαπνιστικό κίνημα»

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το πρόβλημα μοντελοποίησης, θεωρούμε ότι απευθύνεται σε μαθητές Γυμνασίου και συγκεκριμένα της Β' Τάξης. Οι μαθητές, προτείνεται να έχουν μαζί τους φορητό υπολογιστή ή tablet, όχι απαραίτητα ο καθένας ξεχωριστά, καθώς θα δημιουργήσουν ομάδες των 4 ή 5 ατόμων. Με αυτόν τον τρόπο, θα ενισχυθεί η συζήτηση και επικοινωνία αναφορικά με τον προσδιορισμό του προβλήματος. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός αναμένεται να έχει περισσότερο συντονιστικό ρόλο, προτρέποντας τις ομάδες να οργανωθούν, ώστε να προσδιορίσουν κατάλληλα τους παράγοντες του προβλήματος και να κάνουν τις ανάλογες υποθέσεις.

Ενδεικτική προσέγγιση προβλήματος μοντελοποίησης

Διερευνούμε τη διαδικασία σκέψης μιας υποθετικής ομάδας μαθητών, χάριν ευκολίας την ονομάζουμε Ομάδα Α, κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος «Αντικαπνιστικό κίνημα». Ο σκοπός είναι να επισημάνουμε τη διαδικασία μοντελοποίησης. Επομένως παρακάτω, παρουσιάζεται το έργο μιας ομάδας μαθητών Β' Γυμνασίου, οι οποίοι έχουν μία σχετικά καλή εμπειρία στην μοντελοποίηση.

Η Ομάδα Α πρέπει να μετατρέψει τη δεδομένη ερώτηση: «Πόση πίσσα εισπνέει ο καθένας, ανάλογα με το πόσα τσιγάρα καπνίζει ημερησίως;», σε μία πιο σαφή ερώτηση που να μπορεί να απαντηθεί. Θα μπορούσε αρχικά να επαναδιατυπωθεί ως εξής: «Πόση πίσσα περιέχουν τα τσιγάρα που καπνίζει ο καθένας ημερησίως;»

Ο ορισμός των βασικών μεταβλητών του προβλήματος, όπως και κάποιες υποθέσεις, αναμένεται να προσδιοριστούν με ευκολία. Παράλληλα, κάποιες άλλες μεταβλητές και υποθέσεις θα επιστρέψουν να τις ορίσουν κατά το στάδιο της μαθηματοποίησης. Οι μαθητές δεν γνωρίζουν το μοντέλο που πρέπει να ακολουθήσουν, οπότε έπειτα από έρευνα στο διαδίκτυο, ανταλλαγή ιδεών με τις υπόλοιπες ομάδες και διερεύνηση διαφόρων στοιχείων του προβλήματος, προκύπτει ανακαλυπτικά η διαδικασία οικοδόμησης του τελικού μοντέλου.

Αρχικά, μία από τις πρώτες μεταβλητές που ορίζουν είναι ο αριθμός των τσιγάρων που καπνίζει ο κάθε καπνίζοντας. Αντιλαμβάνονται ότι το τσιγάρο είναι σε σχήμα κυλίνδρου. Για να προσδιορίσουν την ποσότητα της πίσσας σε mg, σκέφτονται ότι πρέπει να αναζητήσουν την πληροφορία αυτή στο διαδίκτυο. Έπειτα από την αναζήτηση, δεν κατάφεραν να συλλέξουν πληροφορίες αναφορικά με την περιεκτικότητα του τσιγάρου σε πίσσα, παρά μόνο ότι υπάρχουν διαφορές στην περιεκτικότητα, ακόμη και σε τσιγάρα της ίδιας εταιρείας. Έτσι, ζήτησαν την βοήθεια του Χημικού του σχολείου. Τους ενημέρωσε, λέγοντάς τους ότι οι τιμές στις οποίες κυμαίνεται η περιεκτικότητα ανά κυβικό εκατοστό καπνού είναι από 0,1 έως 1, καθώς ούτε ο ίδιος μπορούσε να προσδιορίσει την περιεκτικότητα σε κάθε τσιγάρο, διότι πλέον στα πακέτα των τσιγάρων, δεν αναγράφονται οι ενδεικτικές τιμές των βλαβερών συστατικών τους. Αποφασίζουν λοιπόν, να εργαστούν με μία μέση τιμή των τιμών αυτών, το 0,5. Ένας μαθητής σκέφτεται, ότι πρέπει να λάβουν υπόψη τους ότι η πληροφορία που τους έδωσε ο Χημικός αφορά το τμήμα του τσιγάρου, που περιλαμβάνει τον καπνό και όχι το φίλτρο. Οπότε κάνουν μία εκτίμηση, αναφορικά με το μήκος, των δύο αυτών τμημάτων του τσιγάρου και αποφασίζουν να εργαστούν με ένα ενδεικτικό συνολικό μήκος των 8,5 cm, εκ των οποίων τα 2,5 cm είναι το φίλτρο. Τέλος, εκτιμούν ακόμα ότι το μήκος της διαμέτρου της βάσης του τσιγάρου θα κυμαίνεται μεταξύ 0,4 και 1, οπότε αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν ενδεικτικά την τιμή 0,7.

Επομένως, για να υπολογίσουν τον όγκο του καπνού, που περιέχεται σε κάθε τσιγάρο, αντιλαμβάνονται ότι πρέπει να υπολογίσουν τον όγκο του κυλίνδρου που απομένει, εάν από το συνολικό τσιγάρο, αφαιρέσουν το φίλτρο. Ξεκινούν λοιπόν τους υπολογισμούς τους γράφοντας τα εξής:

- Η ακτίνα της βάσης του τσιγάρου θα είναι 0,35 cm και το μήκος του 6 cm
- Ο όγκος του καπνού, που περιέχεται σε αυτό το τμήμα του τσιγάρου είναι:

$$V = \pi \cdot \rho^2 \cdot v = 3,14 \cdot 0,35^2 \cdot 6 = 2,3079 \text{ cm}^3$$
- Η περιεκτικότητα σε πίσσα του καπνού του τσιγάρου θα είναι $0,5 \cdot 2,3079 = 1,15395 \text{ mg}$
- Το τσιγαρόχαρτο, έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του τσιγάρου, του οποίου το ύψος είναι 6 cm.
- Το εμβαδόν αυτό είναι $E_{\pi} = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot v = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,35 \cdot 6 = 13,188 \text{ cm}^2$

- Η πίσσα που περιέχεται σε ένα τσιγαρόχαρτο είναι: $13,188 \cdot 0,05 = 0,6594 \text{ mg}$
- Η πίσσα που περιέχεται συνολικά σε ένα τσιγάρο είναι $1,15395 + 0,6594 = 1,81335 \text{ mg}$
- Έστω x , ο αριθμός των τσιγάρων που καπνίζει ένας καπνιστής ημερησίως
- Η πίσσα που περιέχεται συνολικά σε x τσιγάρα, είναι $3,9564 \cdot x \text{ mg}$

Στο στάδιο του αναστοχασμού, διαπιστώνουν ότι η απάντηση που βρήκαν αφορά μία συγκεκριμένη περίπτωση. Επομένως, θα πρέπει να ορίσουν κάποιες ακόμα μεταβλητές, γιατί κατά την επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποίησαν συγκεκριμένη τιμή για την περιεκτικότητα της πίσσας ανά κυβικό εκατοστό καπνού, όπως και για την ακτίνα της βάσης, αλλά και για το ύψος του τσιγάρου.

Συνοψίζοντας την δουλειά της, λοιπόν η Ομάδα Α καταλήγει στα παρακάτω:

Προσδιορισμός προβλήματος

- Προσδιορίστε πόσα mg πίσσας περιέχονται στον αριθμό των τσιγάρων που καπνίζει ο κάθε καπνιστής ημερησίως

Υποθέσεις

- Οι άνθρωποι που θα περάσουν από το περίπτερο θα είναι όλοι καπνιστές.
- Θεωρείται ότι το τμήμα του τσιγάρου που περιλαμβάνει καπνό, καπνίζεται εξ' ολοκλήρου.
- Δεν θα υπάρχουν τσιγάρα χωρίς φίλτρο.
- Τα τσιγάρα θα είναι εργοστασιακά.
- Θα λάβουν υπόψη ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη τσιγάρων ως προς το ύψος που κυμαίνονται μεταξύ 8 cm και 12 cm.
- Το ύψος του φίλτρου διαφέρει ανάλογα με το είδος του τσιγάρου και κυμαίνεται μεταξύ 2 cm και 4 cm.
- Η διάμετρος της βάσης, κυμαίνεται μεταξύ 0,4 cm και 1 cm.
- Θεωρούν ότι η περιεκτικότητα πίσσας, ανά κυβικό εκατοστό κυμαίνεται μεταξύ 0,1 και 1 mg.

- Για τον αριθμό π , θα χρησιμοποιηθεί προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή $\pi = 3,14$.

Ορισμός Μεταβλητών

- Έστω x , ο αριθμός των τσιγάρων που καπνίζει ένας καπνιστής ημερησίως
- V , όγκος του κυλίνδρου
- E_{π} , εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας
- $\pi_{ολ}$, η περιεκτικότητα σε πίσσα συνολικά, ανά τσιγάρο
- π_1 , η περιεκτικότητα σε πίσσα του καπνού, ανά τσιγάρο
- π_2 , η περιεκτικότητα σε πίσσα, ανά κυβικό εκατοστό καπνού
- π_3 , η περιεκτικότητα σε πίσσα, ανά τσιγαρόχαρτο
- ρ , η ακτίνα της βάσης του τσιγάρου
- v , το τμήμα του τσιγάρου, χωρίς το φίλτρο
- v_1 , το συνολικό μήκος του τσιγάρου
- v_2 , το μήκος του φίλτρου

Στο σημείο αυτό, σημειώνουν ότι, οι παραπάνω μεταβλητές, μπορούν να πάρουν μόνο θετικές τιμές.

Εκτέλεση Μαθηματικών

Το ύψος του τμήματος του τσιγάρου στο οποίο περιέχεται καπνός είναι: $v = v_1 - v_2$ cm

Ένα μέλος της ομάδας Α, σκέφτηκε ότι σε όλα τα τσιγάρα, το μήκος του φίλτρου είναι μικρότερο από το μήκος του τμήματος του τσιγάρου, που περιέχει καπνό. Έτσι, έπειτα από συζήτηση αποφασίζουν να λάβουν υπόψιν τους αυτόν τον περιορισμό, και γράφουν:

Πρέπει $v_1 - v_2 > v_2$, ή $v_1 > 2 \cdot v_2$

Οπότε, όταν $8 \leq v_1 \leq 15$, θα πρέπει $2 \leq v_2 \leq 4$.

Επομένως ο όγκος του καπνού που θα περιέχεται σε αυτό, θα είναι: $V = \pi \cdot \rho^2 \cdot v = 3,14 \cdot \rho^2 \cdot (v_1 - v_2) \text{ cm}^3$

Η περιεκτικότητα λοιπόν, ενός τσιγάρου σε πίσσα εκφράζεται από την σχέση: $\pi_1 = \pi_2 \cdot V = \pi_2 \cdot 3,14 \cdot \rho^2 \cdot (v_1 - v_2) \text{ mg}$

Το εμβαδόν του τσιγαρόχαρτου είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του τσιγάρου, με ύψος $v_1 - v_2$ και δίνεται από την σχέση: $E_{\pi} = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot v = 2 \cdot 3,14 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2) = 6,28 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2) \text{ cm}^2$

Έτσι, η περιεκτικότητα σε πίσσα του τσιγαρόχαρτου είναι: $\pi_3 = 0,05 \cdot E_{\pi} = 0,05 \cdot 6,28 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2) = 0,314 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2) \text{ mg}$

Οπότε, η πίσσα που περιέχεται σε ένα τσιγάρο συνολικά είναι: $\pi_{ολ} = \pi_1 + \pi_3 = \pi_2 \cdot 3,14 \cdot \rho^2 \cdot (v_1 - v_2) + 0,314 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2)$

Τέλος, η πίσσα που εισπνέει ένας καπνιστής που καπνίζει x τσιγάρα ημερησίως, είναι $x \cdot \pi_{ολ} = x \cdot [\pi_2 \cdot 3,14 \cdot \rho^2 \cdot (v_1 - v_2) + 0,314 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2)]$

Τελικό μοντέλο της ομάδας Α

Αν ένας καπνιστής καπνίζει x τσιγάρα ημερησίως, τότε εισπνέει:

$x \cdot [\pi_2 \cdot 3,14 \cdot \rho^2 \cdot (v_1 - v_2) + 0,314 \cdot \rho \cdot (v_1 - v_2)] \text{ mg}$ πίσσας

Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης

Διαμορφωτική αξιολόγηση

Η διαμορφωτική αξιολόγηση έχει ως στόχο την πρόοδο των μαθητών, μέσω της κατάλληλης υποστήριξης από τον εκπαιδευτικό και γι' αυτό πραγματοποιείται καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας της μοντελοποίησης. Για τον σκοπό αυτό, μπορούν αρχικά να τεθούν κάποιες ερωτήσεις από τον εκπαιδευτικό, ώστε να γίνει πιο κατανοητό το πρόβλημα και το ζητούμενο στους μαθητές, καθώς αναμένεται να αντιμετωπίσουν δυσκολίες λόγω της έλλειψης δεδομένων. Επομένως, κάποιες από αυτές τις ερωτήσεις-υποδείξεις θα μπορούσαν να είναι:

- “Δοκιμάστε να περιγράψετε το πρόβλημα. Ποιες πληροφορίες σας χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος;”
- “Πως θα μπορούσατε να καταλήξετε στο αποτέλεσμα;”
- “Θεωρείτε ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις στο πρόβλημα;”
- “Με ποιον τρόπο θα αναζητήσετε τις πληροφορίες, που είναι απαραίτητες για την επίλυση;”

- “Τι είδους υποθέσεις θα κάνετε, ώστε να σας βοηθήσουν στην εύρεση της λύσης;”

Αυτές οι ερωτήσεις, λειτουργούν ως διαμορφωτική ανατροφοδότηση, καλλιεργώντας έναν εποικοδομητικό διάλογο, μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού. Επιπροσθέτως μέρος της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελεί τόσο η αυτοαξιολόγηση όσο και η αξιολόγηση συμμαθητών/τριών.

Συγκριτική αξιολόγηση

Στη συγκριτική αξιολόγηση αφορά τον έλεγχο της μάθησης και περιλαμβάνει πέντε κριτήρια. Αρχικά, λαμβάνεται υπόψη, κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση μέσω κριτικής σκέψης να αντιληφθούν το νόημα του προβλήματος και να λάβουν αποφάσεις σχετικά με αυτό (οικοδομώντας το μοντέλο). Έπειτα, θα ελεγχθεί κατά πόσο χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και σύμβολα με ακρίβεια (δουλεύοντας με ακρίβεια), καθώς και η ικανότητα να ερμηνεύουν την δοθείσα κατάσταση (ερμηνεύοντας). Ακόμα, αξιολογείται η κατανόηση των μαθητών ως προς την εγκυρότητα και τους περιορισμούς του μοντέλου (έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός) και τέλος ελέγχεται η δημιουργία πλήρους και σαφούς παρουσίασης της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος (παρουσίαση).

Επαναλάβετε

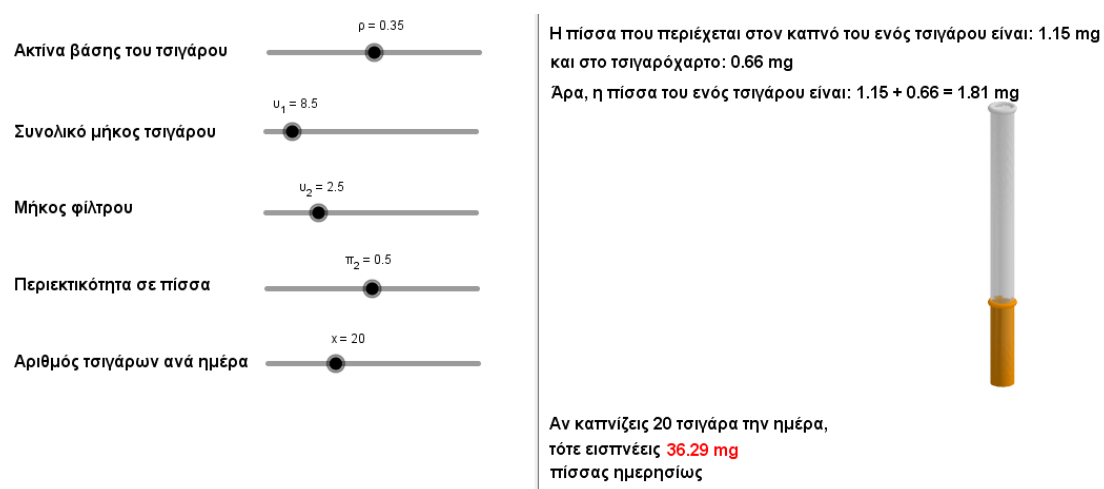
Στο στάδιο της επανάληψης, πιθανόν να αντιληφθούν ότι δεν έχουν λάβει υπόψη τα τσιγάρα που δεν έχουν φίλτρο, οπότε επιστρέφουν και εμπλουτίζουν τις υποθέσεις. Αποφασίζουν δηλαδή, να εργαστούν μόνο με τσιγάρα που έχουν φίλτρο.

Παράλληλα, συνειδητοποιούν ότι το ύψος του τμήματος του τσιγάρου που περιέχει τον καπνό, πρέπει να είναι πάντα θετικό, οπότε αντιλαμβάνονται ότι πρέπει η μέγιστη τιμή του ύψους του φίλτρου, να είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή του συνολικού ύψους του τσιγάρου. Επιπλέον, παρατηρούν ότι πρέπει το ύψος του τμήματος του τσιγάρου χωρίς το φίλτρο, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το ύψος του φίλτρου. Έτσι, επιστρέφουν στο μοντέλο να κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις.

Επομένως, σε κάθε επανάληψη θα γίνεται έλεγχος ως προς το, αν το μοντέλο που ανέπτυξαν απαντά στην ερώτηση του προβλήματος, καθώς και αν η απάντηση έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο.

Εφαρμόστε το μοντέλο

Στο στάδιο αυτό, με την βοήθεια του εκπαιδευτικού, μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν στο λογισμικό Geogebra, μία απεικόνιση του τσιγάρου, ως συνδυασμό τριών κυλίνδρων ([Εικόνα 5](#)).



Εικόνα 5. Παρουσίαση του μοντέλου

Μπορούν να κατασκευάσουν δρομείς, για καθεμία από τις παραμέτρους, που έχουν λάβει υπόψη τους. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού, το μοντέλο τους αξιοποιείται για να οριστεί η συνάρτηση, από την οποία προκύπτει η τελική απάντηση σε κάθε διαφορετική περίπτωση.

Πρόβλημα 3

Αρχικό πρόβλημα

Σχολικό εγχειρίδιο: Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής.

Κεφάλαιο 2: Διαφορικός Λογισμός

Ενότητα: 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης – Ασκήσεις Β' Ομάδας (σελ. 152).

10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

Λύση αρχικού προβλήματος

Η λύση που παρουσιάζεται παρακάτω βρίσκεται στο:

Λύσεις των ασκήσεων. Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής, σελ. 124-125.

10. Εστω $x(x > 100)$ ο αριθμός των ατόμων που θα δηλώσουν συμμετοχή. Τότε, το ποσό που θα πληρώσει κάθε άτομο προκύπτει αν από τα 1000 ευρώ αφαιρέσουμε το ποσό της έκπτωσης, το οποίο ανέρχεται σε $(x - 100) \cdot 5$ ευρώ, δηλαδή κάθε άτομο θα πληρώσει:

$$1000 - (x - 100) \cdot 5 = 1000 - 5x + 500 = 1500 - 5x \text{ ευρώ.}$$

Επομένως, τα έσοδα της εταιρείας από τη συμμετοχή των x ατόμων θα είναι:

$$E(x) = x(1500 - 5x) = -5x^2 + 1500x$$

Για κάθε $x > 100$ έχουμε $E'(x) = -10x + 1500$, οπότε $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 150$. Το πρόσημο της E' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της E και τα ακρότατα αυτής.

x	100	150	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$		112.500 max	

Δηλαδή, η E παρουσιάζει στο $x_0 = 150$ μέγιστη τιμή την $E(150) = 112.500$. Επομένως, πρέπει να δηλώσουν 150 άτομα συμμετοχή στην κρουαζιέρα για να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

Οργανώνετε την επταήμερη εκδρομή του Λυκείου σας και η πλειοψηφία, των συμμαθητών σου έδειξε προτίμηση στην ιδέα μιας κρουαζιέρας στις Κυκλάδες, για τον Απρίλιο. Για το σκοπό αυτό, οι υπεύθυνοι του δεκαπενταμελούς απευθύνθηκαν σε ένα ταξιδιωτικό γραφείο και πήραν προσφορά από μια εταιρεία με κρουαζιερόπλοια. Όμως, για τη ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτείται η συμμετοχή τουλάχιστον 50 ατόμων. Αν δηλώσουν ακριβώς 50 άτομα, ορίζει το αντίτιμο ανά άτομο, το οποίο για κάθε επιπλέον άτομο μειώνεται (ανά άτομο) κατά 5 ευρώ. Ζητήσατε, βέβαια, μια καλύτερη τιμή από την συγκεκριμένη εταιρεία και ο υπεύθυνος σας έδωσε την παρακάτω προσφορά:

«Στην περίπτωση που ο αριθμός των συμμετεχόντων, με αυτή την προσφορά, μας αποδώσει τα ανώτερα κέρδη, και μόνο τότε, θα σας κάνουμε επιπλέον έκπτωση 1000 ευρώ, επί του συνολικού κόστους».

Πόσοι από εσάς πρέπει να δηλώσετε συμμετοχή ώστε να λάβετε την επιπλέον έκπτωση και πότε αυτή η επιπλέον έκπτωση παύει είναι συμφέρουσα για το ατομικό κόστος;

Ταξινόμηση

1^η ταξινόμηση: Περιοχή του πραγματικού κόσμου

Αναφορικά με την περιοχή του πραγματικού κόσμου, το πρόβλημα αφορά θέμα της καθημερινότητας, το οποίο εμπλέκει οικονομικούς παράγοντες.

2^η ταξινόμηση: Εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών

Το έργο έχει εφαρμογή σύμφωνα με τις επίσημες προδιαγραφές και τις προσδοκίες του προγράμματος σπουδών, ορισμένες από τις οποίες είναι:

- Η άσκηση των μαθητών/τριών στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική.
- Να ασκηθούν οι μαθητές/τριες στο να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.

- Να έρθουν σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των Μαθηματικών στη σύγχρονη πραγματικότητα.

Παράλληλα, βρίσκει εφαρμογή στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του νέου προγράμματος σπουδών, ένα εκ των οποίων είναι οι μαθητές/τριες:

- Να χρησιμοποιούν την παράγωγο συνάρτησης για την μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων

Τέλος, το συγκεκριμένο πρόβλημα μοντελοποίησης έχει εφαρμογή στο επίπεδο γνώσεων της Γ' Λυκείου, καθώς απαιτούνται ο προσδιορισμός συνάρτησης, η εύρεση ακροτάτων της (με χρήση θεωρήματος Fermat) και γνώσεις προηγούμενων τάξεων, όπως η εύρεση προσήμου τριωνύμου.

Β' βάρθμια: Γ' Λύκείου

3^η ταξινόμηση: Άνοιγμα του έργου

Το πρόβλημα μοντελοποίησης «Α α α ... Κρουαζιέρα θα σε πάω», είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα μοντελοποίησης, καθώς δεν έχει μία συγκεκριμένη ή μοναδική λύση. Το μοντέλο που θα αναπτύξει η κάθε ομάδα εξαρτάται από τους παράγοντες τους οποίους θα λάβει υπόψιν της, τις υποθέσεις που θα κάνει, καθώς και από τις μεταβλητές που θα ορίσει.

4^η ταξινόμηση: Ρεαλιστικότητα και Αυθεντικότητα του προβλήματος

Το πλαίσιο του προβλήματος είναι αυθεντικό για τους μαθητές/τριες, καθώς μέσω χρήσης της τεχνολογίας, θα αναζητήσουν στο διαδίκτυο το κόστος μιας κρουαζιέρας, καθώς και το αριθμό των απαιτούμενων συνοδών (βάσει νομοθεσίας), λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψιν τους το πλήθος ατόμων του δικού τους Λυκείου (ως ανώτατο όριο συμμετεχόντων). Τέλος, προσελκύει το ενδιαφέρον τους, καθώς αφορά μία εκδρομή που θα πραγματοποιήσουν οι ίδιοι.

5^η ταξινόμηση: Μαθηματική περιοχή

Το έργο ανήκει στην περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης, καθώς αρχικά αφορά τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης, την εύρεση ακροτάτων της κι έπειτα την διερεύνηση παραμετρικής ανίσωσης δευτέρου βαθμού.

«Α α α α ... κρουαζιέρα θα σε πάω»

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το πρόβλημα μοντελοποίησης προτείνεται να δοθεί στους μαθητές της Γ' Λυκείου, οι οποίοι είτε θα έχουν μαζί τους φορητό υπολογιστή (ή tablet), είτε θα έχουν συγκεντρωθεί στην αίθουσα πληροφορικής του σχολείου. Προτείνεται να δημιουργηθούν ομάδες των 4 ή 5 ατόμων, ώστε κάθε ομάδα να μπορεί να κάνει χρήση ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή και να μην ξεπερνούν τα 5 άτομα ανά ομάδα, ώστε κάθε μέλος της να είναι ενεργό. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τις ομάδες να συζητήσουν μεταξύ τους, για τον προσδιορισμό του προβλήματος καθώς και για τους παράγοντες που πρέπει να λάβουν υπόψιν τους.

Ενδεικτική προσέγγιση προβλήματος μοντελοποίησης

Διερευνούμε τη διαδικασία σκέψης μιας υποθετικής ομάδας μαθητών, ως την πούμε Ομάδα Α, κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος με το κρουαζιερόπλοιο. Σκοπός του παραδείγματος είναι να επισημάνουμε τη διαδικασία μοντελοποίησης. Έτσι παρακάτω παρουσιάζεται το έργο μιας ομάδας μαθητών της Γ' Λυκείου, οι οποίοι είναι όλοι αρκετά έμπειροι στη μοντελοποίηση.

Η Ομάδα Α πρέπει να μετατρέψει τη δεδομένη ερώτηση: «Πόσοι από εσάς πρέπει να δηλώσετε συμμετοχή ώστε να λάβετε την επιπλέον έκπτωση και τότε αυτή η επιπλέον έκπτωση παύει είναι συμφέρουσα για το ατομικό κόστος;» σε μια πιο σαφή ερώτηση που να μπορούν να απαντήσουν. Αυτή η ερώτηση μπορεί να ερμηνευθεί από τα μέλη της Ομάδας Α αρχικά ως εξής: «Ποιος είναι ο απαιτούμενος αριθμός συμμετεχόντων, ώστε η εταιρεία να έχει τα περισσότερα κέρδη, και κατά συνέπεια να ληφθεί η επιπλέον έκπτωση;». Στο σημείο αυτό, κάποιος μαθητής επισημαίνει ότι χρειάζονται και συνοδούς στην εκδρομή τους, επομένως πρέπει να διαχωρίσουν πόσοι είναι οι μαθητές που πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή. Στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν τότε παύει να είναι συμφέρουσα η επιπλέον έκπτωση. Επομένως, η Ομάδα Α το ερμηνεύει ως εξής: «Ποιο είναι το εύρος του αριθμού των συμμετεχόντων για ώστε το κόστος ανά άτομο, χωρίς την έκπτωση, είναι μικρότερο από το κόστος ανά άτομο με την έκπτωση;».

Κάποιες από τις υποθέσεις θα έρθουν εύκολα, το ίδιο και ο ορισμός των βασικών μεταβλητών του προβλήματος. Κάποιες άλλες υποθέσεις και μεταβλητές θα προκύψουν στο στάδιο της μαθηματικοποίησης, και θα επιστρέψουν να τις ορίσουν και αυτές. Το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι ήδη γνωστό προς τους μαθητές. Έτσι, με την απαραίτητη έρευνα στο διαδίκτυο, όπου χρειάστηκε, με διάφορες ιδέες που αντάλλαξαν με τις υπόλοιπες ομάδες, καθώς και με τη διερεύνηση διαφόρων στοιχείων του προβλήματος, η διαδικασία οικοδόμησης του τελικού μοντέλου ήρθε ανακαλυπτικά.

Από τις πρώτες μεταβλητές που αναγνωρίζουν, είναι ο άγνωστος αριθμός των συμμετεχόντων καθώς και το αντίτιμο που έχει ορίσει η εταιρεία στην περίπτωση συμμετοχής του ελάχιστου αριθμού ατόμων που απαιτούνται. Στο σημείο αυτό υποθέτουν ότι δεν υπάρχουν άλλοι επιβαίνοντες πέρα από τους μαθητές του σχολείου και τους συνοδούς, και έτσι, το κόστος της κρουαζιέρας καθορίζεται

αποκλειστικά από τη δική μας συμμετοχή. Για την εκκίνηση της διαδικασίας της μοντελοποίησης, η Ομάδα Α, ξεκινά με μια αναζήτηση στο διαδίκτυο για να ανακαλύψουν ποιο είναι το εύρος στο οποίο κυμαίνεται το κόστος μιας επταήμερης κρουαζιέρας στις Κυκλάδες, για τον μήνα Απρίλιο και έτσι καταλήγουν σε ποσά μεταξύ των 500 και 1500 ευρώ, ανά άτομο. Κάνουν την υπόθεση ότι, το αντίτιμο κατά άτομο, στην περίπτωση του ελάχιστου αριθμού συμμετεχόντων, ορίζεται μεταξύ 500 και 1500 ευρώ. Στη συνέχεια, αποφασίζουν να εργαστούν αρχικά με το μέσο όρο αυτών των ποσών, τα 1000 ευρώ, ως αντίτιμο στην περίπτωση του ελάχιστου αριθμού συμμετεχόντων, και γράφουν τα εξής:

- Έστω x , ο αριθμός των συμμετεχόντων στην κρουαζιέρα.
- Τα επιπλέον άτομα που θα συμμετάσχουν είναι: $x - 50$
- Το ποσό της έκπτωσης για κάθε επιπλέον άτομο είναι: $(x - 50) \cdot 5$ ευρώ
- Τότε κάθε άτομο θα πληρώσει:

$$1000 - (x - 50) \cdot 5 = 1000 - 5x + 250 = -5x + 1250 \text{ ευρώ}$$
- Επομένως, συνολικά οι x συμμετέχοντες θα πληρώσουν:

$$x \cdot (-5x + 1250) = -5x^2 + 1250x \text{ ευρώ.}$$
- Η συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό ποσό που θα πληρώσουν οι x συμμετέχοντες, επομένως και τα κέρδη της εταιρείας, είναι:

$$\Sigma(x) = x \cdot (-5x + 1250) = -5x^2 + 1250x$$

Στο σημείο αυτό, ένας μαθητής της ομάδας Α αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να προσδιορίσουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και λέει πως η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x , είναι το 50 (ελάχιστος αριθμός συμμετεχόντων για τη ναύλωση της κρουαζιέρας) και η μεγαλύτερη ο μέγιστος αριθμός χωρητικότητας επιβατών του κρουαζιερόπλοιου. Ένας άλλος μαθητής, συμφωνεί για την μικρότερη τιμή, όμως προτείνει η μεγαλύτερη τιμή του x να οριστεί ως ο αριθμός μαθητών του εκάστοτε Λυκείου. Έτσι, κάνουν την υπόθεση ότι το σχολείο έχει από 50 μαθητές και πάνω, στη Γ' Λυκείου, καθώς και ότι ο αριθμός των μαθητών που φοιτούν στην Γ' Λυκείου του σχολείου, είναι μικρότερος ή ίσος από την μέγιστη χωρητικότητα επιβατών του κρουαζιερόπλοιου. Στη συνέχεια, ορίζουν μια νέα μεταβλητή y , τον

αριθμό των μαθητών που φοιτούν στην Γ' Λυκείου του εκάστοτε σχολείου, και καταλήγουν να γράψουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Σ , $D_{\Sigma} = [50, \gamma]$.

Αποφασίζουν ότι πρέπει αρχικά να βρουν ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των συμμετεχόντων ώστε να λάβουν την επιπλέον έκπτωση. Έτσι, γράφουν,

- Θέλουμε να βρούμε για ποια τιμή του x , η εταιρεία θα έχει τα περισσότερα κέρδη. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε για ποια τιμή του x , η συνάρτηση Σ παρουσιάζει μέγιστο.

$$\Sigma'(x) = -10x + 1250$$

$$\Sigma'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x + 1250 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1250}{10} \Leftrightarrow x = 125$$

$$\Sigma'(x) > 0 \Leftrightarrow -10x + 1250 > 0 \Leftrightarrow x < 125$$

x	50	125	γ
$\Sigma'(x)$	/	+	-
Σ	/	□	□

Η συνάρτηση Σ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 125$, το

$$\Sigma(125) = -5 \cdot 125^2 + 1250 \cdot 125 = 78125$$

Δηλαδή, το ποσό που θα πληρώσουν οι x συμμετέχοντες, άρα και το κέρδος της εταιρείας, γίνεται μέγιστο όταν οι συμμετέχοντες είναι $x = 125$ και ανέρχεται στα 78125 ευρώ, συνολικά.

Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα πάρουμε την επιπλέον έκπτωση των 1000 ευρώ.

Έτσι, κάθε ένας από εμάς και τους συνοδούς μας, θα πληρώσουμε από:

$$\frac{78125 - 1000}{125} = \frac{77125}{125} = 617 \text{ ευρώ}$$

Ένα μέλος της ομάδας αναφέρει ότι στους 125 συμμετέχοντες, συμπεριλαμβάνονται και οι συνοδοί τους. Αρχικά, υποθέτουν ότι θα καταφέρουν να βρουν τον ελάχιστο αριθμό συνοδών που απαιτείται. Στη συνέχεια, η ομάδα συνειδητοποίησε ότι πρέπει να ελέγξει πόσους συνοδούς πρέπει να έχουν στην εκδρομή. Έτσι, με μια σύντομη αναζήτηση στο διαδίκτυο, βρίσκουν ότι, πρέπει να υπάρχει 1 συνοδός καθηγητής, ανά 30 μαθητές, και γράφουν:

- Από το υπουργείο παιδείας ορίζεται ότι πρέπει να υπάρχει 1 εκπαιδευτικός (συνοδός) ανά 30 μαθητές. Έτσι, $125 : 30 = 4,1\bar{6}$

Η ομάδα διερευνά, κάνοντας δοκιμές, πόσοι μαθητές πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, λαμβάνοντας υπόψιν τον απαραίτητο αριθμό συνοδών. Σκέφτονται ότι, αν δηλώσουμε συμμετοχή 121 μαθητές, θα χρειαζόμασταν 5 συνοδούς, βάσει νομοθεσίας. Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα είμαστε 126 και δεν μπορούμε να ελαττώσουμε τους συνοδούς. Έτσι, καταλήγουν στο συμπέρασμα:

- Άρα, στην περίπτωσή μας χρειαζόμαστε τουλάχιστον 5 συνοδούς, οπότε πρέπει να δηλώσουμε συμμετοχή 120 μαθητές.

Η ομάδα θέλει, επιπλέον, να εξετάσει για ποιες τιμές του x , η επιπλέον έκπτωση παύει να συμφέρει στο κόστος της κρουαζιέρας ανά άτομο. Έτσι, γράφει:

- Θέλουμε να εξετάσουμε για ποιες τιμές του x , η επιπλέον έκπτωση παύει να συμφέρει στο κόστος της κρουαζιέρας ανά άτομο. Δηλαδή, για ποιες τιμές του x , ισχύει:

$$x = 125 \quad \text{ή} \quad 617 > M(x) \Leftrightarrow 617 > -5x + 1250 \Leftrightarrow 5x > 633 \Leftrightarrow x > 126,6$$

Έτσι, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι:

Συμμετέ- χοντες	Μαθητές	120	120	121	122	123
	Συνοδοί	4	5	5	5	5
	Συνολικά	124	125	126	127	128
Χαρακτηρισμός		Συμφέρει η επιπλέον έκπτωση	Επιπλέον έκπτωση	Συμφέρει η επιπλέον έκπτωση	Παύει να συμφέρει η επιπλέον έκπτωση	Παύει να συμφέρει η επιπλέον έκπτωση

«Η επιπλέον έκπτωση συμφέρει μόνο όταν, οι συμμετέχοντες, συνολικά μαθητές και συνοδοί, είναι έως και 126, εκτός της περίπτωσης των 125

συμμετεχόντων, και παύει να είναι συμφέρουσα όταν είναι από 127 και πάνω.»

Όταν πάνε πίσω και διαβάζουν ξανά το πρόβλημα, αντιλαμβάνονται ότι απάντησαν στην ερώτηση για μια πολύ συγκεκριμένη περίπτωση. Χρησιμοποίησαν, δηλαδή, συγκεκριμένη τιμή για το αντίτιμο που ορίζει η εταιρεία, στην περίπτωση του απαιτούμενου αριθμού συμμετεχόντων. Ωστόσο, η δουλειά που έχουν κάνει έως τώρα δεν πάει χαμένη, χρειάζεται μόνο να ορίσουν νέα μεταβλητή α , ως το αντίτιμο που ορίζει η εταιρεία στην περίπτωση του ελάχιστου αριθμού ατόμων, και να γενικεύσουν το έργο που έχουν κάνει.

Επίσης, ένα μέλος της Ομάδας Α αντιλαμβάνεται ότι το 125 (η τιμή του x στην οποία αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης Σ) επηρεάζεται από την επιλογή των 1000 ευρώ που πήραν ενδεικτικά, στο οποίο συμφωνεί κάθε μέλος της ομάδας. Οπότε, στην διαδικασία της γενίκευσης του έργου τους, θα διερευνήσουν για ποιες τιμές του α , η τιμή του x στην οποία αλλάζει η μονοτονία της Σ (δηλαδή το 125) είναι μεγαλύτερο του 50.

Στο τέλος της συζήτησής τους, η Ομάδα Α συνοψίζει τη δουλειά της όπως φαίνεται παρακάτω:

Προσδιορισμός του προβλήματος

- Προσδιορίστε τον αριθμό των συμμετεχόντων, ώστε η εταιρεία να έχει τα μέγιστα κέρδη;
- Προσδιορίστε από το σύνολο των συμμετεχόντων, πόσοι μπορεί να είναι οι μαθητές και πόσοι συνοδοί χρειάζονται;
- Προσδιορίστε το εύρος του αριθμού των συμμετεχόντων, για το οποίο παύει να μας συμφέρει η επιπλέον έκπτωση.

Υποθέσεις

- Θα βρούμε τον απαραίτητο αριθμό εκπαιδευτικών, να μας συνοδεύσουν.
- Δεν υπάρχουν άλλοι επιβαίνοντες πέρα από τους μαθητές του σχολείου μας και τους συνοδούς μας. Έτσι, το κόστος της κρουαζιέρας καθορίζεται αποκλειστικά από τη δική μας συμμετοχή.

- Στο σχολείο μας, φοιτούν στην Γ' Λυκείου από 50 άτομα και πάνω.
- Ο αριθμός των μαθητών που φοιτούν στην Γ' Λυκείου του σχολείου μας, είναι μικρότερος ή ίσος από την μέγιστη χωρητικότητα επιβατών του κρουαζιερόπλοιου.
- Το αντίτιμο κατά άτομο, στην περίπτωση του ελάχιστου αριθμού συμμετεχόντων, ορίζεται πάνω από 250 ευρώ.

Ορισμός μεταβλητών

- Έστω x ο αριθμός των ατόμων που θα συμμετάσχουν (μαζί με τους συνοδούς)
- α , το ελάχιστο αντίτιμο που ορίζει η εταιρεία, με $\alpha \geq 250$
- γ , ο αριθμός των μαθητών που φοιτούν στην Γ' Λυκείου του σχολείου μου
- δ , ο μέγιστος αριθμός επιβατών του κρουαζιερόπλοιου
- μ , ο αριθμός των μαθητών που θα συμμετάσχουν
- σ , ο αριθμός των συνοδών που απαιτούνται

Εκτέλεση Μαθηματικών

Πρέπει $50 \leq x \leq \gamma$, ώστε να πραγματοποιηθεί η κρουαζιέρα.

Τα επιπλέον άτομα που θα συμμετάσχουν είναι: $x - 50$

Το ποσό της έκπτωσης για κάθε επιπλέον άτομο είναι: $(x - 50) \cdot 5$ ευρώ

Τότε κάθε άτομο θα πληρώσει: $\alpha - (x - 50) \cdot 5 = \alpha - 5x + 250 = -5x + \alpha + 250$ ευρώ

Έστω, $A(x) = -5x + \alpha + 250$, $\alpha \geq 250$, η συνάρτηση που εκφράζει το ατομικό κόστος συναρτήσει του x .

Επομένως, συνολικά οι x συμμετέχοντες θα πληρώσουν:

$$\Sigma(x) = x \cdot (-5x + \alpha + 250) = -5x^2 + (\alpha + 250)x, \quad D_\Sigma = [50, \gamma]$$

Θέλουμε να βρούμε για ποια τιμή του x , η εταιρεία θα έχει τα περισσότερα κέρδη.

Δηλαδή θέλουμε να βρούμε για ποια τιμή του x , η συνάρτηση Σ παρουσιάζει μέγιστο.

$$\Sigma'(x) = -10x + \alpha + 250$$

$$\Sigma'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x + \alpha + 250 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + 250}{10}$$

$$\Sigma'(x) > 0 \Leftrightarrow -10x + \alpha + 250 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\alpha + 250}{10}$$

Επειδή, $\alpha \geq 250 \Leftrightarrow \alpha + 250 \geq 500 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 250}{10} \geq 50$, άρα:

x	50	$\frac{\alpha + 250}{10}$	y
$\Sigma'(x)$	+	-	
Σ	□	□	

Η συνάρτηση Σ παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{\alpha + 250}{10}$, το

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{\alpha + 250}{10}\right) &= -5\left(\frac{\alpha + 250}{10}\right)^2 + (\alpha + 250) \cdot \left(\frac{\alpha + 250}{10}\right) = -\cancel{5} \cdot \frac{(\alpha + 250)^2}{\cancel{100}} + \frac{(\alpha + 250)^2}{10} \\ &= -\frac{(\alpha + 250)^2}{20} + \frac{2(\alpha + 250)^2}{20} = \frac{(\alpha + 250)^2}{20} \end{aligned}$$

Δηλαδή, το ποσό που θα πληρώσουν οι x συμμετέχοντες, άρα και το κέρδος της

εταιρείας, γίνεται μέγιστο όταν $x = \frac{\alpha + 250}{10}$ και ανέρχεται στα $\frac{(\alpha + 250)^2}{20}$ ευρώ.

- ✓ Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα πάρουμε την επιπλέον έκπτωση των 1000 ευρώ.

Έτσι, κάθε ένας από εμάς και τους συνοδούς μας, θα πληρώσουμε από:

$$A_E(\alpha) = A\left(\frac{\alpha + 250}{10}\right) - \frac{1000}{\frac{\alpha + 250}{10}} = A\left(\frac{\alpha + 250}{10}\right) - \frac{10000}{\alpha + 250} \text{ ευρώ,}$$

όπου A_E η συνάρτηση που εκφράζει το ατομικό κόστος με τη λήψη της επιπλέον έκπτωσης, συναρτήσει του α , $\alpha \geq 250$.

- ✓ Θέλουμε, επιπλέον, να εξετάσουμε για ποιες τιμές του x, η επιπλέον έκπτωση παύει να συμφέρει στο κόστος της κρουαζιέρας ανά άτομο. Δηλαδή, για ποιες τιμές του x, ισχύει:

- $x = \frac{\alpha + 250}{10}$ ή

- $A_E(\alpha) > A(x) \Leftrightarrow A\left(\frac{\alpha + 250}{10}\right) - \frac{10000}{\alpha + 250} > -5x + \alpha + 250$

$$\Leftrightarrow -\cancel{5} \cdot \frac{\alpha+250}{\cancel{10}} + \alpha + \cancel{250} - \frac{10000}{\alpha+250} > -\cancel{5x} + \alpha + \cancel{250} \Leftrightarrow 5x > \frac{\alpha+250}{2} + \frac{10000}{\alpha+250}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{(\alpha+250)^2 + 20000}{10(\alpha+250)}, \alpha \geq 250$$

✓ Από το υπουργείο παιδείας ορίζεται ότι πρέπει να υπάρχει 1 εκπαιδευτικός (συνοδός) ανά 30 μαθητές. Στην περίπτωση μας χρειαζόμαστε τουλάχιστον:

$$\frac{\alpha+250}{10} : 30 = \frac{\alpha+250}{300} \text{ συνοδούς}$$

Άρα, χρειαζόμαστε $\sigma(\alpha)$ συνοδούς, όπου $\sigma(\alpha)$ ο αμέσως μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, στην περίπτωση που $\frac{\alpha+250}{300} \notin \mathbb{N}$.

Άρα, θα πρέπει να δηλώσουμε συμμετοχή:

$$\mu(\alpha) = \frac{\alpha+250}{10} - \sigma(\alpha) \text{ μαθητές}$$

Τελικά,

$$x > \frac{(\alpha+250)^2 + 20000}{10(\alpha+250)} \Leftrightarrow \mu(\alpha) + \sigma(\alpha) > \frac{(\alpha+250)^2 + 20000}{10(\alpha+250)}$$

$$\Leftrightarrow \mu(\alpha) > \frac{(\alpha+250)^2 + 20000}{10(\alpha+250)} - \sigma(\alpha), \text{ όπου } \alpha \geq 250$$

Μοντέλο της Ομάδας Α

Αν $\alpha \geq 250$ τότε:

- Η επιπλέον προσφορά θα ληφθεί αν οι συμμετέχοντες είναι $x = \frac{\alpha+250}{10}$ και το συνολικό ποσό των συμμετεχόντων ανέρχεται στα $\Sigma_{-}E(\alpha) = \Sigma \left(\frac{\alpha+250}{10} \right) - \frac{10000}{\alpha+250}$ ευρώ.
- Για τη λήψη της επιπλέον προσφοράς, από τους x συμμετέχοντες, πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή $\mu(\alpha) = \frac{\alpha+250}{10} - \sigma(\alpha)$ μαθητές, όπου $\sigma(\alpha)$ ο

απαιτούμενος αριθμός συνοδών, με $\sigma(\alpha)$ ο αμέσως μεγαλύτερος φυσικός

αριθμός του $\frac{\alpha + 250}{300}$, στην περίπτωση που $\frac{\alpha + 250}{300} \notin \mathbb{N}$

- Η επιπλέον προσφορά παύει να είναι συμφέρουσα όταν θα δηλώσουν

συμμετοχή: $\mu(\alpha) > \frac{(\alpha + 250)^2 + 20000}{10(\alpha + 250)} - \sigma(\alpha)$ μαθητές, όπου $\alpha \geq 250$.

Ανάλυση και αξιολόγηση της λύσης

Διαμορφωτική αξιολόγηση

Ο ρόλος της διαμορφωτικής αξιολόγησης είναι να δίνει στον εκπαιδευτικό πληροφορίες αναφορικά με την πρόοδο των μαθητών/τριών, με σκοπό την βελτίωσή τους. Λίγο μετά την έναρξη της δραστηριότητας μοντελοποίησης, κάποιοι μαθητές, κυρίως νέοι στην διαδικασία μοντελοποίησης, πιθανόν να θεωρούν ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν λύνεται, καθώς δεν δίνεται η πληροφορία για το αρχικό αντίτιμο που ορίζει η εταιρεία. Μια τέτοια κατάσταση, μπορεί να προσεγγιστεί με ερωτήσεις προς το σύνολο της τάξης, όπως:

- «Περιγράψτε το πρόβλημα που σας δόθηκε. Ποιες πληροφορίες χρειάζεστε για την επίλυση αυτού του προβλήματος;»
- «Κατά την έρευνα, βρήκατε περισσότερες από μία τιμές για έναν παράγοντα; Πώς θα καθορίσετε ποιες τιμές θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο σας;»

Θα προταθούν ιδέες από όλες τις ομάδες και θα συζητηθούν. Έτσι, κάποιες ομάδες θα βοηθηθούν με νέες ιδέες, είτε για παραμέτρους που πρέπει να λάβουν υπόψιν, είτε για τη λήψη υποθέσεων, ενώ άλλες, που πιθανόν να βρισκόταν στο «μηδέν», θα πάρουν ιδέες για να ξεκινήσουν.

Στο επόμενο στάδιο μοντελοποίησης, όπου η κάθε ομάδα θα εκτελεί μαθηματικά για να αναπτύξει μια λύση, κάποιες ομάδες πιθανόν να δυσκολευτούν να σκεφτούν εξ αρχής να ορίσουν συνάρτηση για το συνολικό κόστος, για την οποία αναζητούν μέγιστη τιμή. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενεργοποιήσει τους μαθητές με μία ερώτηση, όπως:

- «Ποιες μαθηματικές τεχνικές έχετε χρησιμοποιήσει για την ανάλυση των δεδομένων σας μέχρι στιγμής;»

Εφόσον η κάθε ομάδα θα έχει αναπτύξει ένα μοντέλο, μπορούν να γίνουν ερωτήσεις από τον εκπαιδευτικό, όπως:

- «Πώς λειτουργεί το μοντέλο σας; Τι είδους τιμές μπορούν να εισαχθούν σε αυτό;»
- «Πώς απαντά το μοντέλο στην ερώτηση που σας ζητήθηκε;»
- «Πώς σχεδιάζετε να κοινοποιήσετε τα αποτελέσματά σας; Πιστεύετε ότι ένα αρχείο Excel μπορεί να βοηθήσει τους ανθρώπους να κατανοήσουν τις πληροφορίες και τα αποτελέσματά σας;»
- «Πότε λειτουργεί το μοντέλο σας; Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες πρέπει να είστε προσεκτικοί επειδή δεν λειτουργεί;»

Σε αυτό το σημείο, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενθαρρύνει τις ομάδες να κατασκευάσουν ένα αρχείο Excel, ίσως με τη δική του βοήθεια όπου χρειάζεται, ώστε να εφαρμόσουν το μοντέλο τους και να κάνουν διορθώσεις, όπου είναι απαραίτητο. Οι πίνακες που θα κατασκευαστούν, μπορούν παράλληλα να χρησιμοποιηθούν ακόμη και για την παρουσίαση του μοντέλου που έχουν αναπτύξει.

Συγκριτική αξιολόγηση

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μοντελοποίησης, οι ομάδες κρατούν σημειώσεις, τις οποίες μπορεί ο εκπαιδευτικός να συλλέξει στο τέλος ώστε να αξιολογήσει

- εάν οι μαθητές έχουν κατανοήσει το πρόβλημα,
- εάν διερεύνησαν όλες τις περιπτώσεις και έλαβαν υπόψιν όλες τις απαραίτητες παραμέτρους,
- εάν χρησιμοποίησαν ορθά μαθηματικές διεργασίες, καθώς και
- αν το μοντέλο που έχουν αναπτύξει έχει νόημα και απαντά στην ερώτηση του προβλήματος.

Επαναλάβετε

Στο στάδιο της επανάληψης, οι μαθητές πιθανόν να αντιλαμβάνονται ότι δεν έχουν λάβει υπόψιν κάποιες παραμέτρους. Έτσι, μπορούν να επιστρέφουν και να διορθώνουν το μοντέλο, όπου κρίνεται απαραίτητο. Επίσης, σε κάθε επανάληψη θα

ελέγχουν εάν το μοντέλο που έχουν αναπτύξει, απαντά στις ερωτήσεις του προβλήματος, καθώς και εάν αυτή η απάντηση έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο.

Εφαρμόστε το μοντέλο

	A	B	C	D	E	F
1	Αριθμός μαθητών Γ' Λυκείου στο σχολείο μου γ	Αντίτιμο για τον ελάχιστο αριθμό συμμετεχόντων α	μέγιστο κέρδος εταιρείας	πλήθος συμμετεχόντων για λήψη προσφοράς	χρειάζονται σ συνοδοί - Ακέραιο	πρέπει να συμμετάσχουν μαθητές - Ακέραιο
2	120	1000	78125	125	5	120
3		990	76880	124	5	119
4		980	75645	123	5	118
5		970	74420	122	5	117
6		960	73205	121	5	116
7		950	72000	120	4	116
8		940	70805	119	4	115
9		930	69620	118	4	114
10		920	68445	117	4	113
11		910	67280	116	4	112
12		900	66125	115	4	111
13		890	64980	114	4	110
14		880	63845	113	4	109
15		870	62720	112	4	108
16		860	61605	111	4	107
17		850	60500	110	4	106
18		840	59405	109	4	105
19		830	58320	108	4	104
20		820	57245	107	4	103
21		810	56180	106	4	102
22		800	55125	105	4	101
23		790	54080	104	4	100
24		780	53045	103	4	99
25		770	52020	102	4	98
26		760	51005	101	4	97
27		750	50000	100	4	96
28		740	49005	99	4	95
29		730	48020	98	4	94
30		720	47045	97	4	93
31		1010	79380	126	5	121
32		1020	80645	127	5	122
33		1030	81920	128	5	123

Σταθμάκια: < > Για τις διάφορες τιμές του α Για συγκεκριμένο α >= 500 +

Εικόνα 6. Αρχείο Excel «Για τις διάφορες τιμές του α»

Όπως προαναφέρθηκε, οι μαθητές μπορούν, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, να δημιουργήσουν ένα αρχείο Excel στο οποίο:

- αρχικά θα δίνουν διάφορες τιμές στην παράμετρο α (το αντίτιμο που όρισε αρχικά η εταιρεία) ώστε να ελέγχουν εάν λειτουργεί το μοντέλο που έχουν αναπτύξει ([Εικόνα 6](#))
- και στη συνέχεια, για κάθε α που επιλέγουν να βλέπουν εάν το μοντέλο τους απαντά στην ερώτηση «πότε παύει να είναι συμφέρουσα η επιπλέον έκπτωση;» ([Εικόνα 7](#)).

	A	B	C	D	E	F	G
	α	Πλήθος συμμετεχόντων	Μέγιστο κέρδος εταιρείας	Συνολικό κόστος - Χωρίς την επιπλέον έκπτωση	Συνολικό κόστος - Με την επιπλέον έκπτωση	Κόστος/άτομο	
1							
2	1000	50	78125	50000	50000	1000	
3		51	78125	50745	50745	995	
4	Μέγιστο κέρδος εταιρείας	52	78125	51480	51480	990	
5	78125	53	78125	52205	52205	985	
6		54	78125	52920	52920	980	
7	Αριθμός συμμετεχόντων για λήψη προσφοράς	55	78125	53625	53625	975	
8	125	56	78125	54320	54320	970	
9		57	78125	55005	55005	965	
10	Κόστος/άτομο με την επιπλέον έκπτωση	58	78125	55680	55680	960	
11	617	59	78125	56345	56345	955	
12		60	78125	57000	57000	950	
13	Συνολικό κόστος (με την επιπλέον έκπτωση)	61	78125	57645	57645	945	
14	77125	62	78125	58280	58280	940	
15		63	78125	58905	58905	935	
16		64	78125	59520	59520	930	
17		65	78125	60125	60125	925	
18		66	78125	60720	60720	920	
19		67	78125	61305	61305	915	
20		68	78125	61880	61880	910	
21		69	78125	62445	62445	905	
22		70	78125	63000	63000	900	
23		71	78125	63545	63545	895	
24		72	78125	64080	64080	890	
25		73	78125	64605	64605	885	
26		74	78125	65120	65120	880	
27		75	78125	65625	65625	875	
28		76	78125	66120	66120	870	
29		77	78125	66605	66605	865	
30		78	78125	67080	67080	860	
31		79	78125	67545	67545	855	
32		80	78125	68000	68000	850	
33		81	78125	68445	68445	845	

Εικόνα 7. Αρχείο Excel «Για συγκεκριμένο $\alpha \geq 500$ »

Πιο συγκεκριμένα, στο φύλλο εργασίας «Για τις διάφορες τιμές του α » ([Εικόνα 6](#)), στο κελί A2 οι μαθητές επιλέγουν τιμή για τη μεταβλητή γ (αριθμός μαθητών της Γ' Λυκείου συγκεκριμένου σχολείου) και συμπληρώνουν στη στήλη B διάφορες τιμές για την μεταβλητή α (αντίτιμο για τον ελάχιστο αριθμό συμμετεχόντων).

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο, έχει οριστεί από τους μαθητές, η στήλη C να υπολογίζει σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης, καθώς και η στήλη D τον απαιτούμενο αριθμό συμμετεχόντων για τη λήψη της προσφοράς. Ακόμα, οι στήλες E και F, έχουν οριστεί να υπολογίζουν τον απαιτούμενο αριθμό συνοδών και τον απαιτούμενο αριθμό μαθητών που πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, αντίστοιχα, επιλέγοντας η E να στρογγυλοποιείται προς τα πάνω και η F προς τα κάτω. Τέλος, στις στήλες D, E και F έχουν συμπεριληφθεί οι υποθέσεις που έχουν θέσει αρχικά, καθώς και οι περιορισμοί της συνάρτησης (κόκκινα κελιά), χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
60		108	78125	76680	76680	710	
61		109	78125	76845	76845	705	
62		110	78125	77000	77000	700	
63		111	78125	77145	77145	695	
64		112	78125	77280	77280	690	
65		113	78125	77405	77405	685	
66		114	78125	77520	77520	680	
67		115	78125	77625	77625	675	
68		116	78125	77720	77720	670	
69		117	78125	77805	77805	665	
70		118	78125	77880	77880	660	
71		119	78125	77945	77945	655	
72		120	78125	78000	78000	650	
73		121	78125	78045	78045	645	
74		122	78125	78080	78080	640	
75		123	78125	78105	78105	635	
76		124	78125	78120	78120	630	
77		125	78125	78125	77125	617	
78		126	78125	78120	78120	620	
79		127	78125	78105	78105	615	
80		128	78125	78080	78080	610	
81		129	78125	78045	78045	605	
82		130	78125	78000	78000	600	
83		131	78125	77945	77945	595	
84		132	78125	77880	77880	590	
85		133	78125	77805	77805	585	
86		134	78125	77720	77720	580	
87		135	78125	77625	77625	575	
88		136	78125	77520	77520	570	
89		137	78125	77405	77405	565	
90		138	78125	77280	77280	560	
91		139	78125	77145	77145	555	
92		140	78125	77000	77000	550	
93		141	78125	76845	76845	545	
94		142	78125	76680	76680	540	
95		143	78125	76505	76505	535	
96		144	78125	76320	76320	530	
97		145	78125	76125	76125	525	
98		146	78125	75920	75920	520	
99		147	78125	75705	75705	515	

Εικόνα 8. Αρχείο Excel «Για συγκεκριμένο $\alpha \geq 500$ », τελική απάντηση μοντέλου.

Στο φύλλο εργασίας «Για συγκεκριμένο $\alpha \geq 500$ » ([Εικόνα 7](#)), οι μαθητές επιλέγουν συγκεκριμένη τιμή για την μεταβλητή α και έτσι υπολογίζονται, με χρήση του μοντέλου, το μέγιστο κέρδος της εταιρείας (κελί A5), ο αριθμός συμμετεχόντων για τη λήψη της επιπλέον προσφοράς (κελί A8), το κόστος ανά άτομο με την επιπλέον έκπτωση (κελί A11), καθώς και το συνολικό κόστος της κρουαζιέρας με την επιπλέον έκπτωση (κελί A14). Δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή x (πλήθος συμμετεχόντων) στην στήλη B, καταλήγει να εμφανίζεται, με χρήση του μοντέλου το κόστος ανά άτομο, στην στήλη F. Τέλος, με χρήση των εργαλείων του Excel, έχουν τεθεί οι εξής προϋποθέσεις:

- εάν η τιμή του αντίστοιχου κελιού της στήλης F, είναι μεγαλύτερη της τιμής του κελιού A11, να εμφανίζεται με κόκκινο ([Εικόνα 7](#)), και
- εάν η τιμή του αντίστοιχου κελιού της στήλης F, είναι μικρότερη ή ίση της τιμής του κελιού A11, να εμφανίζεται με πράσινο ([Εικόνα 8](#)).

Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές αντιλαμβάνονται για ποιες τιμές του x (πλήθος συμμετεχόντων, μαθητές και συνοδοί), η λήψη της επιπλέον προσφοράς παύει να είναι συμφέρουσα για το ατομικό κόστος.