Μαθηματικά για Διδασκαλία I

Μαριάννα Τζεκάκη

Σκοπός του μαθήμα

Μαθηματικό περιεχόμενο

Ζητήματα μάθησης

- Η ... όχων της διδασκαλίας των μ... αι του σχετικού **μαθηματικού περιεχομ... ου** όπως προκύπτουν από επιστημονικές θέσεις.
- Η κατανόηση του πως οι μαθητές **μαθαίνουν** ειδικές μαθηματικές γνώσεις και τους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται αυτή η μάθηση.
- Η αξιοποίηση ερευνητικών δεδομ...ων και σχετικ... βιβλιογραφίας για την ανάπτυξη **διδακτικ... προτάσεων**.

Ζητήματα διδασκαλία ς

Περιεχόμενο μαθήματος

Ενότητα 1: (2 τετράωρα μαθήματα, Τζεκάκη)

Εισαγωγή – Μαθηματικά για διδασκαλία–Μαθηματική δραστηριότητα & Μαθηματικά έργα - ΜΠΓ

Ενότητα 2. (5 τετράωρα μαθήματα, Τζεκάκη, Δεσλή, Βαμβακούση, Παπανδρέου, Καλδρυμίδου)

Ειδικά θέματα: Χώρος – Γεωμετρία, Αριθμοί και πράξεις Ι και ΙΙ, Σημειωτική, Αλγεβρική Σκέψη

- Βασικές έννοιες και διεργασίες
- Ζητήματα μάθησης
- Διδακτικές προτάσεις

Κλεισιμο, παρουσιάσεις

Αξιολόγηση μαθήματος

Η αξιολόγηση του μαθήματος περιλαμβάνει *μια εργασία που εξελίσσεται σε 3 φάσεις:*

Φάση 1. Βιβλιογραφική αναζήτηση σε ένα συγκεκριμένο θέμα: Γεωμετρία, Αριθμοί και Πράξεις, Ρητοί, Άλγεβρα, Σημειωτική

Φάση 2. Συνθετική παρουσίαση ζητημάτων μάθησης (*εργασία για ανατροφοδότηση*)

Φάση 3. Παρουσίαση μιας διδακτικής πρότασης πάνω στο θέμα (*παρουσίαση στην τάξη και τελική εργασία)*

Τι σημαίνει Μαθηματικά για Διδασκαλία;

Μαθηματικά για διδασκαλία

«… Οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται διαφορετικά είδη γνώσης:

- *μαθηματική γνώση για το σύνολο των θεμάτων που διδάσκουν,*
- *βαθιά ευέλικτη γνώση σχετικά με τους στόχους του προγράμματος σπουδών και*
- *για τις σημαντικές ιδέες που είναι κεντρικής σημασίας στο επίπεδο που διδάσκουν,*
- *γνώση σχετικά με το πώς μπορούν αυτές οι ιδέες να παρασταθούν για να διδαχθούν αποτελεσματικά, και*
- *γνώση για το πώς οι μαθητές τις κατανοούν..»*

(Al Cuoco, 2001)

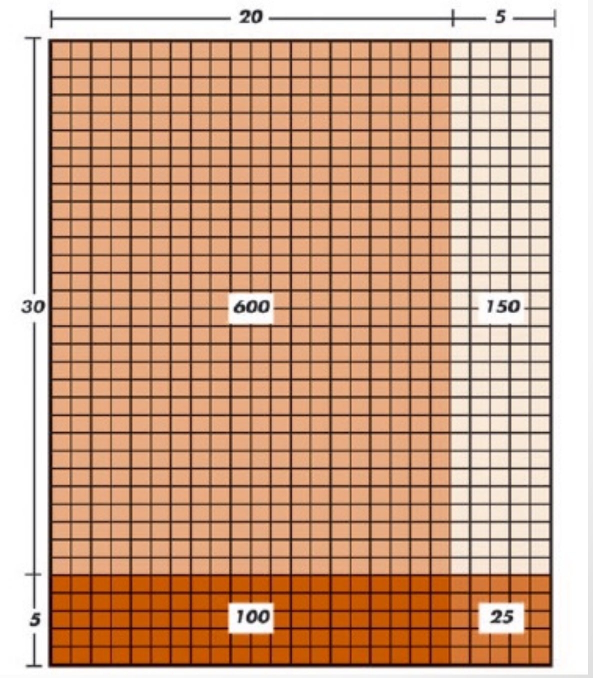
Μαθηματικά για διδασκαλία

- Όπως εξηγεί η Ball et al. (2005), η διδασκαλία όποιου αντικειμένουμε απαιτεί περισσότερα από το να το ξέρεις :
  - να κατανοείς το μαθηματικό περιεχόμενο,
  - να το παρουσιάζεις κατάλληλα,
  - να χρησιμοποιείς τις σχετικές αναπαραστάσεις,
  - να γνωρίζεις τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών,
  - να ερμηνεύεις τα λάθη τους….

Μαθηματικά για διδασκαλία

- Παρουσιάζει το παράδειγμα του πολλαπλασιασμού 35 X 25, με τα λάθη και τις κατάλληλες αναπαραστάσεις:
  - τι είναι πολ/σμός;
  - Πώς να κάνουν πολ/σμούς;
  - Πώς να κάνουν παραστάσεις;
  - Δοκιμάζουν τον αλγόριθμο;
  - Ποια λάθη;

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 25 \\ \hline 175 \\ 70 \\ \hline 245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times\ 25 \\ \hline 255 \\ 80 \\ \hline 1055 \end{array}$$



Κυρίαρχες αντιλήψεις
Κυρίαρχες απαιτήσεις
στη Διδασκαλία Μαθηματικών

Κυρίαρχες αντιλήψεις στη διδασκαλία

- Κεντρική τάση ότι τα Μαθηματικά αφορούν τις μεγάλες τάξεις του Β΄ κύκλου σπουδών είναι (ακόμα) κυρίαρχη.
- Κυρίαρχη η δασκαλοκεντρική - μετωπική παρουσίαση, χωρίς κάθετες συνδέσεις.
- Οι διδακτικές πρακτικές είναι επικεντρωμένες στις επιλύσεις ασκήσεων και εργασιών στο χαρτί και κυριαρχεί η παιδαγωγική «κάνε ότι βλέπεις» (Cuoco, 2001).

Κυρίαρχες αντιλήψεις στη διδασκαλία

- Εκτέλεση εντολών, εφαρμογές και λύση ασκήσεων οδηγούν τους μαθητές σε τετριμμένες και όχι σημαντικές ιδέες των μαθηματικών.
- Τι είναι Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών;
- Τι αφορούν για τον Α’ κύκλο;
- 5 βασικοί άξονες των Μαθηματικών για Διδασκαλία

Βασικές ιδέες Μαθηματικής εκπαίδευσης

1. Αριθμοί και πράξεις
   - Φυσικοί αριθμοί: πρώτη δεκάδα, θεσιακή αξία, βασικές ιδιότητες και υπολογιστικές διαδικασίες (αλγόριθμοι)
   - Κλασματικοί αριθμοί: έννοια και ισοδυναμία, πράξεις με κλάσματα
   - Δεκαδικοί: ερμηνεία, υποδαστολή και πράξεις, σύνδεση αιρθμών
   - Προσθετικές και πολ/στικές καταστάσεις
2. Χώρος και Γεωμετρία
   - Προσανατολισμός, οπτικοποίηση και σχήματα/ιδιότητες και σχέσεις
3. Μέτρηση μεγεθών
   - Γωνία, μήκος, εμβαδόν, όγκος
4. Αλγεβρική Σκέψη
   - Κανονικότητες, παραστάσεις, εξισώσεις, σχέσεις
5. Στοχαστικά Μαθηματικά
   - Στοιχεία στατιστικής και πιθανολογική σκέψη

Κυρίαρχες απαιτήσεις για διδασκαλία;

- Η διδασκαλία απαιτεί
- Ουσιαστική γνώση της βασικής μαθηματικής ιδέας
- Κατάλληλες δραστηριότητες για την προσέγγιση της ιδέας

- Μια μαθηματική ιδέα δεν μπορεί να προσεγγισθεί με μία δραστηριότητα (Vergnaud, 1996)

Κυρίαρχες απαιτήσεις για διδασκαλία;

- Τι ΔΕΝ είναι δραστηριότητα/ρεαλιστική κατάσταση/ κατάσταση πρόβλημα/παιχνίδι

- Ερωταποκρίσεις
- Εκτέλεση (να κάνετε…)
- Ασκήσεις εκτέλεσης
- Μη αυθεντικό πρόβλημα
- Μη αυθεντικό παιχνίδι

Σύνδεση Περιεχομένου και Διδασκαλίας

- Ο Shulman με την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (1986, Pedagogical Content Knowledge) δοκίμασε να να συνδέσει περιεχόμενο και παιδαγωγική.

- Ποιές γνώσεις για την επαγγελματική κατάρτιση;
  - γνώση περιεχομένου,
  - γενική παιδαγωγική γνώση,
  - γνώση προγραμμάτων σπουδών,
  - γνώση μαθητών και των χαρακτηριστικών τους,
  - γνώση εκπαιδευτικών στόχων, σκοπών και αξιών
  - γνώση ιστορικών και φιλοσοφικών θεμελίων.

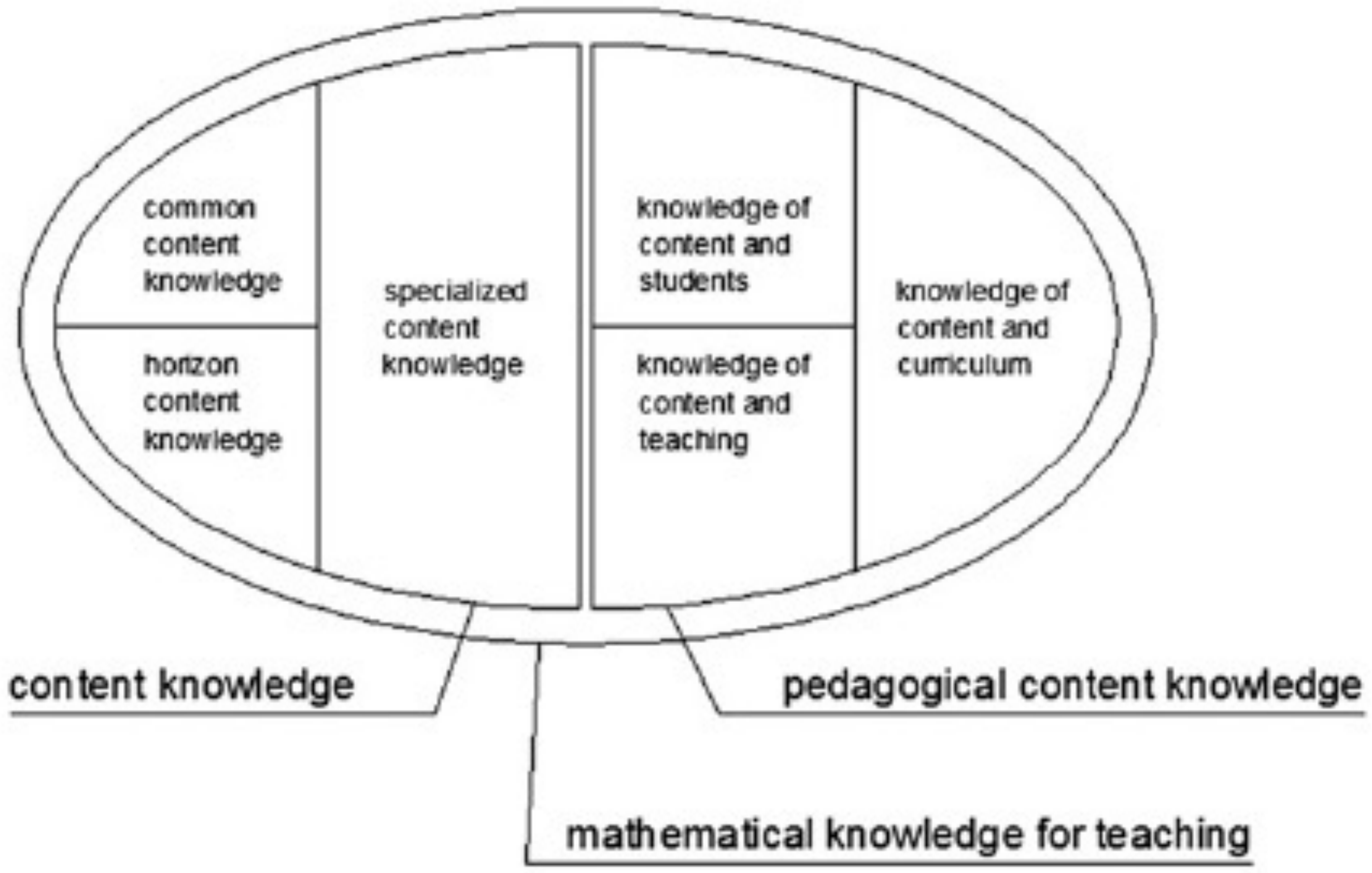
Σύνδεση Περιεχομένου και Διδασκαλίας

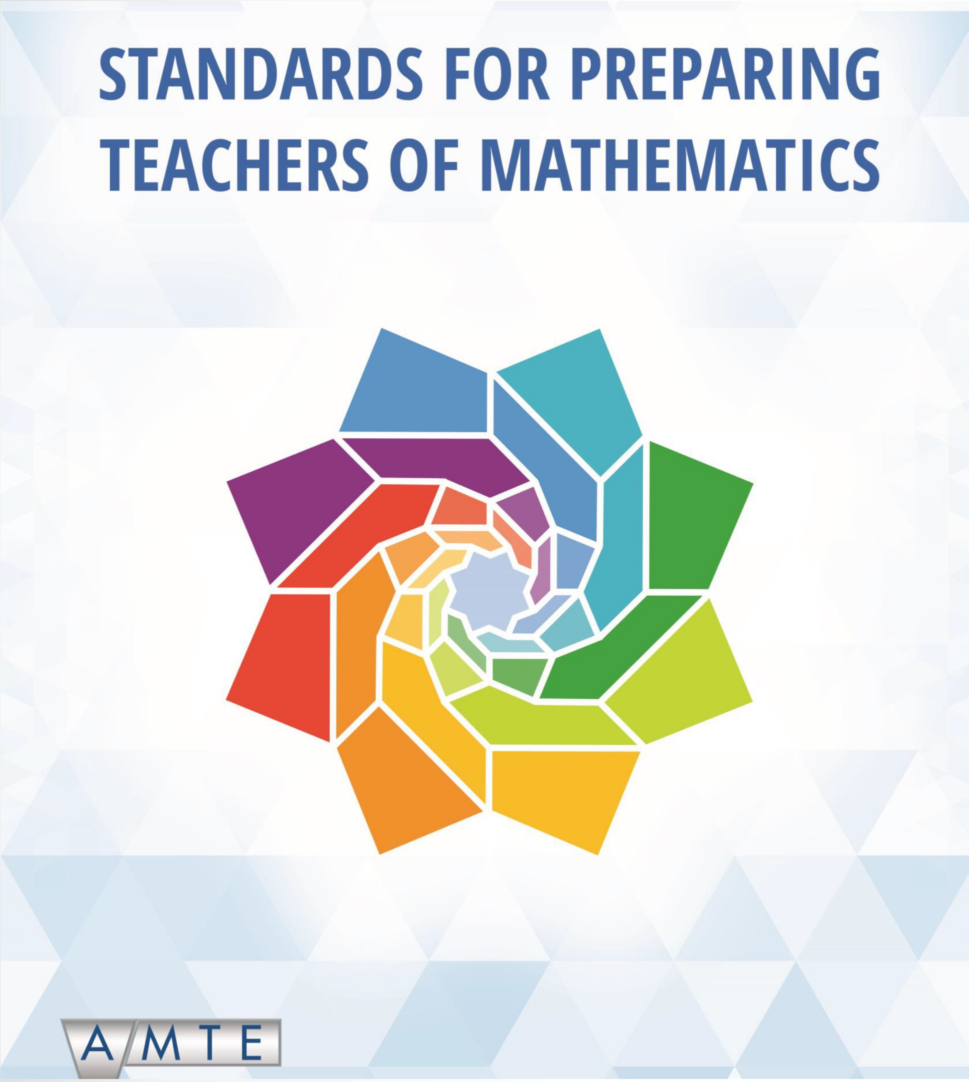
- Ο Shulman (1986) τεκμηρίωσε ότι, αν δεν προηγηθεί μια ιδιαίτερη εκπαίδευση, οι αρχικές γνώσεις των εκπαιδευτικών είναι εμπειρικές.
- Οι εμπειρικές αυτές γνώσεις καταλήγουν σε διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν τους διδάσκοντες σε όλες τις μορφές υλοποίησης της διδασκαλίας, ακόμα κι αν πρόκειται για αναμορφώσεις ή άλλες αλλαγές.

Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία

- Στη νοηματοδότηση από την Ball et al. (2005), η Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία (mathematical knowledge for teaching, MKT) διαφοροποιείται καλύπτοντας και τα δύο.
- Αξιοποιείται κυρίως για την αξιολόγηση της επαγγελματικής γνώσης των εκπαιδευτικών.
- Η προσέγγιση αυτή ενσωματώνει πολλά από τα στοιχεία της PCK του Schulman.

Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία





- Η Ένωση των Δασκάλων των Μαθηματικών (Association of Mathematics Teacher Educators, AMTE) το 2017, έθεσε σε κυκλοφορία το έργο αυτό ως ένα εθνικό οδηγό για την προετοιμασία όσων διδάσκουν Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το τέλος της Α’βαθμιας και Β’βάθμιας Εκπαίδευσης.

https://amte.net/standards

4 βασικοί πυλώνες γνώσεων

- Μαθηματικές έννοιες και ΠΣ (γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, με ιστορικά και φιλοσοφικά θεμέλια, όπως γνώση των στόχων στο πρόγραμμα σπουδών)
- Παιδαγωγική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (γνώση διδακτικών προσεγγίσεων)
- Γνώση των μαθητών ως εκπαιδευομένων στα Μαθηματικά (γνώση των αντιλήψεων των μαθητών για τη σχετική γνώση)
- Κοινωνικά πλαίσια διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών (γενική κοινωνική γνώση)

Τι είναι πιο σημαντικό να εξετάζει ο εκπαιδευτικός πριν τη διδασκαλία μιας ενότητας

Το μαθηματικό περιεχόμενο

Τις δυσκολίες των μαθητών

Κατάλληλες δραστηριότητες

Κατάλληλη ιδακτική μέθοδο

ατάλληλο υλικό

Μαθηματικές έννοιες

Μαθηματικές έννοιες

Τι είναι μια έννοια;
Τι είναι μια μαθηματική έννοια;

Έννοια είναι μια γενικευμένη γνώση που έχουμε για μια κατηγορία πραγμάτων ή φαινομένων που συνδέονται μεταξύ τους με κοινά χαρακτηριστικά.
- για συγκεκριμένα πράγματα
- για μη υλικές πραγματικότητες
- για αφηρημένες πραγματικότητες

Οι μαθηματικές: ιδεατές οντότητες

Μαθηματικές έννοιες

- Vergnaud (1996) υποστηρίζει ότι μια έννοια συγκροτείται από τρία στοιχεία:
  - το *σύνολο των καταστάσεων* μέσα στο οποίο η έννοια λειτουργεί και παίρνει το νόημά της,
  - το σύνολο των *λειτουργικών σταθερών* (operational invariant) που χρησιμοποιούνται από το άτομο για να διαχειριστεί αυτές τις καταστάσεις και τέλος,
  - το *σύνολο των αναπαραστάσεων*, γλωσσικών, γραφικών ή άλλων μέσων που χρησιμοποιούνται για να αποδώσουν αυτές τις σταθερές, καταστάσεις ή διαδικασίες.

Εννοιολογική κατασκευή

- Το άτομο αναπτύσσει *ενεργητικά* το εννοιολογικό του σύστημα (Fisbein, 1996), όμως κάποιες έννοιες εισάγονται *κοινωνικά* (Vygotsky, 1936; Howard, 1987).
- Οι έννοιες *δεν είναι απομονωμένες* στο μυαλό του ατόμου, εξελίσσονται, βελτιώνονται και διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται την πραγματικότητα.
- Μια έννοια, αποτελεί μια *νοητική κατασκευή* που προκύπτει από μια *αφαιρετική διαδικασία* για την απόκτηση νοήματος πάνω στα πράγματα, τα φαινόμενα, τις σχέσεις και τις ιδιότητες (Piaget, 1958).

Αφαιρετική διαδικασία

- Κατά τον Piaget (1971) η διαδικασία ανάπτυξης εννοιών αφορά μία *αφαιρετική διαδικασία* που ο ίδιος κατηγοριοποιεί σε (τουλάχιστον) τρεις μορφές:
  - την *εμπειρική αφαίρεση* (empirical abstraction*)* όπου το άτομο κατασκευάζει νοήματα (και έννοιες) για τα αντικείμενα και τις ιδιότητες τους, μέσα από δράση,
  - η *ψευτο- εμπειρική αφαίρεση* (pseudo-empirical abstraction*)* όπου το άτομο κατασκευάζει νοήματα από για τις ιδιότητες των δράσεων, και
  - η *νοητική αφαίρεση* (reflective abstraction*)* όπου οι δράσεις και οι πράξεις γίνονται αντικείμενα της σκέψης ή αφομοιώνονται (Brun, 1996).

Αφαιρετική διαδικασία

- Αμφισβητείται αυτή η διάκριση.
- *Ένα συνεχές* ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο.
- Ο Duval (1998), με αναφορά στις γεωμετρικές έννοιες, υποστηρίζει ότι η δημιουργία *αφαιρέσεων από τα συγκεκριμένα αντικείμενα ή καταστάσεις*, εμπλέκει τον τρόπο με τον οποίο τα αντιλαμβανόμαστε ή τα αντιμετωπίζουμε και ο τρόπος αυτός περιέχει ήδη ορισμένες αφαιρέσεις.

Ιδιαιτερότητα μαθηματικών εννοιών

- Οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν *αφηρημένες κατασκευές* που συγκροτούνται μέσω της αντιμετώπισης καταστάσεων της πραγματικότητας αλλά στη συνέχεια ολοκληρώνονται μέσω της μαθηματικής πραγματικότητας (Fisbein, 1996, Brun, 1996).
- Η επιστήμη των Μαθηματικών δημιουργεί έννοιες για να αντιμετωπίσει καταστάσεις, αλλά στη συνέχεια τις γενικεύει ώστε να αφορούν, να προσδιορίζονται και να λειτουργούν έξω από αυτές.

Για παράδειγμα

- Ο άνθρωπος δημιούργησε τους αριθμούς για τις ανάγκες του, για να επιτρέψει πράξεις σύγκρισης ή μέτρησης ποσοτήτων ή μεγεθών, αλλά στη συνέχεια οι αριθμοί συγκροτήθηκαν σε ένα σύνολο με ιδιότητες και σχέσεις.
- Πολλά από τα μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιούνται ή εμπλέκονται σε πλήθος καθημερινές συναλλαγές αλλά *δεν είναι πραγματικά αντικείμενα* (Dossey, 1992).
- Η *ιδιαίτερη αφαιρετική διαδικασία* που απομονώνει ιδιότητες, σχέσεις ή δομές δίνει μεγάλη λειτουργική δύναμη στα Μαθηματικά αλλά δυσκολεύει ιδιαίτερα και τη μάθησή τους.

Ιδιαιτερότητα μαθηματικών εννοιών

- Οι μαθητικές έννοιες έχουν πολλές όψεις, εμφανίζονται σε διαφορετικούς ρόλους, έχουν διαφορετικές χρήσεις, γενονός που κάνει τη φύση τους να διαφοροποιείται επιστημολογικά, και τις προσεγγίσεις που προτείνονται να αλλάζουν οπτική γωνία.

  Πχ. Είναι μια παράσταση ή ένα σύμβολο (σχήμα ή αριθμός), είναι μια διαδικασία (μιά πράξη, μια μέτρηση), είναι ένας κανόνας ή μία ιδιότητα, μια σχέση (μια κανονικότητα) κλπ.

Ιδιαιτερότητα μαθηματικών εννοιών

- Οι μαθητικές *έννοιες* έχουν επίσης και μια *μακρόχρονη ανάπτυξη*.
- *Μακρόχρονη είναι και η διδακτική τους κατασκευή*, που επίσης έχει πολλές όψεις (επιστημολογικές, ψυχολογικές, κοινωνικές, Serpinska & Lerman, 1996).

Ένα παράδειγμα μαθηματικής γενίκευσης

Επεξεργασία	Κατάσταση – πρόβλημα	Λύση
Λύση σε ένα (ειδικό) πρόβλημα	10 άτομα ανταλλάσουν χειραψίες, πόσες χειραψίες στο σύνολο; 	10.9/2=45

Συνοψίζοντας

- Το θεμελιώδες κοινό στοιχείο όλων των προσεγγίσεων είναι ότι η μαθηματική γνώση
  - είτε είναι καινούργια, είτε διευρύνει κάποια προϋπάρχουσα,

  δεν παρουσιάζεται απλά, αλλά

  - *κατασκευάζεται από τον μανθάνον υποκείμενο*.
- Επηρεάζεται από ατομικούς, κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες, αλλά πραγματοποιείται μέσα σε ένα *περιβάλλον δράσης των ατόμων που μαθαίνουν*.

  Άρα
- Η διδασκαλία της απαιτεί συστηματικότητα και μελέτη
- Στο επίκεντρο η *μαθηματική δραστηριότητα* (Τζεκάκη, 2011)

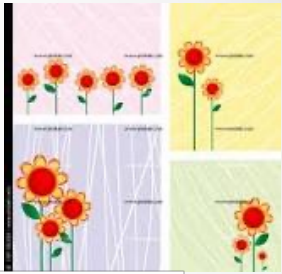
Μαθηματική δραστηριότητα

Μαθηματική Δραστηριότητα

- Ποιες είναι οι ιδιαιτερότητες της *μαθηματικής δραστηριότητας;*
- Ποιες μπορούμε να ονομάσουμε *μαθηματικές δράσεις*;
- Με *τι κριτήρια* αξιολογούμε τις δράσεις ως μαθηματικές;
- Ποιες *ερωτήσεις, προβλήματα, έργα ή καταστάσεις* οδηγούν στην ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας ;

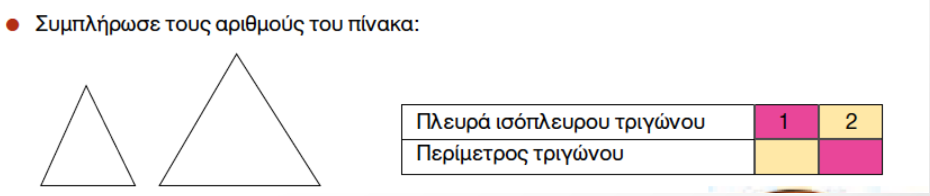
Είναι η απάντηση δραστηριότητα;

Παράδειγμα 1 : Ερωταποκρίσεις



- Πόσα λουλούδια είναι σε αυτή την κάρτα;
- Τι σχήματα είναι;

- Πόσο κάνει 13 + 25;
- Αριθμό μαθητών! Πόσοι μαθητές προτιμούν το χάντμπολ;
- Πόσα χρήματα θα δώσει ....;
- Ποια σοκολάτα είναι πιο μεγάλη;
- Συμπλήρωσε τον πίνακα



Είναι η εκτέλεση δραστηριότητα;

Παράδειγμα 2 : Κάνε…

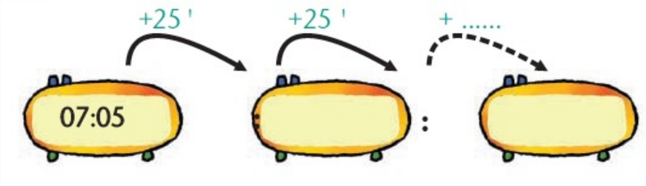
- Υπολόγισε τα αθροίσματα
- Βρες δεκάδες και μονάδες
- Βρες τα 16 λεπτά που θα δώσει;
- Ολοκλήρωσε το σχήμα
- Συμπλήρωσε

$10 + 3 = \dots$

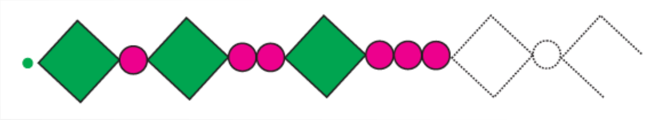
$10 + 10 + 7 = \dots$

$10 + 8 = \dots$

$10 + 10 + 10 + 5 = \dots$



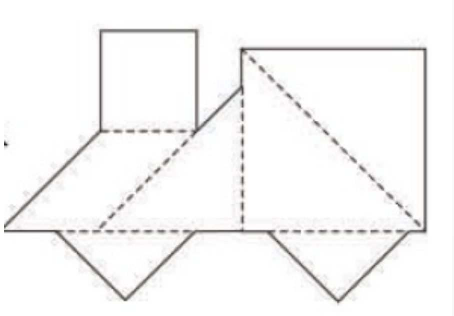
- Συνέχισε το μοτίβο



Είναι η κατασκευή δραστηριότητα;

Παράδειγμα 3 : Κατασκεύασε

- Κόβω και κολλώ σχήματα για να φτιάξω ένα πρόσωπο
- Επικαλύπτω το σχήμα με σχήματα- τανγκράμ



- Φτιάχνω ένα μοτίβο με σχήματα και χρώματα
- Φτιάχνω ένα πίνακα προτιμήσεων

Είναι η επίλυση δραστηριότητα;

Παράδειγμα 4 : Λύσε το πρόβλημα

- Σε ένα διψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι μεγαλύτερο από το ψηφίο των μονάδων, ποιός μπορεί να είναι ο αριθμός;
- Εργοστάσιο με καραμέλες – πως να οργανωθούν;
- Πόσοι συνδυασμοί μπορούν να γίνουν με σχήματα;
- Εύρεση μακρινού όρου ένός μοτίβου
- Εύρεση αριθμού κύβων σε ένα κτίριο
- ....

Τι είναι τελικά μια δραστηριότητα;

- Είναι μια κατάσταση που ***δραστηριοποιεί*** το μαθητή.

- Συνήθως είναι *ένα πρόβλημα,* μια άγνωστη κατάσταση, μια κατασκευή, ένα σχέδιο, ένα παιχνίδι, κ.ά. όπου το άτομο δρα, αποφασίζει, επιλέγει, κατασκευάζει.
- Αν εμπλακεί ουσιαστικά, θα κινητοποιήσει τις γνώσεις που διαθέτει. Αν αυτές οι γνώσεις δεν αρκούν θα αναγκαστεί να τις επανεξετάσει, επανοργανώσει, θα τις ***μετασχηματίσει*** σε μια νέα γνώση.

Μαθηματική δραστηριότητα

- Μια δραστηριότητα για την ανάπτυξη μιας νέας ιδέας πρέπει να οδηγεί το παιδί σε μία *κατάσταση προβληματισμού.*
- Συχνά οι εκπαιδευτικοί μένουν ευχαριστημένοι όταν τα παιδιά καταφέρνουν να αντιμετωπίσουν την κατάσταση που τους προτείνεται και δίνουν «σωστές» απαντήσεις ή λύσεις.
- Μια τέτοια εξέλιξη σημαίνει ότι τα παιδιά γνωρίζουν ήδη τη γνώση που διαπραγματεύονται και στην ουσία δεν οδηγούνται στην ανάπτυξη μιας νέας ιδέας.

Πότε μια δραστηριότητα είναι μαθηματική;

- Θεωρείται επίσης ότι κάθε δραστηριότητα που εμπλέκει μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμούς, σχήματα, πράξεις, τύπους, εξισώσεις κλπ.) είναι μαθηματική.
- Η μαθηματική εκπαίδευση υποστηρίζει ότι η απλή ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικά αντικείμενα δεν αναπτύσσει και μαθητικές ιδέες.
- Απαιτείται η ανάπτυξη μιας *μαθηματικής δράσης* στα αντικείμενα.

Αποσαφηνίσεις

Δραστηριότητα (activity)

- Μια κατάσταση που δραστηριοποιεί το άτομο. Βασικό χαρακτηριστικό μιας δραστηριότητας είναι η δράση την οποία συναντάμε στην αναζήτηση λύσης σε ένα πρόβλημα, μεθόδων σε μία κατασκευή, στρατηγικών σε ένα παιχνίδι, κλπ.

Δράση (action)

- Όσα το άτομο πραγματοποιεί προκειμένου να επιτύχει ένα αποτέλεσμα

Έργο (task) – (όχι άσκηση)

- Είναι η κατάσταση, το πρόβλημα, η κατασκευή κλπ. για το οποίο το ο μαθητής δραστηριοποιείται

Μαθηματική δραστηριότητα

- Μια δραστηριότητα θα λέγεται μαθηματική όταν αναπτύσσει *μαθηματική δράση*.
- Οι εκπαιδευτικοί συχνά μένουν ευχαριστημένοι όταν τα παιδιά ασχολούνται με *μαθηματικά αντικείμενα.*
- Ωστόσο τα παιδιά αντιμετωπίζουν τις καταστάσεις που τους προτείνονται με «καθημερινές» έννοιες,

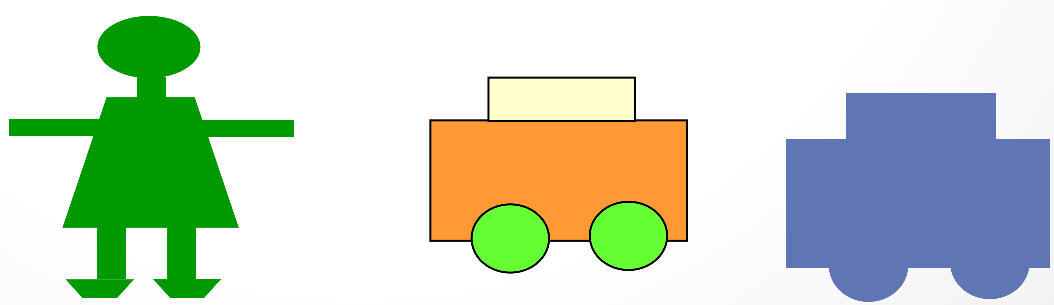
  - δεν δίνουν ιδιαίτερο νόημα, ούτε γενικεύουν,

  - και δεν αναπτύσσουν νέες κι οπωσδήποτε *δεν αναπτύσσουν μαθηματικές ιδέες.*

Μαθηματική δράση

Παράδειγμα: Επικάλυψης ενός περιγράμματος με σχήματα:

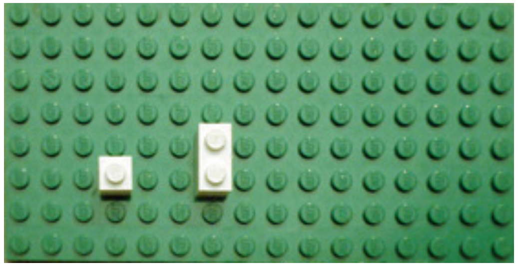
Οι μαθητές κάνουν συνθέσεις, ανακαλούν τα σχήματα, κάνουν στροφές ή μετατοπίσεις και αντιλαμβάνονται τα σχήματα σε ποιο αφηρημένο επίπεδο από ότι η απλή αναγνώριση.



Μαθηματική δράση

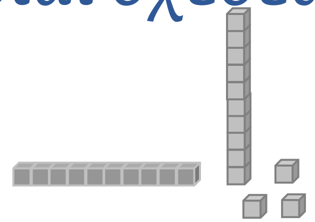
Παράδειγμα –έννοιες χώρου

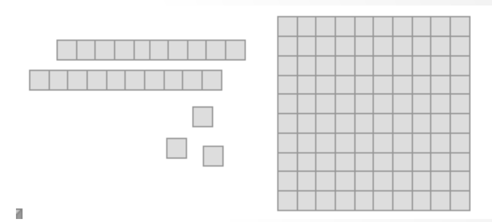
Ο εντοπισμός μιας θέση σε μια πλάκα lego, όπου οι μαθητές παιδί μελετούν ιδιότητες τετραγωνισμένου πλαισίου, σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα, αποστάσεις, προσανατολισμούς και παρατηρεί την κανονικότητα του περιβάλλοντος.

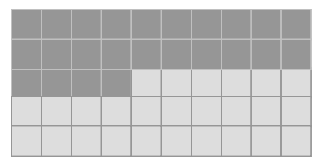


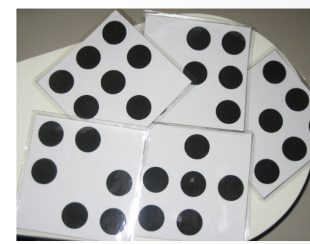
Μαθηματική δράση

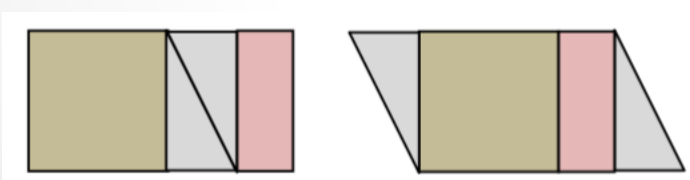
Αναγνώριση Ιδιοτήτων και σχέσεων

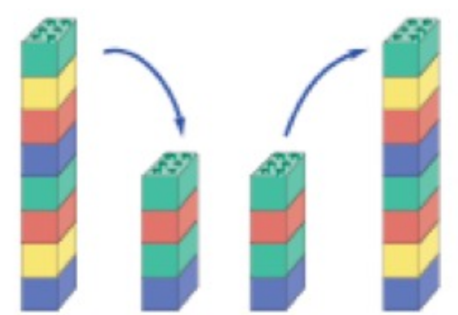






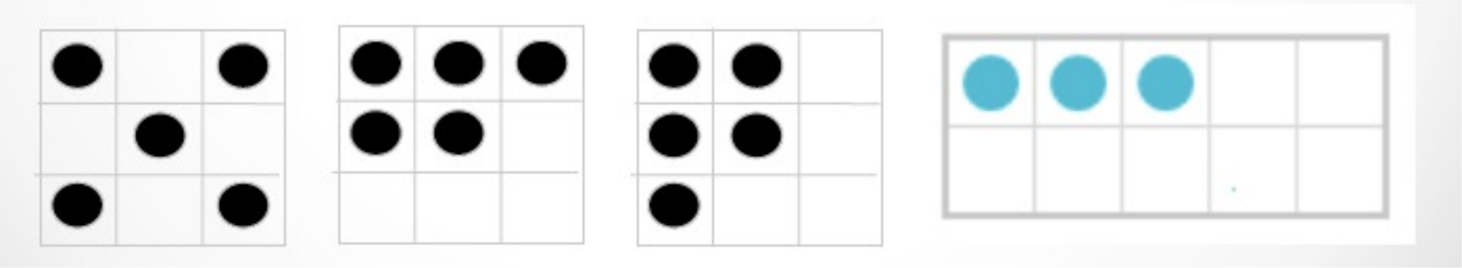






Μαθηματική δράση

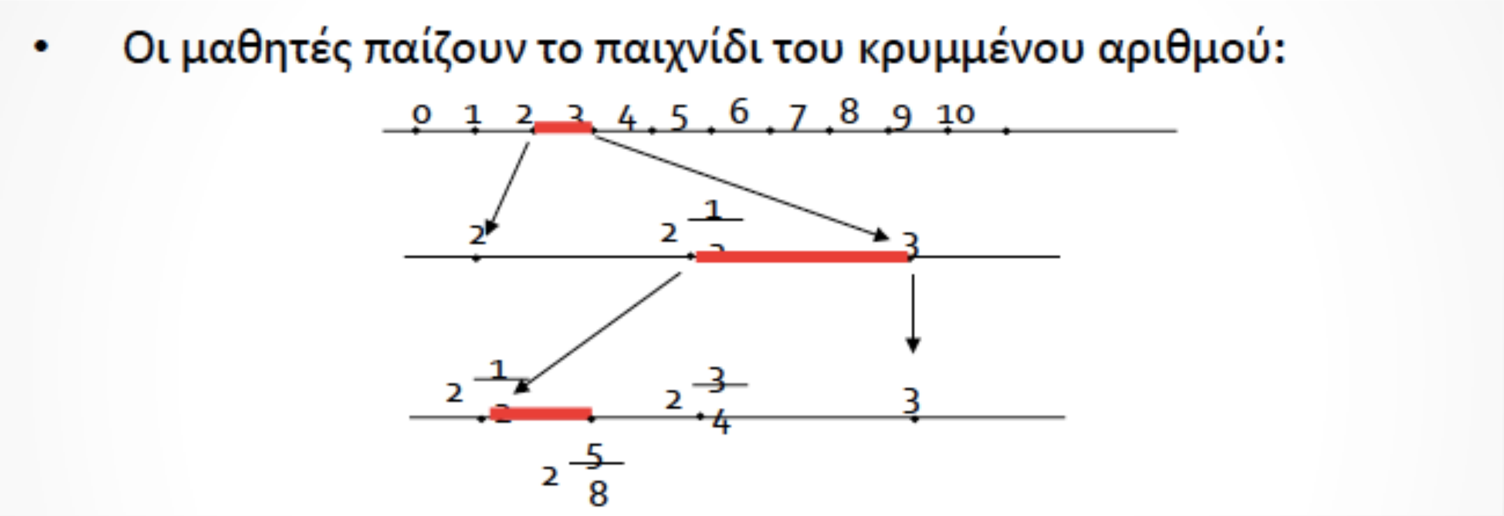
Παράδειγμα –αναγνώριση ποσοτήτων με παράλληλη προσέγγιση ανάλυσης σε μέρη και αριθμητικές σχέσεις.



Μαθηματική δράση

Παράδειγμα – παιχνίδι

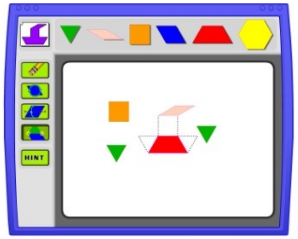
Όπου τα παιδιά προσεγγίζουν ιδιότητες και σχέσεις στην ευθεία των αριθμών.

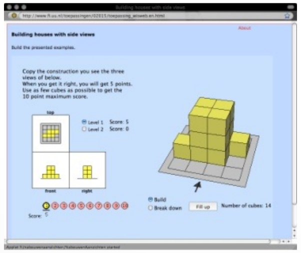


Μαθηματική δράση

Κανονικότητες και κοινές δομές

- Μοτίβα
- Ακολουθίες αριθμών 1, 3, 5, … ή 1, 4, 7, …
- Τριγωνικοί, τετραγωνικοί κλπ. αριθμοί
- Πίνακας πολ/σμου
- Σύγκριση δεκαδικού συστήματος
- Αναπτύγματα
- Δόμηση επιπέδου/χώρου





Μαθηματική δράση

Αναλύσεις και συνθέσεις

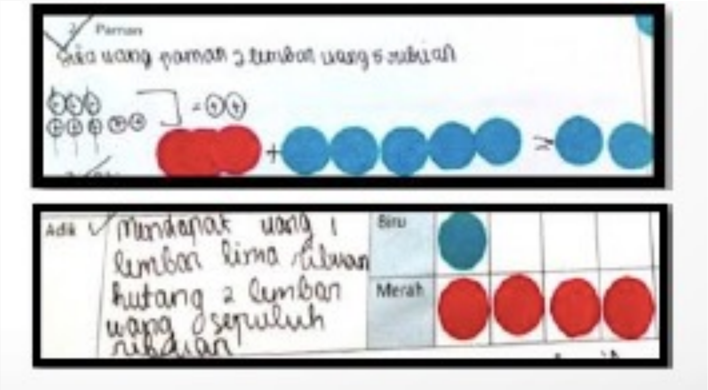
- Σχήματα (σε μέρη και σχέσεις)
- Αριθμοί (σχέσεις και πράξεις)
- Κατασκευές (αριθμητικές, γεωμετρικές ή συνδυασμοί)
- Μονάδες, δεκάδες κλπ.
- Δέκατα, εκατοστά, κλπ.
- Μοναδιαία κλάσματα
- Μονάδες μέτρησης

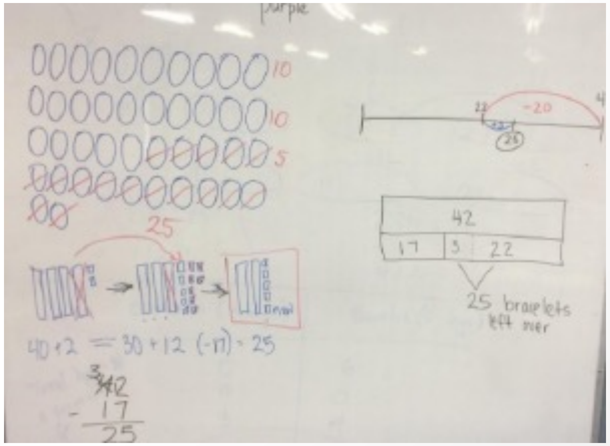
Μαθηματική δράση

Αναπαραστάσεις και σημειωτική δράση

- Οι μαθητές παριστάνουν τις ιδέες και πράξεις τους με

- Ζωγραφιές/εικόνες
- Σχέδια/ σχήματα
- Σύμβολα





Συνοψίζοντας τις μαθηματικές δράσεις

- Αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων
- Αντίληψη κανονικοτήτων/μοτίβων και κοινών δομών
- Ανάλυση και σύνθεση στοιχείων, μερών και μοναδιαίων τμημάτων
- Δημιουργία συνδέσεων
- Σημειωτική δράση και σύνδεση με παραστάσεις, σήματα και σύμβολα,
- Εξήγηση/δικαιολόγηση,
- Αναστοχαστική δράση
- Γενίκευσης
- …………

Ο κατάλογος χρειάζεται να ολοκληρωθεί

Μαθηματικά έργα

Μαθηματικά έργα

- Οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι όταν ένα έργο εμπλέκει ή καλεί τους μαθητές να ασχοληθούν με κάποια μαθηματικά αντικείμενα αυτό εξασφαλίζει ότι οι μαθητές ‘κάνουν μαθηματικά’, κάτι που στην πραγματικότητα δεν ισχύει.
- Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές κάνουν πράξεις με θετικούς κι αρνητικούς αριθμούς με τη χρήση μοντέλων ή μόνο αριθμητικών συμβόλων, ποιες από τις αναφερθείσες δράσεις ή κριτήρια καλύπτουν;

$$\frac{2}{5}\cdot 10-3\cdot(-2)-\frac{1}{2}(-3+7-2)$$

Μαθηματικά έργα

- Συχνά οι μαθητές εμπλέκονται σε πλούσιες αλλά δεν κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις και γενικεύσεις προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης.

- Ο Brousseau υποστηρίζει ότι για *κάθε κομμάτι μαθηματικής γνώσης* χρειάζεται να εκπονηθεί ένα *ολοκληρωμένο σχέδιο* με τα κατάλληλα έργα.

Μαθηματικά έργα

- Τα έργα μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλα, αν:
  - Επικεντρώνονται στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα
  - Επιτρέπουν τις μαθηματικές δράσεις που αναφέρθηκαν προηγούμενα, και
  - Ενθαρρύνουν αναστοχασμό πάνω στη δράση και μεταγνωστική επεξεργασία, για γενίκευση.

Μαθηματικά έργα

- Εκτός από το μαθηματικό *περιεχόμενο* και τις *μαθηματικές δράσεις*, τα έργα κατηγοριοποούνται ως προς:
  - το *είδος* τους (προβλήματα, καταστάσεις, κλπ)
  - *χρήση εργαλείων* που προτείνουν (χειραπτικό υλικό, άλλα μέσα, τεχνουργήματα)
  - την *οργάνωση* που απαιτούν (ατομικά, ομαδικά ή έργα ένα προς ένα).

- Παραδείγματα έργων: *προβλήματα διαφόρων ειδών, πραγματικές καταστάσεις και καθημερινές διαδικασίες , απαντήσεις σε ερωτήματα, αντιμετώπιση, επιλογή, κ.ά.), πρότζεκτ, διερευνήσεις ή πειραματισμούς, μελέτη καταστάσεων ή φαινομένων, κατασκευές, επεξεργασία δεδομένων, έργα μοντελοποίησης, παραστασιοποίησης, παιχνίδια και απλές ασκήσεις εφαρμογών*

Κριτήρια σχεδιασμού ή επιλογής

- Σημαντικές είναι οι γνωστικές απαιτήσεις ενός έργου , δηλαδή *το είδος των διαδικασιών σκέψης που απαιτούνται στην αντιμετώπιση τους*:
  - Αφορούν από απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών και αλγορίθμων χωρίς κατανόηση ως
  - Κατανόηση, ανάλυση και σύνθεση, αξιολόγηση, κριτική και δημιουργία κ. ά (Hennigsen & Stein, 1997);

Κριτήρια σχεδιασμού ή επιλογής

- Σημαντικά ακόμα χαρακτηριστικά (Henningsen, & Stein, 1997):
  - ‘η αυθεντικότητα’ (σύνδεση με την πραγματικότητα και εμπειρία),
  - η ‘συνθετότητα’ (ως προς τα εννοιολογικά, νοητικά και νοηματικά χαρακτηριστικά, Williams, 2002),
  - η ποικιλία στην ανάπτυξη και χρήση λύσεων, χρήσεων, στρατηγικών, δημιουργία αναπαραστάσεων, ερμηνειών, κλπ.)

  - ‘Πλούσιο’ χαρακτηρίζεται ένα μαθηματικό έργο όταν: επιτρέπει τη χρήση πολλών προσεγγίσεων, στρατηγικών, τη δημιουργία πολλών αναπαραστάσεων, την δυνατότητα εύρεσης πολλών λύσεων, την απαίτηση εξηγήσεων και τεκμηριώσεων κ.ά.

Ποιά κριτήρια

Περιεχόμενο	Μαθηματική γνώση / νόημα
Έργο	Είδος έργου
Εργαλεία	Αναπαράσταση και άλλα μέσα
Δράσεις	Μαθηματικές δράσεις
Κίνητρα	Εμπλοκή των μαθητών
Επεξεργασία	Γνωστικές απαιτήσεις

Διδακτικές προτάσεις

Διδακτικές προτάσεις

- Τα Σύγχρονα Προγράμματα στοχεύουν να ασκήσουν τους μαθητές *να σκέφτονται και να λειτουργούν με μαθηματικό τρόπο.*
- *Λειτουργώ με μαθηματικό τρόπο* σημαίνει αμφιβάλλω, κατανοώ, συλλαμβάνω, επιβεβαιώνω ή διαψεύδω, φαντάζομαι και παριστάνω…
- *Αυτό το είδος της σκέψης χρειάζεται η καθημερινή τάξη των μαθηματικών.*

Διδακτικές θεωρίες

- Οι μεγάλοι θεωρητικοί της ΔτΜ (*Freudenthal,1983; Davidov, 1988; Brousseau, 1997*) συμφωνούν ότι για την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων απαιτούνται:

  I. Εμπλοκή των μαθητών σε *καταστάσεις με νόημα και ενδιαφέρον* για αυτούς.

  II. *Ατομική δραστηριοποίηση*, δράση και σκέψη

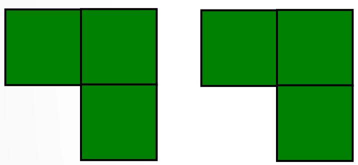
  III. Αλλά και συζήτηση και αναστοχασμό που δεν ενθαρρύνουν μόνο μια «τοπική» διαπραγμάτευση αλλά *οδηγούν σε γενικεύσεις και τυποποιήσεις*.

Διδασκαλία με βάση 5 κανόνες

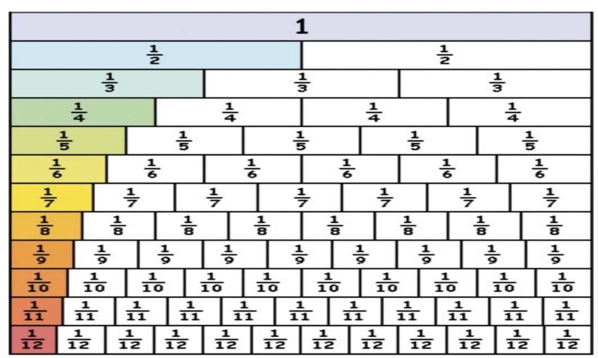
- ‘*Μαθαίνω Μαθηματικά*’ σημαίνει ‘*κάνω Μαθηματικά*’, κι όχι ακολουθώ κανόνες, διαδικασίες, απομημονεύω και εφαρμόζω.
- Σημαίνω λύνω ένα πρόβλημα ή γενικότερα αντιμετωπίζω μια κατάσταση, δοκιμάζω να πετύχω ένα στόχο, συλλαμβάνω, αναρωτιέμαι, αναζητώ, επιβεβαιώνω ή διαψεύδω, φαντάζομαι και παριστάνω…

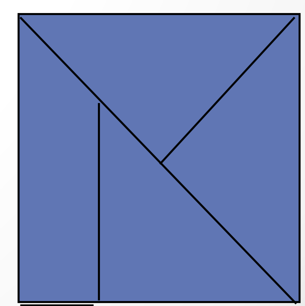
1ο βήμα: αρχή με ένα ερώτημα

- Υπάρχουν σημαντικά αυθεντικά ερωτήματα στα μαθηματικά:
- «Πολύμινος» για αναπτύγματα κύβου:



- *Ένα puzzle, αν τα 2 γίνει 6; Αν το δύο γίνει 5;*
- *Μελέτες πινάκων*





2 cm

2^{o} βήμα: χρόνος για δράση και σκέψη

- Τα αυθεντικά ερωτήματα απαιτούν χρόνο για να αναδείξουν ιδιότητες και σχέσεις, δομές, συνδέσεις, συμβολοποίηση, δικαιολόγηση, αναστοχασμό και γενίκευση.
- Οι εκπαιδευτικοί συχνά πιέζουν το χρόνο, αλλά η *μαθηματική αναζήτηση και ανάπτυξη θέλει χρόνο.*
- Επιδιώκουμε να αναπτύξουμε παιδιά επίμονα και θαρραλέα, να δοκιμάζουν και να μην φοβούνται να αποτύχουν, να βαθαίνουν την περιέργεια και τη δύναμη της παρατήρησης.

Τα Μαθηματικά είναι ιδεατές οντότητες

- Κατασκευάζονται μέσα από εμπειρικές καταστάσεις που οι ίδιοι επεξεργαζόμαστε, αλλά στην πορεία οδηγούν σε αφαιρέσεις, γενικεύσεις και συμβολισμό σε μεγάλο βάθος χρόνου.
- Η έννοια της συνάρτησης;
- *Σε πόσο χρόνο θα τις 'διδάξουμε' εμείς?*
- *Σε πόσο χρόνο μαθαίνουμε στους μαθητές να λύνουν ένα πρόβλημα;*
- Η εικασία του Goldbach (1742) και η Υπόθεση του Riemann (1859) παραμένουν άλυτα για αιώνες.

Η συνάρτηση ($17^{ος}$ αιώνας)

- Η ανθρωπότητα από την αρχαιότητα «.. *Η ιδέα της συναρτησιακής σχέσης δεν εμφανίζεται ρητά αλλά διακρίνεται στις αντιστοιχήσεις των μαθηματικών της εποχής..*»
- Κατά το Μεσαίωνα, 1350, ορισμένοι μαθηματικοί εμφανίζουν ιδέες σχετικά με την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το 1650 η αναλυτική γεωμετρία οδηγεί σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις.
- Η ορολογία της «συνάρτησης» προήλθε από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ του Leibniz και Bernoulli, προς το τέλος του $17^{ου}$ αιώνα (1673..).
- Το 1734 ο Euler εισάγει το συμβολισμό f(x) .
- O Fourier συνεχίζει το 18ο αι. κι ο Cauchy to $19^{ο}$, Lobachevsky (1834), O Dirichlet (1837), Dedekind (1888), Hardy (1908)…

3ο βήμα: δεν απαντά ο δάσκαλος

- Οι μαθητές περιμένουν απαντήσεις από τους δασκάλους, οι οποίοι αναλαμβάνουν το ρόλο.
- Αλλά χρειαζόμαστε μαθητές:
  - να διαφωνούν και να συζητούν
  - να μην αναζητούν εύκολες απαντήσεις

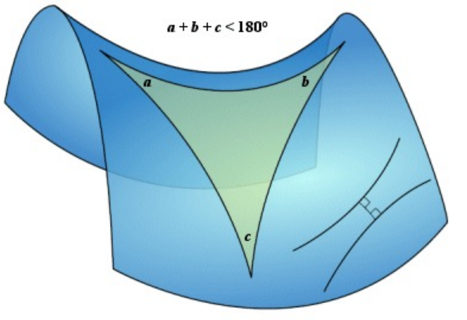
- Κι αυτό γίνεται μόνο όταν ο δάσκαλος δεν διορθώνει, επιβεβαιώνει, διαψεύδει και δίνει απαντήσεις.

4^o βήμα: αφήνονται ιδέες και λάθη

- Αλλά τι κάνουμε με τα λάθη;

- Όχι μόνο αφήνουμε στα παιδιά να συζητούν και να διορθώνονται γιατί είναι καλύτερο να εξηγούν ο ένας στον άλλο.
- Αλλά αφήνουμε επίσης και τις περίεργες ιδέες με τις συνέπειες να ακουστούν γιατί έτσι προχωράνε τα μαθηματικά.

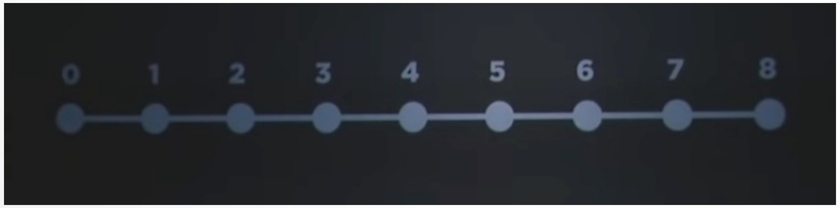
4ο βήμα: αφήνονται ιδέες και λάθη

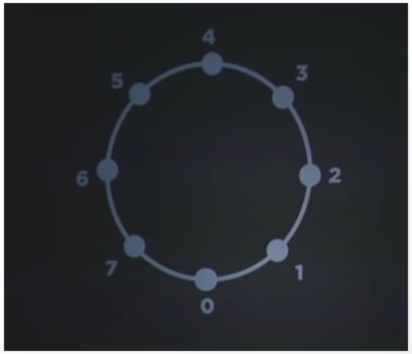


- Τα μαθηματικά προχώρησαν
  με ερωτήματα όπως:
- αν δεν τέμνονται δύο παράλληλες;
- ποια θα ήταν η ρίζα του -1;
- πως να πάω χωρίς
  να περάσω δύο φορές
- πώς να φτάσω στο 0 χωρίς να γυρίσω πίσω;

Euler,1735, Königsberg.

Αριθμητική υπολοίπων





5^{o} βήμα: τα Μαθηματικά, ένα παιχνίδι

- Τα Μαθηματικά δεν είναι ακολουθώ κανόνες, είναι εξερεύνηση, αναζήτηση, κάποτε σπάσιμο κανόνων.
- Είναι μια *γοητευτική δραστηριότητα* όπως είναι γενικά η μαγεία του άγνωστου. Συχνά μπορεί να το αντιμετωπίσουμε ως ένα παιχνίδι.
- Ο Brousseau (1997) υποστηρίζει ότι «… *Ο μαθητής εμπλέκεται σε ένα 'παιχνίδι' όπου το μέρος της γνώσης που θέλουμε με προσεγγίσουμε είναι αυτό που γεννά τις στρατηγικές που κερδίζουν…*»

Τελικά…

- Η μάθηση των Μαθηματικών είναι μια πλούσια *κατασκευαστική δραστηριότητα* και αναπτύσσεται στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης.
- Μέσα σε αυτήν οι μαθητές
  - αντιμετωπίζουν, μόνοι τους ή σε συνεργασία, *κατάλληλες* καταστάσεις που συνδέονται με την εμπειρία τους,
  - αλληλεπιδρούν και τεκμηριώνουν τη δράση τους,
  - συζητούν για να εμβαθύνουν τη δράση αυτή για να οδηγηθούν σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης, γενίκευσης και να κατευθυνθούν προς τις μαθηματικές ιδέες που επιδιώκουμε.

Γράψτε ένα επίθετο που χαρακτηρίζει μια καλή μαθηματική δραστηριότητα

ΑΣΚΗΣΗ 1

- Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

Εφαρμογή 1η **Άθροισμα γωνιών τριγώνου**

Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:

Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο.

Όπως μάθαμε, υπάρχουν δύο τρόποι για να μετρήσουμε τις γωνίες του. Ο ένας είναι να μετρήσουμε κάθε γωνία και να αθροίσουμε τα μεγέθη τους. Έτσι έχουμε: $\hat{o} = 65^{o}$, $\hat{\imath} = 60^{o}$, $\hat{s} = 55^{o}$. Άρα $65^{o} + 60^{o} + 55^{o} = 180^{o}$.

Ο άλλος τρόπος είναι να κόψουμε τις γωνίες του και να τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Τότε παρατηρούμε ότι όλες μαζί έχουν άθροισμα 180^{o}.

Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τρίγωνα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180^{o}.

Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180^{o}.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος;
3. Ποιές είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποιά είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;
5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος;

- Το άθροισμα δεν είνα απλά μια άθροιση γωνιών, είναι μια σταθερή ιδιότητα: το *αναλλοίωτο του αθροίσματος* των γωνιών του τριγώνου (που οδηγεί και σε άλλα σταθερά αθροίσματα)
- Ο διδακτικός στόχος είναι το πέρασμα από τη μέτρηση των γωνιών, στο *σταθερό άθροισμα*.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

Η σημασία του αθροίσματος των γωνιών

- Αποτελεί ένα θεώρημα (ή ακόμα και αξίωμα) συνέπεια του $5^{ου}$ αξιώματος της ευκλείδεια γεωμετρίας.
- Ισοδυναμία (Legendre 1752-1833)

«Στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μόνο παράλληλος»

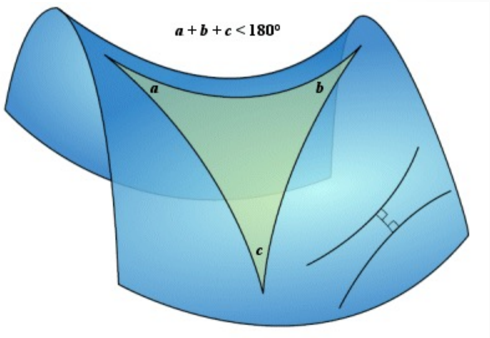
«Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο από τις δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος των γωνιών»

«Οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές»

Η σημασία του αθροίσματος γωνιών

- Υπερβολική Γεωμετρία (Lobachevsky, Bolyai)

  «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών»



- Ελλειπτική Γεωμετρία (Riemann)

  «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνουν είναι είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών»

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

3. Ποιές είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποιά είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;

- Οι μαθητές πιστεύουν «μεγαλύτερο μήκος – μεγαλύτερο μέγεθος» (Vinner, 1981).
- Οι μαθητές «ξέρουν» να μετρούν γωνίες, αλλά θεωρούν ότι το μέγεθος της γωνίας αντιστοιχεί με το μέγεθος των πλευρών, άρα ένα μεγαλύτερο τρίγωνο έχει μεγαλύτερο άθροισμα.
- Η εύρεση του αθροίσματος είναι μια αθροιστική διαδικασία.
- Δυσκολεύονται στην αντίληψη της συμμεταβολής και τη γενίκευση σε κάθε τρίγωνο.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

- Να μετρήσουν και να συγκρίνουν σε διάφορα είδη τριγώνων και γωνιών.
- Να περάσουν από το άθροισμα στη συμμεταβολή, στο αναλλοίωτο- γνωστική αντίθεση- και τη γενίκευση.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

Πρώτες Δραστηριότητες: Πρώτος υπολογισμός αθροίσματος

1. Να αντιγράψεις σε ένα φύλλο το παρακάτω τρίγωνο, να κόψεις τις γωνίες του και να τις τοποθετήσεις τη μία μετά την άλλη. Πόσο είναι η γωνία που σχηματίζεται;
2. Να βρεις το άθροισμα των γωνιών του παρακάτω τριγώνου, χρησιμοποιώντας διαφανές χαρτί.
3. Να διπλώσεις τις γωνίες και να δεις τι γωνία σχηματίζουν.
4. Να μετρήσεις τις γωνίες του τριγώνου και να βρεις το άθροισμα.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

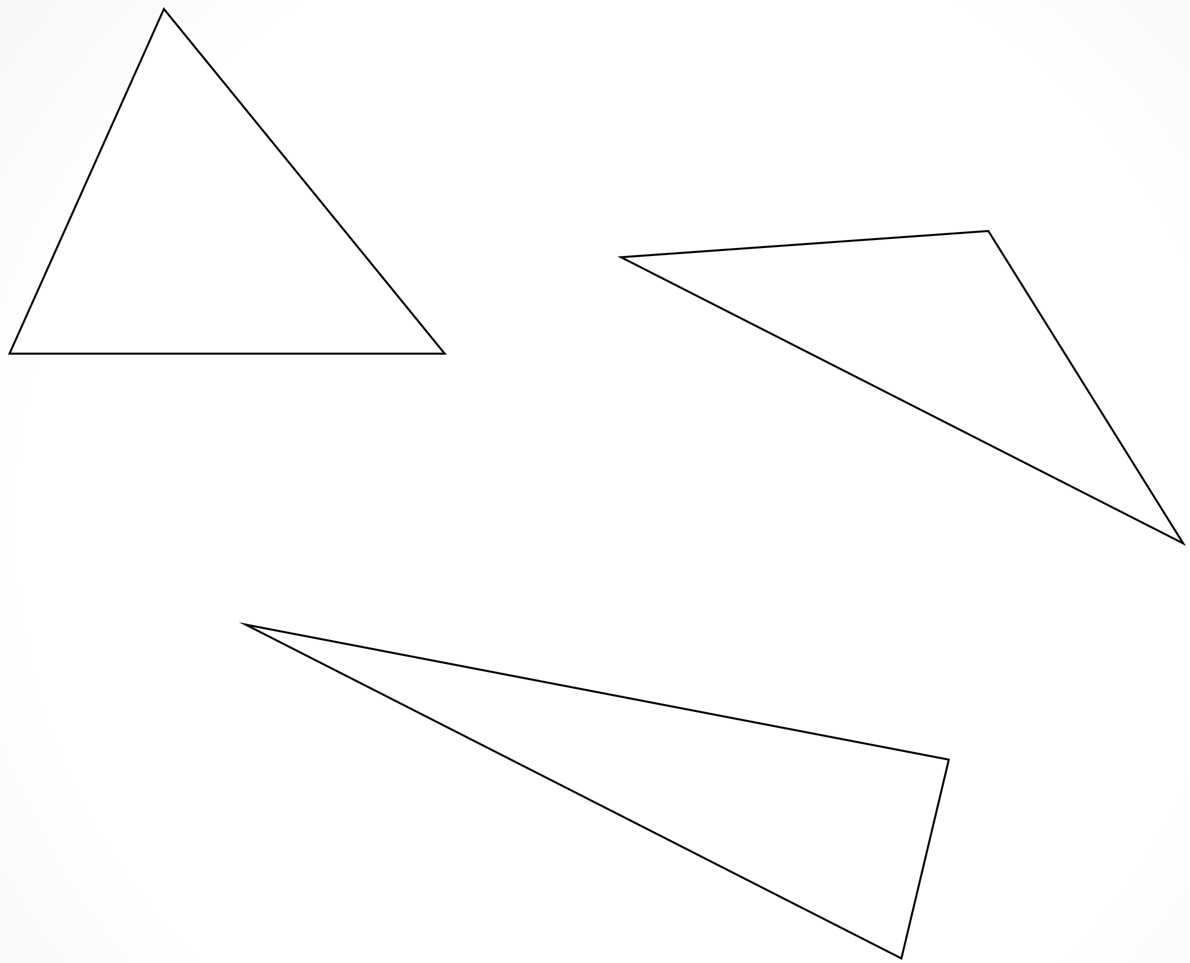
Επόμενες Δραστηριότητες: Αντίληψη της συμμεταβολής και του αναλλοίωτου του αθροίσματος

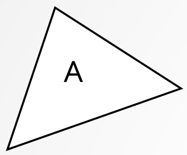
4. Στο γεωπλάνο είναι φτιαγμένο ένα τρίγωνο. Μετακίνησε μία κορυφή και παρατήρησε πώς αλλάζουν οι γωνίες: όταν η μία γωνία μεγαλώνει ή μικραίνει τι γίνονται οι άλλες δύο;
5. Προσπάθησε να κατασκευάσεις τρίγωνο με δύο οξείες ή αμβλείες γωνίες. Διάλεξε γωνίες για να κατασκευάσεις ένα τρίγωνο.

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

Τελικές Δραστηριότητες: Αντίληψη της συμμεταβολής και του αναλλοίωτου του αθροίσματος (Ballachef, 1986).

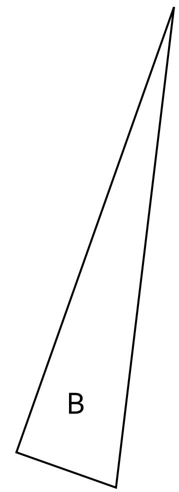
6. Για κάθε ένα από τα παρακάτω τρίγωνα, γράψε χωρίς να μετρήσεις, πόσο θα είναι το άθροισμα των γωνιών του.
7. Μετά μέτρησε τις γωνίες με το μοιρογνωμόνιο και επιβεβαίωσε αν είναι σωστό ή λάθος αυτό που έχεις γράψει.

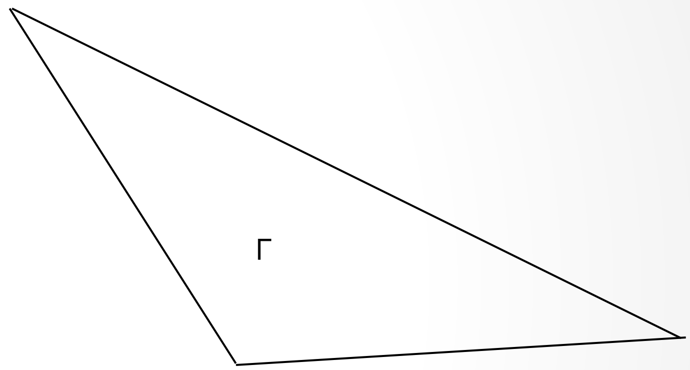




Χωρίς μέτρηση:

Με μέτρηση:





Χωρίς μέτρηση:

Με μέτρηση:

Χωρίς μέτρηση:

Με μέτρηση:

Το παράδειγμα του αθροίσματος γωνιών

Τι κάνουν οι μαθητές:
Βρίσκουν γύρω στα 90^o με 100^o το μικρό.
Βρίσκουν 120^o με 130^o το μεσαίο και
Βρίσκουν 200^o με 220^o το μεγάλο.

Μετά τον υπολογισμό, βρίσκονται σε μεγάλη έκπληξη.
Ένας μαθητής γράφει:
«Οι ασκήσεις δεν ήταν πολύ δύσκολες αλλά μας έμαθαν σπουδαία πράγματα όπως να: όταν μια γωνία ενός τριγώνου μεγαλώνει, οι άλλες δύο μικραίνουν και το αντίθετο. Στο τέλος όλες μαζί είναι πάντα 180^o»

Άσκηση 2
Το παράδειγμα των ιδιοτήτων της συμμετρίας

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος;
3. Ποιές είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποιά είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;
5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

Το παράδειγμα των ιδιοτήτων της συμμετρίας

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος;

- Οι ιδιότητες της συμμετρία ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ απλά μια οπτική ή κιναισθητική αναγνώριση.
- Η συμμετρία είναι ένας *μετασχηματισμός* που διατηρεί κάποιες ιδιότητες και αλλάζει άλλες (σχήμα, μέγεθος, απόσταση από τον άξονα – αλλάζει τον προσανατολισμό)
- Ο διδακτικός στόχος είναι το πέρασμα από την οπτική αντίληψη στην *αναγνώριση των αναλοίωτων ιδιοτήτων*.

Το παράδειγμα των ιδιοτήτων της συμμετρίας

3. Ποιές είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποιά είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν ολιστικά τα συμμετρικά σχήματα.
- Οι μαθητές έχουν κιναισθητικές προσεγγίσεις: διπλώνουν, καθρεφτίζουν, κλπ. Αλλά αντιλαμβάνονται τις μορφές ολιστικά.
- Η εύρεση του συμμετρικού είναι μια διαισθητική ή κιναισθητική διαδικασία.
- Δεν αναλύουν σε επιμέρους ιδιότητες – ταυτίζουν με μετατόπιση και επηρρεάζονται από κατακόρυφες και οριζόντιες

Το παράδειγμα των ιδιοτήτων της συμμετρίας

5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

- Να δημιουργήσουν και να συγκρίνουν συμμετρικές και μη καταστάσεις.
- Να περάσουν από το ολιστικό στο αναλυτικό και τη γενίκευση.

Το παράδειγμα των ιδιοτήτων της συμμετρίας

Πρώτες Δραστηριότητες: Αναγνώριση συμμετρίας

1. Αναγνώριση ολιστική και κιναισθητική

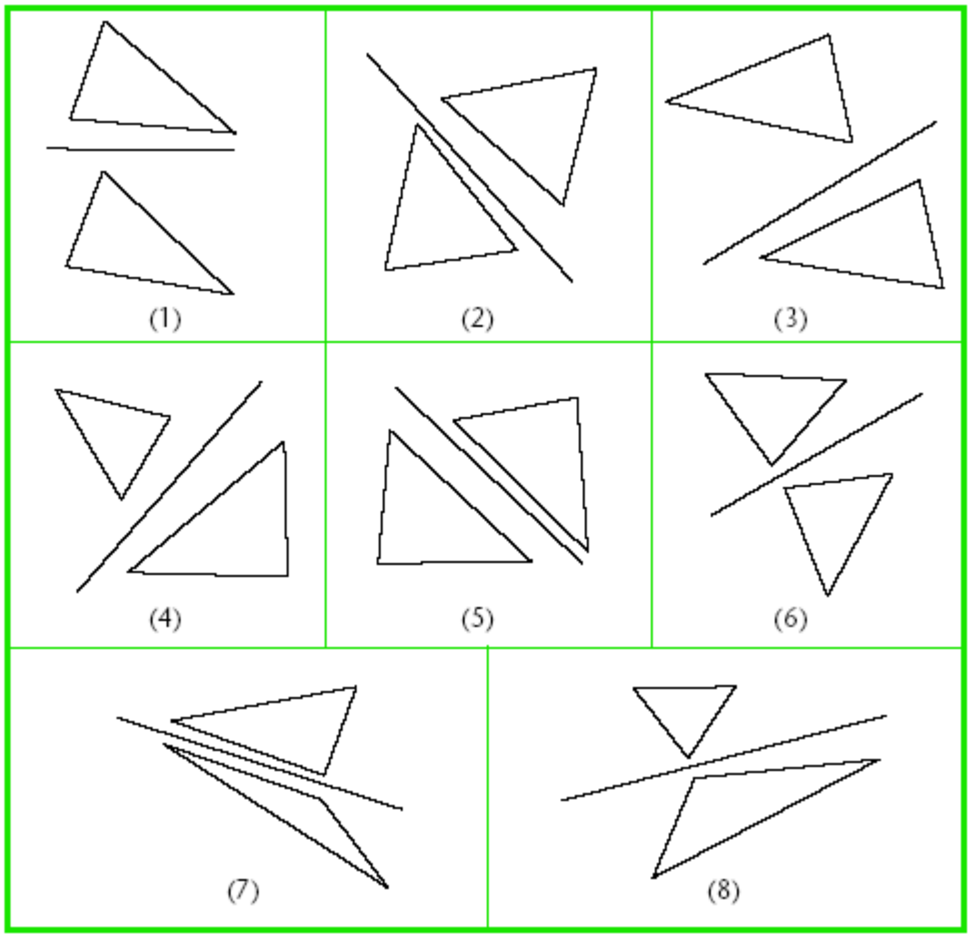
Επόμενες δραστηριότητες: Πέρασμα σε ανάλυση -Εύρεση αξόνων

2. Εύρεση αξόνων (με δίπλωση – διαφάνειες – νοερά)
3. Εύρεση αξόνων με χάραξη

Τελικές δραστηριότητες: Αναγνώριση ιδιοτήτων

4. Σύγκριση συμμετρικών και μη –τεκμηρίωση
5. Σύνδεση με μεσοκάθετο
6. Κατασκευές συμμετρικών (σε τετραγωνισμένο και μη)

Παράδειγμα - ανάδειξη ιδιοτήτων



Διδακτικές προτάσεις εξετάσεων

- Σύμφωνα και με τις διδακτικές θεωρίες, όπως και τη συζήτηση για τα μαθηματική δραστηριότητα, οι διδακτικές προτάσεις χρειάζονται:

- μια (ή περισσότερες) ρεαλιστικές καταστάσεις/ προβλήματα (δηλαδή καταστάσεις που ο μαθητής δεν ξέρει τη διαχείριση ή λύση),
- την αντιμετώπιση ή λύση τους με βάση την προηγούμενη γνώση (παρανόηση) και κάποια σύγκρουση,
- την παρουσίαση κάποιου ελέγχου του αποτελέσματος από τους μαθητές και συζήτηση που οδηγεί σε γενίκευση και μαθηματικοποίηση.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ball Loewenberg D., Heather C. Hill,C.H., & Bass, H.(2005). Knowing Mathematics for Teaching. *American Educator, Fall 2005*: 14-26

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59:* 389 -407

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brun, J. (1996). The Theory of Conceptual Fields and its Application to the Study of Systematic Errors, in Written Calculations. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (ed.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children* , pp. 120-136. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching. *Notices of the AMS, Vol.48, No 2*: 168- 174

Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: its role and its influence. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , pp. 39-48. MacMillan Publisher Co .

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, pp. 37-51. Kluwer Academic Publishers.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education* 28: 524-49.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. C. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*: 372-400.

Howard, R.W. (1987). *Concepts and Schemata*. NY.: Dover.

Fischbein, E. (1996). The Psychological Nature of Concepts. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (ed.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children*, pp. 102-136. Kluwer Academic Publishers.

Keitel, C. (2006). 'Setting a Task' in German Schools. Different Frames for Different Ambitions. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (eds.), *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*, pp. 37-57. Sense Publishers.

Piaget, J. (1971). *Genetic Epistemology*. NY : Norton

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C.Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Vol. 2, 827-876. Dortdrecht: Kluwer Academic Publishers.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). *Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνέδριου της ΕΝΕΔΙΜ, σ.* 51-66. Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*: 4_14.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe & P. Nesher (ed.), *Theories of Mathematical Learning*, pp. 219-239. Mahwah, N.J.: Lawrence Elbraum.

Vinner. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-81. Kluwer Academic Publishers.

Williams, G. (2002). Developing a shared understanding of task complexity. In L. Bazzini & C. Whybrow Inchley (ed.), *Proceedings of CIEAEM53: Mathematical Literacy in the Digital Era*, pp. 263-268.

Vygotsky, L.S. (1934). *Σκέψη και Γλώσσα*. Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση, 1998