Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Μαρία Καλδρυμίδου[1], Μαριάννα Τζεκάκη[2], Χαράλαμπος Σακονίδης[3]

[1]Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

[2] Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Α.Π.Θ.

[3] Αναπληρωτής Καθηγητής, Δ.Π.Θ.

Οι πέντε μελέτες που παρουσιάζονται σε αυτήν την εργασία επικεντρώνονται σε όψεις της διαχείρισης της κατασκευής του μαθηματικού νοήματος από τους δασκάλους στην τάξη: το χειρισμό των επιστημολογικών στοιχείων των μαθηματικών, τον τρόπου που χειρίζονται την εργασία και τα λάθη των μαθητών και τα σχήματα επικοινωνίας που υιοθετούν. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διαχείριση του περιεχομένου συχνά διαστρεβλώνει το μαθηματικό νόημα και είναι διαλεκτικά συνδεδεμένο με τα επικοινωνιακά σχήματα και πρακτικές που χρησιμοποιούνται.

The five studies presented here focus on aspects of teachers' management of the construction of meaning in the mathematics classroom: the handling of the epistemological features of mathematics, the ways of dealing with pupils' work and errors and the communicative patterns adopted by teachers. The results show that the management of the content of the subject matter often distorts the mathematical meaning and it is dialectically related to the communicative practices employed.

Θεωρητικό πλαίσιο

Τα τελευταία χρόνια, η ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης έστρεψε την προσοχή της στη μελέτη του τρόπου με τον οποίον διδάσκοντες και μαθητές λειτουργούν και αλληλεπιδρούν μέσα στη σχολική τάξη. Σε αυτήν την κατεύθυνση, η τάξη θεωρείται ως μια κοινωνική ομάδα, μέσα στην οποία εκπαιδευτικοί και μαθητές διαμορφώνουν και υιοθετούν συμπεριφορές και στάσεις απέναντι στη μαθηματική γνώση, η οποία γίνεται αντιληπτή ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης και οικοδόμησης.

Αρκετοί ερευνητές επιχείρησαν να μελετήσουν τη δραστηριότητα στη μαθηματική τάξη υιοθετώντας ένα κοινωνικο-πολιτισμικό θεωρητικό πλαίσιο προσέγγισης, στοχεύοντας στην αποτελεσματική καταγραφή και ανάλυση της δυναμικής της τάξης. Σε αυτήν την προσπάθεια, η έννοια της "νόρμας" χρησιμοποιήθηκε ως βασικό εργαλείο ανάλυσης της μαθηματικής δραστηριότητας., θεωρούμενη ως μια συλλογική και όχι ατομική έννοια, η οποία σχετίζεται με τις προσδοκίες και τις υποχρεώσεις που διαμορφώνονται στην τάξη τόσο από την πλευρά των διδασκόντων όσο και από αυτήν των μαθητών (Yackel, 2001). Ωστόσο, η κατανόηση των φαινομένων και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών επιβάλλει το διαχωρισμό ανάμεσα στις νόρμες της τάξης που συναντάμε σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα και στις νόρμες που είναι ειδικές της τάξης των μαθηματικών, τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες (Yackel & Cobb, 1996). Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, το τι αξιολογείται ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση, τι αναγνωρίζεται ως αποτελεσματική ή εναλλακτική μαθηματική λύση, κτλ.

Οι Sullivan και Mousley (2001), προσαρμόζοντας το θεωρητικό πλαίσιο των Cobb και Yackel, ορίζουν δύο είδη από συμπληρωματικές νόρμες για τη δραστηριότητα στην τάξη των μαθηματικών δυο συμπληρωματικές νόρμες: τις "μαθηματικές" και τις "κοινωνικο-πολιτισμικές".

Οι μαθηματικές νόρμες αναφέρονται στις αρχές, γενικεύσεις, διαδικασίες και στα γεγονότα που συνιστούν τη βάση και το περιεχόμενο του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών. Ως κοινωνικο-πολιτισμικές νόρμες θεωρούνται οι συνήθεις πρακτικές, οι συνήθειες οργάνωσης και οι τρόποι επικοινωνίας που επηρεάζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί (και κατ' επέκταση την υποκείμενη θεώρησή τους για τους τρόπους μάθησης), τα είδη των απαντήσεων που αξιολογούν θετικά, οι απόψεις τους για τη νομιμότητα της παραγόμενης γνώσης, η ευθύνη που αναλαμβάνουν για τη μάθηση του κάθε μαθητή χωριστά και ο βαθμός στον οποίο αποδέχονται να αναλαμβάνουν οι μαθητές πρωτοβουλίες με ρίσκο και να κάνουν λάθη. Μια διάσταση των κοινωνικο-πολιτισμικών νορμών συνδέεται και με τους περιορισμούς που οι μαθητές θέτουν στον δάσκαλο ή τις απαιτήσεις τους από αυτόν σχετικά με τον τρόπο και το περιεχόμενο της διδασκαλίας του. Για παράδειγμα, οι δάσκαλοι τείνουν να αποφεύγουν αρνητικές αντιδράσεις εκ μέρους των μαθητών (Shroyer, 1982), προσαρμόζοντας τη διδασκαλία τους στο στυλ μάθησης που αυτοί προτιμούν. Σε σχέση με αυτό, ο Doyle (1986) παρατήρησε στο πλαίσιο μιας έρευνάς του ότι οι μαθητές, δουλεύοντας σε μια άσκηση, προσπαθούσαν να μειώσουν την πιθανότητα λάθους άρα και ευθύνης, ζητώντας επιπλέον διευκρινήσεις από τον εκπαιδευτικό, μειώνοντας έτσι, ύστερα από τις απαντήσεις του, τις απαιτήσεις και το επίπεδο δυσκολίας της άσκησης. Ανταποκρινόμενοι σε αυτές τις "απαιτήσεις" των μαθητών, πολλοί δάσκαλοι τείνουν να επιλέγουν ασκήσεις οικείες και εύκολες για τους μαθητές σε αυτούς, περιορίζοντας έτσι τις γνωστικές απαιτήσεις του περιεχομένου της μαθηματικής δραστηριότητας.

Οι μελέτες

Οι πέντε μελέτες που παρουσιάζονται στη συνέχεια είναι πέντε διαφορετικές αναλύσεις των ίδιων βιντεσκοπημένων διδασκαλιών σε τάξεις Μαθηματικών.

- Στις δύο πρώτες μελέτες η ανάλυση των δεδομένων επικεντρώνεται στις *μαθηματικές νόρμες* της τάξης και πιο ειδικά στους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται τα θεμελιώδη επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών στη υποχρεωτική εκπαίδευση και σε δύο διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια, στην άλγεβρα και στη γεωμετρία.
- Στις δύο επόμενες μελέτες αναλύονται τα ίδια δεδομένα, με αναφορά στις *κοινωνικο-πολιτισμικές νόρμες* και διερευνούνται οι τύποι παρέμβασης που υιοθετούν οι δάσκαλοι κατά τη διάρκεια της μαθηματικής εργασίας των μαθητών και οι τρόποι με τους οποίους διαχειρίζονται τα λάθη τους αντιστοίχως.
- Στην πέμπτη, τέλος, μελέτη επιχειρείται η διερεύνηση του πως οι μαθηματικές και οι κοινωνικο- πολιτισμικές νόρμες αλληλοεπηρεάζονται. Για το σκοπό αυτό η μελέτη επικεντρώνεται στους τρόπους με τους οποίους η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και δασκάλων συμβάλλει στη διαμόρφωση των επιστημολογικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών και των πρακτικών παρέμβασης που υιοθετούν οι διδάσκοντες.

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν στις προαναφερθείσες μελέτες προέρχονται από μια ευρύτερη έρευνα που στόχευε όχι μόνο στη μελέτη της μαθηματικής εκπαίδευσης στα εννέα χρόνια της ελληνικής υποχρεωτικής εκπαίδευσης (μαθητές 6-15 ετών) αλλά και στη διερεύνηση της δυνατότητας εφαρμογής εναλλακτικών τρόπων διδασκαλίας των μαθηματικών (Τζεκάκη, Δεληγιωργάκος (επιμ. έκδοσης), 2000).

Τα δεδομένα αποτελούνται από 48 απομαγνητοφωνημένα ωριαία μαθήματα μαθηματικών (28 μαθήματα σε Δημοτικό και 20 σε Γυμνάσιο), τα οποία προέρχονται από 23 διαφορετικούς εκπαιδευτικούς (11 δασκάλους Δημοτικού Σχολείου και 12 καθηγητές Γυμνασίου) και πραγματοποιήθηκαν σε διάστημα ενός μήνα στις περιοχές Θεσσαλονίκης, Ιωαννίνων και Θράκης. Για κάθε εκπαιδευτικό υπάρχουν καταγραμμένες δύο τουλάχιστον διδασκαλίες.

Για κάθε μία από τις προαναφερθείσες μελέτες θα συζητηθούν κάποια θεωρητικά ζητήματα, θα αναφερθούν τα ερευνητικά ερωτήματα, θα παρουσιαστεί η ανάλυση των δεδομένων με κάποια παραδείγματα και θα διατυπωθούν τα βασικά συμπεράσματα. Στο τέλος, θα παρουσιαστούν κάποια γενικά συμπεράσματα σχετικά με το θεωρητικό πλαίσιο που αφορά στις μαθηματικές και στις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες.

Μελέτη 1 και μελέτη 2: η διαχείριση των επιστημολογικών χαρακτηριστικών

Οι μαθητές αξιολογούν τι είναι σημαντικό στα μαθηματικά με βάση της χρησιμότητά του στο μάθημα και, μέσα από μια διαδικασία ερμηνείας των όσων παρουσιάζονται στην τάξη, "μαθαίνουν" μαθηματικά (Sierpinska & Lerman, 1996).

Ο τρόπος με τον οποίο τα μαθηματικά παρουσιάζονται στην τάξη επηρεάζει όχι μόνο το νόημα που αναπτύσσουν οι μαθητές για τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες αλλά και τη φύση και την αξία τους. Κατά συνέπεια, η μελέτη της φύσης και της οργάνωσης του μαθηματικού περιεχομένου που διαμορφώνεται στην τάξη είναι πολύ σημαντική. Μια τέτοια μελέτη απαιτεί την ανάλυση των τρόπων με τους οποίους τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών, δηλαδή οι μαθηματικές έννοιες, οι ορισμοί και τα θεωρήματα, καθώς και οι μαθηματικές διαδικασίες επίλυσης, απόδειξης και αξιολόγησης αναδύονται και διαμορφώνονται μέσα στην τάξη.

Στην πρώτη μελέτη (Ikonomou, Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 1999), η ανάλυση των δεδομένων επικεντρώθηκε σε δύο άξονες:

- στη μελέτη της οργάνωσης και της παρουσίασης των διαφόρων στοιχείων των μαθηματικών, όπως είναι οι έννοιες, οι ορισμοί τους και τα θεωρήματα και
- στη μελέτη της οργάνωσης και της παρουσίασης των διαφόρων στοιχείων της μαθηματικής δραστηριότητας, δηλαδή, των διαδικασιών επίλυσης, απόδειξης, αξιολόγησης και εγκυροποίησης των μαθηματικών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι, τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο, οι τρόποι με τους οποίους παρουσιάζονται τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών, καθώς και αυτοί με τους οποίους δάσκαλοι και μαθητές τα διαχειρίζονται στην τάξη δεν επιτρέπουν τη διαφοροποίησή τους αναφορικά με το νόημα και τη λειτουργία που έχουν στα μαθηματικά. Επιπλέον, η μαθηματική δραστηριότητα που αναπτύσσεται μέσα στην τάξη στερείται, ως επί το πλείστον, των χαρακτηριστικών των μαθηματικών διαδικασιών, τα οποία συνδέονται με την αναζήτηση διαδικασιών επίλυσης και απόδειξης αλλά και ελέγχου και επιβεβαίωσης.

Τα επεισόδια που ακολουθούν αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα της ανάλυσης των δεδομένων που πραγματοποιήθηκε. Στο πρώτο από αυτά, ο δάσκαλος καταλήγει σε έναν αλγεβρικό τύπο μέσα από πρακτικές διαδικασίες μέτρησης, στο δεύτερο αναμειγνύει στοιχεία του ορισμού των τριγώνων με ιδιότητές τους, ενώ στο τρίτο ο δάσκαλος δίνει αντιφατικά μηνύματα σχετικά με την εγκυρότητα διαδικασιών με αποτέλεσμα να παραμένουν ασαφείς οι διαδικασίες που οδηγούν σε μαθηματικά συμπεράσματα.

Επεισόδιο 1.1. (Ε' Δημοτικού)

Ο δάσκαλος παρουσιάζει τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ως αποτέλεσμα μέτρησης και επιχειρεί τη γενίκευση της διαδικασίας εύρεσης του εμβαδού του:
Δ(άσκαλος): …Μέτρησε τα τετράγωνα, πόσα τετράγωνα υπάρχουν;
Μ(αθητής): 12 τετράγωνα
Δ: Άρα, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 12 τετραγωνικά εκατοστά. Επομένως πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου; Τι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε;
Μ:…….
Δ: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι: βάση επί ύψος και το μετράμε σε τετραγωνικά εκατοστά ή σε τετραγωνικά μέτρα.

Επεισόδιο 1.2. (ΣΤ' Δημοτικού)

Οι μαθητές εξετάζουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητες τους. Η παρουσίαση γίνεται με ένα τρόπο που δεν επιτρέπει την αναγνώριση και τη διαφοροποίηση μεταξύ ορισμού και ιδιοτήτων.
Δ: …., οπότε τι έχουμε σε ένα ισοσκελές τρίγωνο;
Μ: Δύο ίσες πλευρές;
Δ: Ναι, και τι άλλο;
Μ: Και δύο ίσες γωνίες
Δ: (..λίγο αργότερα) Οπότε τι ονομάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο;
Μ: Αυτό που έχει τρεις γωνίες ίσες και τρεις πλευρές ίσες.

Επεισόδιο 1.3. (Ε' Δημοτικού)

Η δραστηριότητα που έχει δοθεί στους μαθητές ζητάει να χαρακτηρίσουν ένα σύνολο από τρίγωνα με βάση τις γωνίες τους, τις οποίες πρώτα έπρεπε να μετρήσουν.
Δ: Τώρα, πάρτε το μοιρογνωμόνιο και μετρήστε τις γωνίες και αποφασίστε τι είδους τρίγωνο είναι.
Μ: Στο πρώτο τρίγωνο υπάρχει μία γωνία 90 μοιρών.
Δ: Πώς το βρήκατε;
Μ: Έτσι φαίνεται, μοιάζει με ορθή γωνία.
Δ: Στα Μαθηματικά δεν μπορούμε να ισχυριζόμαστε τίποτα αν δεν μπορούμε να το αποδείξουμε. Πάρε το μοιρογνωμόνιο και μέτρησέ την.

Στο επόμενο μάθημα, αφού "έμαθαν" οι μαθητές ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o, καλούνται να υπολογίσουν την τρίτη γωνία ενός τριγώνου, γνωρίζοντας τις άλλες δύο.
Μ: Κύριε, θα μετρήσουμε με το μοιρογνωμόνιο.
Δ: Στα μαθηματικά δεν μπορούμε να ισχυριστούμε κάτι όταν δεν μπορούμε να το αποδείξουμε. Πώς μπορούμε να βρούμε την τρίτη γωνία;………..

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν πως σημαντικά στοιχεία των μαθηματικών όπως ορισμοί, ιδιότητες αλλά και διαδικασίες παρουσιάζονται με ένα αδιαφοροποίητο και ουσιαστικά ομογενοποιημένο τρόπο, ο οποίος δεν επιτρέπει στους μαθητές να διακρίνουν το νόημα, τη φύση και τη λειτουργία τους στα μαθηματικά. Η εικόνα αυτή εμφανίζεται σχεδόν με τον ίδιο τρόπο σε δασκάλους και καθηγητές των μαθηματικών.

Το ερώτημα που μας απασχόλησε στη συνέχεια σχετίζονταν με το αν η ομογενοποίηση αυτή παρουσίαζε κάποια διαφορά ανάμεσα στους δύο κύριους κλάδους των σχολικών μαθηματικών, την άλγεβρα και τη γεωμετρία. Οι δύο αυτοί κλάδοι διαφέρουν μεταξύ τους τόσο επιστημολογικά όσο και ως προς τον τύπο σκέψης που οριοθετούν.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η σχολική άλγεβρα, η οποία συνήθως εισάγεται ως γενικευμένη αριθμητική, απαιτεί επιστημολογική μετάβαση από μια υπολογιστική και διαδικαστική θεώρηση σε μία σχεσιακή θεώρηση (Arzarello, 1998), με έμφαση στην δομική αντίληψη της οργάνωσης των αλγεβρικών αντικειμένων (Kieran, 1992). Η σχολική γεωμετρία, από την άλλη, δίνει μεγάλη έμφαση στα σχήματα, την οπτική αντίληψη των ιδιοτήτων τους, γεγονός που οδηγεί συχνά τους μαθητές να διαπραγματεύονται τα γεωμετρικά αντικείμενα μέσα από μια οπτικο-αντιληπτική προοπτική αντί να αναπτύσσουν τη σχεσιακή αναλυτική θεώρηση που η γεωμετρία απαιτεί (Hershkowits et al, 1996).

Με βάση τα παραπάνω, στη δεύτερη μελέτη (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2000) επιχειρήθηκε η διερεύνηση και η σύγκριση των τρόπων με τους οποίους τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών παρουσιάζονται και συνιστούν αντικείμενο διαχείρισης στο πλαίσιο της σχολικής άλγεβρας και γεωμετρίας. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η προαναφερθείσα ομογενοποίηση δεν αλλάζει ουσιαστικά. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα συχνά υποβιβάζονται:

- στην άλγεβρα σε διαδικασίες χειρισμού, και
- στη γεωμετρία σε διαδικασίες οπτικής αναγνώρισης και σχεδιασμού.

Επιπλέον, ο τρόπος που ο δάσκαλος και οι μαθητές διαχειρίζονται τη μαθηματική γνώση φαίνεται να ενισχύει και να προωθεί:

- αναγνωριστικά και μορφολογικά στοιχεία στην άλγεβρα, και
- χειριστικά και υπολογιστικά στοιχεία στη γεωμετρία.

Τα επεισόδια που ακολουθούν αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο οι δάσκαλοι διαχειρίζονται το μαθηματικό περιεχόμενο στα δύο πλαίσια. Στο πρώτο επεισόδιο, η μαθηματική γνώση παρουσιάζεται ως ένα σύνολο από έτοιμες οδηγίες για αντιμετώπιση καταστάσεων, με έμφαση σε μορφολογικά στοιχεία των μετασχηματισμών της αλγεβρικής έκφρασης. Στο δε δεύτερο επεισόδιο, ο ορισμός του ύψους ενός τριγώνου συρρικνώνεται και υποβιβάζεται εννοιολογικά και επιστημολογικά σε οδηγίες χειρισμού για τη σχεδίασή του.

<u>Επεισόδιο 2.1.</u> (άλγεβρα, Γ' Γυμνασίου)

Ο δάσκαλος αρχίζει με τον ορισμό της παραγοντοποίησης
Δ: Η παραγοντοποίηση μιας αλγεβρικής έκφρασης συνίσταται στο μετασχηματισμό της σε γινόμενο δύο ή περισσοτέρων άλλων αλγεβρικών εκφράσεων.
Λίγο αργότερα η μαθηματική μέθοδος μετατρέπεται σε διαδικασία
Δ: Θα μελετήσουμε δέκα περιπτώσεις, θα τις δούμε μία προς μία και θα μάθουμε πρακτικούς κανόνες…., έτσι ώστε αν μας δίνεται αυτό, θα κάνουμε εκείνο και ούτω καθεξής.

Στο τέλος δε του μαθήματος, οι δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν επισημοποιούνται σε κανόνες
Δ: Ας κάνω μια-δύο παρατηρήσεις: παρατηρήσαμε ότι όταν δυνάμεις του ίδιου γράμματος εμφανίζονται σε όλους τους όρους, τότε η δύναμη αυτού του γράμματος με το μικρότερο εκθέτη βγαίνει έξω από την παρένθεση. Η δεύτερη περίπτωση αφορά την ομαδοποίηση των όρων…Ο κοινός παράγοντας κάθε όρου βγαίνει έξω από την παρένθεση και ό,τι μένει μέσα στην παρένθεση σε κάθε ομάδα είναι το ίδιο.

Επεισόδιο 2.2. (γεωμετρία, Α΄ Γυμνασίου)

Ο δάσκαλος αρχίζει δίνοντας τον ορισμό του ύψους ενός τριγώνου. Όμως, ο ορισμός στη συνέχεια "καταστρέφεται", καθώς το επίκεντρο του μαθήματος γίνεται ο τρόπος σχεδίασης του ύψους.
Δ: Πρώτα δώσαμε τον ορισμό. Τι είναι το ύψος ενός τριγώνου; Είναι η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά.
Ένας μαθητής επαναλαμβάνει τον ορισμό. Λίγο αργότερα ο δάσκαλος εξηγεί πώς θα κατασκευάσουμε ένα ύψος στο τρίγωνο που έχει σχεδιάσει στον πίνακα.
Δ: Έτσι, θα τοποθετήσουμε τον γνώμονα, εδώ, κοιτάξτε… Η μια πλευρά θα περνά από το σημείο (την κορυφή) και η άλλη πάνω στην πλευρά. Θα το κάνουμε πρακτικά, πάρε τον γνώμονα.

Μελέτη 3 και μελέτη 4: Οι παρεμβάσεις των δασκάλων στην εργασία των μαθητών και οι τρόποι αντιμετώπισης του λάθους

Πολλές έρευνες, στην προσπάθεια να διερευνήσουν και να κατανοήσουν την πολυπλοκότητα της τάξης, μελετούν και αναλύουν επεισόδια διδασκαλιών, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στους τρόπους με τους οποίους οι δάσκαλοι παρεμβαίνουν για να ενισχύσουν ή να καθοδηγήσουν την εργασία των μαθητών. Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών οδήγησαν στον εντοπισμό ενός αριθμού από φαινόμενα, τα οποία φαίνεται ότι όχι μόνο είναι πολύ συνηθισμένα στην τάξη των μαθηματικών, αλλά επιδρούν σημαντικά στη μαθηματική γνώση που παράγεται, στη στάση που διαμορφώνουν οι μαθητές απέναντι στα μαθηματικά και στη «μεταγνώση» που αναπτύσσουν, δηλαδή τη γνώση τους για τη μαθηματική γνώση.

Η σχετική βιβλιογραφία επισημαίνει ότι οι παρεμβάσεις των δασκάλων λειτουργούν ως εξωτερικοί δείκτες για τους μαθητές, οι οποίοι προσπαθούν να τους προσαρμόσουν στο υπάρχον γνωστικό τους σύστημα. Η προσαρμογή αυτή απαιτεί μικρότερη προσπάθεια σε σχέση με αυτήν που θα ήταν απαραίτητη για να αναπτύξουν και να κατανοήσουν κάτι νέο. Μια από τις συνέπειες αυτού του φαινομένου είναι ότι συχνά το μαθηματικό περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που δίνεται στους μαθητές υπεραπλουστεύεται και διαστρεβλώνεται, ενώ η γνωστική του αξία μειώνεται (Diezman et al, 2001). Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι ο συστηματικός εντοπισμός κρίσιμων σημείων στη διδασκαλία των μαθηματικών και η μελέτη του τρόπου με τον οποίο οι δάσκαλοι τα διαχειρίζονται αποτελούν ζητήματα ζωτικής σημασίας για το μαθηματικό νόημα που κατασκευάζουν οι μαθητές. Προς αυτήν την κατεύθυνση, η τρίτη και η τέταρτη μελέτη επικεντρώνεται στις παρεμβάσεις των δασκάλων σε δύο διαφορετικές φάσεις της δραστηριότητας στην τάξη:

α) όταν οι μαθητές συναντούν δυσκολίες κατά τη διάρκεια ενασχόλησης τους με ένα έργο ή η εργασία τους δεν ακολουθεί την επιθυμητή πορεία και β) όταν οι μαθητές κάνουν λάθη ή είναι απαραίτητο να αξιολογηθεί η ορθότητα των μαθηματικών διαδικασιών και αποτελεσμάτων.

Πιο αναλυτικά για το (α), οι φάσεις κατά τις οποίες οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην αντιμετώπιση ενός ζητήματος ή όταν δεν ακολουθούν τη διαδικασία ή τον τρόπο αντιμετώπισης, που είναι σύμφωνος με την πρόθεση του εκπαιδευτικού, αποτελούν τις πιο συχνές περιπτώσεις παρέμβασης εκ μέρους των δασκάλων. Οι παρεμβάσεις αυτές είναι ποικίλες: για παράδειγμα, δίνουν πρόωρες ή τοπικού χαρακτήρα εξηγήσεις (Margolinas, 1999) ή απευθύνονται στους καλούς μαθητές, προσπαθώντας να εξασφαλίσουν τη συνέχιση του μαθήματος σύμφωνα με το αρχικό σχεδιασμό, κλπ.

Έτσι, στην τρίτη μελέτη (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2003) επιχειρείται μια ταξινόμηση των τύπων παρέμβασης των δασκάλων ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας που επιτρέπουν στους μαθητές. Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε ως κυρίαρχες παρεμβάσεις αυτές που επικεντρώνονται στην παρουσίαση τεχνικών ή τυπικών διαδικασιών ή στη χρήση παραστάσεων και οι οποίες ήταν δύο τύπων:

- καθοδήγηση βήμα προς βήμα
- παρουσίαση της λύσης.

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι, αν και γενικά οι δάσκαλοι παρεμβαίνουν με βάση τη στάση και τις ενέργειες των μαθητών σε σχέση με το ζήτημα που εξετάζεται, υπήρξαν αρκετές περιπτώσεις όπου ο εκπαιδευτικός παρενέβαινε χωρίς προφανή λόγο, χωρίς δηλαδή ενδείξεις ότι οι μαθητές είχαν κάποια δυσκολία ή είχαν "κολλήσει". Υπήρχαν, δηλαδή, παρεμβάσεις ανεξάρτητα από τη δράση και τις ενέργειες των μαθητών.

Τα δύο επεισόδια που ακολουθούν αποτελούν παραδείγματα δύο διαφορετικού τύπου παρεμβάσεων αντιστοίχως. Στο πρώτο επεισόδιο, ο δάσκαλος καθοδηγεί βήμα προς βήμα, με πολύ συγκεκριμένες ερωτήσεις τους μαθητές στην επίλυση ενός προβλήματος. Παρεμβαίνει ακόμα και στον τρόπο διατύπωσης των απαντήσεων, με αποτέλεσμα να χάνεται η αιτιολόγηση με βάση τις ιδιότητες του τριγώνου και να μην αναπτύσσεται, με φανερό τρόπο, μαθηματικός συλλογισμός. Το δε τελικό συμπέρασμα προβάλλει ως άμεση συνέπεια των αρχικών δεδομένων, όπως αν ήταν αποτέλεσμα ορισμού. Όπως, δηλαδή, θα λέγαμε ότι "η μία γωνία είναι ίση με 90 μοίρες επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο", έτσι και στη συγκεκριμένη περίπτωση το τελικό συμπέρασμα διαμορφώνεται ως "κάθε μία από τις άλλες γωνίες είναι 45 μοιρών γιατί το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές".

Στο δεύτερο επεισόδιο, αν και σε πρώτη ανάγνωση μοιάζει η δασκάλα να μην παρεμβαίνει ουσιαστικά στον τρόπο με τον οποίο εξάγουν συμπεράσματα οι μαθητές και να μην τους καθοδηγεί, η μόνη απάντηση που τελικά σχολιάζει είναι αυτή που δίνει το ζητούμενο συμπέρασμα και μάλιστα με τη μορφή αποτελέσματος. Από όλη τη δραστηριότητα αναδεικνύεται μόνο το σημείο εκείνο όπου παρουσιάζεται η λύση, χωρίς ουσιαστική συζήτηση, επαλήθευση ή έλεγχο, γεγονός που έχει ως συνέπεια η όλη δραστηριότητα και διαδικασία (διερεύνηση της κατάστασης, διατύπωση εικασίας, έλεγχος κλπ) να διολισθαίνει σε μία διαδικασία υπολογισμού του αποτελέσματος και μάλιστα με καθόλου σαφή τρόπο.

Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί αφήνουν πολύ λίγο χώρο στους μαθητές να αναπτύξουν τις ιδέες τους και τους συλλογισμούς τους.

<u>Επεισόδιο 3.1.</u> (ΣΤ' Δημοτικού)

Οι μαθητές καλούνται να λύσουν μία άσκηση που ζητάει τον υπολογισμό των γωνιών ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τρίγώνου, στο οποίο σημειώνεται η ορθή γωνία.

Δ: Προσέξτε λίγο. Το τρίγωνο έχει δύο χαρακτηριστικά. Πρώτα τι είδους τρίγωνο είναι ως προς τις γωνίες του, Νίκο;

Μ: Ορθογώνιο

Δ: Ορθογώνιο. Ως προς τις πλευρές του τι τρίγωνο είναι; Τάνια;

Μ: Ισοσκελές.

Δ: Ισοσκελές, μπράβο Τάνια. Δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Και γνωρίζουμε μία από τις γωνίες του την ορθή, Μιχάλη;

Μ: Οι γωνίες Β και Γ …

Δ: Ναι…

Μ: είναι 45 μοίρες η κάθε μία.

Δ: Ναι, αλλά γιατί;

Μ: Ε… επειδή…

Δ: Το τρίγωνο είναι……..

Μ: Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

<u>Επεισόδιο 3.2.</u> (Ε' Δημοτικού)

Στους μαθητές έχει δοθεί ένα σύνολο από τρίγωνα και τους έχει ζητηθεί να μετρήσουν τις γωνίες τους και να διερευνήσουν το άθροισμα των γωνιών του κάθε τριγώνου.

Δ: Γιώργο, τι βρήκες για το τρίγωνο Β;

Μ: 90 μοίρες

Δ: Γιατί λες 90 μοίρες; Όλες μαζί;

Μ: Όλες μαζί;

Δ: Η άσκηση δεν σου ζητάει το άθροισμα των γωνιών;

Μ: Επειδή είναι μικρές.

Δ: Οι γωνίες είναι μικρές, μάλιστα. Πες μας Χρίστο.

Μ: 130 μοίρες, κυρία.

Δ: Περίπου, γιατί παιδί μου;

Μ: Κυρία, έτσι φαίνεται με το μάτι.

Δ: Με το μάτι, μάλιστα. Χαρούλα;

Μ: 180 μοίρες, κυρία.

Δ: Γιατί 180 Χαρούλα;

Μ: Γιατί για την ορθή έχουμε 90 μοίρες. Για την άλλη που είναι οξεία, επειδή είναι πολύ μικρή λέω 10 μοίρες, και για την άλλη που είναι απέναντι από την ορθή…αλλά είναι οξεία, λέω 80 μοίρες.

Δ: Σχετικά με αυτό, δεν ξέρω, μπορεί να είναι σωστό.

Στη συνέχεια άλλοι μαθητές λένε τις δικές τους εκτιμήσεις 60, 120, 185, 150 μοίρες, αλλά η δασκάλα δεν ζητάει εξηγήσεις, μόνο λεει:

Δ: Με το μάτι τις υπολογίσατε;

Η διαχείριση των λαθών των μαθητών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της εργασίας τους από τους εκπαιδευτικούς (βλέπε (β) παραπάνω) αποτελούν κομβικά σημεία της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τα δύο αυτά ζητήματα είναι σημαντικά για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος, καθώς είναι στενά συνδεδεμένα με τη μεταβίβαση και την εκχώρηση του ελέγχου από το δάσκαλο στους μαθητές, θέμα που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη αυτόνομης και ουσιαστικής σκέψης από τα παιδιά.

Έτσι, στην τέταρτη μελέτη (Tzekaki, Kaldrimidou, & Sakonidis, 2002), τα δεδομένα μελετήθηκαν ως προς δύο φάσεις της διαχείρισης του λάθους από τους εκπαιδευτικούς: πριν και μετά την πραγματοποίηση του λάθους. Η ανάλυση των επεισοδίων έδειξε ότι οι δάσκαλοι κρατούν για τον εαυτό τους τον έλεγχο της ορθότητας μιας απάντησης ή μιας λύσης, είτε προειδοποιώντας και καθοδηγώντας συχνά ασφυκτικά τους μαθητές, είτε πραγματοποιώντας οι ίδιοι τις διορθώσεις. Σε γενικές γραμμές, η στάση τους δηλώνει πως θεωρούν ότι το λάθος πρέπει να αποφεύγεται «με κάθε θυσία». Για το λόγο αυτό, στην προσπάθειά τους να αποφύγουν τη διατύπωση λανθασμένων απαντήσεων και να προφυλάξουν τους μαθητές από το να κάνουν λάθος, συχνά δε δίνουν την απαιτούμενη σημασία στις απόψεις και προτάσεις των μαθητών, χάνοντας πολύτιμες ευκαιρίες για παραγωγική αλληλεπίδραση και συν-κατασκευή του μαθηματικού νοήματος στην τάξη. Αποτέλεσμα των παραπάνω πρακτικών και στάσεων είναι να καταφεύγουν στην σχεδόν αποκλειστική χρήση μορφολογικών στοιχείων ή υπολογιστικών τεχνικών για την επεξεργασία της μαθηματικής γνώσης στην τάξη, αποφεύγοντας τα εννοιολογικά.

Τα παρακάτω επεισόδια αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα της παραπάνω πρακτικής.

Επεισόδιο 4.1. (Γ΄ Γυμνασίου)
Η τάξη προσπαθεί να απλοποιήσει μια αλγεβρική έκφραση.
Δ: Στο φύλο με τις ασκήσεις που σας έδωσα, υπήρχε μία περίπτωση όπου…υπάρχει ένα μείον στην αρχή της έκφρασης. Τι θα κάνουμε;
Μ: -2α…….
Δ: -α-1 ή, αν δεν θέλω να το αλλάξω αμέσως –(α+1). Πρέπει να είστε πολύ προσεκτικοί. Εδώ είναι που γίνονται τα περισσότερα λάθη. Λύστε όσες περισσότερες μπορείτε, αρχίζοντας από τις πιο απλές.

Επεισόδιο 4.2: (Γ΄ Γυμνασίου)

Σε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τις τιμές του α ,ώστε ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.
Μ: $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1$
Δ: Αυτός είναι ένας τρόπος. Είμαστε σίγουροι ότι δεν θα χάσουμε εδώ ρίζες;… και μετά τι θα πούμε;
Μ: Θα πούμε α=0;
Δ: Ρίζα 1 επί 1, άρα θα βγάλουμε το 1. Το –1 πώς θα το βγάλουμε;
Μ: Το –1 δεν θα το βγάλουμε γιατί – επί - , συν
Δ: Πάλι ψαρεύουμε. Κανένας πιο ασφαλής τρόπος;
Μ: Μήπως να βάλουμε +;
Δ: Συν, όχι συν. Θα αλλάξει η παρένθεση. Το $\alpha^2 - 1$ είναι $\alpha^2 - 1^2$. Σας θυμίζει τίποτα αυτή η παράσταση;

Μ: Διαφορά τετραγώνων

…………

Δ: Ποιος είναι λοιπόν ο ασφαλής τρόπος για να βρίσκουμε τις ρίζες στον παρονομαστή;

Μ: Διαφορά τετραγώνων.

Δ: Διαφορά τετραγώνων σ΄ αυτήν την περίπτωση. Σε άλλη περίπτωση;

Μ: Παραγοντοποίηση.

Επεισόδιο 4.3. (Γ΄ Γυμνασίου)

Οι μαθητές εργάζονται σε μία άσκηση παραγοντοποίησης.

Μ: Κυρία, στο x^2-2x, αν γράψουμε x φορές το x ισούται με 2x; Το x απλοποιείται και τότε x=2.

Δ: Πρόσεχε! Πού πήγε το x; …προτεραιότητα των πράξεων…πρώτα πολλαπλασιάζουμε

Μ: Κυρία, θα κάνουμε x^2=2x…… x.x=2x

Δ: Αλλά έχεις μια ρίζα! Δεν επιτρέπεται! Εντάξει; Θα χάσεις ρίζα. Μην κάνετε τέτοιες απλοποιήσεις, γιατί χάνετε ρίζες. Εντάξει; Πάντα, όποτε διώχνουμε τον κοινό παράγοντα, χάνουμε ρίζα.

Μελέτη 5: Συνδέοντας τη διαχείριση των επιστημολογικών χαρακτηριστικών με τα σχήματα επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών

Οι προηγούμενες μελέτες έδειξαν ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στο μαθηματικό περιεχόμενο και στην κοινωνική δομή της τάξης, όπως αυτή προσδιορίζεται από τις νόρμες αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας. Σ' αυτήν τη τελευταία μελέτη (Sakonidis, Tzekaki, M. & Kaldrimidou, 2001, Καλδρυμίδου, Σακονίδης, & Τζεκάκη, 2000, 2002), επιχειρήθηκε η σύνδεση της διαχείρισης των επιστημολογικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών με τις μορφές αλληλεπίδρασης στην τάξη. Για αυτό το σκοπό, τα δεδομένα αναλύθηκαν ως προς την αλληλεπίδραση της διαχείρισης του μαθηματικού περιεχομένου από το δάσκαλο και των σχημάτων επικοινωνίας που υιοθετούνταν από αυτόν σε δύο φάσεις της εργασίας των μαθητών και με βάση την επιστημολογική διαφορά που επιτυγχανόταν:

- στην ολοκλήρωση μιας δραστηριότητας, και
- στην ολοκλήρωση μιας ενότητας δραστηριοτήτων και τη γενίκευση των αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι υπάρχει μια διαλεκτική σχέση ανάμεσα στα σχήματα επικοινωνίας και στη διαχείριση του μαθηματικού περιεχομένου στην τάξη. Τα περισσότερα επεισόδια που χρησιμοποιήθηκαν ως παραδείγματα στις προηγούμενες παραγράφους (π.χ. επεισόδια 3.1. και 4.3.) αναδεικνύουν ότι ο κυρίαρχος τύπος αλληλεπίδρασης μέσα στην τάξη δεν είναι διαπραγματεύσιμος, με αποτέλεσμα να διαμορφώνει και ταυτόχρονα να διαμορφώνεται από τον τρόπο με τον οποίο οι δάσκαλοι οργανώνουν και διαχειρίζονται το μαθηματικό περιεχόμενο.

Συζήτηση

Τα τελευταία χρόνια, αρκετές έρευνες στο χώρο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ανέδειξαν τη σημασία των αλληλεπιδραστικών δομών της τάξης στην οικοδόμηση και κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές. Ωστόσο, πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι η υπερβολική έμφαση σε αυτές τις δομές εμπεριέχει τον κίνδυνο αλλοίωσης του μαθηματικού νοήματος, με τη μείωση και τον υποβιβασμό των μαθηματικών σχέσεων αντί του εμπλουτισμού του νοήματος δια μέσου της αλληλεπιδραστικής κατασκευής νέων και πιο γενικών σχέσεων (Steinbring, 1998).

Προχωρώντας λίγο πιο πέρα την άποψη αυτή, τα αποτελέσματα των ερευνών μας υποστηρίζουν ότι υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στην επιστημολογική οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου και στην οργάνωση της τάξης των μαθηματικών. Πιο ειδικά, η απουσία διαφοροποίησης μεταξύ των χαρακτηριστικών του μαθηματικού περιεχομένου και η ανάμειξή τους με μορφολογικά, διαδικαστικά και υπολογιστικά στοιχεία κατά τη διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη, καθιστούν τα τελευταία κυρίαρχα στοιχεία της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι παρεμβάσεις των δασκάλων, όταν οι μαθητές συναντούν δυσκολίες, καθώς και η διαχείριση των διαδικασιών αξιολόγησης της ορθότητας των αποτελεσμάτων και των λαθών των τελευταίων από τους πρώτους, τείνουν να επικεντρώνονται σε τέτοια χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά αναδεικνύονται σε αποτελεσματικούς δείκτες παραγωγής μαθηματικής γνώσης, ενισχύονται και κατά συνέπεια διαστρεβλώνουν το μαθηματικό νόημα.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά κυριαρχούν στη μαθηματική δραστηριότητα και γίνονται απαραίτητα στους μαθητές, αποκτώντας το στάτους «όρων» στην καθημερινότητα της τάξης και στη μαθηματική εργασία. Με άλλα λόγια, γίνονται στοιχείο του διδακτικού συμβολαίου, το οποίο σύμφωνα με τον Brousseau αποτελεί «ένα σύστημα αμοιβαίων υποχρεώσεων… οι οποίες όμως είναι ειδικές στο περιεχόμενο, δηλαδή, τη συγκεκριμένη μαθηματική γνώση» (Brousseau, 1997).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arzarello, F. (1998). The role of natural language in pre-algebraic and algebraic thinking, in H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi, A. Sierpinska (eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, Virginia. NCTM.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht. Kluwer.

Diezman, C., Watters, J., English, L. (2001). Difficulties Confronting Young Children Undertaking Investigations, in M. v. den Heuvel-Panhuizen (Ed) *Proceedings of the 25th Conference of International Group for PM.,* Utrecht. The Netherlands. 2: 253-260.

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management, in M. Wittrock (ed) *Handbook of research on teaching*. New York. Macmillan.

Hershkowits, R., Parzysz, B., Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape, in A. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer.

Ikonomou, A., Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki M. (1999). Interaction in the mathematics classroom: some epistemological aspects, in Schank. I.(ed.) *Proceedings of European Research in Mathematics Education (CERME1),* Forschungsinstitut fur Mathematik-diadktik, Osnabrueck, Germany, I:168-181.

Καλδρυμίδου, Μ., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2000). Επιστημολογικά και επικοινωνιακά χαρακτηριστικά στην τάξη των Μαθηματικών, στο Γαγάτσης Α. & Μακρίδης Γ., (επιμ.), *Πρακτικά του Β' Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Κ.Μ.Ε & Π.Ι.Κ., Λευκωσία, Κύπρος. 120-130.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. & Tzekaki, M. (2000). Epistemological features in the mathematics classroom: Algebra and Geometry, in Nakahara, T. & Koyama, M. (eds*) Proceedings of the 24th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME24).* Hiroshima Univ., Japan. 3:111-118

Καλδρυμίδου, Μ., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2002). Ο ρόλος του δασκάλου στη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης, στο Γ. Καψάλης & Α. Κατσίκης (επιμ.), *Σχολική Γνώση και Διδασκαλία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Ιωάννινα. ΠΤΔΕ, Παν/μιο Ιωαννίνων. Α:562-573.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. & Tzekaki, M. (2003). Teachers' interventions in students' mathematical work: a classification, in *Proceedings of the 3rd Conference of ERME*. http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, in D. A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. N.Y. McMillan Publishers. 390-419.

Margolinas, C. (1999). Les pratiques de l'enseignant; une étude de didactique des mathématiques, in Bailleul (ed.), *Actes de la 10eme école de didactique des mathématiques*. ARDM.

Sakonidis, H., Tzekaki, M. & Kaldrimidou, M. (2001). Mathematics teaching practices in transition: some meaning construction issues, in van den Heuvel- Panhuizen, M. (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME25). U*trecht, The Netherlands. Freudenthal Institute, Utrecht University. 4:137-144.

Sierprinska, A., Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education, in A. J. Bishop (ed.) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer.

Shroyer, C. (1982). Critical moments in the teaching of mathematics. What makes teaching difficult?, *Dissertation Abstracts International*, 42A, 3485.

Steinbring, H. (1998). Stoff Didaktik to social interactionism: an evolution of approaches to the study of language and communication in German mathematics education research, in H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi, & A. Sierprinska (eds) *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia. NCTM. 102-119.

Sullivan, P. (1999). Seeking a rationale for particular classroom tasks and activity, in J. Truran & K. Truran (eds). *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Adelaide. MERGA. 15-29.

Sullivan, P. & Mousley, J. (2001). Mathematics teachers as active decision makers, in F. Lin & T. Cooney (eds) *Making sense of Mathematics Teacher Education*. Dordrecht. Kluwer. 147-163.

Τζεκάκη, Μ., Δεληγιωργάκος, Ι. (επιμέλεια έκδοσης). (2000). *Παρουσίαση του Έργου "Έρευνα για εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών"*, Α.Π.Θ., Δ.Π.Θ., Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, ΥΠΕΠΘ – Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, ΕΠΕΑΕΚ, Ενέργεια 3.2β "Εκπαιδευτική Έρευνα"

Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (2002). Reflections on teachers' practices in dealing with pupils' mathematical errors, In J. Novotna (ed.), *Proceedings of the 2ndh Conference of ERME*. Prague. Charles University. 322-332.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomethamatical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27: 458–477.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in Mathematics Classroom, in van den Heuvel- Panhuizen, M. (ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 1-9), Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Intitute, Utrecht University.