Μαθηματικά για τη διδασκαλία:
Οι ρητοί αριθμοί

Ξένια Βαμβακούση

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τι είναι *αριθμός;*

Αντί προλόγου

Τι σημαίνει *αριθμός* ;

Έχουμε συμφωνήσει τα ονομάζουμε τα κλάσματα αριθμούς. Αλλά σίγουρα δεν είναι κανονικοί αριθμοί όπως οι φυσικοί (1,2,3,…)

1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Μάλλον διαφωνώ 3: Ουδέτερος/η
4: Μάλλον συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα

Ποιος το συμφώνησε αυτό; Τι είναι, παγκόσμια συνωμοσία; (…) Είναι το 1/3 ***ένας*** *αριθμός; Θεωρούμε το 1/3 αριθμό; Γιατί όταν λέμε «ένα» εννοούμε ένα μολύβι, «δύο»- «δύο μολύβια». Ένα τρίτο είναι κάτι σαν ένα από τα τρία. Και τι μου λες τώρα, ότι το λέμε* ***αυτό*** *αριθμό;*

Δέσποινα, 28, απόφοιτη Πανεπιστημίου (ατομική συνέντευξη)

Σκεφτείτε...

- Ποιοι είναι οι «κανονικοί αριθμοί» σύμφωνα με τη Δέσποινα;
- Συμφωνείτε *απόλυτα* με τη Δέσποινα;
- Διαφωνείτε *απόλυτα* με τη Δέσποινα;
- Τι θα απαντούσατε εσείς στην ερώτηση;
- Και υπό ποία έννοια είναι τα κλάσματα *αριθμοί*;

Τι είναι *αριθμός*; (Ι)

- «Ορισμός» από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά (εκφρασμένος ρητά από τον Αριστοτέλη) (4ος αιώνας π.χ.)
  - Ο αριθμός ως συλλογή (πολλαπλότητα) μονάδων
    - Η μονάδα δε θεωρείται αριθμός
  - Οι αριθμοί θεωρούνται φύσει διακριτοί

Klein, 1968/1992; Michell, 1993; Neal, 2005

Τι είναι *αριθμός;* (ΙΙ)

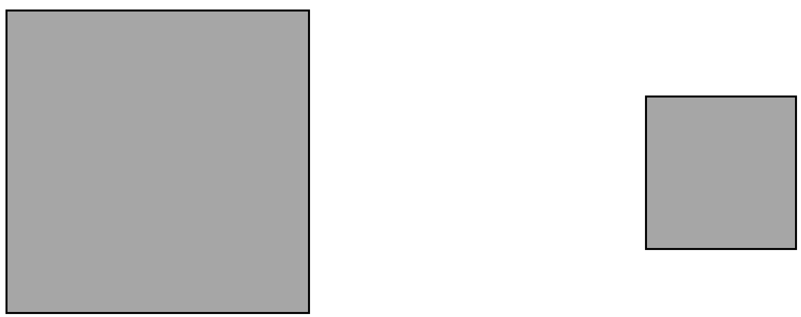
- «Ορισμός» του Ι. Νεύτωνα (17^{ος} αιώνας μ.Χ.)
  - *"By **number** we understand not so much a multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity to another Quantity of the same kind, which we take for Unity"*
  - *Με τον όρο αριθμό εννοούμε όχι τόσο μια πολλαπλότητα μονάδων,* όσο τον αφηρημένο Λόγο μιας οποιαδήποτε Ποσότητας προς μια άλλη Ποσότητα του ίδιου είδους, την οποία λαμβάνουμε ως μονάδα
- Παρατηρήστε ότι ο Νεύτωνας αντικρούει πολύ προσεκτικά την αριστοτέλεια άποψη, πολλούς αιώνες αργότερα

Ο αριθμός ως εργαλείο

Αριθμοί και φυσικά μεγέθη

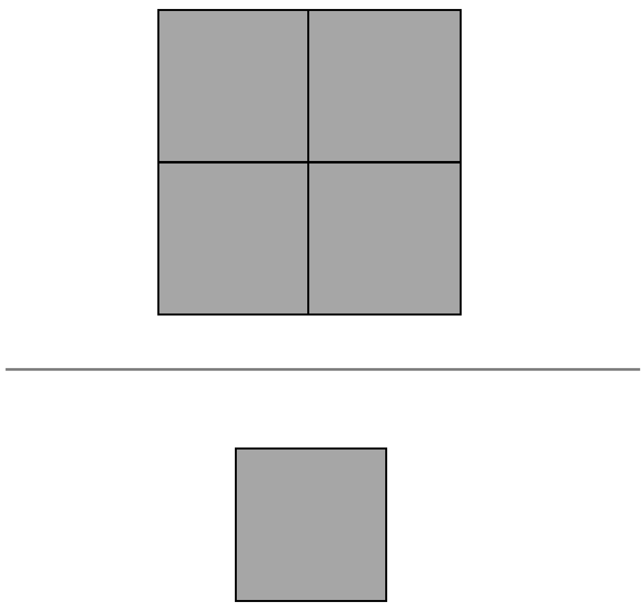
Μέγεθος: Επιφάνεια (Ι)

- Τι σχέση έχουν;



Μέγεθος: Επιφάνεια (II)

- Τι σχέση έχουν;



$$= \frac{4}{1}$$

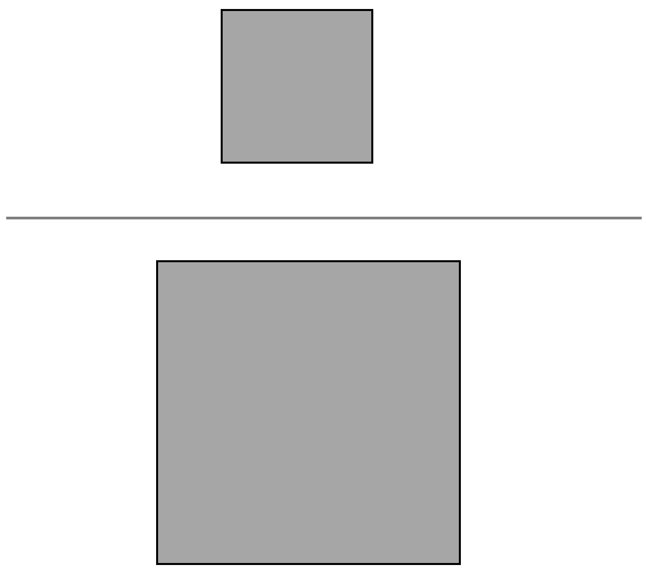
Ποια…

- …θεμελιώδης μαθηματική ενέργεια «υποκρύπτεται»;

- Μέτρηση
  - Πόσες φορές «χωράει» το … στο…
  - Ποιος είναι ο λόγος του … προς το …

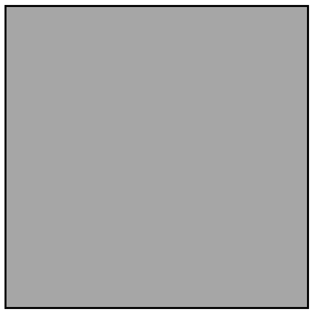
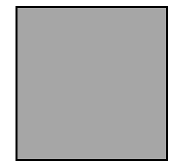
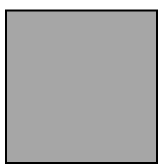
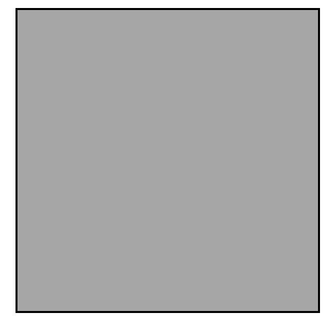
Μέγεθος: Επιφάνεια (ΙΙΙ)

- Λόγος, ή «πόσες φορές χωράει»;



$$= \frac{1}{4}$$

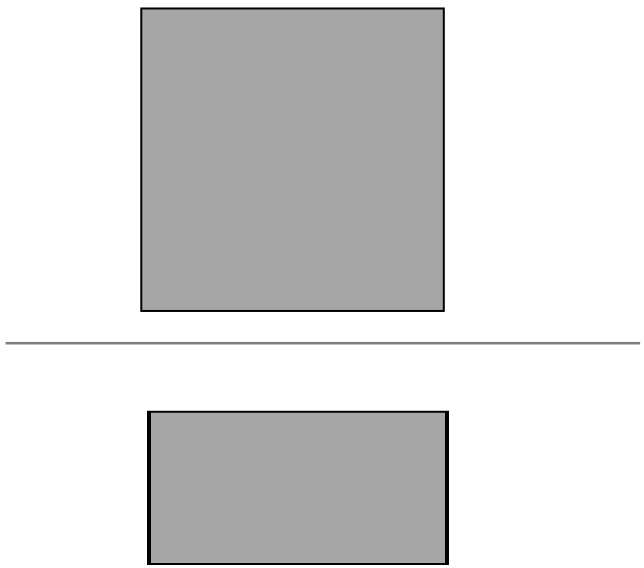
Λόγος και πολλαπλασιαστικές σχέσεις

- Το  είναι 4πλάσιο του 
- Το  είναι το ένα τέταρτο του 

➢ Ποιο παίζει το ρόλο της μονάδας αναφοράς (μέτρησης) κάθε φορά;

Μέγεθος: Επιφάνεια (IV)

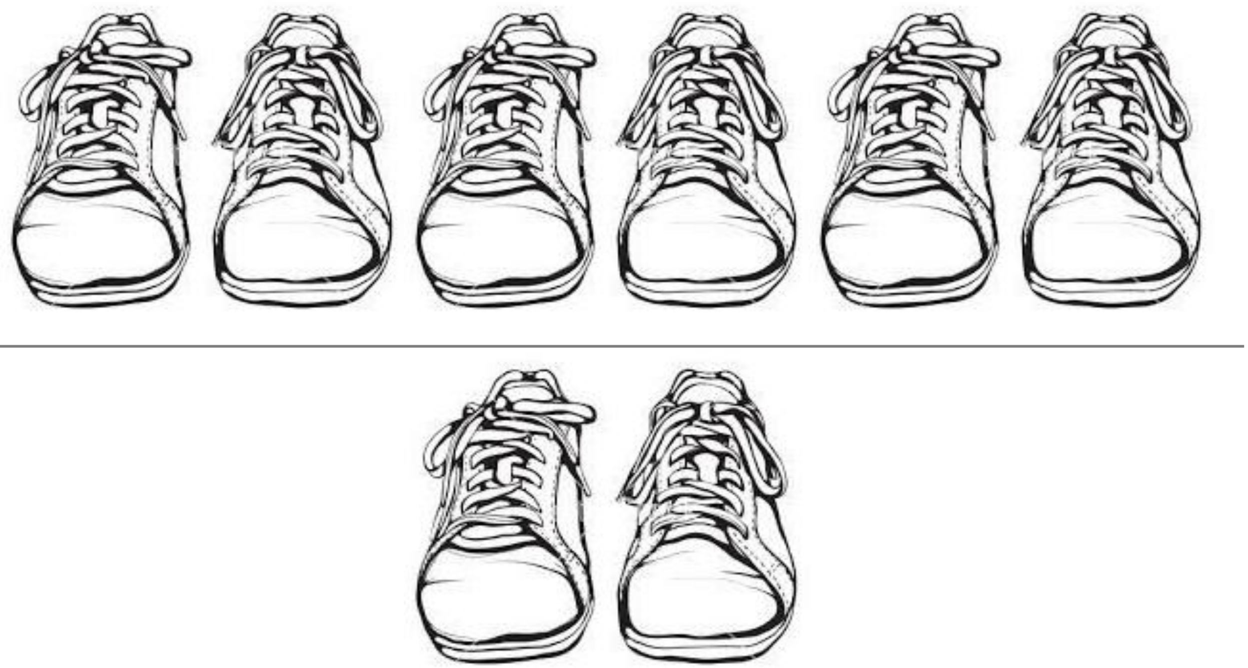
- Τι σχέση έχουν;



$$= \frac{2}{1}$$

Μέγεθος: Πλήθος (I)

- Τι σχέση έχουν;



$$= \frac{3}{1}$$

➢ Πόσα ζευγάρια παπούτσια;

Μέγεθος: Πλήθος (ΙΙ)

- Τι σχέση έχουν;

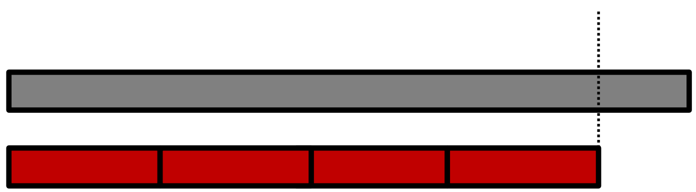
$$= \frac{6}{1}$$

➢ Πόσα παπούτσια;

Μέγεθος: Μήκος (Ι)

- Τι σχέση έχουν;

- Μετρώ το μήκος του  με το 

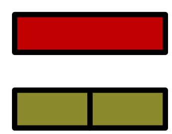


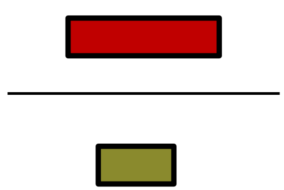
➢ Και κάτι περισσεύει…

Μέγεθος: Μήκος (ΙΙ)

- Τι σχέση έχει η μονάδα με αυτό που περίσσεψε;

- Μετρώ το μήκος του  με το μήκος του 



- Άρα,  $= \frac{2}{1}$

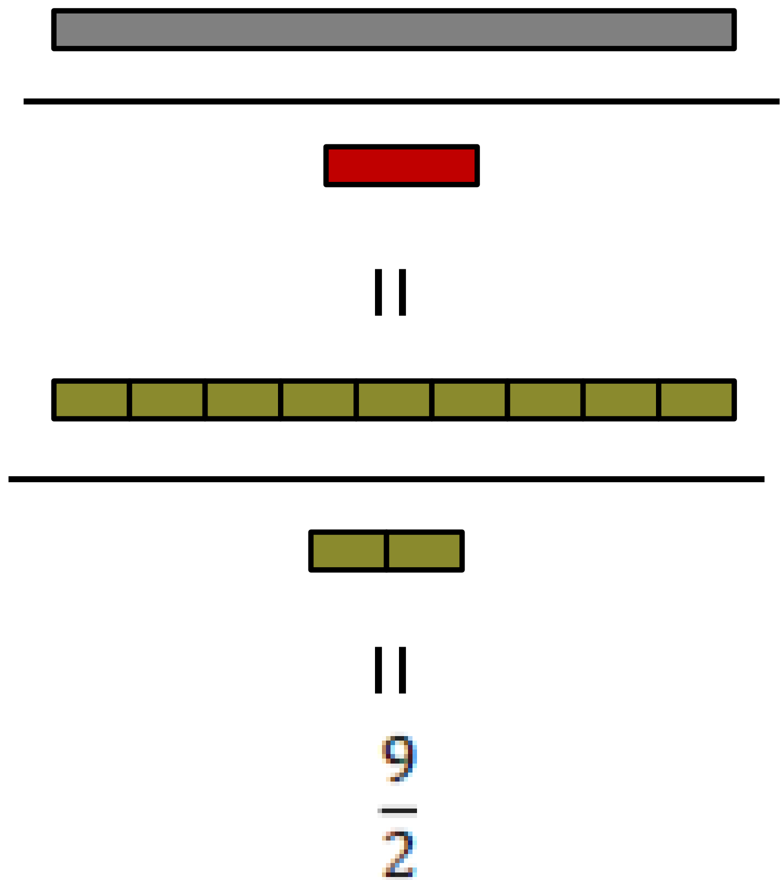
Μέγεθος: Μήκος (ΙΙΙ)

- Και, τελικά, τι σχέση έχει το αρχικό μήκος με την αρχική μονάδα;

  - 4  και 1  ➢ Συμμιγής αριθμός
  - 4  και «μισό»  ή 4,5  ➢ Δεκαδικός αριθμός

  - 9  ➢ Αλλαγή μονάδας
  - 9 «μισά» του  ➢ Σύνδεση με την αρχική μονάδα

Μέγεθος: Μήκος (ΙΙΙ)



Επιστρέφοντας στον ορισμό του Νεύτωνα

Με τον όρο αριθμό εννοούμε όχι τόσο μια πολλαπλότητα μονάδων, όσο τον αφηρημένο Λόγο μιας οποιαδήποτε Ποσότητας προς μια άλλη Ποσότητα του ίδιου είδους, την οποία λαμβάνουμε ως μονάδα.

- Διακρίνετε με ποιο τρόπο ενοποιεί τους φυσικούς αριθμούς με τους αριθμούς που γνωρίζουμε ως κλάσματα*;

---

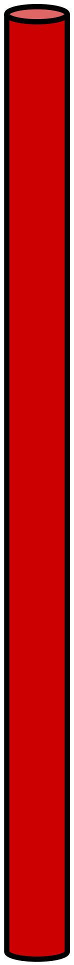
* Και όχι μόνο αυτούς

Συνοψίζοντας (Ι)

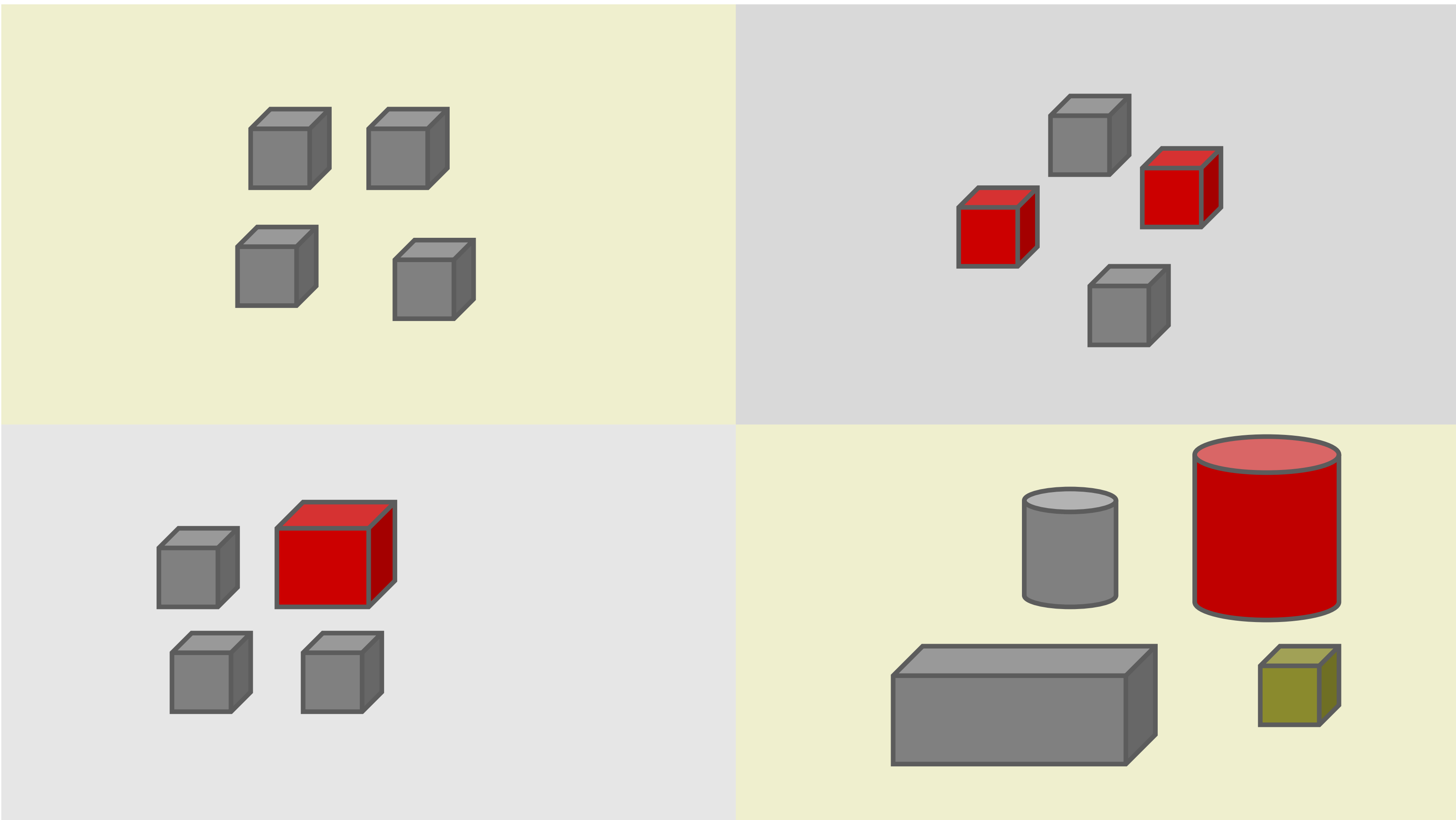
- Τόσο οι φυσικοί, όσο και οι ρητοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για την έκφραση του μεγέθους ποσοτήτων τόσο από διακριτά (πλήθος) όσο και από συνεχή μεγέθη (π.χ., μήκος, επιφάνεια, όγκος)
  - Καταμέτρηση
  - Μέτρηση

* Προς το παρόν

Μέτρηση: Τι ύψος έχει;



Καταμέτρηση: Πόσα είναι;



Καταμέτρηση: Πόσα είναι;

Καταμέτρηση: Πόσα είναι;

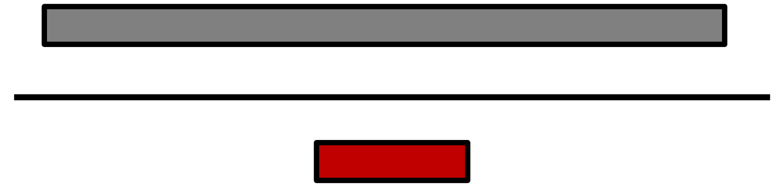
Συνοψίζοντας (ΙΙ)

- Η καταμέτρηση και η μέτρηση μπορούν να ερμηνευτούν με ένα ενιαίο τρόπο
  - Ενέργεια σύγκρισης με μια μονάδα ποσοτικοποίησης, στο τέλος της οποίας βρίσκουμε τη σχέση της ποσότητας που μας ενδιαφέρει (είτε διακριτής, είτε συνεχούς) με τη μονάδα ως λόγο δύο φυσικών* αριθμών
- Αυτό δίνει μια απάντηση στο ερώτημα γιατί οι φυσικοί και τα κλάσματα είναι εξίσου «κανονικοί» *αριθμοί*

* Προς το παρόν

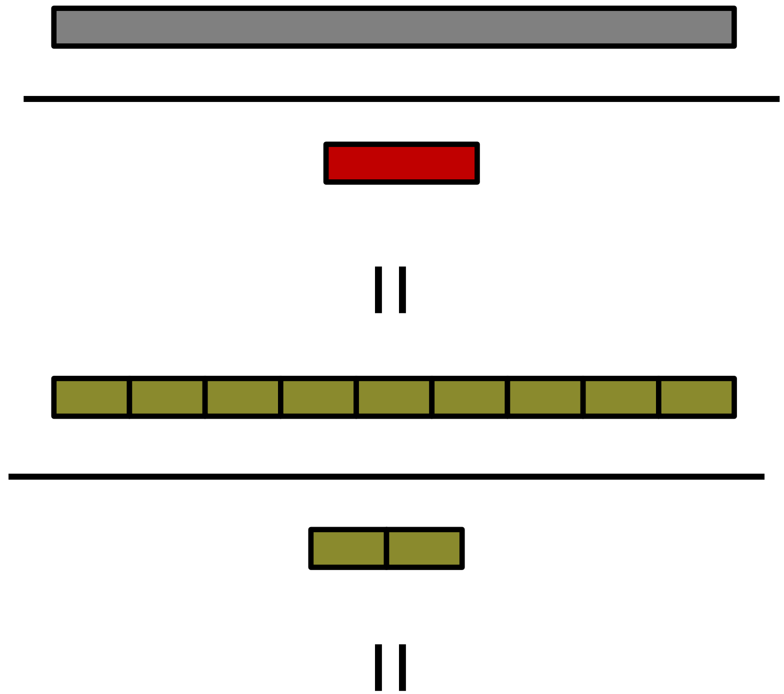
Ερώτημα

- Για να βρούμε το λόγο



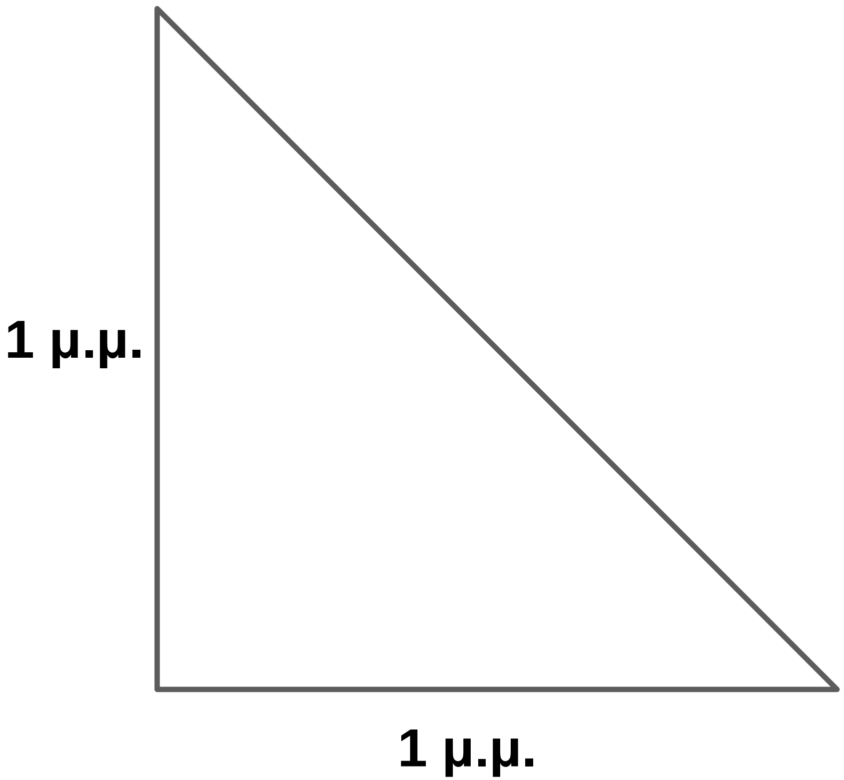
  - μετρήσαμε το με το
    - «περίσσεψε» το
  - μετρήσαμε το με το
    - δεν «περίσσεψε» τίποτα
    - Για το λόγο αυτό, μπορέσαμε να εκφράσουμε το το και το ως ακέραια πολλαπλάσια του και να βρούμε το λόγο τους με ακέραιους όρους
  - Είναι αυτό πάντα εφικτό;

Κοινή μονάδα, **σύμμετρα** μήκη



$$\frac{9}{2}$$

Ασύμμετρα μήκη



- Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν (προς μεγάλη τους απελπισία) ότι το μήκος της υποτείνουσας και το μήκος της κάθετης πλευράς σε αυτό το τρίγωνο (και όχι μόνο) δεν μπορούν να είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιας κοινής μονάδας.
- Σας θυμίζει κάτι;

Η μαθησιακή και διδακτική πλευρά

Αριθμός και φυσικά μεγέθη

Διαφορετικές όψεις του κλάσματος

Table 2 Five subconstructs of rational number

Part-whole	Understanding a rational number or fraction, m/n, as m equal parts taken out of n equal parts
Quotient	Understanding a rational number or fraction, m/n, as dividing a quantity m into n equal parts
Measurement	Understanding a rational number or fraction, m/n, as being m measures of the unit fraction, $1/n$, or m iterations of $1/n$
Ratio	Understanding a rational number or fraction, m/n, as a relationship between the two quantities m and n, where either $m + n = whole$ (part-part relationship) or $n = whole$ (part-whole relationship, see part-whole subconstruct)
Operator	Understanding a rational number or fraction, m/n, as a function that multiplicatively maps a given quantity to another quantity, i.e., it operates on the given quantity

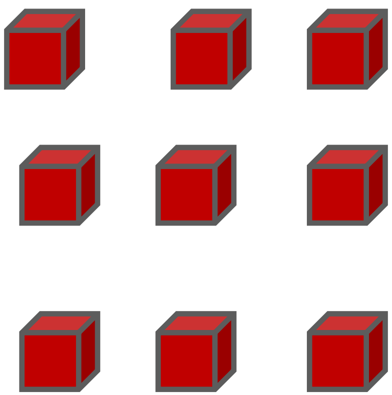
Based on Kieren (1980)

Wilkins & Norton, 2018, p. 3

Μέρος-όλο

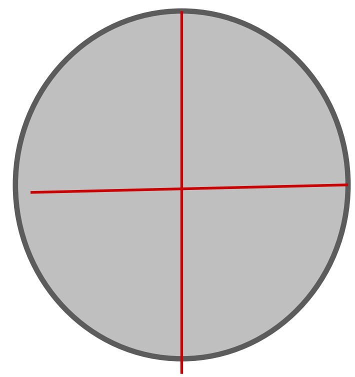
Διακριτές ποσότητες

- Βρες το 1/3 από τα κυβάκια



Συνεχείς ποσότητες

- Χρωμάτισε με κόκκινο τα 3/4 του κύκλου



➢ Για ποιο μέγεθος πρόκειται κάθε φορά;

Πηλίκο

Διακριτές ποσότητες

- Τέσσερα παιδιά μοιράστηκαν δίκαια 6 μεγάλα μαλακά μπισκότα. (Τι μέρος των μπισκότων θα πάρει κάθε παιδί;) Πόσα μπισκότα θα φάει κάθε παιδί;

Συνεχείς ποσότητες

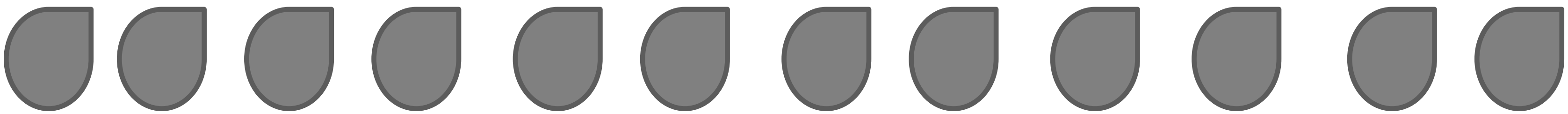
- Τέσσερα παιδιά μοιράστηκαν δίκαια αυτή τη σοκολάτα. (Τι μέρος της σοκολάτας πήρε κάθε παιδί;) Τι κομμάτι θα πάρει το κάθε παιδί;

Μέτρο/μέτρηση

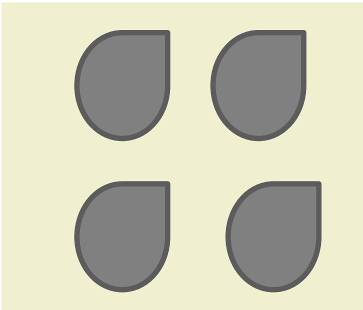
- Έφτιαξα μια σοκολάτα:
- Πόσα τέτοια κομμάτια μπορώ να βγάλω από αυτή τη σοκολάτα;
- Τι σχέση έχει το με τη ;

Μέτρο/ μέτρηση

- Έφτιαξα αυτά τα σοκολατάκια:



- Πόσες τέτοιες συσκευασίες μπορώ να φτιάξω;



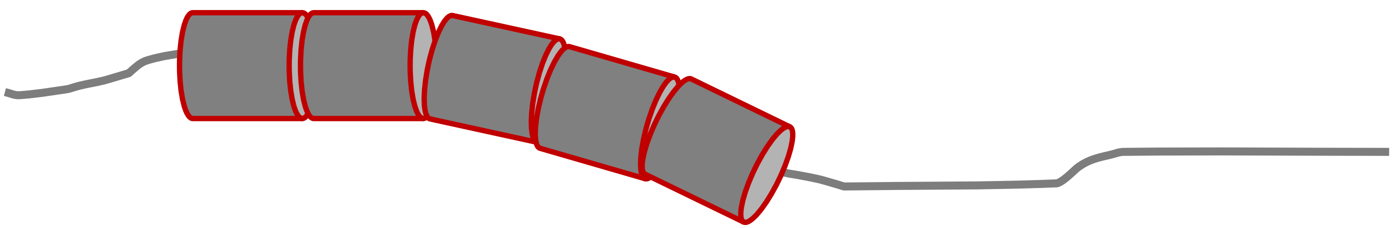
- Τι σχέση έχει η ποσότητα της συσκευασίας με τη συνολική ποσότητα από σοκολατάκια;

Μέτρο/μέτρηση

- Αν αυτό το κομμάτι  είναι το 1/6 του ολόκληρου ραβδιού, μπορείς να μου δείξεις ποιο είναι το ολόκληρο ραβδί;

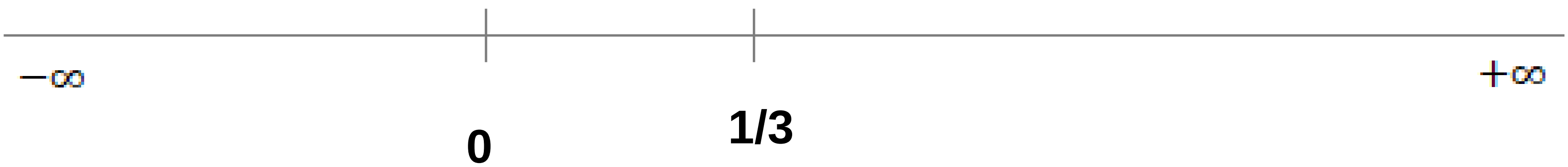
Μέτρο/μέτρηση

- Στην εικόνα φαίνεται το 1/6 των χαντρών από ένα κομπολόι. Πόσες χάντρες έχει ολόκληρο το κομπολόι;

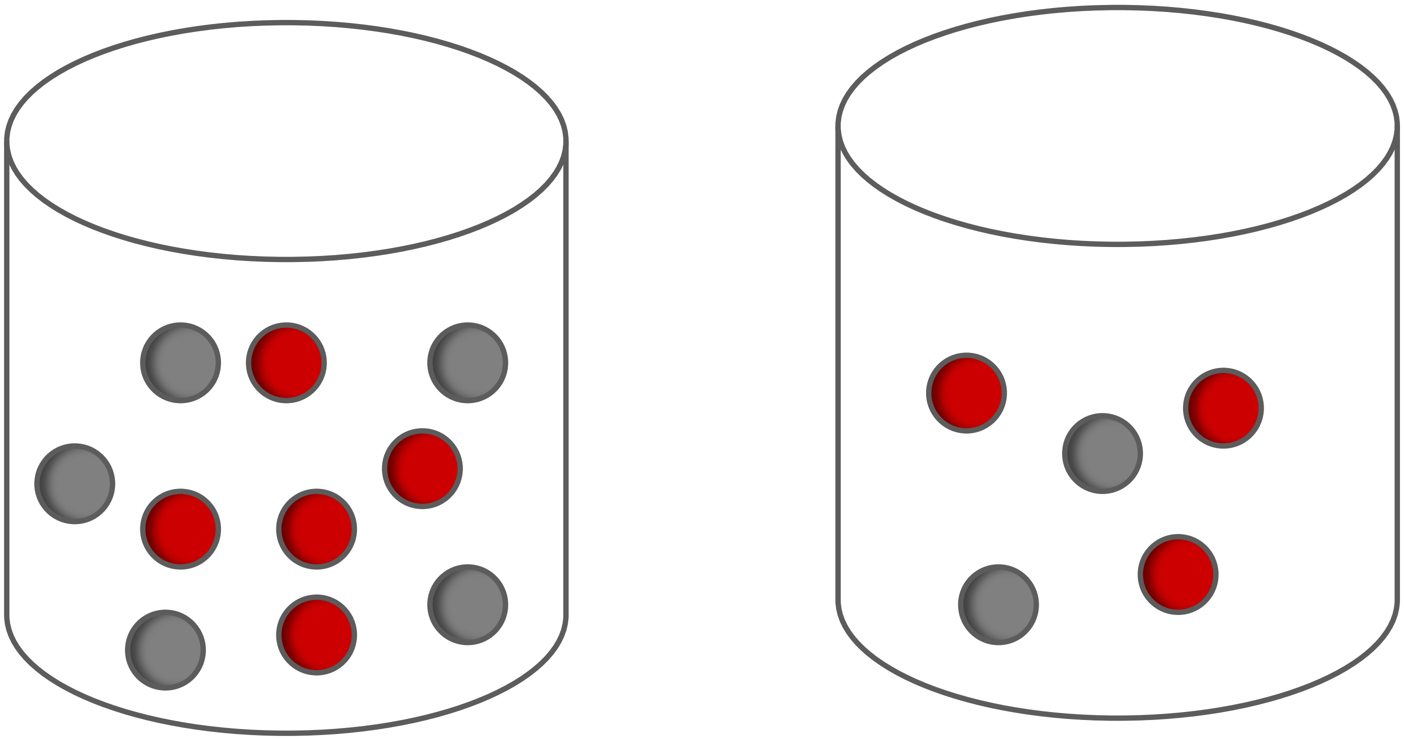


Μέτρο/μέτρηση

- Σε ποιο σημείο της παρακάτω αριθμογραμμής βρίσκεται το 2/3; Το 1; Το 5/3;



Λόγος



- Αν τραβήξεις κόκκινο, κερδίζεις. Από ποιο δοχείο προτιμάς να τραβήξεις;

Σχέσεις μέρους-όλου

- Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα μπορούν να ληφθούν υπόψη οι σχέσεις
  - των κόκκινων του 1ου δοχείου με το σύνολο των στοιχείων του 1ου δοχείου
    - Ο λόγος $K_1 / (K_1 + M_1)$
  - των κόκκινων του 2ου δοχείου με το σύνολο των στοιχείων του 2ου δοχείου
    - Ο λόγος $K_2 / (K_2 + M_2)$
- … και να συγκριθούν μεταξύ τους

Σχέσεις μέρους-μέρους

- … μπορούν να ληφθούν υπόψη οι σχέσεις μεταξύ
  - των κόκκινων του 1ου δοχείου με τα μαύρα του 1ου δοχείου
    - Ο λόγος K_1 / M_1
  - των κόκκινων του 2ου δοχείου με τα μαύρα του 2ου δοχείου
    - Ο λόγος K_2 / M_2
- … και να συγκριθούν μεταξύ τους

Σημαντική επισήμανση για το λόγο

- Ο λόγος δύο ποσοτήτων του ίδιου είδους είναι καθαρός αριθμός
- Ο λόγος δύο ποσοτήτων διαφορετικού είδους δεν είναι καθαρός αριθμός.
  - Σε αυτή την περίπτωση, αναδύεται μια νέου είδους ποσότητα
    - Εντατικές ποσότητες

Παράδειγμα

- Σε ένα δοχείο χωρητικότητας 100ml διαλύουμε 3 κ.γ. ζάχαρη. Σε ένα άλλο ποτήρι χωρητικότητας 200ml διαλύουμε 5 κ.γ. ζάχαρη. Σε ποιο ποτήρι το διάλυμα είναι πιο γλυκό;
- Συγκρίνουμε λόγους ποσοτήτων διαφορετικού είδους
  - Νέο μέγεθος: Περιεκτικότητα σε ζάχαρη («γλυκύτητα») με μονάδες μέτρησης κ.γ. (ζάχαρης) / ml (νερού)

Τελεστής

- Η πραγματική απόσταση δύο πόλεων είναι 120χλμ. Αν στο χάρτη η απόσταση είναι 3 εκ., ποια είναι η κλίμακα του χάρτη;

Τελεστής

- Ο Κώστας βρήκε αυτή τη συνταγή για κουλουράκια, αλλά θέλει να φτιάξει τη μισή ποσότητα. Ξαναγράψτε τη συνταγή για την ποσότητα που θέλει ο Κώστας.

1 πακέτο μαργαρίνη (των 250 γραμ.)
1 κτγ κανέλα σκόνη
200 γραμ. νισεστέ
450-500 γραμ. αλεύρι ΓΟΧ
3 κουταλιές της σούπας ζάχαρη κρυσταλλική
1 κάψουλα βανίλια
1 φακελάκι Baking Powder
200 γραμ. ζάχαρη άχνη
2 κτγ κανέλα

Τελεστής

- «Μηχανές» κλασμάτων

Γενικά:

- Όταν τα κλάσματα συνδέονται με φυσικά μεγέθη (σε «πραγματικές» καταστάσεις και με εμπράγματες/εικονικές αναπαραστάσεις), είναι πιο προσιτά στα παιδιά.
- Αυτό δε σημαίνει ότι όποια κατανόηση έχουν τα παιδιά για τα κλάσματα σε τέτοια πλαίσια μεταφέρονται αυτόματα στο πλαίσιο των συμβολικών αναπαραστάσεων
- Δυσκολίες εμφανίζονται και στα «πραγματικά πλαίσια»
  - Ποιο είναι το επίμαχο μέγεθος;
  - Ποια είναι η μονάδα αναφοράς;

Δυσκολίες

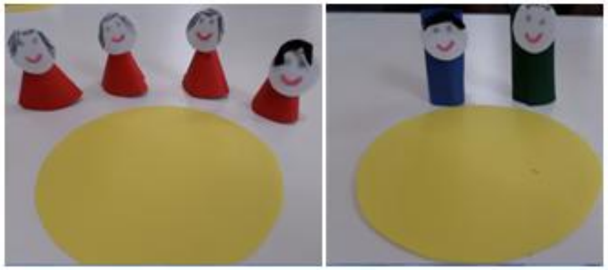
- Όταν οι αριθμοί συνδέονται με φυσικά μεγέθη
  - συχνά τα φυσικά μεγέθη συγχέονται με τα φυσικά αντικείμενα
  - διαφορετικά φυσικά μεγέθη συγχέονται μεταξύ τους

Ποιό είναι το επίμαχο μέγεθος; (I)

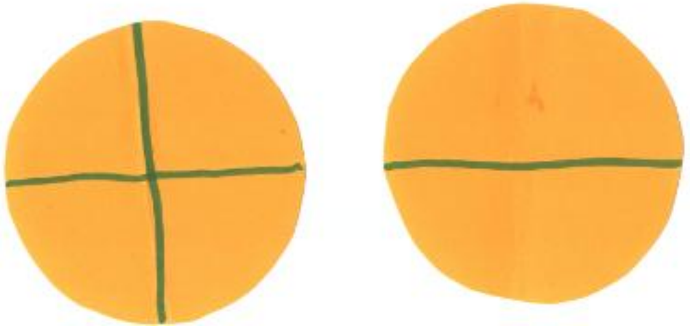
- Ποιος έχει περισσότερα χρήματα;

Ποιό είναι το επίμαχο μέγεθος; (ΙΙ)

- Εδώ είναι μια παρέα κοριτσιών και μια παρέα αγοριών. Θα μοιραστούν την τούρτας δίκαια.



- Μπορείς να βοηθήσεις τα κορίτσια να μοιραστούν την τούρτα τους; Μπορείς να βοηθήσεις τα αγόρια;



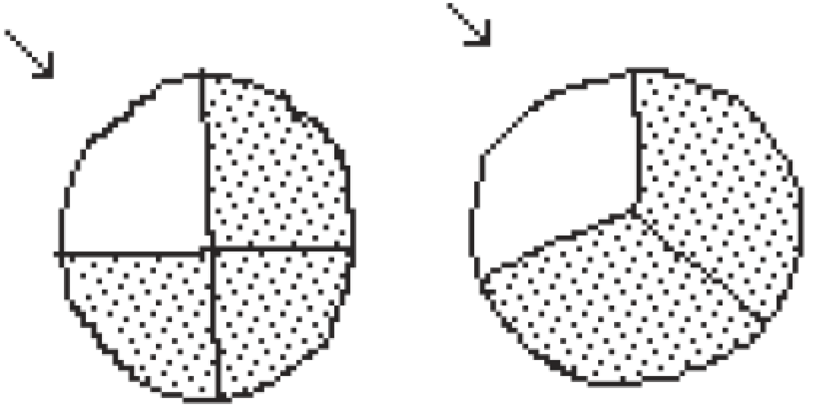
- Ποιοι θα φάνε μεγαλύτερο κομμάτι τούρτας, τα κορίτσια ή τα αγόρια;

➢ Τα κορίτσια γιατί:
  - ➢ *Τα κορίτσια είναι περισσότερα*
  - ➢ *Τα κομμάτια είναι περισσότερα*

Ποιό είναι το επίμαχο μέγεθος; (III)

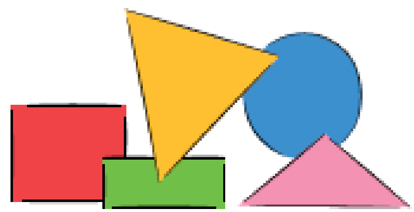
- Τα 2/3 and 3/4 *είναι ίσα, γιατί και στα δύο λείπει ένα κομμάτι*

Wyatt, $4^{η}$ τάξη



Ποιό είναι το επίμαχο μέγεθος; (ΙΙΙ)

- Είναι σωστό;



Τα $\frac{2}{5}$ από το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων είναι τρίγωνα.

Μα τα σχήματα, από τον ορισμό του κλάσματος, δεν πρέπει να είναι ίσα;

Ματίνα, μαθηματικός

Ποια είναι η μονάδα αναφοράς; (I)

- Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4 της πίτσας της. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2 της πίτσας του. Μπορείς να ξέρεις ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;
- Ο φούρναρης της γειτονιάς πουλούσε την τυρόπιτα 1,5€. Αύξησε την τιμή της κατά 10% αλλά παρατήρησε πτώση της πελατείας. Έτσι αποφάσισε να ρίξει την τιμή κατά 10%. Πόσο κοστίζει τώρα η τυρόπιτα;

Η μαθησιακή πλευρά

Ο αριθμός ως αντικείμενο

Αριθμητικά συστήματα: Το σύνολο των ρητών αριθμών

Ρητοί αριθμοί στα σχολικά μαθηματικά

- Ένας αριθμός ρ είναι ρητός αν είναι ή μπορεί να μετατραπεί στη μορφή ρ = κ/λ, όπου τα κ, λ είναι ακέραιοι και $\lambda \neq 0$
  - $Q = \{ \frac{\kappa}{\lambda} : \kappa \in Z, \lambda \in Z^* \}$ *

* Προς το παρόν

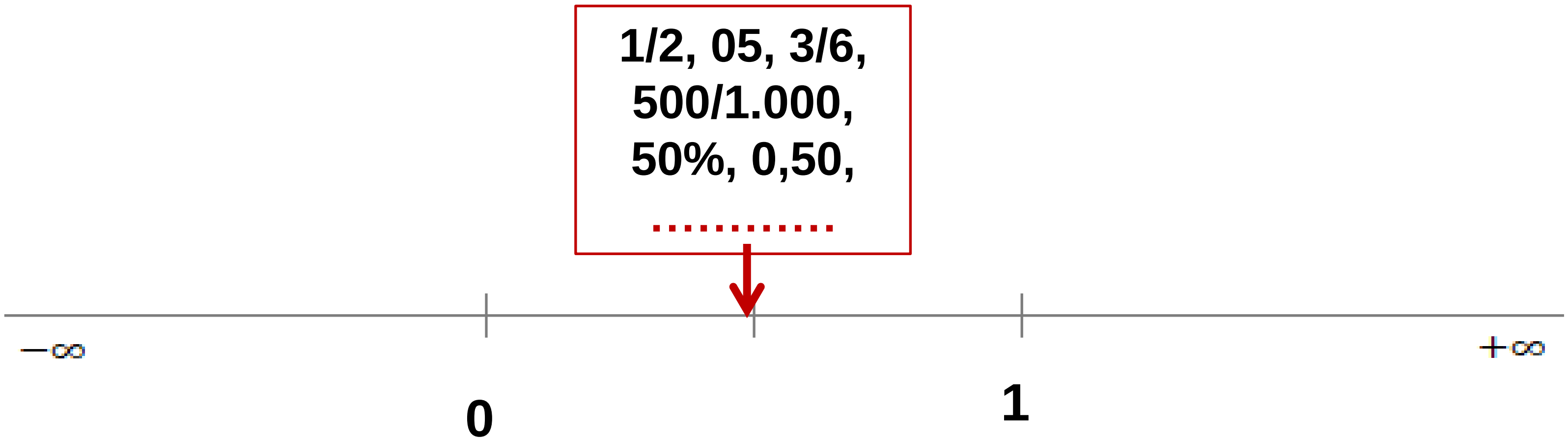
Ρητοί αριθμοί στα σχολικά μαθηματικά

- Με βάση αυτόν τον ορισμό, ποιος είναι ρητός;
  - Το 1/2; Το -0,10;
  - Το 0,25/3;
  - Το 50%;
  - Το 0,222….; Το 1,646464…..;

  - Υπάρχουν *αριθμοί* που δεν μπορούν να μετατραπούν στην παραπάνω μορφή;

Ρητοί αριθμοί στα σχολικά μαθηματικά

- Με βάση το «σχολικό» ορισμό, τι γίνεται με το 1/2, το 0,5, το 3/6, το 500/1.000, το 50%, το 0,50;
  - Τι πρόβλημα μας δημιουργεί αυτό;
  - Πώς «λύνεται»;
    - Το ανάγωγο κλάσμα



Αποδείξεις

Σε επίπεδο Γυμνασίου και Λυκείου

Μετατροπή περιοδικών δεκαδικών σε κλασματική μορφή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί: (α) $0,\overline{2}$ και (β) $1,\overline{64}$.

Λύση

(α) Θέτουμε $x = 0,\overline{2}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x &= 0,222\ldots \\ 10x &= 2,222\ldots \\ 10x &= 2+0,222\ldots \\ 10x &= 2+x \\ (10-1)x &= 2 \\ 9x &= 2 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $0,\overline{2}=\frac{2}{9}$

(β) Αν $x = 1,\overline{64}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x &= 1,646464\ldots \\ 100x &= 164,646464\ldots \\ 100x &= 164+0,646464\ldots \\ 100x &= 164+x-1 \\ (100-1)x &= 163 \\ 99x &= 163 \\ x &= \frac{163}{99} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $1,\overline{64}=\frac{163}{99}$

Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου
http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-A200/426/2866,10953/

Υπάρχουν μη ρητοί αριθμοί;

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$ όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 60-61) και ο κ^2 είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής κ = 2μ. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\mathbf{\kappa^2 = 2\lambda^2}$$

$$\mathbf{(2\mu)^2 = 2\lambda^2}$$

$$\mathbf{4\mu^2 = 2\lambda^2}$$

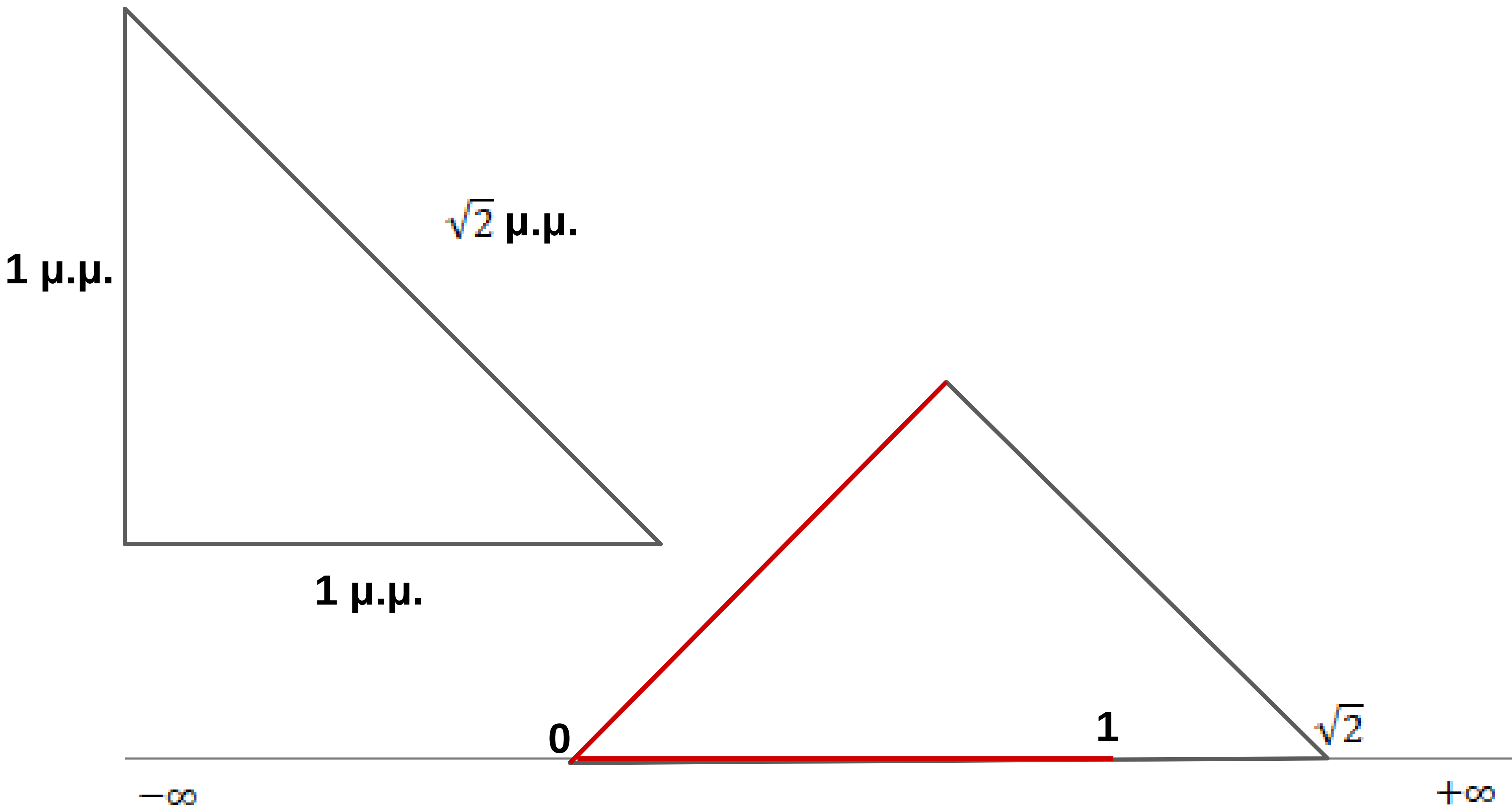
$$\mathbf{\lambda^2 = 2\mu^2}$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ **δεν είναι ανάγωγο** (άτοπο).

Βιβλίο Άλγεβρα ς Α΄ Λυκείου,
ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A100/490/3186,12918/

Ασύμμετρα μήκη, άρρητοι αριθμοί



Αποδείξεις

Σε επίπεδο Γυμνασίου και Λυκείου

Η μαθησιακή πλευρά

Δυσκολίες με τις πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις των ρητών

Διαφορετικές αναπαραστάσεις, διαφορετικοί αριθμοί

- Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 3/8 και το 5/8;

- *Ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8 έχει μόνο έναν αριθμό, το 4/8. Αλλά μπορεί να είναι και ο 4,0/8, έτσι δεν είναι; Και μπορεί να είναι κι άλλοι… το √16/4…είναι πάρα πολλοί αριθμοί.*

Ελένη, Γ΄ Γυμνασίου

- *Ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί. Γιατί, αν απλοποιήσεις το 2/4, παίρνεις το 1/2 και αυτό δεν είναι ανάμεσα!*

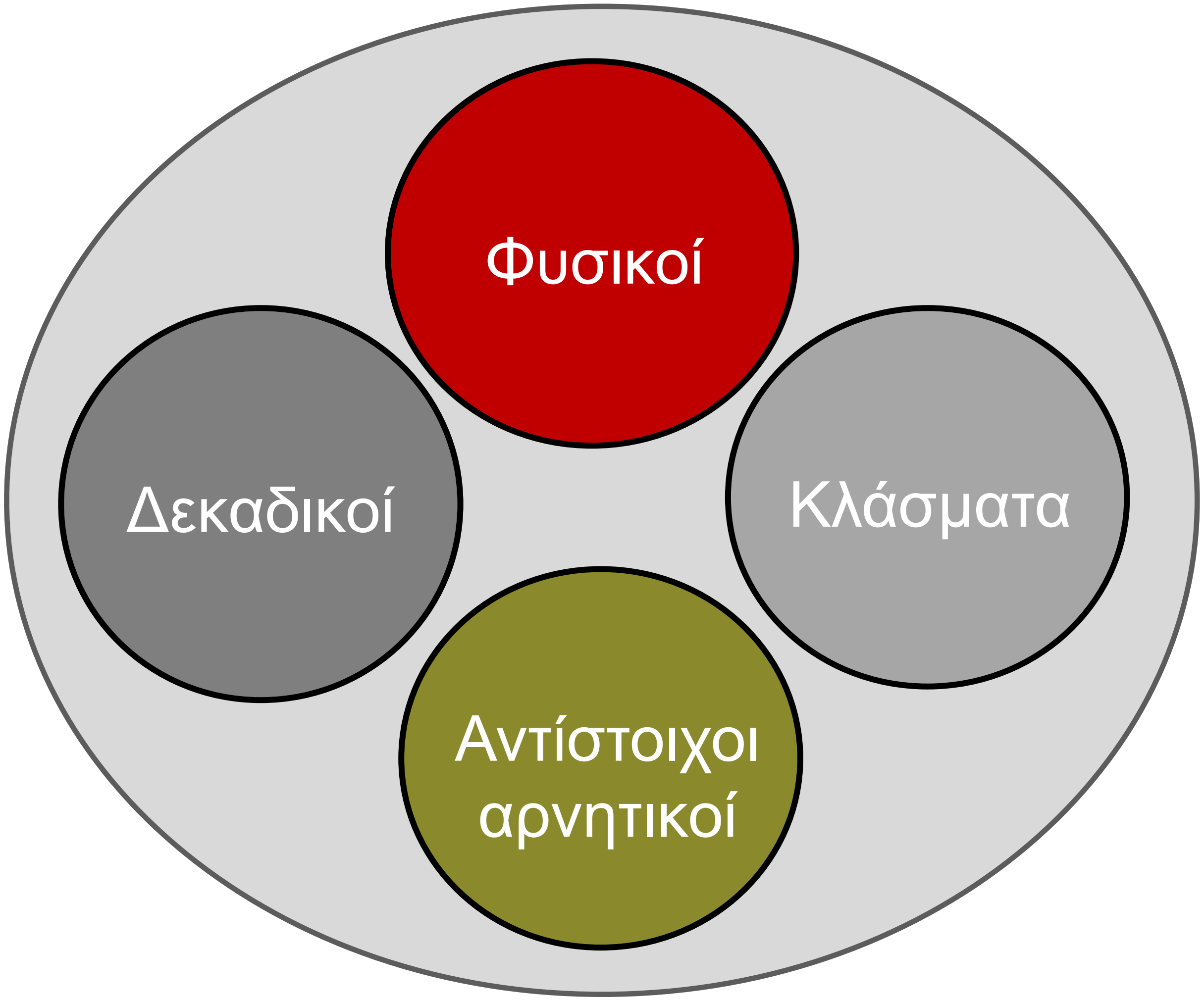
Άγγελος, Γ΄ Γυμνασίου

Διαφορετικές αναπαραστάσεις, διαφορετικοί αριθμοί

- Ο Πάνος (Γ΄ Γυμνασίου) δηλώνει ότι:
  - Υπάρχουν 9 αριθμοί ανάμεσα στους 0,001 και 0,01.
  - Υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα στους 3/8 and 5/8.
- Μετά από παρακίνηση, εξηγεί:

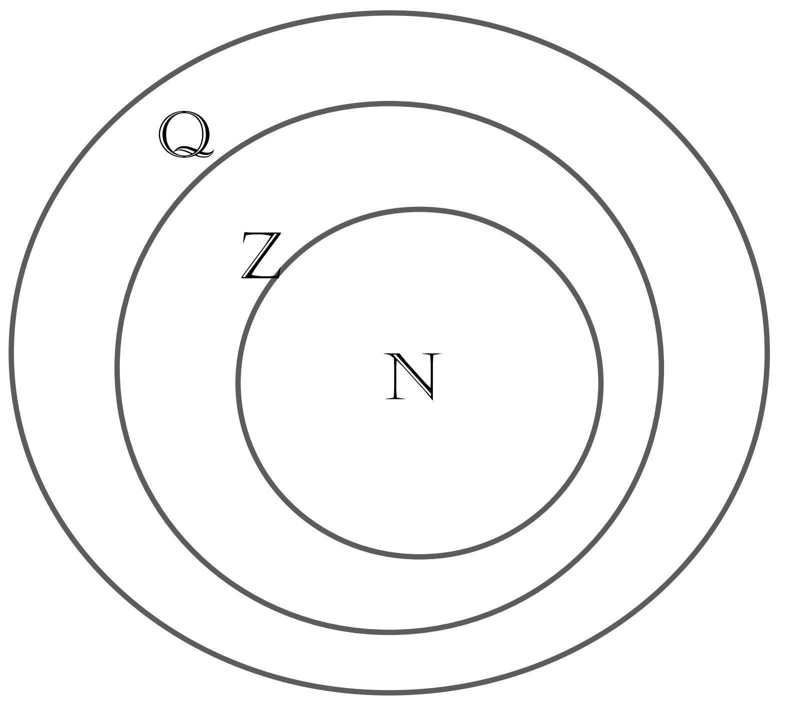
Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,01 υπάρχουν 9 αριθμοί. Ή δέκα – δεν είμαι σίγουρος γι'αυτό. Αλλά αν τους κάνεις κλάσματα, τότε μπορείς να βρεις περισσότερους αριθμούς ανάμεσα, άπειρους αριθμούς.

Το σύνολο των ρητών;



Αναπαράσταση του $\mathbb{Q}$ με διάγραμμα Venn

- Η αναπαράσταση αυτή αναδεικνύει τη σχέση συνόλου/υποσυνόλου μεταξύ των $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$



Χωρίς σχόλιο

Όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί, δηλαδή οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς, σχηματίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών

(Βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, Έκδοση ΙΖ΄, 2003, σελ.298)

Η μαθησιακή πλευρά

Δυσκολίες με τις πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις των ρητών

Σχέσεις στο σύνολο των ρητών

Ισοδυναμία, Διάταξη και Πράξεις

Χρήσιμοι ορισμοί

Όχι πολύ αυστηρά

Σχέση ισοδυναμίας

- Μια σχέση ($\cong$) μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου X είναι σχέση ισοδυναμίας ανν έχει τις παρακάτω ιδιότητες για οποιαδήποτε x, y, z $\in$X
  - x $\cong$ x (ανακλαστική;)
  - Αν x $\cong$ y τότε και y $\cong$ x (συμμετρική)
  - Αν x $\cong$ y και y $\cong$ z, τότε x $\cong$ z (μεταβατική)

- «Μεταφράστε» τις ιδιότητες για τη σχέση '=' στο $\mathbb{N}$

Σχέση διάταξης

- Μια σχέση (☾) μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου X είναι σχέση διάταξης ανν έχει τις παρακάτω ιδιότητες για οποιαδήποτε x, y, z $\in$X
  - x☾x (ανακλαστική)
  - Αν x☾y και y☾x, τότε x=y (αντισυμμετρική)
  - Αν x☾y και y☾z, τότε x☾z (μεταβατική)
  - Αν επιπλέον για τη (☾) ισχύει ότι για οποιαδήποτε x,y $\in$X, είτε x☾y, είτε y☾x, τότε η (☾) λέγεται πλήρης διάταξη

- «Μεταφράστε» τις ιδιότητες για τη σχέση '$\leq$' στο $\mathbb{N}$

Πράξη

- Δοθέντος ενός συνόλου X, μπορούμε να «ορίσουμε» μια πράξη $*$ ως μια απεικόνιση (συνάρτηση) που συνδυάζει δύο στοιχεία x,y του X για να παράξει ένα τρίτο αντικείμενο, που το συμβολίζουμε με $x * y$.
  - Στην περίπτωση που το $x * y$ είναι και αυτό στοιχείο του X, λέμε ότι το X είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$.

➢ Ποιες είναι οι συνήθεις πράξεις στο $\mathbb{N}$;

Ιδιότητες που μπορεί να έχει ή να μην έχει μια πράξη επί ενός συνόλου X

- Προσεταιριστική
  - $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ $\alpha, \beta, \gamma \in X$
- Αντιμεταθετική
  - $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ $\alpha, \beta \in X$
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου
  - Υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο $e \in X$ τέτοιο ώστε $e * \alpha = \alpha * e = \alpha$
- Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου
  - Για κάθε $\alpha \in X$, υπάρχει κάποιο $\beta \in X$ τέτοιο ώστε $\alpha * \beta = e = \beta * \alpha$

Η (συνήθης) πρόσθεση στο σύνολο των φυσικών

- Σκεφτείτε το $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη πράξη της πρόσθεσης (+)
  - Είναι το $\mathbb{N}$ κλειστό ως προς την πρόσθεση; ☑
  - Είναι η πρόσθεση αντιμεταθετική; ☑
  - Είναι η πρόσθεση προσεταιριστική; ☑
  - Υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο; ☑
  - Υπάρχει για κάθε ν $\in \mathbb{N}$ κάποιο κ $\in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ν+κ = 0 = κ+ν; ☒
    - Υπάρχει ο αντίθετος του ν;

Ο (συνήθης) πολλαπλασιασμός στο σύνολο των φυσικών

- Σκεφτείτε το $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού (·)
  - Είναι το $\mathbb{N}$ κλειστό ως προς τον πολ/σμό; ☑
  - Είναι ο πολ/σμός αντιμεταθετικός; ☑
  - Είναι ο πολ/σμός προσεταιριστικός; ☑
  - Υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο; ☑
  - Υπάρχει για κάθε ν $\in \mathbb{N}$ κάποιο κ $\in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ν.κ = 1 = κ.ν; ☒
    - Υπάρχει ο αντίστροφος του ν;

Στο $\mathbb{N}$ γνωρίζουμε και την αφαίρεση και τη διαίρεση…

- …Γιατί μιλάμε εδώ μόνο για πρόσθεση και πολλαπλασιασμό;

- Αξιοποιείστε την εμπειρία σας με τους αρνητικούς και τους κλασματικούς αριθμούς για να ερμηνεύσετε πού αποσκοπεί ή εισαγωγή της έννοιας του αντίθετου (για την πρόσθεση) και του αντίστροφου (για τον πολλαπλασιασμό)
  - Η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση του αντίθετου
    - $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
  - Η διαίρεση μετατρέπεται σε πολ/σμό με τον αντίστροφο
    - $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$

Οι νόμοι της Αριθμητικής στο N

- Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - της πρόσθεσης
    - α+β=β+α
  - του πολλαπλασιασμού
    - α.β=β.α
- Προσεταιριστική ιδιότητα
  - της πρόσθεσης
    - (α+β)+γ=α+(β+γ)
  - του πολλαπλασιασμού
    - (α.β).γ= α.(β.γ)
- Επιμεριστική ιδιότητα
  - του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
    - α.(β+γ)=α.β+α.γ

Γιατί μας ενδιαφέρουν οι συγκεκριμένες ιδιότητες στις πράξεις;

- Σκεφτείτε μια πρωτοβάθμια εξίσωση
  - $5+4x+3 = 2x+6+1+2$
- Θα μπορούσαμε να «προχωρήσουμε» τις πράξεις, αν δεν ίσχυαν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα;
- Θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς x, αν δεν υπήρχαν ο αντίθετος και ο αντίστροφος ενός αριθμού;
- Έχει λύση η εξίσωση στο $\mathbb{N}$;

Από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Q}$

- Η ανάγκη για μέτρηση επέβαλε την εισαγωγή των λόγων $\frac{\mu}{\nu}$ με μ, ν$\in\mathbb{N}$, ν≠0
- Η ανάγκη για την επίλυση εξισώσεων επέβαλε την εισαγωγή των αντίθετων των (θετικών) ρητών, δηλ. αυτών που γνωρίζουμε ως αρνητικούς αριθμούς
    - Ο αντίθετος του ν αναπαρίσταται γεωμετρικά ως το συμμετρικό του σημείο ως προς το 0.
- Το «ενδιάμεσο» σύνολο που περιλαμβάνει τους φυσικούς και τους αντίθετούς τους είναι το σύνολο των ακεραίων που συμβολίζεται ως $\mathbb{Z}$

Χρήσιμοι ορισμοί

Όχι πολύ αυστηρά

Ο μαθηματικός ορισμός για τον ρητό (κάπως περιγραφικά)

- Θεωρούμε το σύνολο Κ όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β), όπου α$\in\mathbb{Z}$ και β $\in\mathbb{Z}^*$ (δηλ., α, β: ακέραιοι και β$\neq 0$)
- Ορίζουμε σε αυτό το σύνολο μια σχέση ≅ ως εξής: (α,β) $\cong$ (γ,δ) ανν α.δ=β.γ
  - Αποδεικνύεται ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας
- Για οποιοδήποτε ζεύγος (α,β), προκύπτει μια κλάση ισοδυναμίας που περιλαμβάνει το (α,β) και όλα τα ζευγάρια που είναι ισοδύναμα με το (α,β) ως προς τη συγκεκριμένη σχέση.
- Το σύνολο των ρητών ορίζεται ως το σύνολο όλων των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας

Ο μαθηματικός ορισμός για τον ρητό (κάπως περιγραφικά)

- Με απλούστερα λόγια:
  - Διαλέγουμε ένα κλάσμα, π.χ., το 1/2 που αντιστοιχεί στο ζεύγος (1,2)
  - Μαζεύουμε όλα τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το 1/2 σε ένα σύνολο
    - Με μορφή ζευγών: $\{(1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$
  - Αυτό το σύνολο είναι ο ρητός αριθμός που αντιστοιχεί στο 1/2 και όλα τα ισοδύναμά του
- Το σύνολο των ρητών περιλαμβάνει όλα τα δυνατά σύνολα αυτής της μορφής, με κάθε ένα σύνολο να αντιστοιχεί σε ένα ανάγωγο κλάσμα και όλα τα ισοδύναμά του.

Οι ρητοί αριθμοί…

- … με βάση το μαθηματικό τους ορισμό, είναι πολύ «παράξενα» κατασκευάσματα.
  - Εξυπηρετούν «ενδομαθηματικούς» σκοπούς
    - Λύνουν το πρόβλημα του «σχολικού ορισμού»
    - Επεκτείνουν το σύνολο των ακεραίων
      - ….(-1,1), (0,1), (1,1), (2,1), …
    - Θα δούμε ότι, με βάση τις ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων, μπορούμε να ορίσουμε για τους ρητούς όλες τις σχέσεις που έχουμε στους ακέραιους (ισοδυναμία, διάταξη, πράξεις) με ένα συνεπή τρόπο.
- Με το συνήθη συμβολισμό στη συνέχεια.

Ισότητα και διάταξη στους ρητούς

- Σχέση ‘=’

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \leftrightarrow \alpha.\delta = \gamma.\delta$$

- Σχέση ‘≤’

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\gamma}{\delta} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha.\delta \leq \beta\gamma, \alpha\nu\ \beta\delta > 0 \\ \alpha.\delta \geq \beta\gamma, \alpha\nu\ \beta\delta < 0 \end{cases}$$

Πράξεις στους ρητούς

- Για οποιαδήποτε α, γ $\in \mathbb{Z}$, β, δ $\mathbb{Z}^*$ ορίζεται ως εξής …
  - …η πρόσθεση
    - $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$$
  - … ο πολλαπλασιασμός
    - $$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

Αποδεικνύεται ότι…

- … η σχέση ‘=‘ στους ρητούς είναι μια σχέση ισοδυναμίας
- … η σχέση ‘≤’ είναι μια σχέση ολικής διάταξης
  - Και κάτι παραπάνω*
- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στους ρητούς υπακούουν στις αρχές της αριθμητικής
  - Οι αποδείξεις προϋποθέτουν ότι τα αντίστοιχα ισχύουν στους φυσικούς**

*Το «κάτι παραπάνω» της διάταξης του $\mathbb{Q}$

- Αντίθετα με τη διάταξη στο $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Z}$, η διάταξη στο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνή
  - Ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο (άνισα) στοιχεία του $\mathbb{Q}$ υπάρχει πάντα ένα τρίτο στοιχείο του $\mathbb{Q}$
    - Έπεται ότι ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο (άνισα) στοιχεία του $\mathbb{Q}$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του $\mathbb{Q}$
  - Διαφορετικά, δεν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στο $\mathbb{Q}$
    - Ή, κάθε ρητός μπορεί να διαιρεθεί επ’άπειρο

**Παράδειγμα

- Ο πολλαπλασιασμός στους ρητούς είναι αντιμεταθετική πράξη:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}=\frac{\gamma.\alpha}{\delta.\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

Αφού ισχύει η αντιμετάθεση στον πολ/σμό ακεραίων

Τώρα έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο αριθμών, το $\mathbb{Q}$,...

- …το οποίο είναι εφοδιασμένο με πράξεις που διατηρούν τις ίδιες ιδιότητες που είχαν οι πράξεις στους φυσικούς
  - Επιπλέον, το $\mathbb{Q}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό
    - Κατά συνέπεια, από τις πράξεις με ρητούς αριθμούς προκύπτουν πάντα ρητοί αριθμοί
    - Προσοχή: δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το 0, γιατί ο αντίστροφος του 0 ως προς τον πολλαπλασιασμό δεν υπάρχει στο $\mathbb{Q}$

Επιπλέον

- Το $\mathbb{Q}$ περιλαμβάνει τους φυσικούς, που τώρα «συμπεριφέρονται» ως ρητοί
  - Π.χ., πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 1 και το 2;
  - Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 1/1 και το 2/1;

Από αυτή την άποψη

- Οι ρητοί είναι εξίσου «κανονικοί» αριθμοί με τους φυσικούς
  - Μια άλλου τύπου απάντηση στο αρχικό μας ερώτημα

Η μαθησιακή και διδακτική πλευρά

Ο αριθμός ως αντικείμενο

Ένα καλά τεκμηριωμένο εμπειρικό δεδομένο

- Οι μαθητές κάνουν συστηματικά λάθη στους ρητούς, ακριβώς στα σημεία στα οποία αυτοί διαφέρουν από τους φυσικούς

Συστηματικά λάθη

- Το 1/2 είναι μικρότερο από το 1/3
  - Γιατί το 2 είναι μικρότερο από το 3
- Το 0,28 είναι μεγαλύτερο από το 0,3
  - γιατί το 28 είναι μεγαλύτερο από το 3
- Ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει» και η διαίρεση «μικραίνει»
- Δεν υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσα στο 2/5 και στο 3/5 – ούτε ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006
- Πέντε από τρία δε γίνεται – άρα 3-5=5-3=2

Συστηματικά λάθη

- Το 1/2 είναι μικρότερο από το 1/3
  - Γιατί το 2 είναι μικρότερο από το 3
- Το 0,28 είναι μεγαλύτερο από το 0,3
  - γιατί το 28 είναι μεγαλύτερο από το 3
- Ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει» και η διαίρεση «μικραίνει»
- Δεν υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσα στο 2/5 και στο 3/5 – ούτε ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006
- Πέντε από τρία δε γίνεται – άρα 3-5=5-3=2

Μια ασύλληπτη καταγγελία έκανε ο βουλευτής [redacted] από το βήμα της Επιτροπής Κοινωνικών Υποθέσεων, όπου συζητείται το ασφαλιστικό νομοσχέδιο.

Ο [redacted] εντόπισε μια «γκάφα» στο άρθρο 39 στη β' παράγραφο λέγοντας πως υπάρχει λάθος στον υπολογισμό του κέρδους ενός ιδιώτη που συμμετέχει στο μέρισμα μιας εταιρείας. Συγκεκριμένα,
ανέφερε ότι ο τύπος για τον υπολογισμό των εισφορών που προβλέπει το νομοσχέδιο να πληρώσει ο μέτοχος μιας εταιρείας αντί πολλαπλασιασμού προβλέπει διαίρεση, με αποτέλεσμα κάποιος να πρέπει να πληρώσει
πολλαπλάσια ποσά σε σχέση με το κέρδος της εταιρείας.

«Ας υποθέσουμε ότι τα καθαρά κέρδη μιας ομόρρυθμης εταιρείας είναι 100.000 ευρώ και συμμετέχουν δύο εταίροι με συμμετοχή 50% έκαστος, τότε το ετήσιο εισόδημα του καθενός σχετικά με τον υπολογισμό των
ασφαλιστικών εισφορών θα είναι το πηλίκο της διαίρεσης του συνολικού μερίσματος της εταιρείας δια του ποσοστού συμμετοχής του καθενός. Στην πράξη δηλαδή θα έχουμε 100.000 ευρώ δια 50%, δηλαδή δια 0,5. Σύμφωνα με τα μαθηματικά του δημοτικού το 50% μας κάνει 50 εκατοστά, άρα 0,5. Η πράξη αυτή μας κάνει 200.000 ευρώ. Ο εν λόγω επιχειρηματίας έβγαλε 50.000 ευρώ κέρδος και εσείς θα του ζητήσετε ετήσιες εισφορές για 200.000 ευρώ κέρδος. Η σωστή πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός και όχι η διαίρεση. Αντίστοιχα, μέτοχος του 1% μέρισμα στα 100.000 κέρδη σημαίνει θα πρέπει να φορολογηθεί για εισόδημα 10.000.000 ευρώ κέρδη» είπε ο [redacted] ζητώντας την αλλαγή της ρύθμισης.

Το πρόβλημα με τις πράξεις

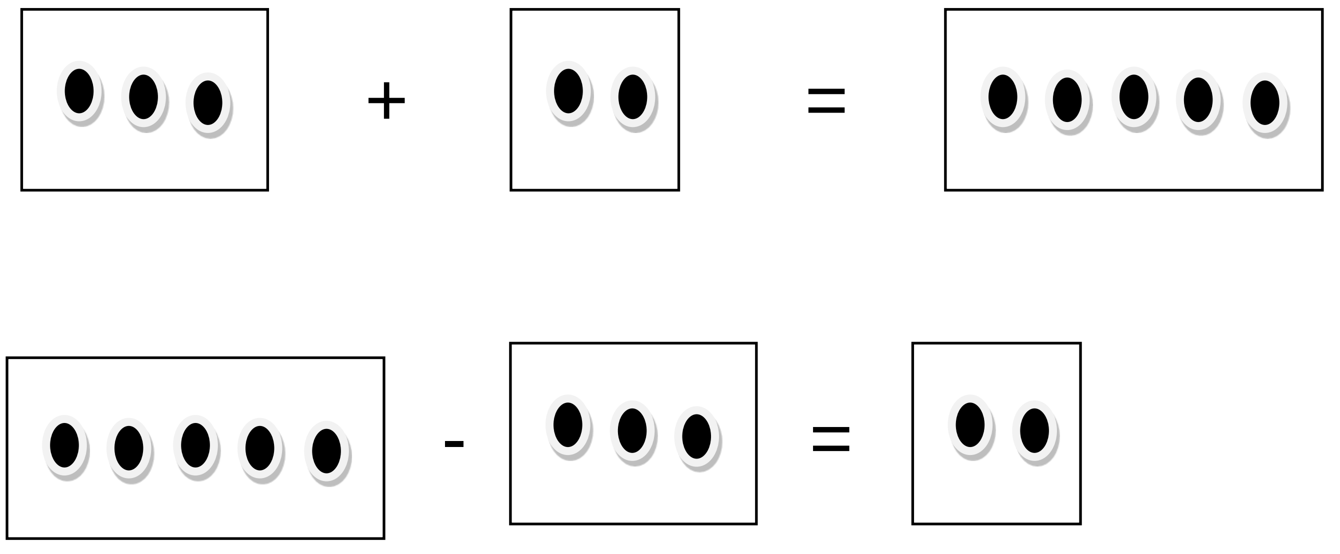
- Καθώς επεκτείνουμε το σύνολο των φυσικών για να συμπεριλάβουμε και «άλλους» αριθμούς, το νόημα των πράξεων αλλάζει.
  - Κάποια νοήματα διατηρούνται, κάποια πρέπει να προσαρμοστούν, κάποια παύουν να ισχύουν (στη γενική περίπτωση), ενώ σε κάποιες περιπτώσεις πρέπει να επινοήσουμε καινούργια νοήματα (βλ. τον πολλαπλασιασμό των αρνητικών)

Αξιοποιείστε την εμπειρία σας…

- …για να αντιληφθείτε πώς αλλάζει το νόημα των πράξεων καθώς το $\mathbb{N}$ επεκτείνεται στο $\mathbb{Z}$, και το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$.
- Τι σημαίνει…
  - … 3+2; … 3-2;
  - … 2x8; …8:2;
- Τι σημαίνει
  - … 2-3; … (-6)+5;
  - … 0,1x 4; … 0,1.$\frac{1}{3}$;

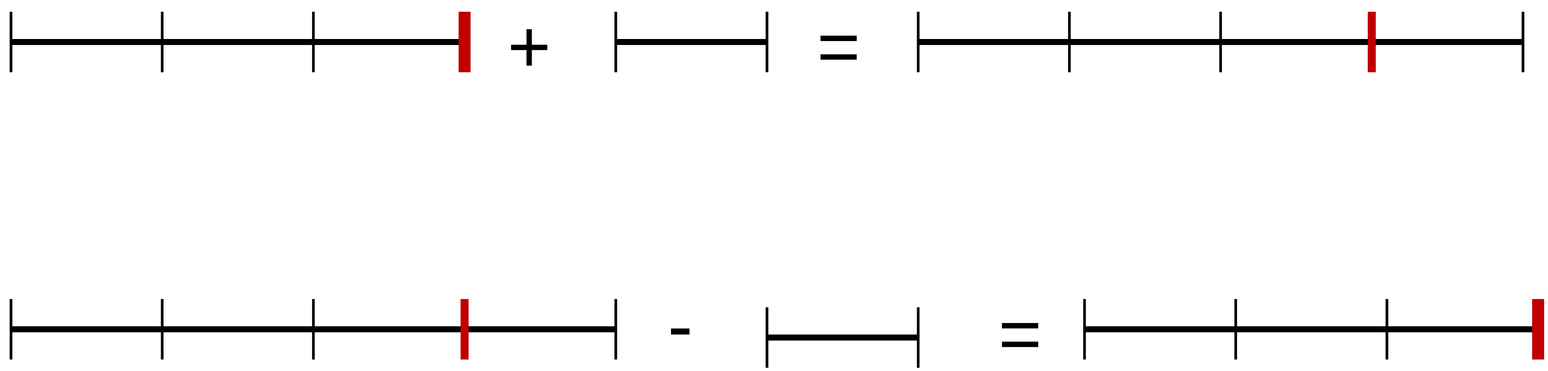
Πρόσθεση/Αφαίρεση στους Φυσικούς

- Το πρωταρχικό νόημα
  - σύνδεση με διακριτές ποσότητες



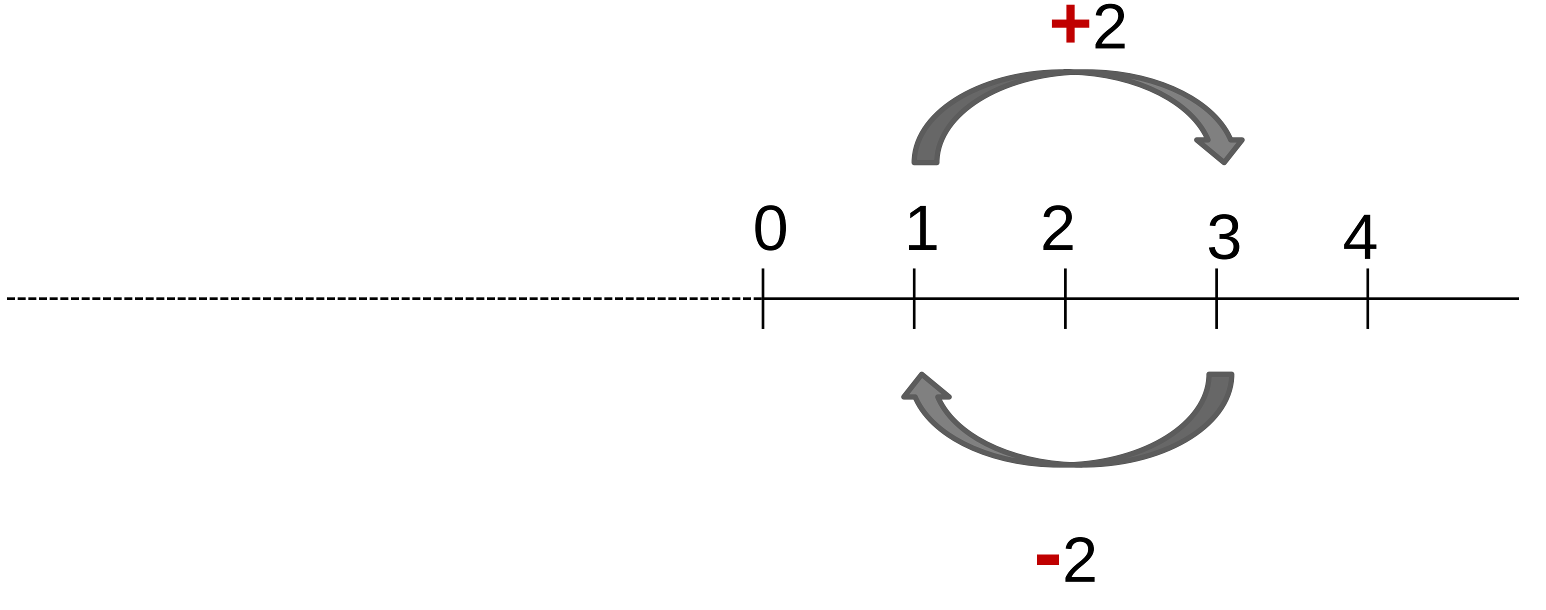
Πρόσθεση/Αφαίρεση στους Φυσικούς

- Σύνδεση (και) με συνεχείς ποσότητες



Πρόσθεση/Αφαίρεση στους Φυσικούς

- Ως μετακίνηση στην ευθεία
  - «αποσύνδεση» από τις ποσότητες



Πολλαπλασιασμός στους Φυσικούς

- Το μοντέλο που επικρατεί είναι αυτό της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης
  - Αντανακλά και στον τρόπο που «μιλάμε» για τον πολλαπλασιασμό
    - 3x4 $\rightarrow$ «3 φορές το 4» $\rightarrow$ 4+4+4
- Μπορεί αυτό το μοντέλο να επεκταθεί …
  - …στους ακεραίους;
    - 3x(-4) $\rightarrow$ «3 φορές το -4» $\rightarrow$ (-4)+(-4)+(-4)
    - (-3)x(-4) ;;;
  - … στους κλασματικούς;
    - 0,1. $\frac{1}{3}$;

Διαίρεση στου Φυσικούς

- Το μοντέλο της «δίκαιης μοιρασιάς»
  - Διαίρεση μερισμού
    - 8:2=4 (Μοιράζω το 8 σε 2 ίσα μέρη)
- Το μοντέλο της «μέτρησης»
  - Διαίρεση μέτρησης
    - 8:2=4 (Μετρώ πόσες φορές χωράει το 2 στο 8)
- Ποιο από τα δύο μοντέλα μπορεί να αποδώσει νόημα στην πράξη 3:0,1;

Πράξεις στους (θετικούς) ρητούς

Η πρόσθεση και η αφαίρεση…

- …στους (θετικούς) κλασματικούς μπορούν να διατηρήσουν το ίδιο νόημα όπως και στην περίπτωση των φυσικών
  - Σκεφτείτε ότι οι (θετικοί) κλασματικοί αναδύθηκαν μέσα από την ανάγκη της μέτρησης

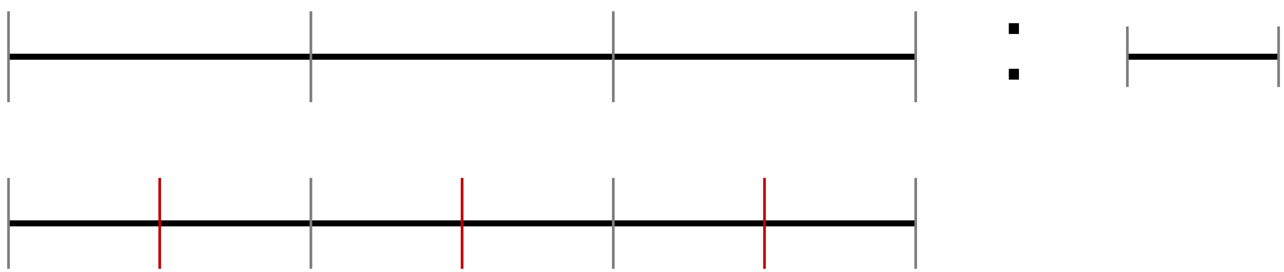
Ο πολλαπλασιασμός…

- … στους θετικούς ρητούς **δεν** μπορεί πάντα να έχει το νόημα της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης
  - 0,1 x$\frac{1}{3}$
- Ας δούμε με διαφορετικό τρόπο το νόημα του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς
  - 3x5 $\rightarrow$ «3 φορές το 5»
  - αλλά και
  - 3x5 $\rightarrow$ «το τριπλάσιο **του** 5»
    - Αυτό το νόημα επεκτείνεται στην περίπτωση του 0,1x$\frac{1}{3}$

Η διαίρεση…

- … με το μοντέλο της «δίκαιης μοιρασιάς» δεν μπορεί πάντα να αποδώσει νόημα στη διαίρεση των (θετικών) ρητών
  - 3: $\frac{1}{2}$

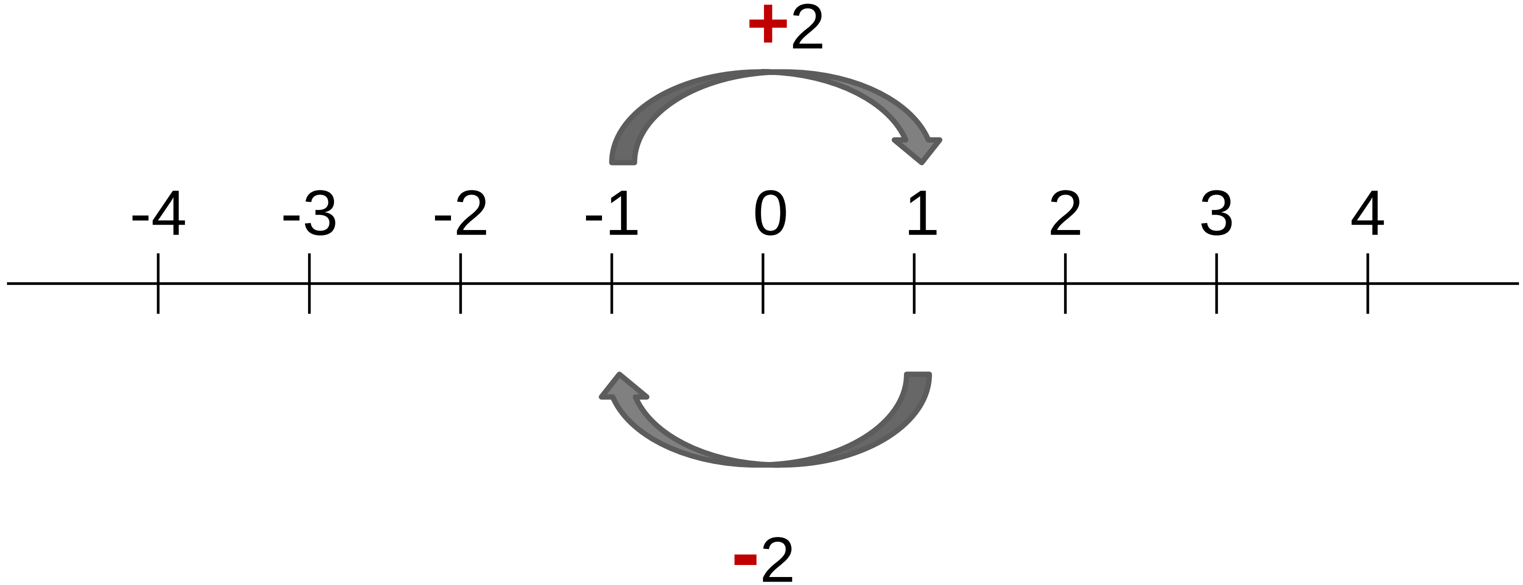
- Το μοντέλο της «μέτρησης» όμως μπορεί
  - Πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{2}$ στο 3;



Πράξεις στους ακέραιους

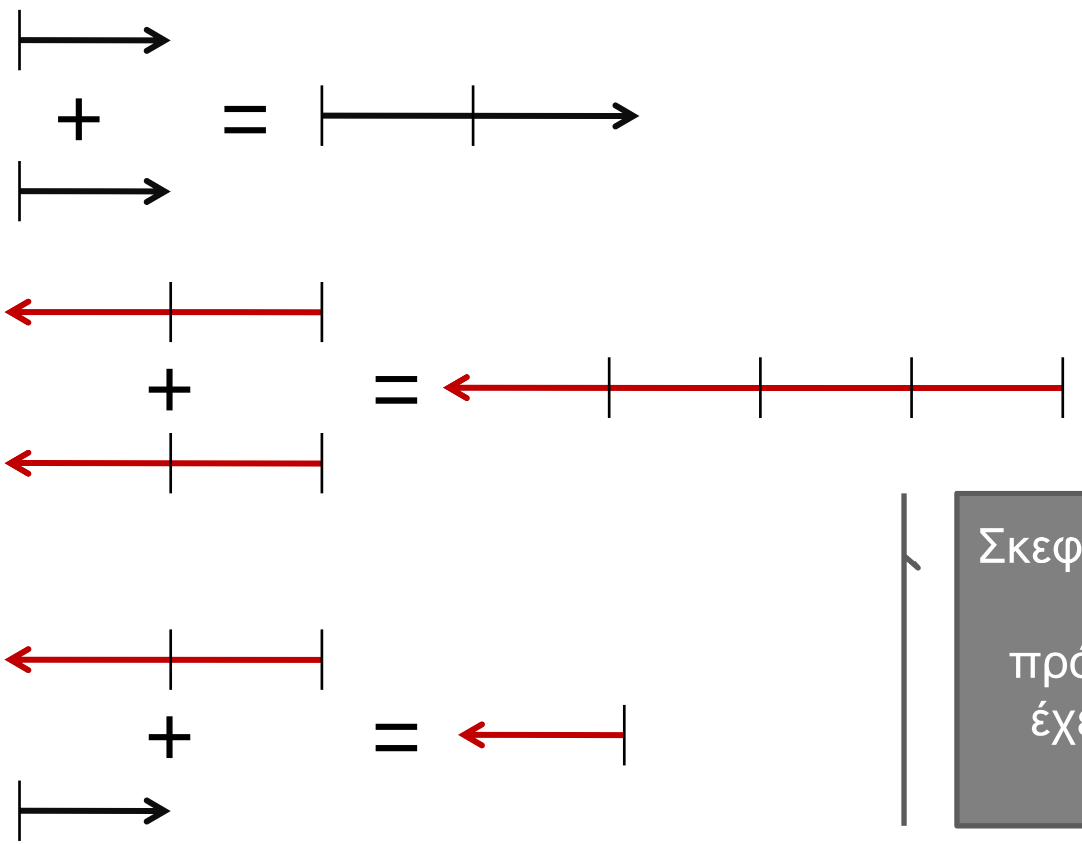
Πρόσθεση/Αφαίρεση στους Ακεραίους

- Το μοντέλο της μετακίνησης στην ευθεία μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση των ακεραίων



Πρόσθεση/Αφαίρεση στους Ακεραίους

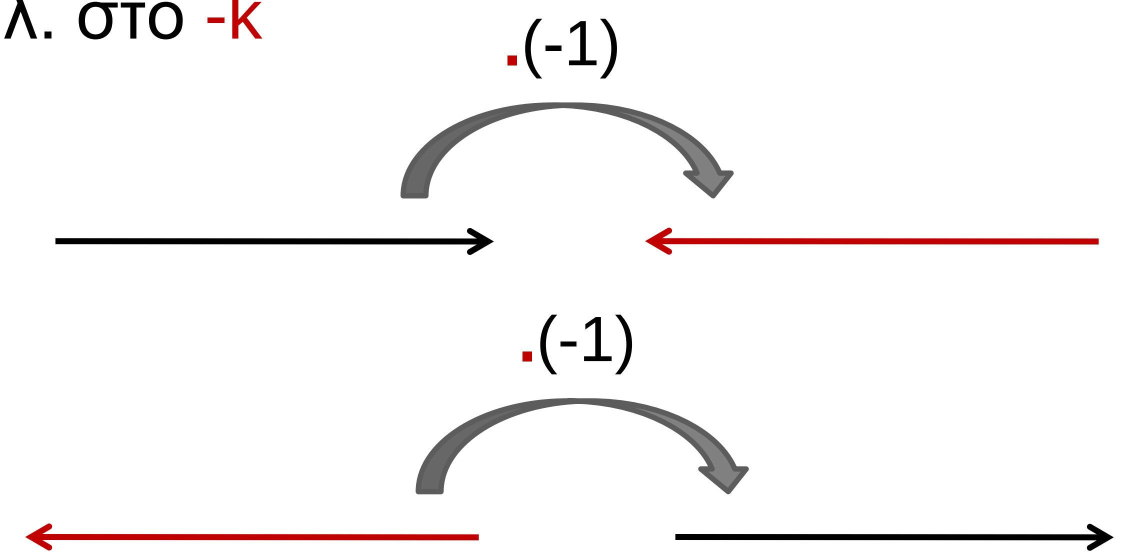
- Θετικές και αρνητικές «ποσότητες»



Σκεφτείτε πώς «εξηγούνται» οι κανόνες για την πρόσθεση ακεραίων που έχετε διδαχτεί, με βάση αυτό το μοντέλο!

Πολλαπλασιασμός στου Ακεραίους: Ένα μοντέλο

- Ας αποδώσουμε ένα νόημα στο γινόμενο (-1).k, $k \in \mathbb{Z}$
  - Η πράξη αυτή «στέλνει» το k στον αντίθετό του, δηλ. στο -k



Άρα…

- (-1).3 = ?
  - Ο αντίθετος του 3, δηλ. ο -3
- (-1).(-3) = ?
  - Ο αντίθετος του -3, δηλ. ο 3

Για να γενικεύσουμε…

- …χρειαζόμαστε την αντιμεταθετικότητα και την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού στους ακέραιους
  - (-3).2 = [(-1).3].2 = (-1).(3.2)= (-1).6=-6
  - (-3).(-2)=[(-1).3].[(-1).2]=[(-1).(-1)].(3.2)=1.6=6

Σκεφτείτε πώς «εξηγούνται» οι κανόνες για τον πολλαπλασιασμό ακεραίων που έχετε διδαχτεί, αν ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό με το -1 με αυτόν τον τρόπο!

Η μαθησιακή και διδακτική πλευρά

Ο αριθμός ως αντικείμενο

Λίγα (ακόμα) λόγια

Για τη διδασκαλία

Πρώτη ματιά

- Ενημερότητα για τις δυσκολίες των μαθητών
- Αποφυγή στοιχειωδών «σφαλμάτων»
  - *Κάνω πολλαπλασιασμό όταν ξέρω το ένα και ψάχνω τα πολλά – το λέει και η λέξη!*
  - *Πέντε πλην έξι δε γίνεται!*
  - *Όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί, δηλαδή οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς, σχηματίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών*
  - ……………………………………………………………

Δεύτερη ματιά

- Περισσότερη προσοχή στα πλαίσια και τις καταστάσεις που μπορούν να αποδώσουν νόημα στους ρητούς και τις πράξεις τους
  - Μέτρηση, διαίρεση μέτρησης
  - Αριθμογραμμή

Τρίτη ματιά

- Πώς εισάγονται οι ρητοί;
- Πώς εισάγονται οι φυσικοί;
- Περισσότερη έμφαση στις ουσιώδεις ομοιότητες
  - Αριθμός ως λόγος
- Όχι προσκόλληση στο κλάσμα ως μέρος-όλου