

Μαθηματικά για Διδασκαλία
εαρ. εξάμηνο
II

Μαριάννα Τζεκάκη

Έννοιες χώρου – Γεωμετρικές έννοιες

- Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες θεωρούνται απλές, λόγω της εποπτικής τους προσέγγισής και της καθημερινής εμπειρίας.
- Σοβαρές παρανοήσεις ή σημαντική έλλειψη κατανοήσεων
 - τόσο για την ανάπτυξη πιο τυπικών γεωμετρικών εννοιών όσο
 - για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.



Έννοιες χώρου – Γεωμετρικές έννοιες

Τα προγράμματα σπουδών υποστηρίζουν ότι

- ... Η διδασκαλία της αποκτά ευρύτερη σκοπιά για τους μαθητές*
- *να αναλύουν τα χαρακτηριστικά του γεωμετρικού σχήματος*
 - *να κάνουν μαθηματικούς συλλογισμούς πάνω στις γεωμετρικές σχέσεις,*
 - *οπτικοποιήσεις και χωρικούς συλλογισμούς, όπως και*
 - *γεωμετρική μοντελοποίηση στη λύση προβλημάτων...»*

(NCTM, 2001)

Σημασία

- Ο Πλάτωνας πρώτος ισχυρίσθηκε ότι τα Μαθηματικά είναι το κλειδί για την κατανόηση του Σύμπαντος και εισήγαγε αυτό που ονομάστηκε **γεωμετροποίηση** της φυσικής.
- Ακολούθησε και ο Αινστάιν (χωροχρόνος)
- Μελέτες στη σύγχρονη γεωμετρία επιτρέπουν στους επιστήμονες να προσεγγίσουν σημαντικές ιδέες όπως οι **κρυφές διαστάσεις** του Σύμπαντος

(συμπαγής διάσταση κουλουριασμένη σε ένα μικροσκοπικό κύκλο με ακτίνα της τάξης του μήκους Πλάνκ, 10^{-30} εκατ. – σημεία με χορδές και θεωρία χορδών)

Έννοιες χώρου – Γεωμετρικές έννοιες

- Αντί για απλοϊκές και χωρίς εμβάθυνση προσεγγίσεις (που συχνά περιλαμβάνουν και μετρήσεις) τα σύγχρονα προγράμματα προτείνουν **τρεις σημαντικούς συλλογισμούς** (Clements & Sarama, 2000).

- το **χωρικό συλλογισμό** (spatial thinking)
- τον **οπτικοποιημένο συλλογισμό** (visual thinking)
- το **γεωμετρικό συλλογισμό** (geometric thinking)

(πχ. Πρόγραμμα 2011, NCTM, 2001)

Χωρικός συλλογισμός

Χωρικός συλλογισμός

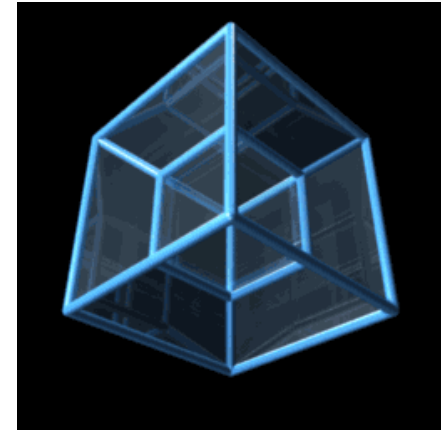
- Υποβαθμισμένη η ανάπτυξη χωρικών εννοιών.
- Πρώτη σχολική ηλικία: περιορισμός στις αυθόρμητες και αυτονόητες δράσεις των παιδιών με απλές έννοιες χώρου (μπρος – πίσω, μέσα – έξω κλπ.).
- Μεταγενέστερα εγκατάλειψη της προσέγγισης του χώρου.
- Η αρχική *κιναισθητική προσέγγιση* δεν επαρκεί για την ανάπτυξη χωρικού συλλογισμού, χωρικής σκέψης και ικανότητες χωρικής λειτουργίας.

Έννοιες χώρου

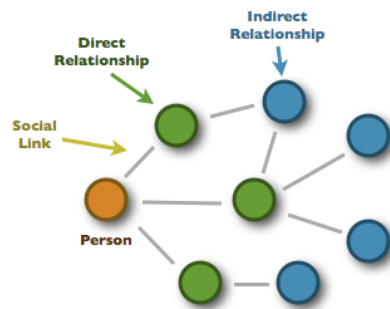
- Σημαντική πηγή ανάπτυξης εννοιών:
 - πρώτη πηγή σημαντικών εννοιών με μεγάλη σημασία (τέχνη, επιστήμη, τεχνολογία).
 - τη βάση ανάπτυξης μαθηματικού συλλογισμού (λύση προβλημάτων με σχέδια, διαγράμματα, δημιουργία μοντέλων, χωρική αντίληψη αριθμητικών εννοιών, κλπ.).
 - στηρίζει την οπτικοποιημένη σκέψη (εικονοποίηση, οπτική αντίληψη και αναπαράσταση χωρικών ή γεωμετρικών και άλλων σχέσεων).

Usiskin (1997)

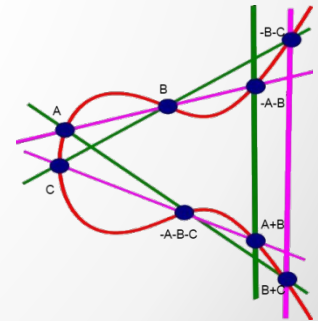
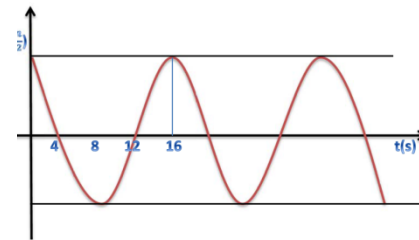
Έννοιες χώρου



Social Graphs: The pattern of social relationships between people



Source: Dion Hinchliffe. <http://web2.socialcomputingmagazine.com>



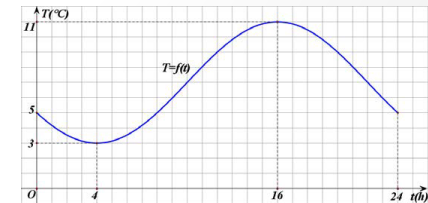
Έννοιες χώρου

- Συνδέουν τις μαθηματικές διαδικασίες με τον πραγματικό κόσμο.
- Βοηθούν τη μελέτη των οπτικών πληροφοριών, κανονικοτήτων και δομών.
- Αναπαριστούν φαινόμενα φυσικά και σχηματικά (πχ. γραφικές παραστάσεις, δίκτυα κλπ.).
- Δημιουργούν συνδέσεις και κοινές επεξεργασίες γιατί τα γεωμετρικά στοιχεία χρησιμοποιούνται από όλα αυτά τα πεδία.



2. Παρατρώ τον πίνακα. Συμπληρώνω.

μισή ποσότητα	αρχική ποσότητα	διπλάσια ποσότητα
$1\frac{1}{4} : 2 = (1 : 2) + (\frac{1}{4} : 2) =$	$1\frac{1}{4} \text{ ή } \frac{\dots}{4} \text{ ή } \frac{\dots}{8}$	$1\frac{1}{4} \times 2 = (1 \times 2) + (\frac{1}{4} \times 2)$
$= \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{8}$	$\text{ή } \frac{\dots}{1000} \text{ ή } 1, \dots$	$= \dots + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{4}$
$5 : 2 = 2,5$		5×2



Πρόγραμμα υψηλού επιπέδου με

- συστηματικές χρήσεις της χωρικής πληροφορίας,
- οικοδόμησης συστηματικών γνώσεων για τις χωρικές ιδιότητες και σχέσεις,
- αντιστοίχιση χώρων διαφορετικών μεγεθών,
- ανάπτυξη ικανοτήτων δημιουργίας και χρήσης χωρικών αναπαραστάσεων (όπως πχ. χαρτών),
- ανάπτυξη ικανοτήτων νοερών χωρικών μετασχηματισμών,
- κατανόηση των μαθηματικών ιδεών που υπάρχουν στο χωρικό και γεωμετρικό περιβάλλον.

$$\begin{array}{r} 7 + 8 + 5 + 4 \text{ ή} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 15 + 9 = \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{κρατούμενο} \\ \text{Δ M} \\ 15 \\ + 9 \\ \hline 24 \end{array}$$

Δ M

Έννοιες χώρου

- **Πολλοί όροι**

χωρική αίσθηση, χωρική νοημοσύνη, χωρική αναπαράσταση, χωρική οπτικοποίηση, επεξεργασία χωρικής πληροφορίας σχήματος, θέσης, διεύθυνσης, χωρικός συλλογισμός, χωρικές ικανότητες, κ.ά.

- Διαχωρισμός της χωρικής ως **μιας ιδιαίτερης διάστασης της νοημοσύνης** (Gardner, 2006).

Έννοιες χώρου

Αποσαφηνίσεις εννοιών

- Ως **χωρική** διαχωρίζεται η νοημοσύνη με την οποία ο άνθρωπος
 - αντιλαμβάνεται το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σε αυτό,
 - τις **ιδιότητες**, τις **σχέσεις** και
 - τους **μετασχηματισμούς** που τα χαρακτηρίζουν και
 - οργανώνει **νοερές αναπαραστάσεις** ή ενέργειες για την καταγραφή ή επεξεργασία τους.

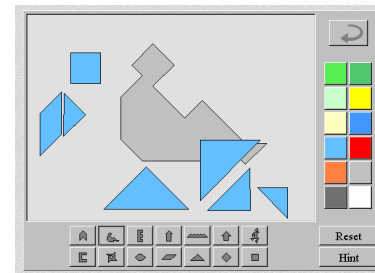
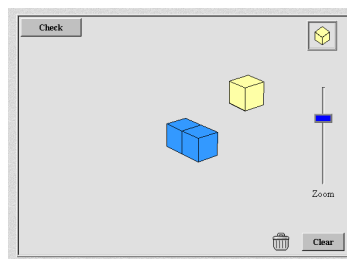
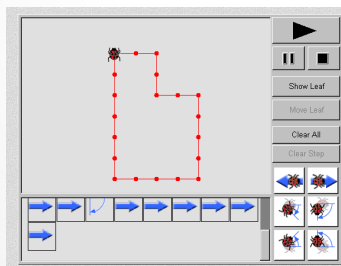
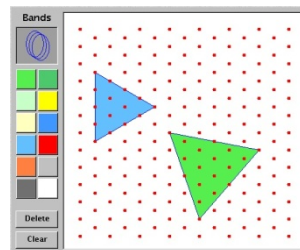
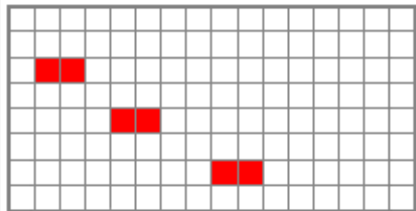
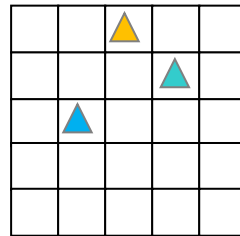
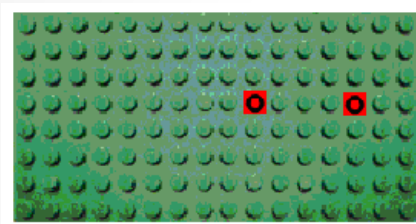
Έννοιες χώρου – στόχοι (ΠΣ 2011) -1

1. *Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες*
 - Εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές στο χώρο ως προς διαφορετικά συστήματα αναφοράς, με τη χρήση ποικίλων χωρικών εννοιών.
 - Αναγνωρίζουν και δημιουργούν οικείους χάρτες, εντοπίζοντας θέσεις και διαδρομές.

Έννοιες χώρου – στόχοι (ΠΣ 2011) -2

2. Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες
 - Επικαλύπτουν το επίπεδο με διάφορα σχήματα και μελετούν απλές σχέσεις.
 - Εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα.
 - Προσεγγίζουν τις δισδιάστατες συντεταγμένες με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων.

Έννοιες χώρου – στόχοι (ΠΣ 2011)



Ερευνητικά ευρήματα - χωρικές

- Σύνδεση ανάπτυξης της ικανότητας με τα φύλα (κορίτσια με υψηλές χωρικές ικανότητες είχαν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, Casey et als., 2001)
- Σύνδεση χωρικής ικανότητας με τη μεταγενέστερη μαθηματική ανάπτυξη (όσοι μειονεκτούν στα χωρικά έργα εμφανίζουν υστερήσεις στις μαθηματικές επιδόσεις στη συνέχεια, Levine et als, 1999)
- Σύνδεση της ελλιπούς εκπαίδευσης με τις δυσκολίες παιδιών και αργότερα ενηλίκων να αντιληφθούν χωρικές σχέσεις.

Ερευνητικά ευρήματα - Piaget

- Το **τοπολογικό προηγούμενο**: διαδοχή στην αντίληψη των χωρικών εννοιών (τοπολογικές, προβολικές, ευκλείδειες).
- Τα νήπια γεννιούνται
 - χωρίς γνώση του χώρου και
 - της μονιμότητας των αντικειμένων,τα αναπτύσσουν τέτοια γνώση μέσω της εμπειρίας και του χειρισμού του περιβάλλοντός τους.
- **Αμφισβητήθηκε η ανάγκη διαδοχής**: Οι τοπολογικές βασικές νοητικές πράξεις του ανθρώπινου μυαλού που εντοπίζονται στα παιδιά από τις μικρότερες ηλικίες (Owens, & Outrred, 2006).



Copie du cercle
Modèle 4



Copie du triangle
Modèle 8



Copie du carré
Modèle 5



Copie de la croix
Modèle 20



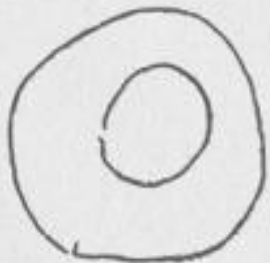
Modèle 1



Modèle 2



Modèle 3



Modèle 12



Modèle 1



Modèle 2



Modèle 3



Modèle 4



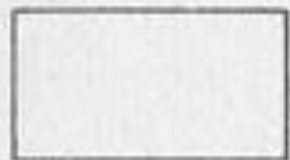
Modèle 5



Modèle 6



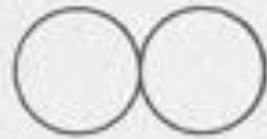
Modèle 7



Modèle 8



Modèle 9



Modèle 10

Ερευνητικά ευρήματα - Piaget

- Το μυαλό αντιλαμβάνεται με τοπολογικές ιδιότητες και διαφοροποιεί το διακριτό από το συνεχές, διακρίνει τη συνέχεια γραμμών και επιφανειών όπως και αρχικών ποσοτικών συναθροίσεων.
- Σε έρευνες το 70% των παιδιών απαντούν σωστά σε ερωτήσεις που αφορούν το «μέσα- έξω» πριν οποιαδήποτε αναφορά στις έννοιες αυτές.
- Η διδασκαλία δεν βελτιώνει τις τυχόν δυσκολίες τους.
- Επίσης πολλά παιδιά μαθαίνουν μετρήσεις ή άλλες γεωμετρικές έννοιες χωρίς να μαθαίνουν καμία από τις υπόλοιπες πιο τυπικές «τοπολογικές» έννοιες.

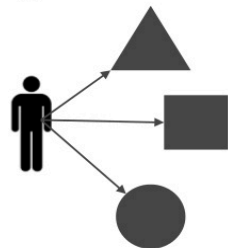
Ερευνητικά ευρήματα - προσανατολισμός

- Τόσο τα μικρότερα παιδιά όσο και οι ενήλικες δημιουργούν «**νοερούς χάρτες**», κυρίως με την εμπειρία και ιδιοσυγκρασιακές προσεγγίσεις.
- Δημιουργούν «**εγωκεντρικά**» συστήματα αναφοράς που βαθμιαία μετατοπίζονται σε «**αλλοκεντρικά**» (Newcombe & Huttenlocher, 2000).

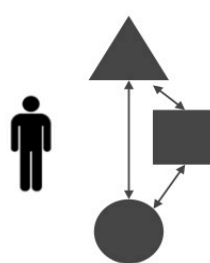
How users understand special relationships:
Egocentric V.s. Allocentric



Egocentric



Allocentric



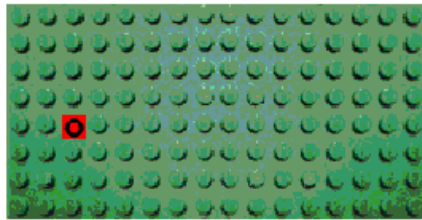
Ερευνητικά ευρήματα - προσανατολισμός

- Συνδέεται με τη μνήμη, την οπτικοποίηση, την επιλογή των κατάλληλων χωρικών πληροφοριών όπως και την αντίληψη της οπτικής του άλλου.
- Ανάγκη ανάπτυξης κατάλληλων δραστηριοτήτων που οδηγεί σε «εικονοποιήσεις» των κιναισθητικών δράσεων προς χωρικές ιδιότητες και σχέσεις.
- Οι προσεγγίσεις αυτές βελτιώνονται με την λειτουργία σε οργανωμένα περιβάλλοντα, που επιτρέπει τη δόμηση του χώρου.

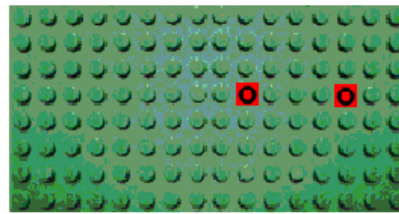
Ερευνητικά ευρήματα - προσανατολισμός

- Έρευνες σχετικές με τη χωρική κωδικοποίηση, δηλαδή τον εντοπισμό θέσης σε σχέση με εξωτερικά ορόσημα καταδεικνύουν ότι τα παιδιά, ακόμα από την ηλικία των 5-6 ετών είναι ικανά να αναπαράγουν πρότυπα με χωρικές ιδιότητες και να συντονίζουν πληροφορίες από δύο ανεξάρτητες πηγές.
- Οι καταστάσεις αυτές εμπλέκουν μεγάλο αριθμό μεταβλητών που σχετίζονται με καταστάσεις τοποθέτησης στο χώρο και δίνουν διαφοροποιήσεις των παιδιών τόσο στις επιδόσεις όσο και στις στρατηγικές που υιοθετούν.

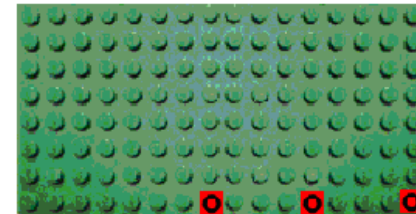
Ερευνητικά ευρήματα- προσανατολισμός



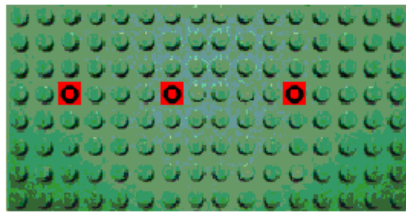
60 %



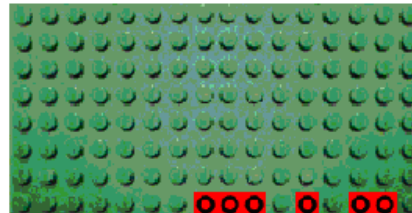
46,7%



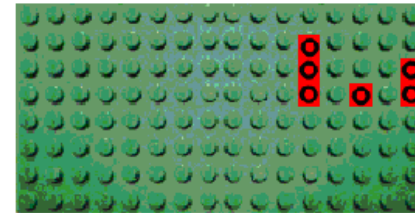
46,7%



40%



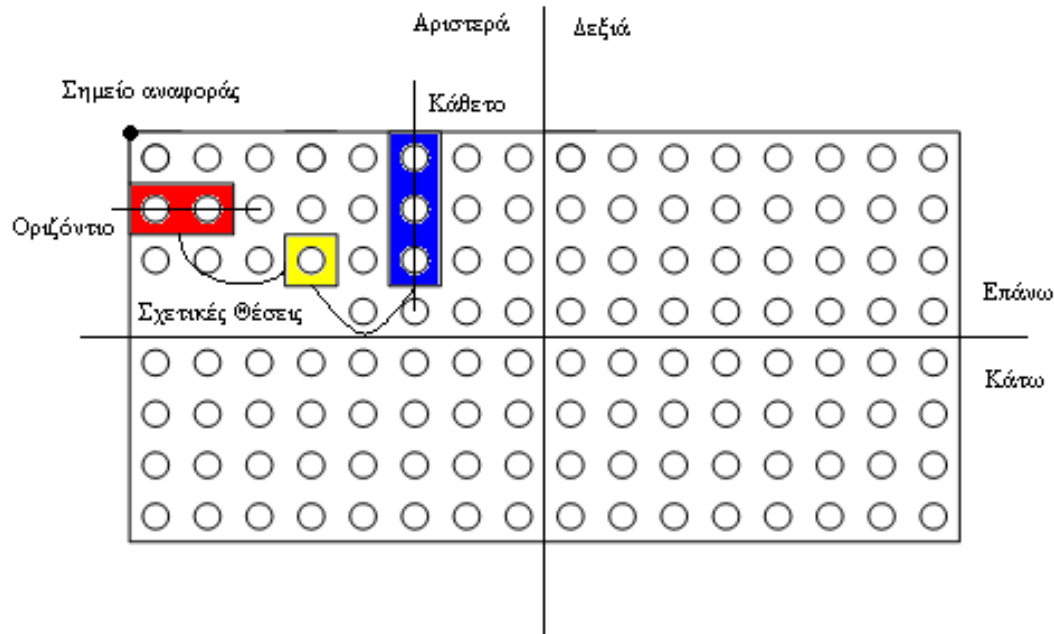
66,7%



20%

- Οι ικανότητες των παιδιών συνδυάζονται με την ηλικία και την εμπειρία σε αντίστοιχες καταστάσεις, αλλά επίσης μπορούν να βελτιωθούν σημαντικά με κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις (Tzekaki,& Ikonomidou, 2009).

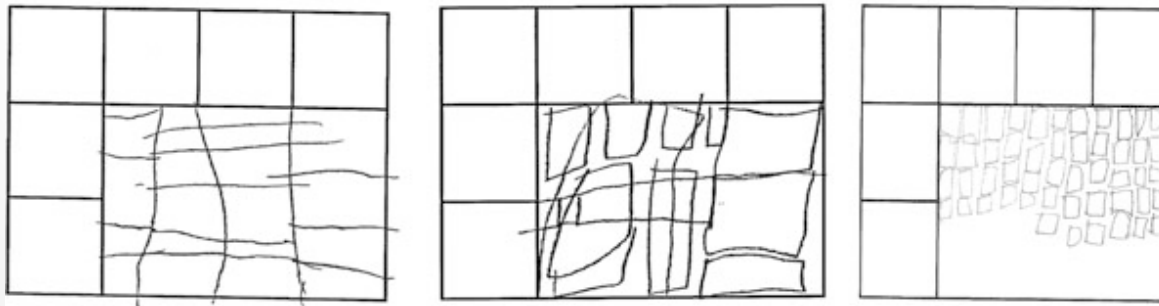
Δόμηση του χώρου



Τετραγωνισμένα περιβάλλοντα και πλέγματα. Σύνθετη διαδικασία κωδικοποίησης – 5 κατηγορίες μεταβλητών

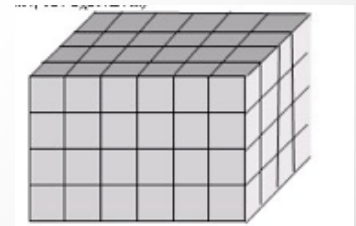
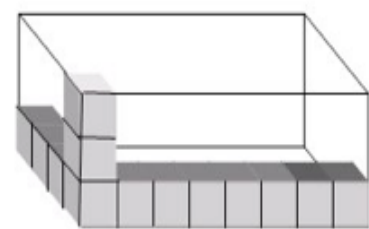
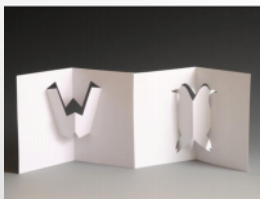
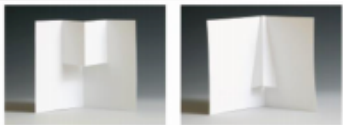
Δόμηση του χώρου

- Σταδιακά η προσέγγιση των αξόνων συντεταγμένων, δεν αποτελεί αυτονόητη διαδικασία.
- Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται το χώρο ως «επίπεδο» αλλά περισσότερο διακρίνουν γραμμές ή κομμάτια που ενώνονται, ακόμα και ως τα 10 τους χρόνια (Sarama & Clements, 2009).
- Χρειάζονται να ξεπεράσουν αυτές τις αντιλήψεις και να αντιληφθούν τις οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές (Mulligan, & Mitchelmore, 2013).



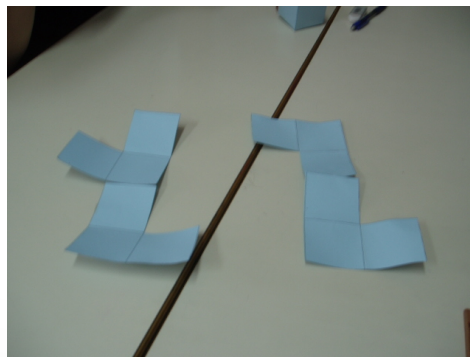
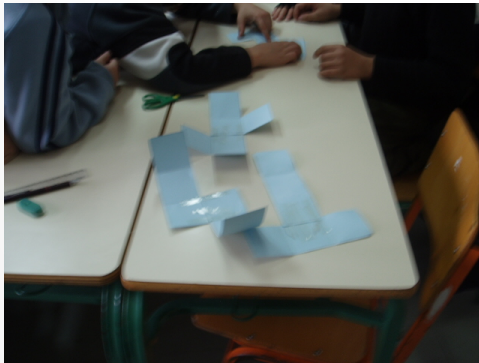
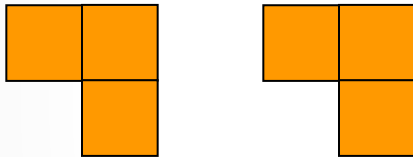
Ενίσχυση χωρικής αντίληψης

- Δραστηριότητες (pop-up, origami & blocks buildings, χάρτες)
- Χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων.
- Χωρικά έργα που συνδυάζουν 2Δ και 3Δ σχήματα με χειραπτικά και τεχνολογικά εργαλεία.
- Η δόμηση του χώρου και σταδιακή προσέγγιση των αξόνων συντεταγμένων (Mulligan, & Mitchelmore, 2013).

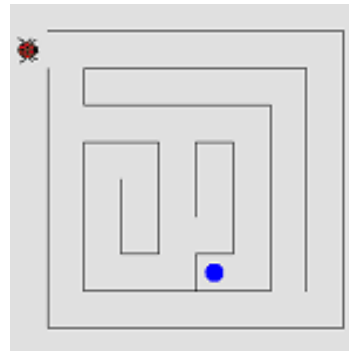
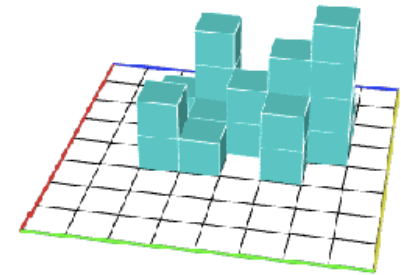
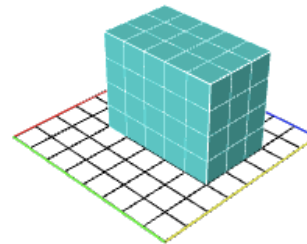
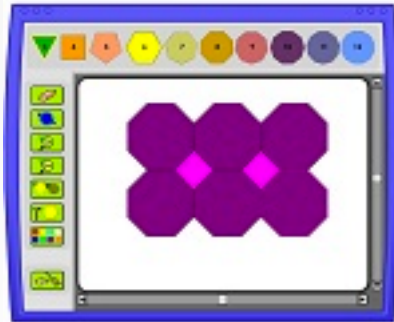


Δραστηριότητες χωρικής αντίληψης

- «Πολύμινος» και δοκιμάζουν για τη δημιουργία αναπτυγμάτων κύβου, πόσα αναπτύγματα;



Ερευνητικά ευρήματα - τεχνολογία



Οπτικοποιημένος συλλογισμός

II. Οπτικοποίηση-οπτικοποιημένος συλλογισμός

- Η *οπτικοποιημένη σκέψη* αφορά την παραγωγή και το χειρισμό εικονοποιημένων καταστάσεων,
 - είτε για την καταγραφή μιας πληροφορίας,
 - είτε για την αντιμετώπιση της κατάστασης,
 - είτε για την ολοκλήρωση μιας άλλης νοητικής επεξεργασίας (οπτικές γωνίες και νοερές εικόνες).
- Η οπτική πληροφορία απεικονίζεται σε *νοερές εικόνες*,
 - αρχικά *απλές και στατικές* και στη συνέχεια
 - πιο *σύνθετες και δυναμικές* (κρίσιμες για τη μαθηματική ανάπτυξη, Presmeg, 2006)

Οπτικοποίηση ή οπτικοποιημένος συλλογισμός

- Ο Kosslyn (1983) παρουσίασε 4 επεξεργασίες:
 - δημιουργία εικόνας
 - εξέταση εικόνας για πληροφορίες
 - διαχείριση εικόνας για άλλη νοητική δράση
 - μετασχηματισμός ή επεξεργασία μίας εικόνας

Οπτικοποίηση ή οπτικοποιημένος συλλογισμός

- Για τον Gutierrez (1996) ο όρος *οπτικοποιημένη σκέψη* αφορά κατανόηση και δράση σε 2Δ και 3Δ αντικείμενα και ικανότητα:
 - να ερμηνεύουμε *διαφορετικές παραστάσεις* αντικειμένων ή καταστάσεων,
 - να τις αντιλαμβανόμαστε από *διαφορετικές οπτικές γωνίες*,
 - να δημιουργούμε *νοερές εικόνες για αντικείμενα* ή καταστάσεις που βρίσκονται έξω από το οπτικό τους πεδίο (mental images)
 - να τις διαχειριζόμαστε, επεξεργαζόμαστε για *άλλη νοητική δράση* ή να τις μετασχηματίζουμε

Οπτικοποίηση- στόχοι (ΠΣ 2011) -1

1. Αναγνώριση οπτικών γωνιών, δημιουργία οπτικοποιήσεων
 - Αναγνωρίζουν τρισδιάστατες κατασκευές, συνθέσεις και στερεά σχήματα από διαφορετικές οπτικές γωνίες
 - Πραγματοποιούν κατασκευές τρισδιάστατων καταστάσεων, συνθέσεων ή σχημάτων από εικόνες, σχέδια ή άλλες αναπαραστάσεις

2. .

Οπτικοποίηση- στόχοι (ΠΣ 2011) -2

2. Δημιουργία οπτικοποιήσεων για τη διαχείριση σχημάτων
 - Βρίσκουν τον αριθμό των κύβων τρισδιάστατων σχημάτων από δοσμένες εικόνες ή σχέδια σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον.
 - Κατασκευάζουν τρισδιάστατα σχήματα με αλληλοσυνδεόμενους κύβους από εικόνες ή σχέδια, σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον.
 - Σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες και σε ψηφιακό περιβάλλον κύβους και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Ερευνητικά ευρήματα - Piaget

- Υπόθεση του τοπολογικού προηγούμενου Piaget (1973) θεωρεί ότι είναι απαραίτητο για το παιδί να έχει εισέλθει στο στάδιο της αντίληψης των προβολικών σχέσεων για να αντιληφθεί τις διαφορετικές οπτικές θεωρήσεις όπως και τα τρισδιάστατα αντικείμενα ως σύνολα των διαφορετικών όψεών τους.
- Πείραμα του Piaget για «τα τρία βουνά» σύμφωνα με το οποίο τα μικρά παιδιά δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν τη την οπτική γωνία ενός άλλου παρατηρητή.

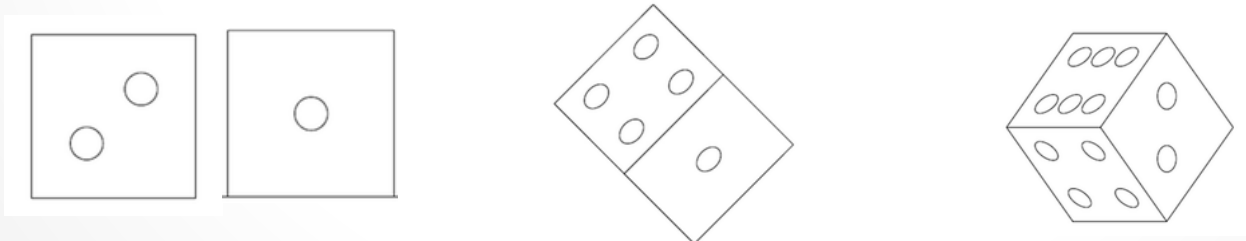


Ερευνητικά ευρήματα- οπτική γωνία

- Ανασκευή αρχικών ευρημάτων:
 - Τα παιδιά προσχολικής πετυχαίνουν (66%) σε έργα αντίληψης οπτικής γωνίας χωρίς προηγούμενη διδακτική παρέμβαση (Clements, et als.,1997; Παπαντωνίου & Τζεκάκη, 2009).
 - Η σύνθεση όλων των όψεων ενός αντικειμένου και η αντίληψη της τρισδιάστατης δομής του δεν μπορούν να αναπτυχθούν χωρίς μια μακρόχρονη άσκηση.

Ερευνητικά ευρήματα

- Τα σχέδια των μαθητών δείχνουν ότι τα παιδιά
 - αρχικά αντιλαμβάνονται τα 3Δ αντικείμενα **ολιστικά**, ως σύνολο από εικόνες, χωρίς επίγνωση της οπτικής γωνίας,
 - αργότερα κατασκευάζουν την **έννοια μιας οπτικής γωνίας**
 - και μόνο στο τέλος καταφέρνουν να συνδυάσουν τις διαφορετικές τους όψεις (Owens, 1999).



Ερευνητικά ευρήματα - οπτικοποίηση

- Περίπλοκη η μεταφορά εμπειρικής κατάστασης σε σχηματικά ή νοητικά πλαίσια.
- Δυσκολία αντίληψης και σύνθεσης των οπτικών γωνιών και των όψεων των αντικειμένων χωρίς άσκηση και σχετικές εμπειρίες.
- Οι δυσκολίες αυτές ακολουθούν το άτομο και στην ενήλικη ζωή του, σε έρευνες με περιστροφές αντικειμένων ή αντίληψη της παράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων.

Ερευνητικά ευρήματα - οπτικοποίηση

- Ανάγκη προβληματισμού του εκπαιδευτικού για
 - το τι 'βλέπει' το παιδί στις αναπαραστάσεις καταστάσεων,
 - πώς αντιλαμβάνεται και τι ερμηνεύει σε μια εικονιστική πληροφορία, όπως και
 - ποια είναι η διαφορά τους από αυτό που απεικονίζεται ή βλέπει ο ίδιος (Hershcovits et als, 2006).

Ερευνητικά ευρήματα - οπτικοποίηση

- Νεότερες έρευνες έδωσαν στοιχεία για το είδος των εικονοποιήσεων των μαθητών (Gray & Pitta, 1999).
 - Μαθητές με υψηλές επιδόσεις παιδιά δημιουργούν εικόνες με σημαντική ποιότητα, εννοιολογικό και σχεσιακή περιεχόμενο. Συνδέουν διαφορετικές εμπειρίες και εντοπίζουν αφηρημένες ομοιότητες.
 - Μαθητές με χαμηλές επιδόσεις τείνουν να δημιουργούν εικόνες με επιφανειακά χαρακτηριστικά. Η κατάλληλη διδασκαλία τους βοηθάει να αναπτύξουν πιο επεξεργασμένες εικόνες.

Νέα Ερευνητικά ευρήματα

- Νέα στοιχεία εμπλέκονται στη λογική της οπτικοποίησης
 - οπτική γνώση (visual cognition: νοητική διαδικασία αντίληψης, αναγνώρισης, μνήμης κλπ. οπτικής πληροφορίας)
 - οπτικά εμπόδια που απομακρύνει ακόμα και από τη θεωρητική γνώση (visual obstacles)
 - σχηματικό συλλογισμό (configural reasoning)
 - (ακόμα και) χρήση χειρονομιών

(Jones & Tzekaki, 2016)

Γεωμετρικές έννοιες

Πέρασε άλλη μια
μέρα που δεν μου
χρησίμευσε πουθενά
η Γεωμετρία




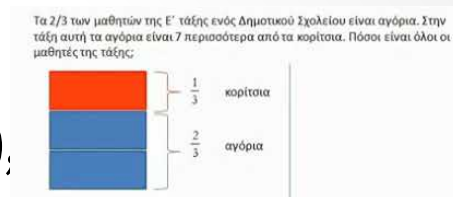
We  Minions

Γεωμετρικές έννοιες

- Ως γεωμετρικός συλλογισμός θεωρείται
 - η αναγνώριση, περιγραφή και ανάλυση σχημάτων και κατηγοριών σχημάτων,
 - των ιδιοτήτων τους και των ιδιοτήτων των κατηγοριών των επιπέδων και στερεών,
 - κατασκευή, ανάλυση και σύνθεση ή ανασύνθεση σε άλλα σχήματα, όπως και τους μετασχηματισμούς σχημάτων.
- Αν και μικρής συμμετοχής στα προγράμματα σπουδών, μεγάλης σημασία αντικείμενο, με πολλές διαστάσεις και ανάγκη ανάπτυξης από τις μικρότερες ηλικίες.

Υποστήριξη πολλών μαθηματικών εννοιών

- Επίλυση προβλήματος (διαγράμματα),
- Δημιουργία νοερών εικόνων, μαθηματικών συμβόλων,
- Κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων,
 - την γραμμή των αριθμών, 
 - γραφικές παραστάσεις ή
 - άλλες μαθηματικές διαδικασίες που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις (πράξεις, υποδιαιρέσεις μονάδων, πίνακες, κ.ά).
- Οπτική ευλυγισία και χωρική μνήμη με 2Δ και 3Δ καταστάσεις (Clements & Battista, 1992).



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Γεωμετρικές έννοιες – στόχοι (ΠΣ 2011)

- Τέσσερις κατηγορίες δράσεων:
 - I. Αναγνώριση *σχημάτων*, ιδιοτήτων και σχέσεων
 - II. Αναγνώριση *κατηγοριών σχημάτων*, ιδιοτήτων και σχέσεων
 - III. *Κατασκευές- αναλύσεις/συνθέσεις σχημάτων*
 - IV. *Μετασχηματισμοί* σχημάτων (μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες και ομοιότητα)

Στις δράσεις αυτές εμπλέκονται διαδικασίες όπως *ορισμοί*, ανάλυση ιδιοτήτων, μορφές άτυπης γεωμετρίας προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της *τυπικής γεωμετρίας*.

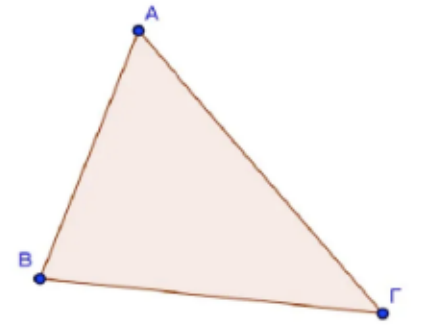
Γεωμετρία- στόχοι (ΠΣ 2011)

- Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται στο Δημοτικό αποτελεί αυτό που θα ονομάζουμε *μη τυπική Γεωμετρία*.
- Η μη τυπική Γεωμετρία καλείται να οδηγήσει
 - από μια γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών μορφών με τις αισθήσεις και την εμπειρία (*αισθησιο-κινητική*)
 - σε μια κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τα στοιχεία τους, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις (*αναλυτικο-συνθετική*).
- Η πορεία που ακολουθείται διδακτικά είναι μια σύνδεση μεταξύ *οπτικού, λεκτικού και αφηρημένου* (Owens & Outhred, 2006, Duval, 1998).

Γεωμετρία- 4 σημαντικά ζητήματα

1. Η Γεωμετρία περιλαμβάνει τρεις σημασιολογικούς χώρους: το λεκτικό, το σχηματικό, και το συμβολικό.

- Τρίγωνο ονομάζεται ένα κλειστό πολύγωνο με τρεις πλευρές
- (σχήμα)



^

- ΑΒΓ

Γεωμετρικά σχήματα

- Οι γεωμετρικές είναι θεωρητικές έννοιες.
Πχ. ένα τρίγωνο είναι το σχήμα που έχει ένα πραγματικό αντικείμενο, αλλά το ίδιο είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που ορίζεται με βάση κάποιες ιδιότητες.
- Για τα θεωρητικά αυτά αντικείμενα χρησιμοποιούνται διάφορες μορφές παράστασης (σχέδια, σχήματα, λεκτική παρουσίαση, σύμβολα) που όλα αποδίδουν **ένα ιδεατό αντικείμενο**.

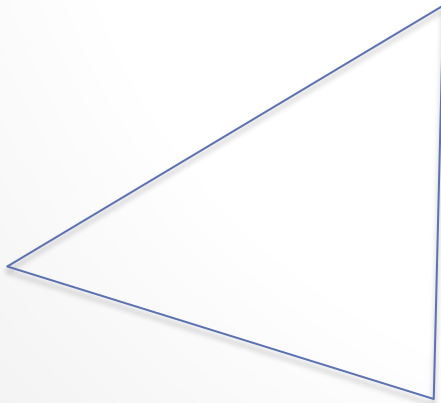
Γεωμετρικά σχήματα

- Τα γεωμετρικά σχήματα είναι ταυτόχρονα έννοιες και οπτικές αναπαραστάσεις.
- Κάποιες φορές παρουσιάζουν
 - μια ειδική γεωμετρική κατάσταση, κάποιες άλλες
 - ένα αντιπρόσωπο μιας κατάστασης.
 - μια πιο γενικευμένη γεωμετρική ιδέα.

Το ειδικό τρίγωνο ΑΒΓ

Ένα σκαληνό τρίγωνο

Ένα τρίγωνο γενικά

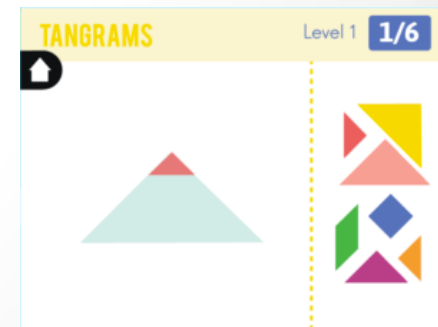
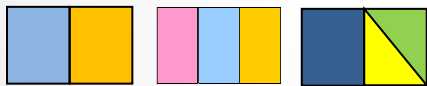
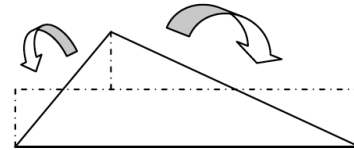
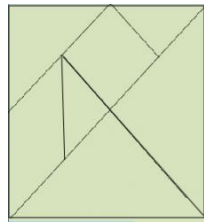


Γεωμετρικά σχήματα

- Η χρήση και επεξεργασία των σχημάτων στη μη τυπική Γεωμετρία επιδιώκει να οδηγήσει βαθμιαία τους μαθητές
 - από την άμεση εποπτεία και την ολιστική προσέγγιση,
 - στην αναγνώριση ιδιοτήτων, σχέσεων ως βάση για συλλογισμούς και επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Mammama et al., 1998).

Γεωμετρία- 3 σημαντικά ζητήματα

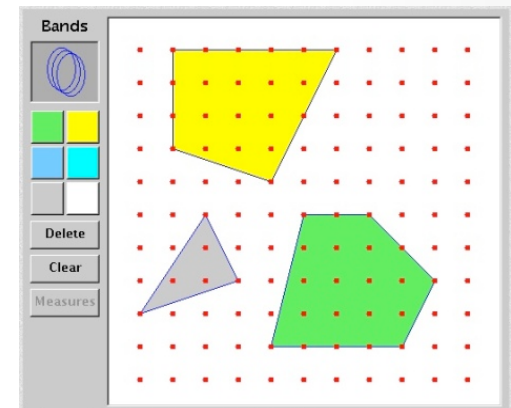
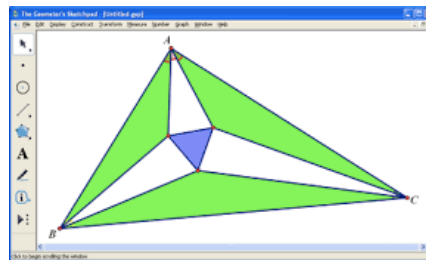
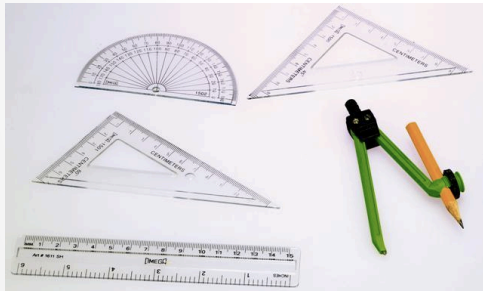
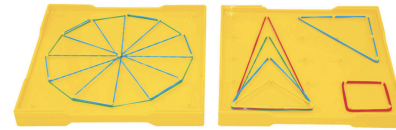
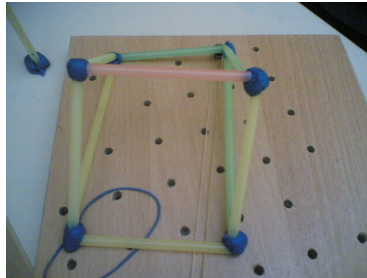
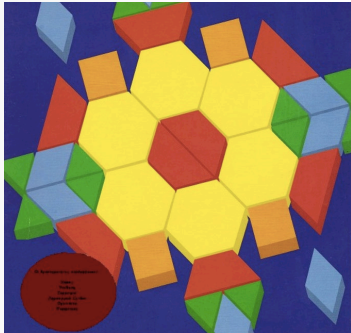
- 2 Οι αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων σε άλλα σχήματα και η αξιοποίηση των μετασχηματισμών αναπτύσσουν ευελιξία στην προσέγγιση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων.



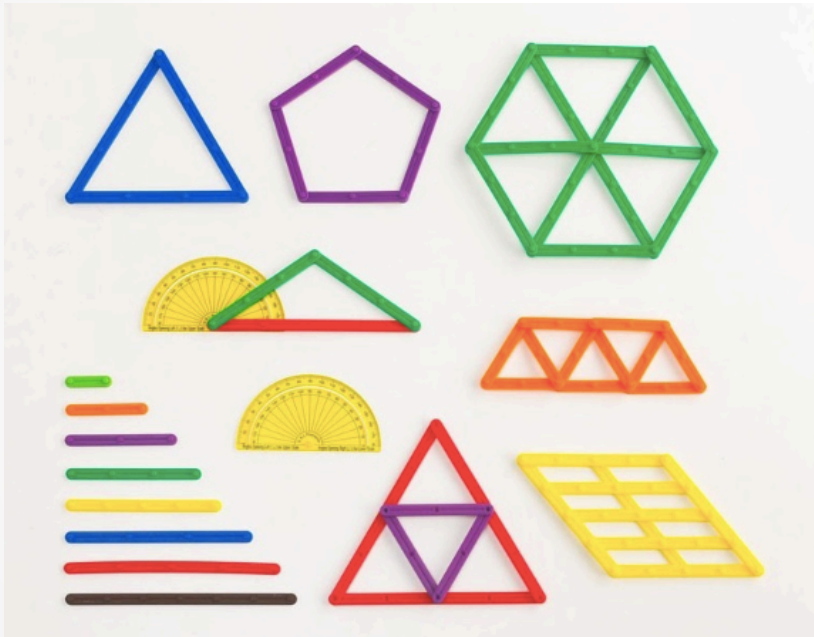
Γεωμετρία- 4 σημαντικά ζητήματα

3. Οι κατασκευές με τη χρήση μιας ποικιλίας μέσων όπως και ψηφιακών εργαλείων, ο σχεδιασμός και οι χαράξεις των γεωμετρικών σχημάτων βοηθάνε σημαντικά τους μαθητές στον εντοπισμό στοιχείων (σημείων, τμημάτων κ.λπ.) σχέσεων και ιδιοτήτων.
4. Τέλος δίνεται μια καλή ευκαιρία για την προσέγγιση του συλλογισμού και της συστηματικής τεκμηρίωσης και της (άτυπης αρχικά) απόδειξης όπως και τη χρήση κατάλληλης γλώσσας και όρων (ορισμοί, διατύπωση ιδιοτήτων, κλπ.)

Γεωμετρία- 4 σημαντικά ζητήματα

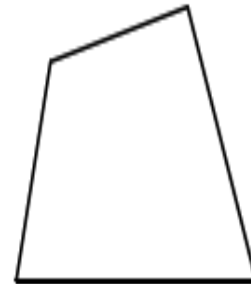
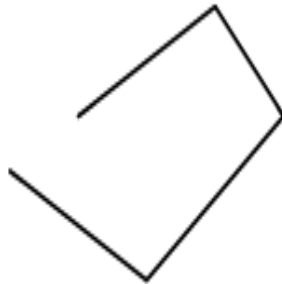


Γεωμετρία- 4 σημαντικά ζητήματα



Παράδειγμα προσέγγισης ορισμού

Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα “τι είναι τετράπλευρο” και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση “ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές”, παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια “τετράπλευρο”.



Ερευνητικά ευρήματα – Αναγνώριση/ανάλυση

- Η έρευνα στο χώρο αυτό στηρίχθηκε σημαντικά στο μοντέλο Van Hiele (1986): αντίληψη των γεωμετρικών αντικειμένων με 5 διαφορετικά στάδια
 1. οι μαθητές αναγνωρίζουν οπτικά/ολιστικά τα σχήματα χωρίς να αντιλαμβάνονται τα επιμέρους χαρακτηριστικά και ιδιότητες.
 2. προχωρούν σε ανάλυση σε μέρη και αντίληψη των ιδιοτήτων που είναι σε θέση να περιγράψουν.
 3. οι μαθητές μπορούν να διατάξουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις.
 4. εξάγουν συμπεράσματα για ιδιότητες και σχέσεις με παραγωγικούς συλλογισμούς.
 5. Αντιλαμβάνονται αυστηρότητα της γεωμετρίας και να λειτουργήσουν μέσα σε στο αξιωματικό της σύστημα.

Γεωμετρία- ευρήματα

I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Οι ερευνητές δοκίμασαν να **διευρύνουν** ενδιάμεσα στάδια εντάσσοντας και κατηγορίες όπου τα παιδιά που αναγνωρίζουν κυρίως ολιστικά αλλά για μερικά σχήματα μπορούν να δώσουν εξηγήσεις, για παράδειγμα:
Γιατί είναι τρίγωνο; - Γιατί το βλέπω και μετά γιατί έχει 3 σχήματα.
- Όμοια δημιούργησαν ένα επίπεδο πριν από το 1 των Van Hiele, το οποίο αποκαλούν **συγκρητικό** (syncretic), όπου διακρίνουν μορφές, αλλά όχι κατηγορίες, για παράδειγμα:
Γιατί είναι ορθογώνιο - Γιατί είναι σαν την πόρτα.

Γεωμετρία- ευρήματα

I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Όμοια με επικέντρωση στις εξηγήσεις και τις ιδιότητες που παρουσιάζουν οι μαθητές ανέλυσαν το επίπεδο 2 σε άλλα 3:
 - I. Μία κατηγορία παιδιών (ανάμεσα στο 1 και 2) εντοπίζει χαρακτηριστικά στο σχήμα αλλά δεν είναι σε θέση να τα περιγράψει.
 - II. Μια άλλη κατηγορία παιδιών βρίσκει και μπορεί να περιγράψει μόνο ένα χαρακτηριστικό του σχήματος.
 - III. Ενώ η τρίτη κατηγορία είναι αυτή που ανήκει στο αρχικό επίπεδο 2 και αφορά τα παιδιά που εντοπίζουν και περιγράφουν τα χαρακτηριστικά με τα οποία άλλωστε ομαδοποιούν και τα σχήματα.

Πχ. Γιατί είναι τετράγωνο; Γιατί έχει 4 πλευρές και 4 άκρες

Γεωμετρία- ευρήματα

I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Ορισμένοι ερευνητές εντόπισαν ότι υπάρχουν και **άλλοι παράγοντες** που επηρεάζουν το στάδιο στο οποίο βρίσκεται η γεωμετρική σκέψη του μαθητή:
 - αν το εξεταζόμενο σχήματα είναι **οικείο ή όχι** (συνηθισμένο σχήμα ή μιας συγκεκριμένης μορφής),
 - αν η τοποθέτησή του είναι **οριζόντια ή πλάγια**,
 - αν έχει **πολύ ιδιαίτερη μορφή** του (πολύ λεπτό ή πολύ πλατύ)
- Άλλοι επίσης ερευνητές επισήμαναν την ανάγκη για ουσιαστικότερες διερευνήσεις ώστε να γίνει αντιληπτή η ποιότητα της σκέψης και οι δυσκολίες των παιδιών.

Γεωμετρία- ευρήματα

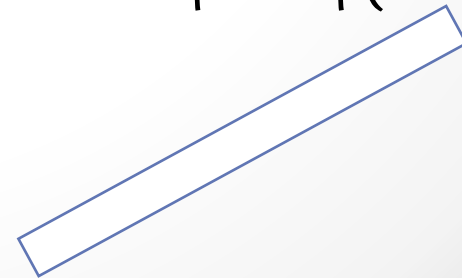
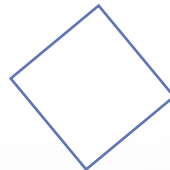
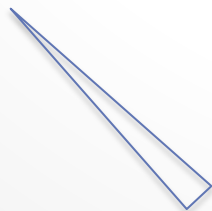
I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Το μοντέλο Van Hiele ισχυρό εργαλείο ανάλυσης, αλλά μεταγενέστεροι ερευνητές αμφισβητούν τη «γραμμικότητά» του.
- Υπάρχουν κι άλλα χαρακτηριστικά που επηρεάζουν την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, όπως για παράδειγμα τα **μεγέθη** ή η **χρήση** ή το **νόημα** που δίνουν τα παιδιά σε ένα αντικείμενο.
- Το εργαλείο αυτό συνεχίζει να χρησιμοποιείται συστηματικά.
- Το εργαλείο συμπληρώνεται με στοιχεία όπως οι «**σχηματικές έννοιες**» (figural concepts, Fischbein, 1993) και οι **τρόποι αντίληψης** των γεωμετρικών σχημάτων του Duval (1999).

Γεωμετρία- ευρήματα

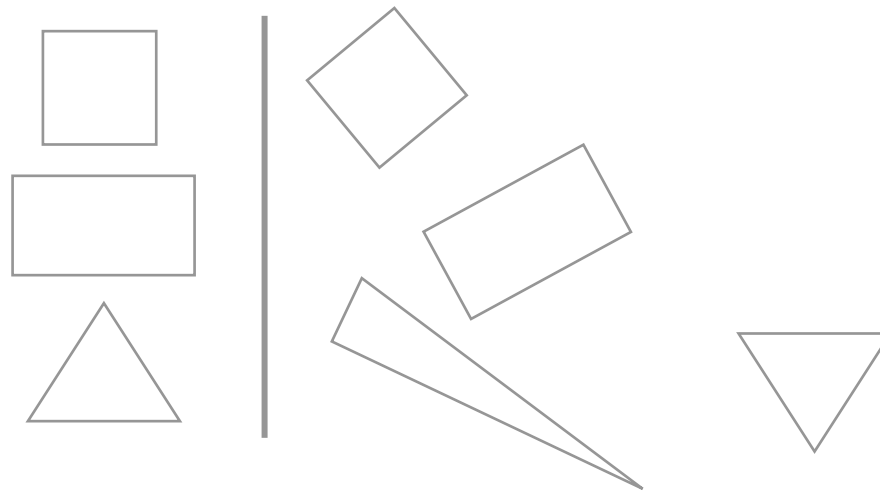
I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Τα αρχικά σχήματα που δημιουργούνται από την εμπειρία ονομάζονται **πρωτοτυπικά**.
- Οι αρχικές έννοιες των παιδιών είναι σχηματικές και επηρεάζονται από πρωτοτυπικές εικόνες.
- Ακόμα κι αν μεταγενέστερα σχήματα έχουν αναπτυχθεί τα άτομα διατηρούν τις πρωτοτυπικές εικόνες τους.
- Όταν ρωτήθηκαν παιδιά να αναγνωρίσουν τρίγωνα ανάμεσα σε άλλα σχήματα, χρειάζονταν να στρίψουν την κόλα όταν το σχήμα σε ήταν σε μια κλασσική στερεοτυπική θέση (Levenson , et als, 2011)



Γεωμετρία- ευρήματα

I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες



Εκπαιδευτικός (δείχνοντας ένα αντιστραμμένο τρίγωνο):

Και τι είπες ότι πρέπει να έχει ένα τρίγωνο;

Παιδί: Τρεις γωνίες και αυτό έχει τρεις γωνίες.

Εκπαιδευτικός: Λοιπόν...

Παιδί: Δεν είναι τρίγωνο. Είναι ανάποδο!

Γεωμετρία- ευρήματα

I. Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων - ιδιότητες

- Σύμφωνα με τον Duval (1999) υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι οργάνωσης και επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων:
 - οπτική σύλληψη (perceptual apprehension)
 - τμηματική σύλληψη (sequential apprehension)
 - λεκτική σύλληψη (discursive apprehension)
 - λειτουργική σύλληψη (operative apprehension)
- Στοιχεία αυτών των τρόπων αντίληψης των σχημάτων αποδεικνύεται ότι συνδέονται με χωρικές ικανότητες.

Γεωμετρία- ευρήματα

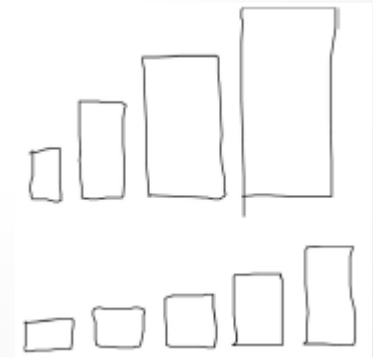
II. Διάκριση σχημάτων

- Τα παιδιά δεν διαχωρίζουν σχήματα της ίδιας κατηγορίας, πχ. τρίγωνα και τετράπλευρα.
- Η έρευνα δείχνει ότι τα μικρότερα κυρίως παιδιά έχουν την τάση να συγχέουν τον κύκλο με την έλλειψη ή άλλα καμπύλα σχήματα.
- Κάποια παιδιά μπερδεύουν επίσης το τετράγωνο με το ρόμβο, αλλά λιγότεροι είναι οι μαθητές που συγχέουν το ορθογώνιο με το τετράγωνο.
- Επίσης όταν τα μεγέθη ή γωνίες τροποποιηθούν σημαντικά από τα στερεοτυπικά σχήματα, τα αρχικά σχήματα δεν είναι ποια αναγνωρίσιμα.

Γεωμετρία- ευρήματα

II. Διάκριση σχημάτων

- Για την μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά 5-7 χρόνων αντιλαμβάνονται αυτές τις αλλαγές, τους ζητήθηκε να κάνουν μια «σκάλα» με τρίγωνα, τετράγωνα και ορθογώνια, ώστε το κάθε επόμενο να είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο.
- Τα παιδιά κατασκεύασαν σχήματα είτε αυξάνοντας τη μία ή και τις δύο διαστάσεις δείχνοντας να κατανοούν αυτή τη διαφορά στις ιδιότητες.
- Κατέληξαν μάλιστα να αποκαλέσουν το σχήμα που αναγνώριζαν ως τετράγωνο αλλά πρόκυψε από τον μετασχηματισμό του ορθογωνίου ως «τετράγωνο ορθογώνιο»

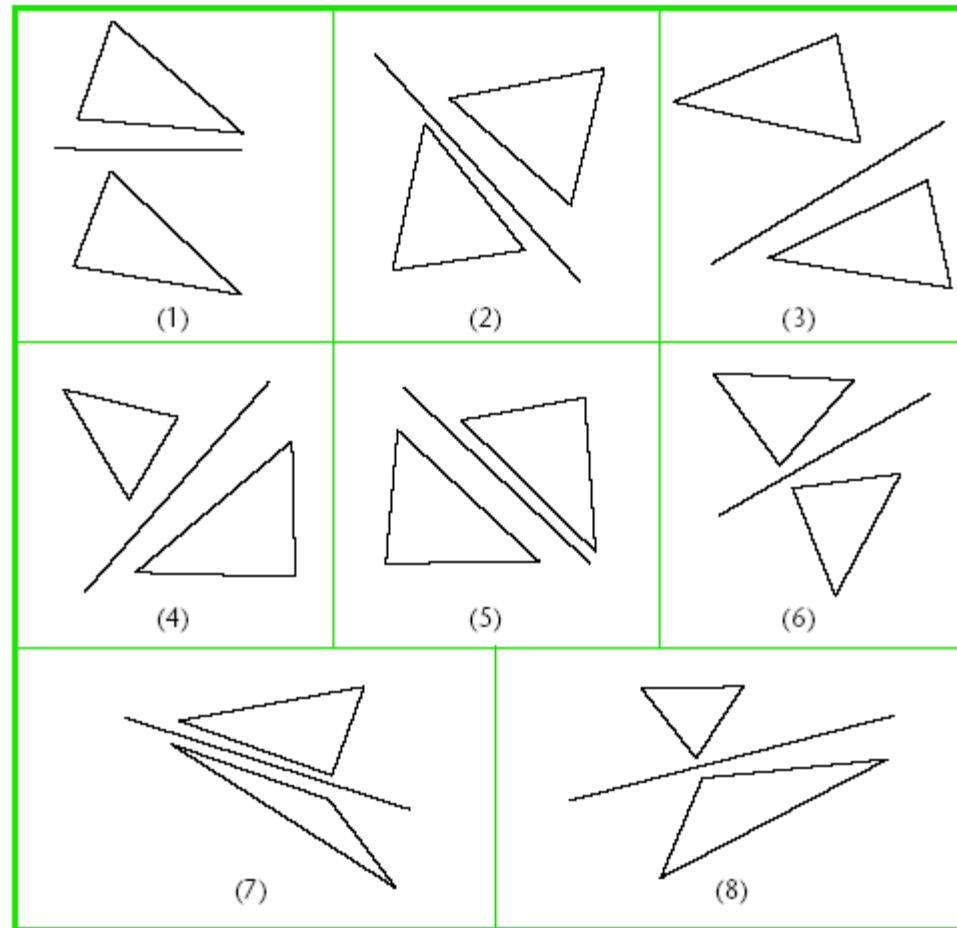


Γεωμετρία- ευρήματα

II. Διάκριση σχημάτων

- Η εγκλειστική σχέση των τετραπλεύρων μελετήθηκε σημαντικά τα τελευταία χρόνια και έδειξαν τη δυσκολία των μαθητών στη σύνδεση με τις ιδιότητες και τα στερεοτυπικά σχήματα.
- Έρευνες σε μαθητές τελευταίων τάξεων έδειξαν ότι στερεοτυπικά εμφανίζονται τα τετράγωνα και τα ορθογώνια και για το λόγο αυτό δεν γίνονται κατανοητές οι σχέσεις (Silfverberg & Matsuo, 2008)
- Σε όλα αυτά η οπτική προσέγγιση των σχημάτων είναι κυρίαρχη και στην αντίληψη των ιδιοτήτων.

Παράδειγμα - ανάδειξη ιδιοτήτων



Γεωμετρία- ευρήματα

III. Κατασκευές σχημάτων

- Οι μαθητές δεν βλέπουν τα αντικείμενα ως γεωμετρικά, δεν αναγνωρίζουν τα δομικά του χαρακτηριστικά.
- Αν και είναι σε θέση να ανακατασκευάσουν κάποιες ιδιότητες, οι ιδιότητες αυτές αποτελούν κιναισθητικές εικόνες (δηλαδή, εικόνες τις οποίες μπορούν να προσεγγίσουν στη δράση) και δεν αποδεικνύουν αναγνώριση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών.
- Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν από έρευνες δείχνουν ότι αν και οι μαθητές μέχρι κάποια ηλικία κατασκευάζουν με επιτυχία στερεά σχήματα (όπως πχ, ένα ορθογώνιο κουτί) δεν γνωρίζουν σε αυτό τις συγκεκριμένες ιδιότητες (Lampren & Murray, 2001).

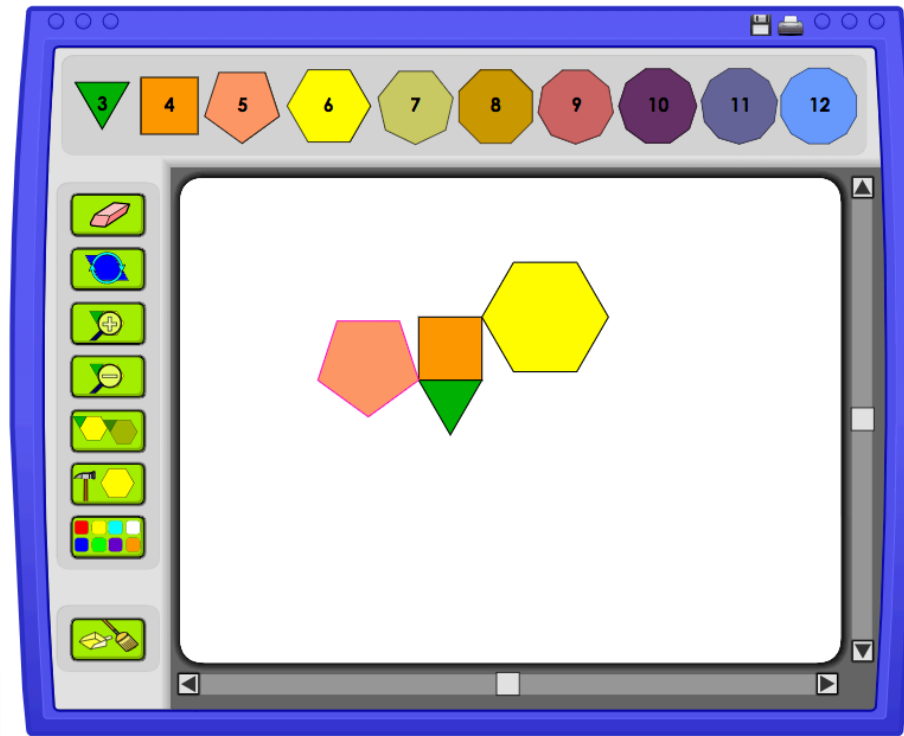
Γεωμετρία- ευρήματα

IV. Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων

- Οι συνθέσεις και οι αναλύσεις σχημάτων αναδεικνύονται ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης.
- Οι ερευνητές κατηγοριοποιούν τα επίπεδα ικανοτήτων των παιδιών στην ανάλυση και σύνθεση σχημάτων σε **πέντε επίπεδα**:
 - I. η **προ- συνθετική** κατηγορία (δεν συνθέτουν ουσιαστικά)
 - II. η **ένωση μερών** (ενώνουν σχήματα χωρίς σύνθεση)
 - III. ο **σηματισμός εικόνων** (συνδυάζουν σχήματα και δημιουργούν μορφές).
 - IV. η **δημιουργία σχημάτων** (συνδυάζουν σχήματα με νοερές εικόνες και μετασχηματισμούς),
 - V. Η **σύνθεση με ιδιότητες** (αξιοποιούν ιδιότητες, και δημιουργούν νέα στοιχεία (Sarama & Clements, 2009).

Γεωμετρία- ευρήματα

IV. Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων



Έννοιες χώρου και Γεωμετρία

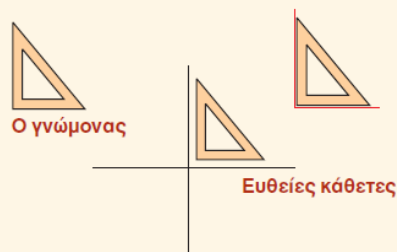
Συνοψίζοντας

- Η παρουσίαση των όρων του χωρικού και γεωμετρικού συλλογισμού όπως και της οπτικοποιημένης σκέψης επιτρέπει να γίνει κατανοητή η συνθετότητα των καταστάσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές προκειμένου να συστηματοποιήσουν τις αυθόρμητες χωρικές εμπειρίες και να αποκτήσουν αυτό που αποκαλείται **χωρικό και γεωμετρικό απόθεμα**.
- Η απλή λειτουργία και παρατήρηση τόσο του χώρου όσο και των γεωμετρικών μορφών δεν αρκούν για την ανάπτυξη αυτή.

Χρωματίζω με το ίδιο χρώμα τα σχήματα που είναι ίδια.



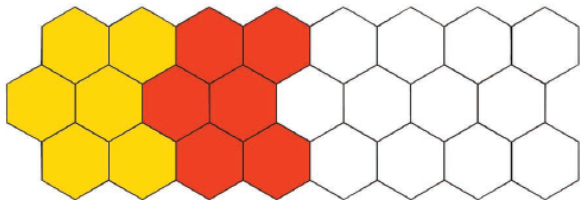
μαθαίνω



Για να ελέγξουμε αν μία γωνία είναι **ορθή**, και αν δύο ευθείες είναι **κάθετες** μεταξύ τους, χρησιμοποιούμε το γνόμενα.

Πόσα πόδια έχουν 3 μέλισσες; Έχουν πόδια.
Πόσα πόδια έχουν 7 μέλισσες; Έχουν πόδια.

Συνεχίζω να χρωματίζω με τον ίδιο τρόπο.



2. Παρατηρώ τον πίνακα. Συμπληρώνω.

μισή ποσότητα + αρχική ποσότητα x 2 = διπλάσια ποσότητα

$$1\frac{1}{4} : 2 = (1 : 2) + (\frac{1}{4} : 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$1\frac{1}{4} \text{ ή } \frac{5}{4} \text{ ή } \frac{5}{8}$$

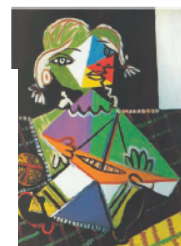
$$1\frac{1}{4} \times 2 = (1 \times 2) + (\frac{1}{4} \times 2) = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} \text{ ή } 2,5$$


Τρίγωνα	Τετράπλευρα	Πεντάγωνα	Εξάγωνα	Επτάγωνα	Οκτάγωνα	Δεκάγωνα
---------	-------------	-----------	---------	----------	----------	----------

1 Πίνακας ζωγραφικής

Η παρακάτω εικόνα δείχνει ένα πίνακα του Πάμπλο Πικάσο. Ποια σχήματα μπορείς να ξεχωρίσεις; Γράψε δίπλα τα ονόματά τους.



Ορίτσι με βάρκα (1938)

.....

.....

.....

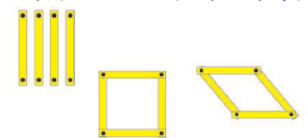
.....

.....

.....

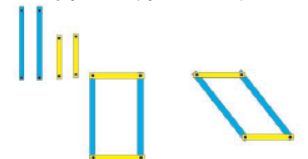
2 ύμβος και τετράγωνο

Κόψτε τέσσερις ίσες λωρίδες από χαρτόνι, ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα και φτιάξτε ένα αρθρωτό τετράγωνο. Μετακινήστε μια κορυφή.



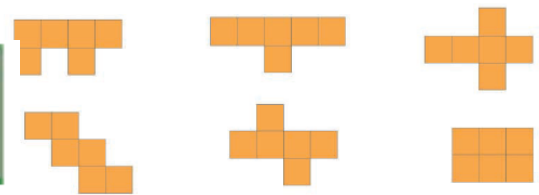
2 Παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο

Κόψτε δύο ζευγάρια (ίσων λωρίδων από χαρτόνι και ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα, όπως φαίνεται στην εικόνα.

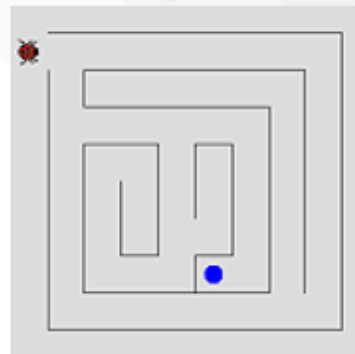
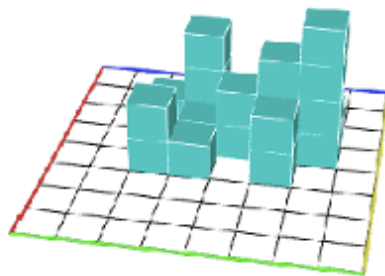
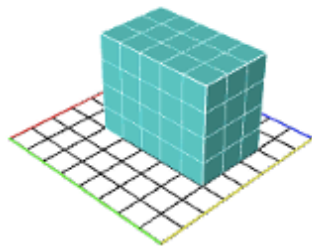
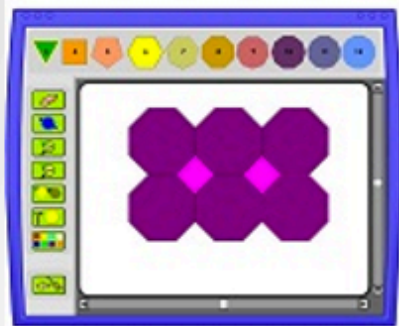


Οι μαθητές αναγνωρίζουν και διακρίνουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα.

2 Παρατήρησε ένα ζάρι. Έχει το σχήμα κύβου. Βάλε ένα ✓ σε όσα από τα παρακάτω αναπτύγματα μπορούν να μας δώσουν κύβο, αν τα διπλώσουμε.



Ερευνητικά ευρήματα - τεχνολογία



Κατάλογος

https://www.ct4me.net/math_manipulatives_2.htm

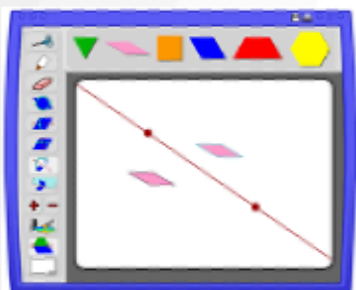
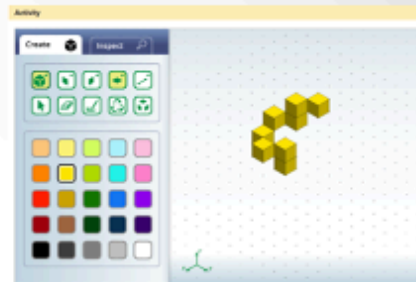
Κάποια sites

<https://illuminations.nctm.org/>

<http://photodentro.edu.gr/>

<https://www.teachmathematics.net/page/2960/geometry-virtual-manipulatives>

<https://www.geogebra.org/m/NPDu3rCm>



Area of Rectangles

Area and Perimeter

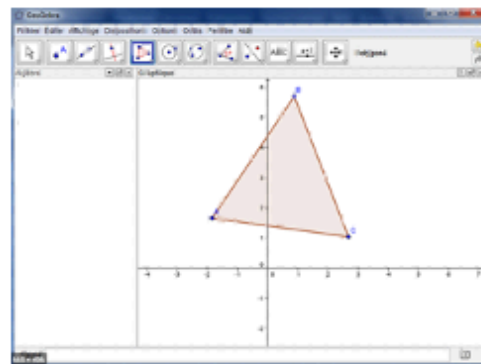
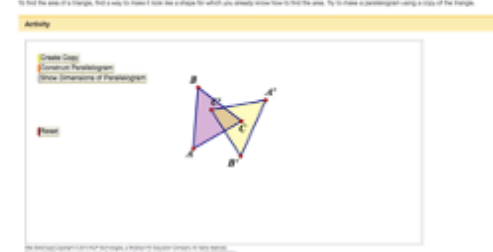
The app is used for the exploration of the area of rectangles.



Area of Triangles

Area and Perimeter

The app is used for the exploration of the area of triangles.



Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, pp. 37-51. Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 420-465. NCTM.
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. In A. Gutierrez, P. Boero, G. Leder (eds.). *2nd Handbook of Research on PME*. Sense Publishers (υπό έκδοση).
- Hershkowitz, R., Pazysz, B., & van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 511-564). Kluwer Academic Publishers.
- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry*. Sense Publishers.
- Mammana, C. V. (ed.) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers.
- Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of Learning Geometry and Measurement. In A. Gutierrez, & P. Boero (eds.). *Handbook of Research on PME. Past, Present and Future*, pp. 83-117. Sense Publishers.
- Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierrez, & P. Boero (eds.). *Handbook of Research on PME. Past, Present and Future*, pp. 205-236. Sense Publishers.
- Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*, pp. 159-246. Springer.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). The Earliest Geometry. *Teaching Children Mathematics*, 7 (2): 82-86.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Young children's concept of shape. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics*.
- Fischbein, E. (1996). The Psychological Nature of Concepts. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (ed.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children*, pp. 102-136. Kluwer Academic Publishers.
- Fisbein, E. (1993). The theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2): 139-162.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge University Press.
- Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11: 43-62.
- Gardner, H. (2006). *Multiple Intelligences*. New Horizon. Basic Books.
- Gray, E. M., & Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on cognitive development in elementary arithmetic. In O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Haifa, Isreal: Technion.
- Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L.Puig & A. Guitierrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia: University of Valencia, Spain.
- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine*. New York: W. W. Norton.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Lampen, E., & Murray, H. (2001). Children's intuitive knowledge of the shape and structure of three dimensional containers. In M. van der Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Mulligan, T. J., & Mitchelmore, C. M. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In English, L., & Mulligan, J. (2013) (Ed). *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*, pp.29- 46. Springer.
- Newcombe N., & Huttenlocher, J. (2000). *Making Space. The Development of Spatial Representation and Reasoning*. MIT Press.
- Owens, K. (1999). The role of Visualization in young students' Learning. In O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 220-234). Israel Institute of Technology.
- Παπαντωνίου, Α., & Τζεκάκη (2009). Οπτικοποίηση σε παιδιά προσχολικής ηλικίας: μία διδακτική παρέμβαση. Έρευνα στη διδακτική των Μαθηματικών, Τεύχος 4: 73-100.
- Piaget, J. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris: PUF.
- Silverberg, H., & Matsuo, N. (2008). Comparing Japanese and Finnish 6th and 8th graders' ways to apply and construct definitions. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30*, (Vol. 4, pp. 257-264). Mexico.
- Tzekaki, M., & Ikonomidou, A. (2009). Investigating spatial development in early childhood. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group of PME*. Thessaloniki, Greece: PME.
- Usiskin, Z. (1997). Applications in the Secondary School Mathematics Curriculum: A Generation of Change . *American Journal of Education*, Vol. 106, No. 1: 62-84.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vinner. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-81. Kluwer Academic Publishers.
- Wu, D. B., & Ma, H. L. (2005). A study of the geometric concepts of the elementary school students at Van Hiele Level 1. In H. Chick & J. L. Vincent (eds.), *Proceedings of 29th International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 329-337). Melbourne: PME