Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος

εαρ. 2020

Μαριάννα Τζεκάκη

Εισαγωγή

Ερωτήματα

- Τι είναι πρόβλημα και τι επίλυση προβλήματος;
- Γιατί η επίλυση προβλήματος έχει κεντρική θέση στη μαθηματική εκπαίδευση;
- Πώς κατασκευάζονται τα προβλήματα, τι χαρακτηριστικά έχουν και πώς λειτουργούν;
- Τι ικανότητες σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος;
- Πώς εντάσσεται στη διδασκαλία η επίλυση προβλήματος;
- Αλλάζει η κοινωνική αλληλεπίδραση σε περιβάλλον επίλυσης προβλήματος;
- Ποιός είναι ο ρόλος των συναισθηματικών παραγόντων.
- Πως εφαρμόζεται η επίλυση προβλήματος στη σύγχρονη τάξη;

Τι είναι πρόβλημα και τι μαθηματικό πρόβλημα;

- Ένα έργο που ο μαθητής πραγματοποιεί σε διαφορετικά στάδια;
- Μια κατάσταση, μια δυσκολία να αντιμετωπισθεί – μια ερώτηση να απαντηθεί – ένα εμπόδιο να ξεπερασθεί;
- Η άγνωστη αιτία για διάφορα περιστατικά;
- Η εμφάνιση πολλαπλών γεγονότων που παρουσιάζουν κοινές ενδείξεις;
- Ακόμα γεγονότα που είναι ενδεικτικά λάθους ή εμποδίου;

Τι είναι πρόβλημα και τι μαθηματικό πρόβλημα;

- *Πρόβλημα είναι ένα θέμα ή μια άλυτη κατάσταση που εμποδίζει την επίτευξη στόχου ή σκοπού.*

- Με τη γενικότερη έννοια, ένα πρόβλημα υπάρχει όταν το άτομο αντιλαμβάνεται σημαντική διαφορά ανάμεσα σε αυτό που συμβαίνει κι αυτό που επιθυμεί/ επιδιώκει.

- *Πρόβλημα* επίσης μπορεί να ονομαστεί κάθε κατάσταση για την οποία το άτομο *δεν γνωρίζει άμεσο τρόπο* αντιμετώπισης, δηλαδή *δεν γνωρίζει ποια πορεία είναι απαραίτητο να ακολουθήσει για να οδηγηθεί στη λύση του.*

Τι είναι πρόβλημα και τι μαθηματικό πρόβλημα;

- Η αναζήτηση μιας λύσης οδηγεί το άτομο στην κινητοποίηση των γνώσεων που έχει.
- Αν οι γνώσεις αυτές δεν είναι αρκετές τότε οδηγείται στη διεύρυνση, τον επαναπροσδιορισμό ή την αναδόμηση των προηγουμένων γνώσεων (ή ακόμα και στην ανάπτυξη μιας νέας γνώσης, Brousseau, 1997).
- Για πολλούς ερευνητές η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι *η επιλογή των κατάλληλων προβλημάτων που έχουν ενδιαφέρον για τα παιδιά και τα κινητοποιούν για τη λύση τους* (Sierpinska, 1994)

Τι είναι πρόβλημα και τι μαθηματικό πρόβλημα;

- *Μαθηματικό πρόβλημα* είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να αναλυθεί και πιθανά να αντιμετωπιστεί ή λυθεί με *μαθηματικές μεθόδους*.

- *Κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων* είναι:

  - τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου

  - τα αφηρημένα μαθηματικά προβλήματα (πχ. προβλήματα του Hilbert)

  - τα προβλήματα που προκύπτουν από τη φύση των μαθηματικών (πχ. παράδοξο του Russell)

  - ....

Λεκτικά προβλήματα (word problems);

- Υπάρχει μια σημαντική διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα (πραγματικά ή μαθηματικά) και τα λεκτικά προβλήματα:
  - Ένα λεκτικό πρόβλημα δεν περιλαμβάνει πραγματική ερώτηση ή δεν έχει σημασία στον πραγματικό κόσμο ή δεν έχει αυθεντικό περιεχόμενο
  - Λειτουργεί μόνο στο πλαίσιο της τάξης

Βλ. σχετικά

Verschaffel, Lieven, Stanislaw Schukajlow, Jon Star, and Wim Van Dooren. "Word problems in mathematics education: a survey." *ZDM* (2020): 1-16.

ΕΜΠ - άξονες

1. Τι είναι ΕΜΠ;
2. Ρόλος της ΕΜΠ;
3. Στάδια, ευρετικές ΕΜΠ;
4. Ικανότητες επίλυσης προβλήματος;
5. Κατασκευή προβλήματος, είδη, ικανότητες ΚΠ;
6. Λεκτικές και άλλες αναπαραστάσεις στην ΕΜΠ;
7. Διδασκαλία και μάθηση ΕΜΠ;

Ορισμοί

Ορισμός «επίλυση προβλήματος»;

- Ο ορισμός της έννοιας «επίλυση προβλήματος» είναι δυσδιάκριτος (Mamona-Downs & Downs, 2005), για άλλους ξεπερασμένος (Lesh & Harel, 2003; Lesh, Hamilton, & Kaput, 2006) και για κάποιους δύσκολο να δοθεί (Grugnetti and Jaquuet, 2005).
- Η *επίλυση προβλήματος* αρχίζει την εμφάνιση της τη δεκαετία του 80 στα προγράμματα.
- Την εποχή περίπου αυτή αξιοποιείται το έργο του Polya, Ούγγρου Μαθηματικού που τελικά δούλεψε στο Πανεπιστήμιο του Stanford, *How to solve it* (1945) και *Mathematical Discovery.*

Τι είναι επίλυση προβλήματος;

Η επίλυση προβλήματος
– έχει διαφορετικές σημασίες για διαφορετικές προσεγγίσεις
– μπορεί να αναπτυχθεί σε διαφορετικούς χώρους και
– αναδεικνύει πολλά χαρακτηριστικά.

Επίσης
– προϋποθέτει και αναδεικνύει πολλές δεξιότητες,
– συνδέεται με τεχνικές και
– απαιτεί μεταγνωστικές και αυτορυθμιστικές διαδικασίες.

Ικανότητες επίλυση προβλήματος

- Η ανάπτυξη της *ικανότητας επίλυσης προβλήματος* είναι ένας από τους σημαντικότερους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.
- Στηρίζει την ανάπτυξη *άλλων μαθηματικών ικανοτήτων* όπως αντίληψη πληροφοριών και δεδομένων, η υπολογιστική ικανότητα, η συνδυαστική και συλλογιστική ικανότητα.
- Η κατάλληλη επιλογή *προβλημάτων* με νόημα για τους μαθητές κι η αντιμετώπισή τους από τους ίδιους αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Ικανότητες επίλυση προβλήματος

- Ως *ικανότητα:*

  - γίνεται μία από τις ικανότητες να αναπτυχθεί (με υψηλή ιεραρχία)

  - και γίνεται η διάκριση προβλημάτων υψηλού και κοινού επιπέδου (και συχνά διδάσκονται τεχνικές)

- Ως η *ουσία της μαθηματικής δραστηριότητας*, αν όχι των ίδιων των μαθηματικών

Ικανός λύτης

Ακολουθεί τα τέσσερα στάδια επίλυσης.

1ο **Κατανόηση του προβλήματος**: εντοπίζει τα χρήσιμα δεδομένα, διαχωρίζει τα περιττά, συνθέτει μαθηματικές σχέσεις, αναπτύσσει στρατηγική κατανόηση ή αναπαριστά.

2ο **Σχέδιο λύσης**: δημιουργεί συνδέσεις με άλλα προβλήματα και παρουσιάζει ευελιξία στο σχεδιασμό.

3ο **Λύση:** αναζητά την ποιοτικότερη λύση, παρουσιάζει ευελιξία και ευχέρεια.

4ο **Επιβεβαίωση:** παρουσιάζει ευελιξία και προσπαθεί να σκεφτεί μια καλύτερη λύση.

Σε όλη τη διάρκεια της επίλυσης ***υποστηρίζει μεταγνωστικά*** όλη τη διαδικασία και τεκμηριώνει χωρίς περιττά λόγια ό,τι κάνει.

Οι διακριθέντες

- Ποιοτικά, τα περισσότερα παιδιά με διακρίσεις εμφανίζουν τη βάση των χαρακτηριστικών που σηματοδοτούν την ικανότητα στην επίλυση προβλήματος.
- Ωστόσο, δεν λειτουργούν σαν ικανοί λύτες, όταν προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα εκτός ρουτίνας.
- Η επίδοση και η επιτυχία δεν συνιστούν απαραίτητα μαθηματική ικανότητα.
- Οι μαθητές με καλές επιδόσεις χρειάζονται βοήθεια για να γίνουν ικανοί λύτες (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, 2004).

βλ. σχετικά

Καϊμάκη, Σ., & Τζεκάκη, Μ. (2017). Στρατηγικές κατανόησης προβλήματος σε μαθητές με διακρίσεις στα Μαθηματικά. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ), *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ (σ. 826- 836)*. Αθήνα. ΕΝΕΔΙΜ.)

Ρόλος της επίλυση προβλήματος

Οι Schoenfeld, 1992 και Stanic and Kilpatrick, 1989 αναφέρουν τους ακόλουθους ρόλους του προβλήματος στη Μ.Ε.:

- Στο *περιεχόμενο*

  - δικαιολογούν την αξία των μαθηματικών
  - δίνουν κίνητρα για εισαγωγή σε θέματα
  - δίνουν κίνητρο ευχαρίστησης
  - αναπτύσσουν νέες δεξιότητες
  - εξασκούν και στηρίζουν ευρύτερες εφαρμογές

Ρόλος της επίλυση προβλήματος

Παραδειγματική χρήση στην ψυχολογική προσέγγιση:
Μοντέλο Falloon για οικογενειακά προβλήματα

1. Καθορίστε ακριβώς το προβλημα / στοχο
2. Βρείτε τις πιθανές λύσεις
3. Διερευνήστε όλες τις πιθανές λύσεις & τις πιθανές συνεπειές τους. Συμφωνηστε στην " καλύτερη" λύση
4. Σχεδιαστε & εφαρμόστε αυτο που σχεδιασατε
5. Συζητηστε τα αποτελέσματα

Ρόλος της επίλυση προβλήματος

Πόσα μπαράκια σε πόλη 100.000 κατοίκων?

1.Τι ξέρω? Κατοίκους – κάνω υποθέσεις

2.Σχέδιο λύσης (business plan):

Οι κάτοικοι πίνουν 1 μπύρα κι 1 καφέ τη βδομάδα. Επί 52 βδομάδες 104 μπύρες και καφέδες με κέρδος 2 ευρώ = 208€ . Πόσοι πίνουν, το ¼?

Άρα 208.25000 = 5.200.000€ - 24% ΦΠΑ (1248000) = **3.952.000**

3. Επιλύω – υπολογίζω (νοίκι και πάγια, μισθοί, ταμεία, κλπ)

Κάθε μαγαζί νοίκι 1000X12 = 12000

Μισθοί 1600X12 = 19200

Ταμεία/φόροι 1500X12 = 18000

Λογαρ. 500X12 = 6000

Συνολο 55200 και κέρδος / απόσβεση 30% (13800) = **71 760**

4. Απαντώ και επιβεβαιώνω 395200/71760 ίσον περίπου **55 μαγαζιά**

Επίλυση προβλήματος στη ΜΕ

Ρόλος της ΕΠ στη Μ.Ε.

- Η αξιοποίηση της ΕΠ στα προγράμματα (ZDM Mathematics Education, 39, 2007) διακρίνεται σε τρεις άξονες:

1. *Επίλυση προβλήματος ΜΕ τα Μαθηματικά* (μαθηματικό περιεχόμενο που συνεισφέρει στην επίλυση προβλήματος)
2. *Επίλυση προβλήματος ΓΙΑ τα Μαθηματικά* (διδασκαλία ευρετικών, στρατηγικών για την επίλυση)
3. *Μαθηματικά ΜΕΣΑ από την επίλυση προβλήματος* (αναζήτηση κατάλληλων προβλημάτων για την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών)

Ρόλος της ΕΠ στη Μ.Ε.

- Παραδοσιακά με την λέξη «πρόβλημα» συνδέονται τα *λεκτικά αριθμητικά προβλήματα*, όπου οι μαθητές εντοπίζουν και εκτελούν συγκεκριμένες πράξεις.
- Στις μέρες μας η ***επίλυση προβλήματος*** (problem solving), είναι περιεχόμενο συστηματικής ερευνητικής αναζήτησης στη ΜΕ:
  - τόσο στο χώρο της αρίθμησης (όπου και οι περισσότερες αναζητήσεις)
  - όσο και σε άλλους άξονες των Μαθηματικών (προβλήματα χώρου, μετρήσεων, συνδυασμών, πιθανοτήτων, βέλτιστης λύσης κλπ.).

Σταθμοί στην Ερευνητική δραστηριότητα

1970-80

- Τι προβλήματα, τι χαρακτηριστικά και ποιες οι δυσκολίες των μαθητών; Τι διαφοροποιήσεις με τις αλλαγές των χαρακτηριστικών;
- Κυρίως ποσοτικές προσεγγίσεις με τεστ.
- Η έρευνα επιβεβαιώνει τη σημασία του περιεχομένου, του πλαισίου της δομής, της σύνταξης και των ευρετικών ως μεταβλητών για τις επιδόσεις των μαθητών.
- Τα αποτελέσματα οδηγούν στην εισαγωγή προβλημάτων με περισσότερο νόημα για τους μαθητές.

Βλ. σχετικά, Sabtos-Trigo (2007) & Scoenfeld (2007)

Σταθμοί στην Ερευνητική δραστηριότητα

- ***1980-90***

- Τι είναι μαθηματική σκέψη, πώς αναπτύσσεται; Ποιά είναι τα χαρακτηριστικά των ικανών στη λύση προβλήματος. Ποιός είναι ο ρόλος των ευρετικών και των μεταγνωστικών δεξιοτήτων; Ποιός είναι ο ρόλος των συναισθηματικών παραγόντων στους σπουδαστές.
- Κυρίως ποιοτικές προσεγγίσεις με συνεντεύξεις και παρατηρήσεις περιπτώσεων.
- Η έρευνα διακρίνει βασικές κατηγορίες στις ικανότητες επίλυσης προβλήματος; Υπόβαθρο γνώσεων, γνωστικό και μεταγνωστικές στρατηγικές, σύστημα πεποιθήσεων και συναισθηματικοί παράγοντες, μαθηματική προδιάθεση
- Τα αποτελέσματα οδηγούν στην επικέντρωση στον μαθητές, στις ομάδες και τη συζήτηση, στις στρατηγικές σκαλωσιάς.

Σταθμοί στην Ερευνητική δραστηριότητα

- ***2000 και μετά***
- Τι συλλογιστική ικανότητα αναπτύσσουν οι μαθητές με την τεχνολογία; Πόσο τους βοηθά στην μελέτη σχέσων και επεξεργασία αποτελεσμάτων; Πόσο επιδρά στις ικανότητες επίλυσης σε σχέση με το μολύβι χαρτί;
- Κυρίως ποιοτικές προσεγγίσεις με συνεντεύξεις σε επίλυση προβλημάτων, διδακτικά πειράματα, εθνογραφικές μέθοδοι
- Η έρευνα διαφοροποιεί τα υλικά αντικείμενα από τις ψυχολογικές κατασκευές και τα εργαλεία.
- Τα αποτελέσματα οδηγούν στην επικέντρωση στους μαθητές, στις ομάδες και συζητήσεις, στη σημασία των προηγούμενων γνώσεων και την ανάπτυξη στρατηγικών σκαλωσιάς, όπως και στη δημιουργία κοινότητας μάθησης και τη χρήση διαφορετικών υπολογιστικών εργαλείων με πολλές αναπαραστάσεις.

Ερευνητική δραστηριότητα - άξονες

- Στάδια, ευρετικές, ικανότητες επίλυσης προβλήματος
- Αναπαραστάσεις στην επίλυση προβλήματος
- Κατασκευή προβλήματος, είδη, ικανότητες ΚΠ
- Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για την ΕΠ
- Αντιλήψεις των μαθητών για την ΕΠ
- Διδασκαλία της ΕΠ (τεχνολογία, ανάπτυξη αυτορύθμισηες κλπ)
- Ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στην ΕΠ

Λύνοντας ένα πρόβλημα

Αν δίπλωνα ένα τσιγαρόχαρτο 30 φορές πόσο ψηλά θα έφτανε?

1.Τι ξέρω? Καθώς διπλώνω, διπλασιάζω

2.Πώς να το κάνω: αναζητώ κανονικότητα

3.Επίλυω, αν το μήκος του ήταν α, τότε

1η φορά	$2^1α$
2η	$2^2α$
3η	$2^3α$
…	
30η	$2^{30}.α$

4. Απαντώ και επιβεβαιώνω

$2^{10} = 2^5.2^5 = 32.32 = 1024$ περίπου $1000 = 10^3$ άρα $2^{30} \sim 10^9$

άρα αν πχ. α=1/10.000 m τότε 10^5 δηλ. 100.000 μέτρα, 100 χιλιόμετρα!!

Διερεύνηση της επίλυσης προβλήματος

- Διαφορετικές *αναλύσεις των σταδίων* που ακολουθούνται κατά τη διαδικασία αυτή, είτε για διδακτικούς, είτε για μεθοδολογικούς λόγους

 1. το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων του Polya (1967)

 2. το μοντέλο των τριών σταδίων του Schoenfeld (1985, 1992)

 3. το μοντέλο ανάλυσης των γνωστικών στρατηγικών τεσσάρων σταδίων που προτείνονται από τον DeCorte et al. (2000)

 4. τη στρατηγική των πέντε βημάτων του Verschaffel et al. (1999).

 5....

Διερεύνηση της επίλυσης προβλήματος

Polya (1967)	Schoenfeld (1985)	De Corte et al. (2000)	Verschaffel et al (1999)
1. Κατανόηση 2. Επινόηση ενός σχεδίου 3. Υλοποίηση του σχεδίου 4. Έλεγχος	1. Ανάλυση 2. Εξερεύνηση 3. Επαλήθευση	1. Προσανατολι-σμός 2. Οργάνωση 3. Εκτέλεση 4. Επαλήθευση	1. Νοερή αναπαράσταση του προβλήματος 2. Τρόπος επίλυση τους προβλήματος 3. Εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων 4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και διαμόρφωση απάντησης 5. Αξιολόγηση της λύσης

Γνωστική προσέγγιση
(πρώτες καταγραφές, 1975-1985)

Διερεύνηση των σταδίων του Polya

- Οι γνωστικοί ψυχολόγοι από πολύ νωρίς διερευνούν στοιχεία της επίλυσης προβλήματος. Εντοπίζουμε ερευνητικά δεδομένα για (Mayer, 1985):

  1ο: Κατανόηση του προβλήματος

- Καταγράφεται η δυσκολία κατανόησης των δεδομένων και των σχέσεων ενός προβλήματος.
- Η κατανόηση βελτιώνεται με την ηλικία.
- Η κατανόηση βελτιώνεται με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, διαγράμματα, κλπ.

Διερεύνηση των σταδίων του Polya

2ο: Επινόηση σχεδίου λύσης

- Καταγράφεται η ανάγκη σύνθεσης και αντίληψης του όλου του προβλήματος
- - Η επινόηση σχεδίου συνδέεται με τις εμπειρίες σε αντίστοιχα προβλήματα
- Η επινόηση σχεδίου βελτιώνεται με την επίλυση ποικιλίας προβλημάτων.
- Η επινόηση σχεδίου βελτιώνεται με την αναπαράσταση των προβλημάτων και τη διάκριση των δεδομένων.

Διερεύνηση των σταδίων του Polya

3ο: Υλοποίηση σχεδίου

- Καταγράφεται η διάκριση ανάμεσα στη διαδικασία και το αποτέλεσμα
- Μελετήθηκε η διδασκαλία στρατηγικών, με εικόνα βελτίωσης των επιδόσεων.
- Δοκιμάσθηκε πειραματικά η διδασκαλία «ευρετικών» στην ΕΜΠ, με θετικά αποτελέσματα.
- Η υλοποίηση σχεδίου βελτιώνεται με την χρήση παραδειγμάτων, διδασκαλία στρατηγικών και συστηματική συζήτηση και σύγκριση των διαδικασιών λύσης

Διερεύνηση των σταδίων του Polya

4ο: Ρόλος των αλγορίθμων

- Καταγράφεται σύνδεση ΕΜΠ με την ευχέρεια στην υλοποίηση αλγορίθμων
- Μελετήθηκε συστηματικά από τους ψυχολόγους η ανάπτυξη αλγορίθμων από τους μαθητές (οι απλοί αλγόριθμοι δίνουν τη θέση τους σε πιο σύνθετους)
- Η απόκτηση αυτοματισμών βελτιώνει την ανάπτυξη δεξιοτήτων ΑΜΠ.

Η ΕΜΠ στη Μαθηματική Εκπαίδευση (δεκαετία 90)

Διερεύνηση του mathematical thinking

- Ο Schoenfled (1992) προβάλλει την ανάγκη ανάπτυξης ΕΜΠ υποστηρίζοντας ότι το «σκέπτεσθαι μαθηματικά» συνδέεται στενά

  (1) με την επίλυση προβλήματος και

  (2) με τη μεταγνώση (επίγνωση της διαδικασίας λύσης, αυτορρύθμιση).
- Αναγνωρίζει το ρόλο της στη μαθηματική εκπαίδευση ως (1) περιεχόμενο, (2) δεξιότητα και (3) «τέχνη», τεχνική, ουσία των ίδιων των μαθηματικών.

Διερεύνηση του mathematical thinking

- Η ΕΜΠ στοιχειοθετείται τη δεκαετία του 80 με δύο βιβλία:

  - Silver (1985). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective* .

  - Charles & Silver (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*

- Μέσα σε αυτά αναδεικνύονται εκτός από το πλαίσιο, 4 απαραίτητες πτυχές της ΕΜΠ:

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Γνωστική βάση (γνώσεις, πηγές και σύνθεση)***

  - ως γνώσεις νοούνται άτυπες ή τυπικές γνώσεις που σχετίζεται με γεγονότα, ορισμούς, κανόνες, αλγόριθμους, ρουτίνες, τεχνικές (παράδειγμα χάραξη εφαπτομένου κύκλου)

  - ως *πηγή* νοείται η πρόσβαση στην μνήμη

  * *υπάρχει μεγάλος όγκος ερευνών που σχετίζεται με τα παραπάνω ζητήματα (κατηγοριοποίηση προβλημάτων κατά είδος και λύση)*

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Στρατηγικές επίλυσης***

  - προτάσεις του Polya: αναλογική σκέψη, βοηθητικά στοιχεία, ανασύνθεση και ανασυνδυασμός, συνεπαγωγή, εξειδίκευση, διαφοροποίηση και εργασία προς τα πίσω

  - η διδασκαλία τους δύσκολη τόσο από μαθηματική, όσο κι από παιδαγωγική και ψυχολογική άποψη

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Αυτορρύθμιση, αξιολόγηση κι έλεγχος***

  Αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 70 από την εξελικτική ψυχολογία, την τεχνητή νοημοσύνη και τη μελέτη της επίλυσης προβλήματος.

  - η αυτορρύθμιση βελτιώνεται με την ηλικία αλλά απαιτούν διδακτική στήριξη με συστηματικό τρόπο

  - σχετίζεται με τις ικανότητες ΕΜΠ

  - η ιδεατή οργάνωση της τάξης με ΕΜΠ και αυτορρύθμιση είναι πιο περίπλοκη από όσο είχε αρχικά φανεί.

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Αυτορρύθμιση, αξιολόγηση κι έλεγχος (νέου λύτη)***

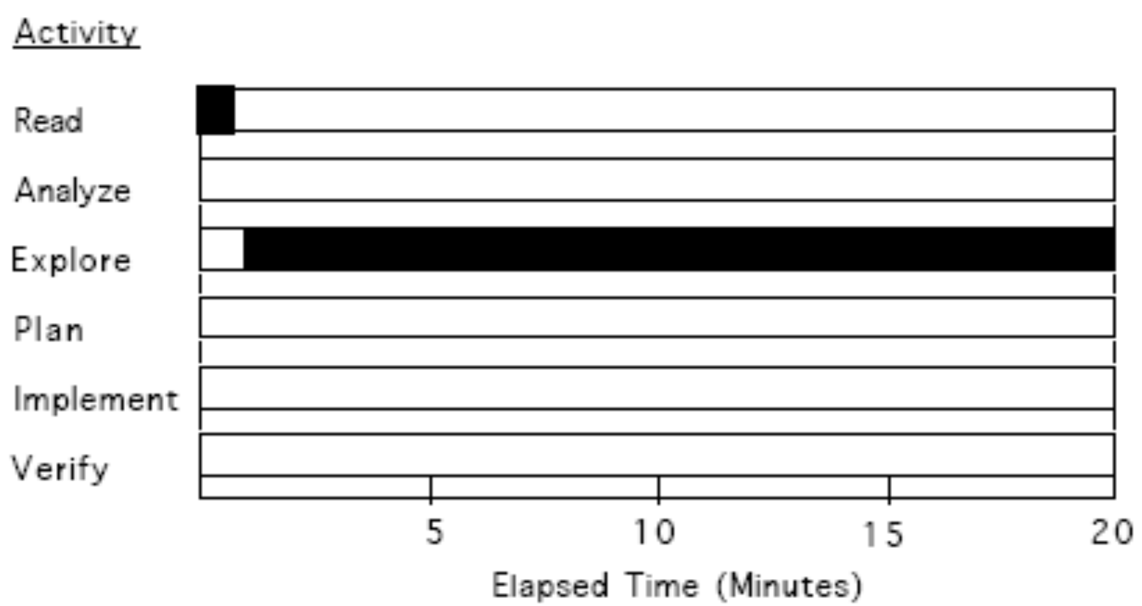


Fig. 3. Time-line graph of a typical student attempt to solve a non-standard problem.

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Αυτορρύθμιση, αξιολόγηση κι έλεγχος (μαθηματικού)***

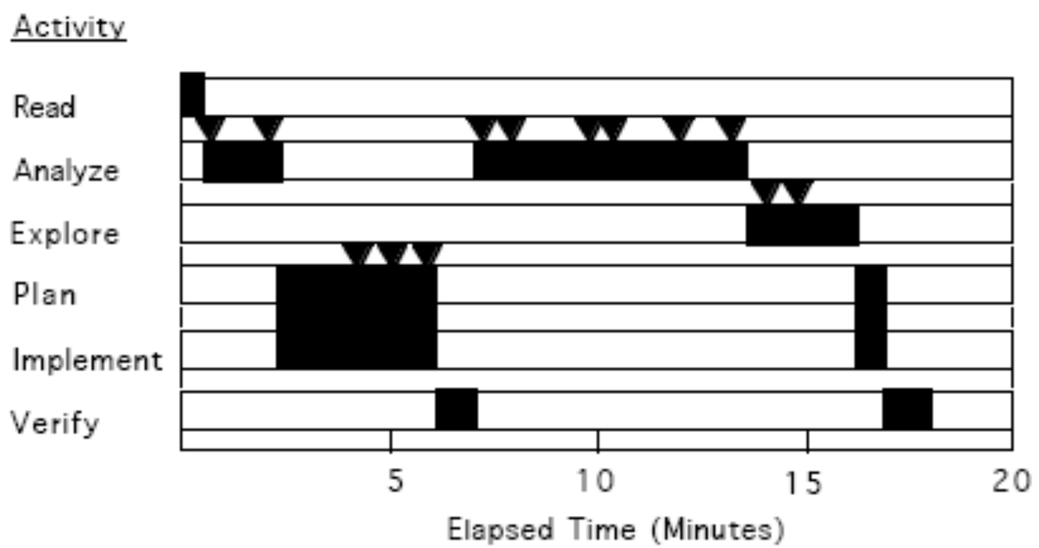


Fig. 4. Time-line graph of a mathematician working a difficult problem

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Αυτορρύθμιση, αξιολόγηση κι έλεγχος (έμπειρου λύτη)***

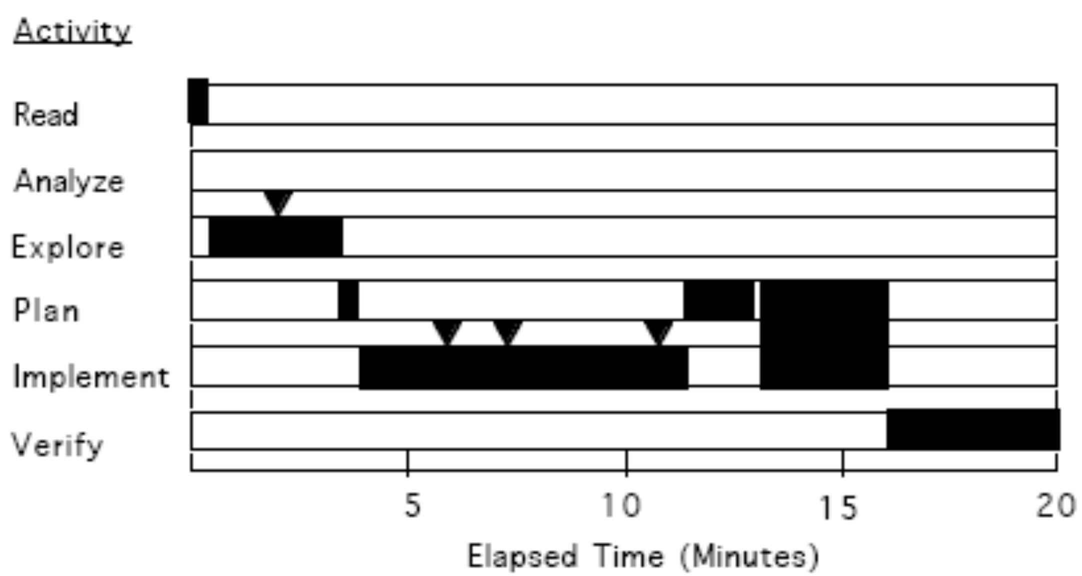


Fig. 5. Time-line graph of two students working a problem after the problem solving course.

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Πεποιθήσεις και συναισθήματα***

Σύνδεση γνωστικού και συναισθηματικού τομέα

- *πεποιθήσεις των μαθητών ως προς τα προβλήματα:*

μοναδική λύση, μοναδικός τρόπος, άμεση λύση, εφαρμογή χωρίς κατανόηση, ατομική δραστηριότητα, μικρή σύνδεση με την πραγματικότητα, τυπική απόδειξη

- *πεποιθήσεις των δασκάλων ως προς τα προβλήματα:*

διαδικασίες που διδάσκονται, κλειστό θέμα, ανάπτυξη στρατηγικών και λύσεων. Υπάρχουν και εκπαιδευτικοί που ενδιαφέρονται να αναπτύξουν άλλο κλίμα

Διερεύνηση του mathematical thinking

- ***Πρακτικές***

  Πειραματισμός με ενδιαφέροντα προβλήματα

  - σημαντικές αντιδράσεις των μαθητών

  - θετικό κλίμα στην τάξη

  - σημαντικές κοινωνικές αλληλεπιδράσεις

Ανάγνωση προβλήματος
Αναπαραστάσεις προβλήματος

Διερεύνηση των αναπαραστάσεων

- Ο Goldin (1998) μελετά τα ***αναπαραστατικά συστήματα*** στη μάθηση και την ΕΜΠ.
- Ως πρώτο συστατικό παρουσιάζει *το περιβάλλον ενός έργου* που είναι έξω από το μαθητή, αναλύοντας τις μεταβλητές του:
  - *μεταβλητές σύνταξης* (λέξεις, σύμβολα, γραμματικές σχέσεις)
  - *μεταβλητές περιεχομένου και πλαισίου* (πληροφορίες με μαθηματικό ή άλλο περιεχόμενο)
  - *μεταβλητές δομής* (ιδιότητες μαθηματικού περιεχομένου)
  - *μεταβλητές ευρηματικής συμπεριφοράς* (ενισχύουν)

Διερεύνηση των συμπεριφορών ανάγνωσης

- Ο Pape (2004) επικεντρώνει το ενδιαφέρον του στις συμπεριφορές ανάγνωσης των μαθητών, θεωρώντας τις ως την εκκίνηση ΕΜΠ.
- Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται λάθος τα προβλήματα εξαιτίας:

  (1) γλωσσικών προβλημάτων (2) ελλείψεων σε μαθηματική γνώση (3) ελλείψεις στις συνδέσεις γνώσεων και στρατηγικών επίλυσης, (4) ελλείψεις στις στρατηγικές ανάγνωσης, κ.ά.
- Ο English (1997) μιλάει για «γνωστικές αναπαραστάσεις» του προβλήματος, όπως δημιουργούνται από την ανάγνωση - ονομάσθηκε ***σημασιολογική ασυμφωνία***.

Διερεύνηση των αναπαραστάσεων

Παράδειγμα

- Ο Πέτρος πήγε 6 φορές στο γυμναστήριο αυτή τη βδομάδα. Ο Ανδρέας πήγε 3 φορές λιγότερο από τον Πέτρο. Πόσες φορές πήγε ο Ανδρέας στο γυμναστήριο σε 5 βδομάδες;

Διερεύνηση των αναπαραστάσεων

- Ως κατηγορίες για τη δομή της ικανότητας επίλυσης ΜΠ. Προτείνει τα εξής:
  - γλωσσικό/ συντακτικό σύστημα (λόγος)
  - εικονιστικό σύστημα (οπτικό, ακουστικό, κιναισθητικό)
  - σημειωτικό σύστημα μαθηματικών
  - σύστημα σχεδιασμού, παρακολούθησης και εκτελεστικού ελέγχου
  - σύστημα συναισθηματικής αναπαράστασης (περιέργεια, φόβος, ευχαρίστηση, κλπ.)

Οπτικοποίηση προβλήματος

- Μεγάλος αριθμός ερευνών τεκμηριώνει ότι η *οπτικοποίηση* του προβλήματος και η **σχηματική απόδοση των στοιχείων και των σχέσεων** προωθεί σημαντικά την διαδικασία επίλυσης.
- Η αξιοποίηση αυτή στην κατανόηση του προβλήματος και το σχεδιασμό σχεδίων λύσης, δεν είναι πάντα αποτελεσματική.
- Συναρτάται με τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται το σχήμα και το πρόβλημα.

Οπτικοποίηση προβλήματος

- Συχνά οι μαθητές εντοπίζουν στο σχήμα άλλα στοιχεία ή δίνουν σημασία σε άσχετες πληροφορίες ή ακόμα το αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο και δεν το αντιστοιχούν με το λεκτικό πρόβλημα.
- Ερευνητές μελέτησαν τα σχέδια των παιδιών που δοκίμαζαν να παραστήσουν προβλήματα και υποστηρίξαν ότι οι αναπαραστάσεις αυτές είναι σημαντικές για να μπορέσει το παιδί να συνδέσει το συγκεκριμένο πρόβλημα με την πιο αφηρημένη του μαθηματική λύση.

Οπτικοποίηση προβλήματος

- Η ακρίβεια και η αντιπροσωπευτικότατα των σχημάτων που παράγουν ποικίλει από **ζωγραφιές** μέχρι πιο χαρακτηριστικές εξεικονιστικές ή **συμβολικές παραστάσεις**.
  - Συχνά τα παιδιά αποδίδουν δευτερεύοντα για το πρόβλημα στοιχεία ή καλλιτεχνήματα
  - Άλλα δοκιμάζουν να προχωρήσουν τη σκέψη τους «ζωγραφίζοντας» με πιο κατάλληλο τρόπο το πρόβλημα.
- Ανάγκη να στηρίζει ο δάσκαλος τη σχέση που είναι απαραίτητο να συνδέει τις παραστάσεις με την κατάσταση που αντιμετωπίζουν

Διερεύνηση των συμπεριφορών ανάγνωσης

- Διαδικασίες διαρκούς ελέγχου (monitoring) των λύσεων και ευελιξίας. Πχ. Σε προβλήματα σύγκρισης του τύπου:

  «Ο Τζο τρέχει 6 μίλια τη βδομάδα και ο Κεν 3 φορές παραπάνω από τον Τζο, πόσα μίλια τρέχει ο Κεν σε 4 βδομάδες» ή

  «Ο Τζο τρέχει 6 μίλια τη βδομάδα, που είναι το 1/3 των μιλίων που κάνει ο Κεν….»

- Συνδέονται λεκτικά και σχεσιακά ζητήματα που οδηγούν συχνά σε «άμεση μετάφραση» και όχι σε «μετάφραση με νόημα» για τη λύση.

Αναστολή νοήματος

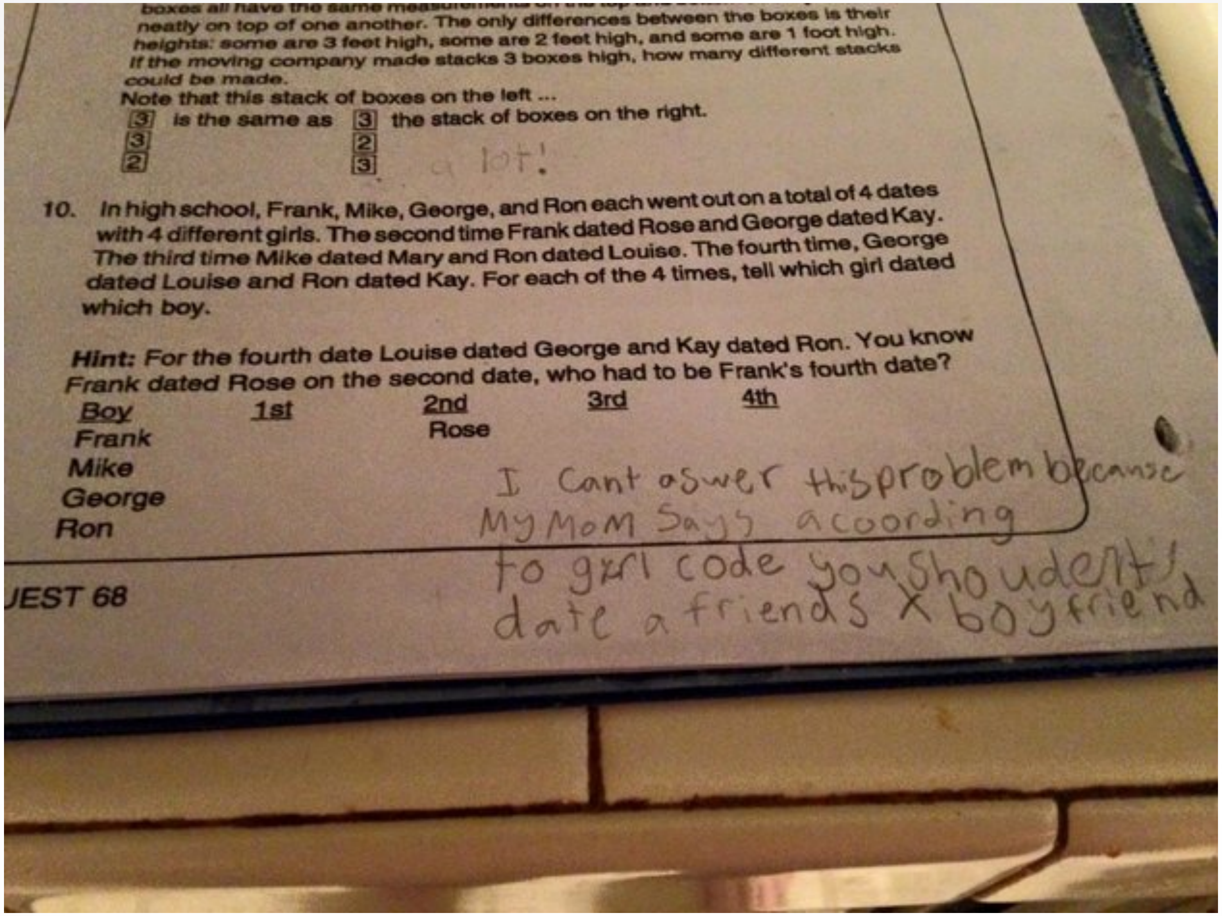
- Η ηλικία του καπετάνιου
- Αν ένα λεωφορείο χωράει 36 μαθητές, πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για 1128 μαθητές;
- Ένας μαραγκός αγόρασε 4 πλάκες ξύλο με μήκος 2,5 μέτρα. Πόσες πλάκες του ενός μέτρου μπορεί να βγάλει από αυτές;
- Κάποιος θέλει ένα σχοινί να τεντώσει ανάμεσα σε δύο πόλους με απόσταση 12 μέτρων, αλλά έχει μόνο κομμάτια σκοινί του 1,5 μέτρου. Πόσα από αυτά θα χρειαστεί να δέσει μαζί ώστε να ενώσει τους δύο πόλους;
- Ο Γιάννης έχει καλύτερο χρόνο για τα 100 μέτρα τα 17΄΄, πόσο θα κάνει για το ένα χιλιόμετρο;

Διερεύνηση των συμπεριφορών ανάγνωσης

- Η μελέτη του Pape οδήγησε σε δύο κατηγορίες:

  - Προσέγγιση άμεσης μετάφρασης (αποδοτική ή όχι)
  - Προσέγγιση στη βάση νοήματος (με ή χωρίς δικαιολόγηση)

- Συνδέονται στενά με την επίλυση του προβλήματος



«Δεν μπορώ να απαντήσω σε αυτό το πρόβλημα γιατί η μαμά λέει ότι σύμφωνα με τον «γυναικείο κώδικα» δεν πρέπει να βγαίνεις ραντεβού με τους πρώην των φίλων σου».

Αθροιστικά και πολ/στικά προβλήματα

Είδη προσθετικών προβλημάτων

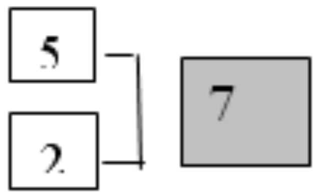
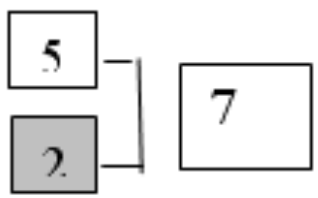
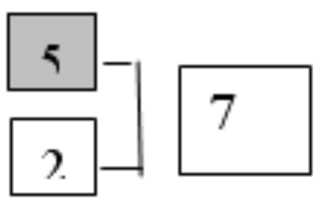
- Οργάνωση των διαφορετικών κατηγοριών *αθροιστικών και πολλαπλασιαστικών προβλημάτων* με τα οποία οι μαθητές βρίσκονται αντιμέτωποι.
- Αποδεικνύεται ότι αν και πολλά προβλήματα αναφέρονται *στην ίδια πράξη* (μια πρόσθεση ή ένα πολλαπλασιασμό), το είδος του προβλήματος με το οποίο ασχολούνται, κλιμακώνει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά.

Είδη προσθετικών προβλημάτων

- Ο Vergnaud και οι έρευνές του για τις αθροιστικές και πολλαπλασιαστικές δομές (1982) ανέπτυξαν μια λεπτομερή ανάλυση *του είδους των καταστάσεων* που παρουσιάζουν τα λεκτικά προβλήματα ανεξάρτητα από την πράξη που είναι απαραίτητο να γίνει.
- Για τα *αθροιστικά προβλήματα*, κατηγοριοποιήσεις στο σχήμα «Αλλάζω», «Συνδυάζω» και «Συγκρίνω» (Riley, Heller & Greeno, 1983, Fuson, 1992, Verschaffel & De Corte, 1996), που αφορά προβλήματα που περιλαμβάνουν μία ή δύο ποσότητες.

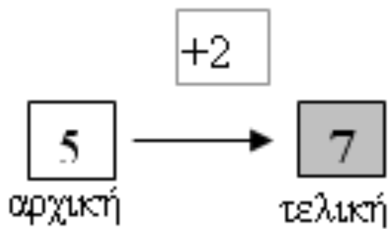
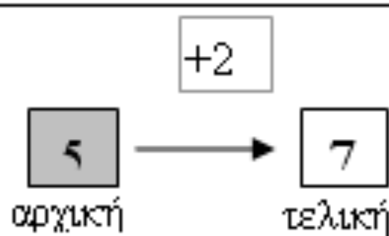
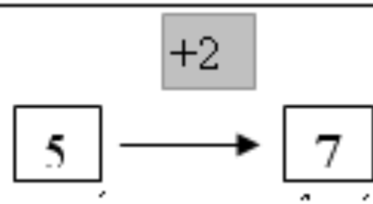
Είδη προσθετικών προβλημάτων

Συνδυάζω (ένωση ποσοτήτων)

	*Πρόσθεση*, **το ζητούμενο είναι το σύνολο** *«η πρώτη είναι 5, και η δεύτερη έχει 2 πόσα και οι δύο;».*
	*Αφαίρεση*, **το ζητούμενο είναι η δεύτερη ποσότητα:** *«η πρώτη είναι 5, και το σύνολο 7 πόσο είνα η δεύτερη*
	*Αφαίρεση*, **το ζητούμενο είναι η πρώτη ποσότητα** *«η δεύτερη 2 και το σύνολο 7 πόσο είναι η πρώτη;*
	Τα αντίστοιχα και με αφαίρεση

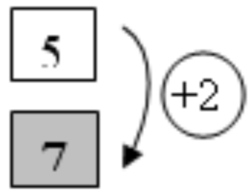
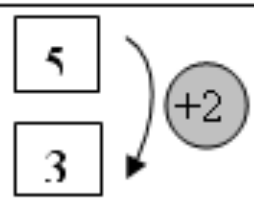
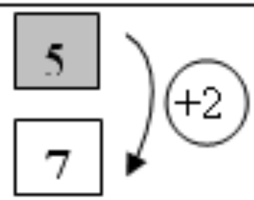
Είδη προσθετικών προβλημάτων

Αλλάζω (μετασχηματισμός ποσότητας)

<table>
<tr><td>
</td><td>Πρόσθεση, το ζητούμενο είναι η τελική κατάσταση:
«Είχαμε 5, βάλαμε 2, πόσα έγιναν;»</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Αφαίρεση, το ζητούμενο είναι η αρχική κατάσταση:
«Έχουμε 7, βάλαμε 2, πόσα είχαμε;»</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Αφαίρεση, το ζητούμενο είναι το στοιχείο που μετασχηματίζει:
«Είχαμε 5, έχουμε 7, πόσα βάλαμε;»</td></tr>
<tr><td></td><td>Αντίστοιχα με αφαίρεση</td></tr>
</table>

Είδη προσθετικών προβλημάτων

Συγκρίνω (σχέση ποσοτήτων)

	*Πρόσθεση*, **το ζητούμενο είναι η δεύτερη ποσότητα:** *«η πρώτη είναι 5, και η δεύτερη έχει 2 περισσότερα, πόσα είναι η δεύτερη;».*
	*Αφαίρεση*, **το ζητούμενο είναι πόσα λιγότερα:** *«η πρώτη έχει είναι 5, και η δεύτερη 3 , πόσα λιγότερα έχει από την πρώτη;»*
	*Αφαίρεση*, **το ζητούμενο είναι η πρώτη ποσότητα:** *«η δεύτερη είναι 7 κι έχει 2 περισσότερα από την πρώτη, πόσα έχει η πρώτη»*
	Αντίστοιχα με αφαίρεση

Είδη προσθετικών προβλημάτων

- Συνέχιση με:

  - ένωση μετασχηματισμών
  - ένωση σχέσεων
  - μετασχηματισμό μετασχηματισμών
  - μετασχηματισμό σχέσεων
  - σχέσεις μετασχηματισμών
  - σχέσεις σχέσεων

Είδη πολλαπλασιαστικών προβλημάτων

- Ο πολλαπλασιασμός έχει περισσότερες ιδιαιτερότητες από τις οποίες η σημαντικότερη έννοια *του τελεστή κλίμακας* (scalar factor, Vergnaud, 1988).
- Ο τελεστής κλίμακας (πχ. 2 φορές) ενεργεί πάνω σε ποσότητες ή μεγέθη μετασχηματίζοντας τα και στην περίπτωση αυτή *αποτελεί ένα αριθμό* χωρίς διαστάσεις, ένα πολλαπλασιαστή που δεν έχει άλλα χαρακτηριστικά και δεν αλλάζει τη φύση του μεγέθους ή της ποσότητας πάνω στην οποία επιδρά (*αντιμεταθετικότητα ή μη*)

Είδη πολλαπλασιαστικών προβλημάτων

- Τα προβλήματα της μορφής «ένα παιδί έχει δύο πόδια, τα δύο παιδιά τέσσερα, κλπ.» εισάγουν μια έννοια σταθερού λόγου σε δύο διαφορετικούς χώρους μέτρησης.
- Σε αυτή τη μορφή πολλαπλασιασμού, ο αριθμός των επαναλήψεων (πόσα παιδιά) θα οδηγήσει επίσης σε ένα τελεστή κλίμακας που όμως στην περίπτωση αυτή είναι υπονοούμενος και καλείται να λειτουργήσει τόσο πάνω στον αριθμό των παιδιών, όσο και πάνω στον αριθμό των ποδιών.

Είδη πολλαπλασιαστικών προβλημάτων

- Οι πολλαπλασιασμοί στα προβλήματα της μορφής «ένα κιλό πορτοκάλια κοστίζει 2 ευρώ, τα πέντε πόσο κοστίζουν» δημιουργούν τη σύνθετη έννοια της *συμμεταβολής ποσοτήτων,* η οποία μεταγενέστερα είναι απαραίτητη στο πολλαπλασιαστικό συλλογισμό για τις αναλογίες (Vergnaud, 1988).
- Τις κατηγορίες συμπληρώνουν τα προβλήματα της μορφής «3 σειρές από 2 τετράγωνες πλάκες είναι 6 τετράγωνες πλάκες». Στις περιπτώσεις αυτές ο αριθμός 6 «μετρά» *ένα νέο μέγεθος* που είναι στο παράδειγμα η επιφάνεια του σχήματος.

Είδη πολλαπλασιαστικών προβλημάτων

- Ο Vergnaud τα συνοψίζει σε 3 κατηγορίες ως προς το χώρο μετρήσεων:
  - Επανάληψη ποσότητας
  - Αναλογία ποσοτήτων
  - Δημιουργία νέου μεγέθους
- Αντίστοιχα με τον πολλαπλασιασμό, η έννοια της διαίρεσης μπορεί να θεωρηθεί η αντιστροφή του
- Είναι διαφορετική γιατί απαιτεί μια σύγχρονη αντίληψη του όλου (όλα τα αντικείμενα), του αριθμού των μερών (όλα τα μέρη) και της ποσότητας που αντιστοιχεί στο κάθε ένα.

Εφαρμογές στα προγράμματα (2000 και μετά)

Διερεύνηση των προγραμμάτων

- Όλες οι μελέτες που προηγούνται οδηγούν σε αλλαγές των προγραμμάτων μετά το 2000.
- Η Stacey (2004) συνοψίζει αυτές τις αλλαγές μέσα από τα αγγλόφωνα προγράμματα (UK, USA, Australia and Singapore).
- Η ΕΜΠ επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες που επηρεάζουν με τη σειρά τους τη διδακτική εφαρμογή:

  βαθιά μαθηματική γνώση, συλλογιστική ικανότητα, ευρετικές, προσωπικές ικανότητες (πεποίθηση, οργάνωση, κλπ.), ικανότητες επικοινωνίας και συνεργασίας.

Διερεύνηση των προγραμμάτων

- Το πρόγραμμα του UK και της Αυστραλίας ενισχύουν ένα άξονα "working mathematically" με: *έρευνα, δημιουργία υποθέσεων, χρήση στρατηγικών, εφαρμογή και επιβεβαίωση, χρήση μαθηματικής γλώσσας, εργασία σε πλαίσιο*.
- Το πρόγραμμα της USA αναλύει 3 άξονες για χρήση και εφαρμογή των Μαθηματικών και άλλους τρεις που αφορούν ΕΜΠ, Επικοινωνία και Συλλογισμό.
- Το πρόγραμμα της Σιγκαπούρης έχει την ΕΜΠ στο επίκεντρο ως βασικό στόχο που τον αναλύει σε: *έννοιες, δεξιότητες, διαδικασίες, στάσεις και μεταγνώση*.

Διερεύνηση των προγραμμάτων

- Ένας σκεπτόμενος, ενεργός πολίτης χρειάζεται να διαθέτει *ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων*. Για παράδειγμα, αν εξαιρέσουμε τα «σχολικά» προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, όπου δίνονται όλες οι πληροφορίες για την επίλυσή τους και ο δρόμος προς τη λύση είναι συνήθως μονόδρομος, στην πραγματική ζωή, τα περισσότερα προβλήματα χαρακτηρίζονται από ασάφεια, έλλειψη δεδομένων, ή περίσσεια στοιχείων. Προκειμένου να επιλυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα, πρέπει καταρχήν να κατανοηθεί.
- Η *κατανόηση ενός προβλήματος* δεν είναι απλή διαδικασία, καθώς προϋποθέτει μια σειρά από σημαντικές δεξιότητες, όπως ***διαχείρισης της πολυπλοκότητας*** (αναγνώριση και ανάλυση κανονικοτήτων, εντοπισμός αναλογιών μεταξύ των γνωστών και νέων καταστάσεων), ***διάκρισης*** (αναγνώριση σχετικών και άσχετων στοιχείων σε σχέση με μια κατάσταση ή έναν στόχο) και ***επιλογής*** (επιλογή μεταξύ διάφορων ενδεχομένων σε σχέση με τον επιδιωκόμενο στόχο).
- Αφού κατανοηθεί, το πραγματικό πρόβλημα πρέπει να μετατραπεί, στη συνέχεια, σε *μαθηματικό πρόβλημα*, προκειμένου να αναζητηθούν τα κατάλληλα εργαλεία (σύμβολα, αλγόριθμοι, τεχνολογικά εργαλεία) επίλυσής του.

Η ΕΠ στον Πρόγραμμα του 2011

- Διδασκαλία *για* την ΕΜΠ, *σχετικά* με την ΕΜΠ ή *μέσω* της ΕΜΠ?
- Δημιουργία *σημαντικών και προκλητικών* μαθηματικών έργων (*πεντάμινος, 3ν*).
- Αλλά και δραστηριοτήτων που είναι στην ουσία προβλήματα για την ανάδειξη εννοιών.

- Παραμένει αδιευκρίνιστο τι κάνει ο εκπαιδευτικός και ποια είναι τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα: πχ. κάνει μαθηματικές ερωτήσεις, βρίσκει το σημαντικό σε ένα πρόβλημα, κάνει ερωτήσεις που μπορούν να διερευνηθούν με μαθηματικά…

Νεώτερα μοντέλα ΕΜΠ

Νεώτερα μοντέλα ΕΜΠ

- Μεταγενέστερες μελέτες στα στάδια επίλυσης προβλήματος από τη *διερεύνηση της δράσης των μαθηματικών* στη διάρκεια της επίλυσης οδήγησε τους Carlson & Bloom (2005) σε ένα κυκλικό μοντέλο με τέσσερις φάσεις:

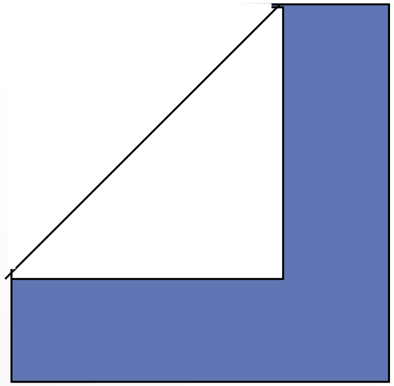
  - προσανατολισμός
  - σχεδιασμός
  - εκτέλεση
  - έλεγχος

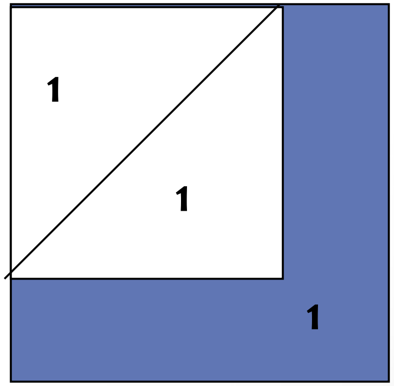
- Στις οποίες εμπλέκονται πηγές, ευρετικές, συναισθήματα, επίβλεψη

Νεώτερα μοντέλα ΕΜΠ

- Το πρόβλημα της δίπλωσης του τετραγώνου

 Ένα τετράγωνο που έχει επιφάνεια 3 τ.εκ. και είναι από τη μία πλευρά μαύρο και από την άλλη άσπρο, διπλώνεται κατα μήκος της διαγωνίου ώστε η άσπρη επιφάνεια να είναι ίση με την μαύρη. Ως ποιό σημείο της διαγωνίου διπλώνεται;





Νεώτερα μοντέλα ΕΜΠ

- Οι Diezmann, Watters & English (2001) καταγράφουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην ΕΜΠ, συνυπολογίζοντας σε αυτές:

  - τη φύση των προτεινόμενων προβλημάτων

  - τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται μέσα στην τάξη, και την γενικότερη

  - κουλτούρα της τάξης .

- Ενώ οι Verschaffel et als. (1999) πειραματίζονται διδακτικά με ένα μοντέλο ΕΜΠ που μπορεί να βελτιώσει τις ικανότητες των μαθητών.

Νεώτερα μοντέλα ΕΜΠ

- Στο πείραμα τους χρησιμοποιήσαν το μοντέλο τους για την ΕΜΠ: *Κατανόηση του προβλήματος (με αναπαράσταση, σχεδιασμός λύσης, εκτέλεση λύσης, ερμηνεία λύσεων και αξιολόγηση.*
- Παράλληλα δημιούργησαν ένα περιβάλλον μάθησης του ΕΜΠ με:

  - κατάλληλα επιλεγμένα πραγματικά προβλήματα

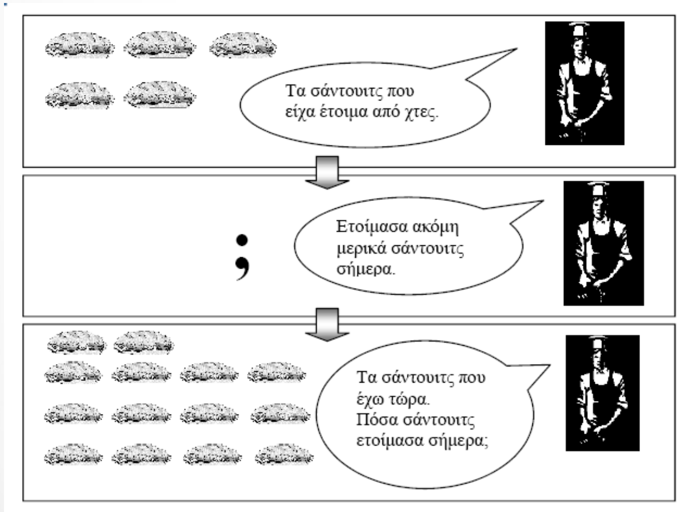
  - ποικιλία διδακτικών στρατηγικών, και τέλος

  - κατάλληλης κουλτούρας και νορμών στην τάξη
- Τα αποτελέσματά τους ήταν ενθαρρυντικά.

Διδασκαλία της ΕΜΠ

Παρεμβατικό πρόγραμμα ΕΜΠ με χρήση αναπαραστάσεων

- Μεγάλος αριθμός μαθητών στις 3 τάξεις (Α΄ –Γ΄)
- Δόθηκαν αρχικά προβλήματας αλλαγής μόνο λεκτικά, με δικοσμητική εικόνα, με πληροφοριακή εικόνα και με αριθμητική γραμμή και αξιολογήθηκαν οι ικανότητες



Πληροφορική εικόνα

Σε ένα λεωφορείο υπήρχαν αρχικά 8 επιβάτες. Σε μια στάση μπήκαν ακόμα μερικοί επιβάτες. Τότε όλοι οι επιβάτες έγιναν 14. Πόσοι επιβάτες ανέβηκαν στο λεωφορείο στη στάση;

Διακοσμητική εικόνα

Παρεμβατικό πρόγραμμα ΕΜΠ με χρήση αναπαραστάσεων

- Πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση με έμφαση:

  - στην αναγνώριση και κατανόησης προβλημάτων ίδιας δομής με διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης

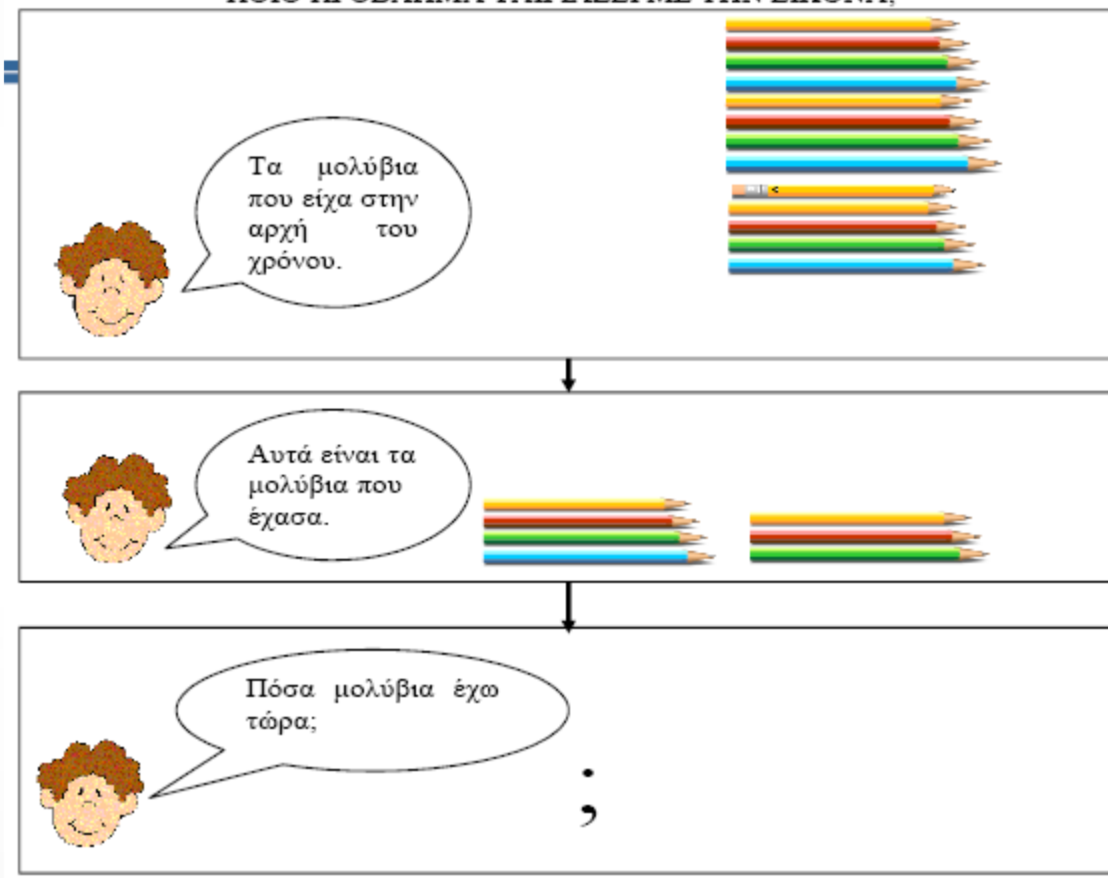
  - στην ανάλυση και ερμηνεία αναπαραστάσεων

  - στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων ως προς τα χαρακτηριστικά, τη δομή και τη χρησιμότητά τους

  -στη μετάφραση από μια αναπαράσταση σε άλλη σε σχέση με το μαθηματικό πρόβλημα.

Παρεμβατικό πρόγραμμα ΕΜΠ με χρήση αναπαραστάσεων

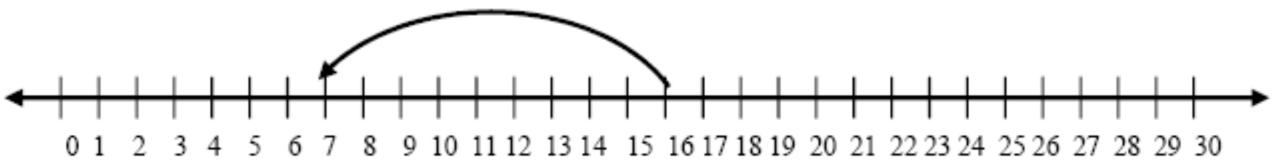
ΠΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΑΙΡΙΑΖΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΕΙΚΟΝΑ;



1. Ο Λευτέρης είχε 13 μολύβια στην αρχή του χρόνου και αγόρασε ακόμα 7. Πόσα μολύβια έχει τώρα;
2. Ο Λευτέρης είχε 13 μολύβια στην αρχή του χρόνου. Έχασε 7 μολύβια. Πόσα μολύβια έχει τώρα;
3. Ο Λευτέρης είχε μερικά μολύβια στην αρχή του χρόνου. Έχασε 7 μολύβια και τώρα έχει 13. Πόσα μολύβια είχε στην αρχή του χρόνου;

Παρεμβατικό πρόγραμμα ΕΜΠ με χρήση αναπαραστάσεων

ΠΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΑΙΡΙΑΖΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ;



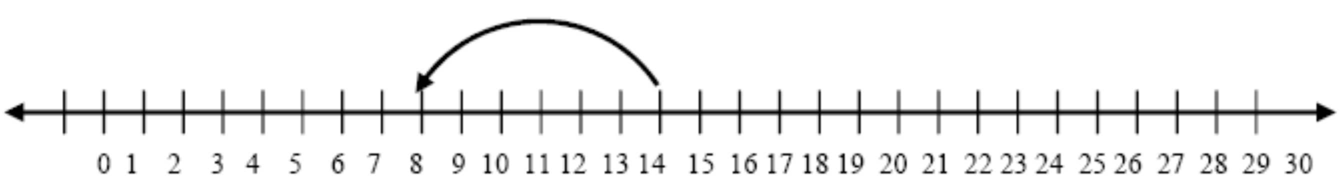
1. Ένα παραμύθι έχει 16 σελίδες. Διάβασα τις 9 σελίδες. Πόσες σελίδες μου έμειναν;

2. Ένα παραμύθι έχει 16 σελίδες. Διάβασα τις 7 σελίδες. Πόσες σελίδες μου έμειναν;

3. Από ένα παραμύθι διάβασα 9 σελίδες και μου έμειναν 16. Πόσες σελίδες έχει το παραμύθι;

ΚΑΤΙ ΛΕΙΠΕΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1. Στο φούρνο σήμερα είχε 14 μαύρα ψωμιά. Μέχρι το τέλος της μέρας έμειναν ..... ψωμιά. Πόσα ψωμιά πωλήθηκαν;



Παρεμβατικό πρόγραμμα ΕΜΠ με χρήση αναπαραστάσεων

- Το παρεμβατικό πρόγραμμα βελτίωσε τις ικανότητες των μαθητών στην ΕΜΠ στις διαφορετικές αναπαραστάσεις.
- Βοήθησε τα παιδιά να καταλάβουν τα πλεονεκτήματα των αναπαραστάσεων στην ΕΜΠ και να δοκιμάζουν να τα αξιοποιούν κατάλληλα μεταφέροντας από τη μία κατάσταση στην άλλη.
- Ωστόσο η ουσιαστική αλλαγή απαιτεί σημαντικό χρόνο παρέμβασης.

- De Corte, E., Verschaffel, L., & Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In Boekaerts, M., Pintrich, P. R., & Zeidner, M. (eds), (2000). *Handbook of self-regulation*, (pp. 687-726). Academic Press.
- Diezmann, .C. M., Watters, J. M., & English, L. D. (2001). Difficulties confronting young children undertaking investigations. In M. van den Heuvel-Panhuizen (ed), *Proceedings of the 25th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 353-360. Utrecht, The Netherlands: PME
- English, L. D. (1997). Children's reasoning processes in classifying and solving computational word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, (pp. 191-220). Lawrence Erlbaum.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In Grouws, Douglas A. (eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, (pp. 243-275). Macmillan Publishing Co.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematics Behavior*, Volume 17 (2): 137-165
- Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior, 24:* 373-384.
- Lesh, R. A. (2003). A models and modeling perspective on problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teachin*, (pp. 317-336). Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Hamilton, E., & Kaput, J. (Eds.) (2006). *Models and modeling as foundations for the future of mathematics education.* Mahwah. Lawrence Erlbaum.
- Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem-solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24:* 385-401.
- Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction for mathematical problem solving. In E.A. Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research perspectives*, (pp. 123-138). Lawrence Erlbaum.

- Pape, S. (2004). Middle School Children's Problem-Solving Behavior: A Cognitive Analysis from a Reading

- Polya, G. 1945. *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Riley, M. S., & Greeno, J. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. *Cognition and Instruction*, Volume 5 (1): 49-101.
- Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM, 39,* Issue 5: 523-536
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 334-370). McMillan.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moses, & T. A. Romberg (eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective,* (pp. 39-59). Lawrence Elbraum.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in middle grades,* (pp. 141-161). NCTM.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In A.J. Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 99-137. Kluwer.
- Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Vaerenbergh, G. V., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(3): 195-229