

ΠΕΡΙ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ *ΕΝΝΟΙΩΝ*
εισαγωγή

Μαρία Καλδρυμίδου

μάθηση των μαθηματικών εννοιών

- από τις επιδόσεις των μαθητών και τον εντοπισμό και την κατηγοριοποίηση των λαθών τους
- στην αναζήτηση θεωρητικών εργαλείων περιγραφής των μηχανισμών μάθησης των μαθηματικών εννοιών.

«Κλασσικά»

Ερευνητικά ευρήματα

προσθετικές σχέσεις

- Ο Γιάννης φεύγοντας από το σπίτι του επισκέφτηκε τη γιαγιά του, η οποία έδωσε 50 ευρώ. Στη συνέχεια πήγε σε ένα εμπορικό κέντρο και αγόρασε κάποια πράγματα. Όταν μέτρησε τα χρήματά του βρήκε ότι είχε 37 ευρώ λιγότερα από αυτά που είχε πριν πάρει τα χρήματα που του έδωσε η γιαγιά του. Πόσα ευρώ ξόδεψε;
- 75% αποτυχία στην Γ' Γυμνασίου

(Vergnaud, 1986)

πολλαπλασιασμός

- στον αυτοκινητόδρομο ένα αυτοκίνητο διανύει 2χλμ σε 1 λεπτό. αν η ταχύτητα είναι σταθερή πόσα χλμ διανύει σε 15 λεπτά;
- ένα κιλό απορρυπαντικό χρησιμοποιείται για να γίνουν 15 κιλά σαπούνι. Πόσα κιλά σαπούνι μπορεί να γίνουν από 0.75 κιλά απορρυπαντικού;

Fischbein, E. et als (1985).

ευρήματα

Ε' Δημοτικού, Α' & Γ' Γυμνασίου

- 2×15
- σωστές απαντήσεις: 84%, 96%, 98%
- λάθος: $15/2$

- 15×0.75
- σωστές απαντήσεις: 27%, 18%, 35%
- λάθη: $15/0.75$ ή $0.75/15$

Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε για το σχολείο μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και κάποιες μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε για αυτήν την αγορά του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες του μπάσκετ. Πόσες μπάλες μπάσκετ αγόρασε;

Ο Κώστας έδωσε την παρακάτω λύση: $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$

Ο Γιάννης έδωσε την παρακάτω λύση: $11 - (120 \div 20) = 5$

- Πώς το υπολόγισε ο καθένας;

- Μόνο 1 (ένας) μαθητής Γ' Γυμνασίου μπόρεσε να εξηγήσει τη λύση του Γιάννη.
 - (Α. Ατματζίδου)

- σε τι οφείλονται αυτά τα ευρήματα;

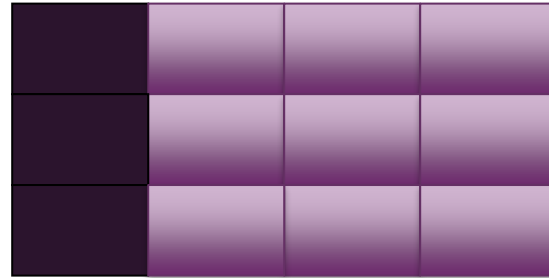
κλάσματα -ρητοί

βασικά ευρήματα της βιβλιογραφίας

- πράξεις σε αριθμητές και παρονομαστές ανεξάρτητα του ενός από τον άλλο
- λανθασμένες συγκρίσεις κλασμάτων, π.χ. θεωρείται ότι το $3/12$ είναι μεγαλύτερο από το $2/4$

κλάσματα -ρητοί

- επόμενο κλάσμα του $\frac{2}{5}$ είναι το $\frac{3}{5}$
- $\frac{3}{12}$ και όχι $\frac{1}{4}$



- το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας μπορεί να είναι μικρότερο από το $\frac{1}{4}$ μιας άλλης σοκολάτας

- σε τι οφείλονται αυτά τα ευρήματα;

επεισόδιο 1

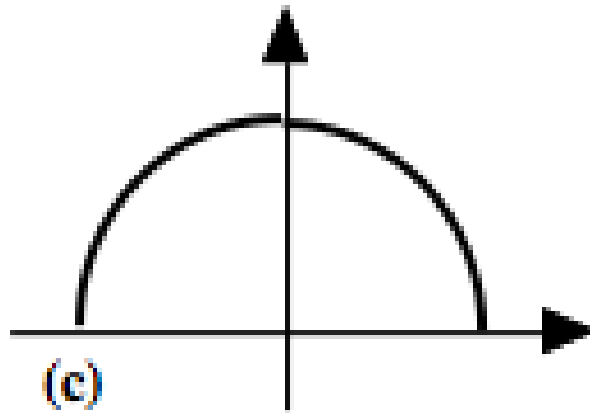
- Δ: Δε μού λέτε; ...Ποια διαφορά έχουν οι κλασματικοί από τους φυσικούς; ...Σε τι διαφέρουν; ...Είναι ίδιοι αριθμοί;..
- Μ: Οι κλασματικοί αριθμοί....δηλαδή μπορούν να ξεχ..., δηλαδή έχουμε μία τούρτα και τη χωρίζουμε σε 6 κομμάτια και παίρνουμε ένα...Αυτό είναι το $1/6$. Οι φυσικοί αριθμοί είναι το 1, 2, 3,...μέχρι το άπειρο.
- Δ: Ωραία!...

επεισόδιο 2

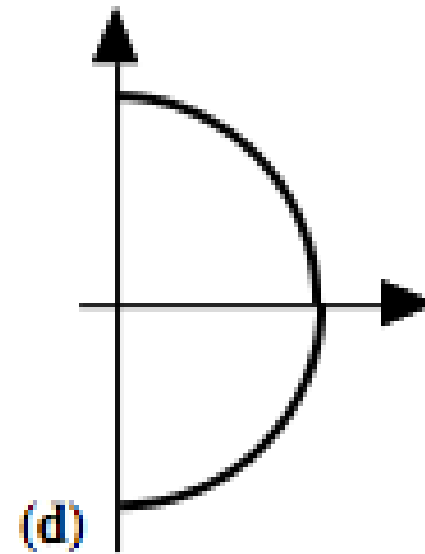
- Δ: Αν θέλω να πάρω τα $\frac{4}{8}$ από την τούρτα, τι σημαίνει αυτό.... ότι πήρα τι; Γεωργία;
- Γ: Ότι χωρίσαμε την τούρτα σε 8 κομμάτια και ότι πήρατε τα 4, $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{8}$ ίσον $\frac{4}{8}$
- Δ: Ωραία, επαναλαμβάνουμε την κλασματική μονάδα πόσες φορές; Αθηνά;
- Α: 4 φορές
-

	University students ($N=109$)	
	% yes	% no
(1) $y = x^2$	96	4
(2) $y = 4$	30	69
(3) $x^2+y^2 = 1$	62	37
(4) $y = \frac{3}{x}$	91	9
(5) $xy = 5$	82	17
(6) $y = \pm \sqrt{4x-1}$	67	33
(7) $y = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } x > 1 \end{cases}$	92	7
(8) $y = 0$ if x is a rational number	50	48
(9) $y = 0$ (if x is a rational number), $y = 1$ (if x is an irrational number).	75	22

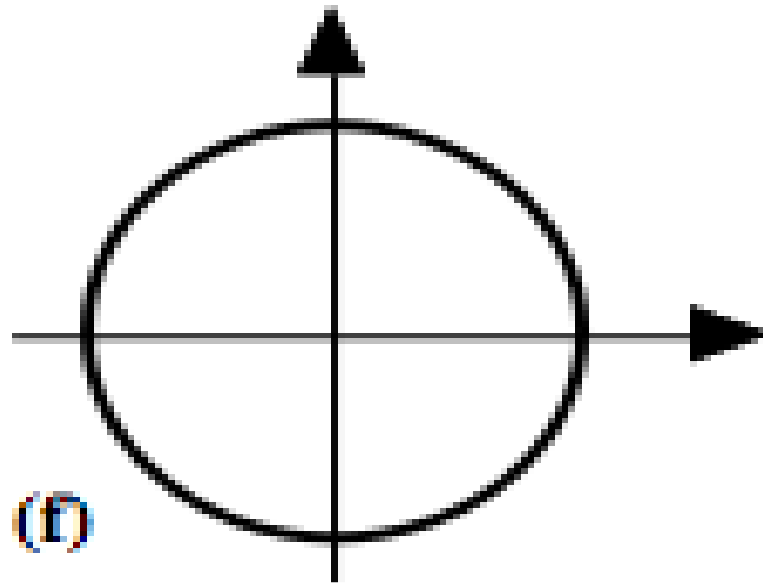
Table 1



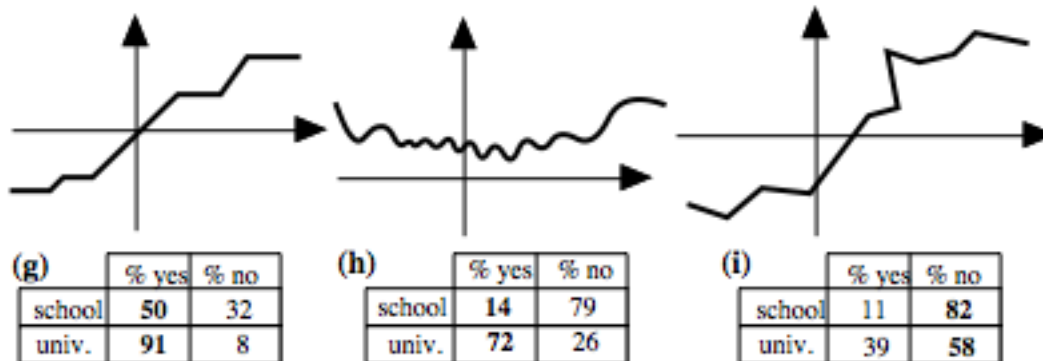
	% yes	% no
school	61	36
univ.	91	9

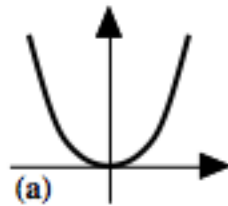


	% yes	% no
school	43	57
univ.	70	28

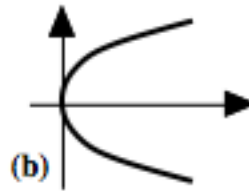


	% yes	% no
school	64	29
univ.	65	35





	% yes	% no
school	100	0
univ.	97	3



	% yes	% no
school	95	4
univ.	80	20

Tall and MdNor Bakar (1992)

• $\{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$	• Συνάρτ.	Όχι συν.
	• 75%	25%
• $\{(1,3),(2,5),(3,4)\}$	• 65%	35%
• $\{(x,y) / x \in \mathbb{N}, y=1\}$	• 60%	40%

Hitt, 1998

συναρτήσεις

- πρέπει να υπάρχει τύπος
- δύο συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο και διαφορετικό πεδίο ορισμού θεωρούνται ως ίδια συνάρτηση
- κανονικός και ομαλός τρόπος αναπαράστασης, κυρίως γραφικής

συναρτήσεις

- υποχρεωτική μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή
- ταύτιση της συνάρτησης με τον τύπο της (π.χ. συνάρτηση είναι το x^2)
- ταύτιση της έννοιας με το γνωστό πλάτος της έννοιας
- συνάρτηση με μη συνεχές γράφημα δεν θεωρείται συνεχής (π.χ. η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση $y=x, x \in \mathbb{N}$)

- σε τι οφείλονται αυτά τα ευρήματα;

μάθηση των μαθηματικών εννοιών

- από τις επιδόσεις των μαθητών και τον εντοπισμό και την κατηγοριοποίηση των λαθών τους
- στην αναζήτηση θεωρητικών εργαλείων περιγραφής των μηχανισμών μάθησης των μαθηματικών εννοιών.

Σε τι αποδίδονται αυτά τα ευρήματα;

- επιστημολογικά χαρακτηριστικά
 - φύση μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών
- αναπαραστατικά χαρακτηριστικά
 - τρόποι παρουσίασης μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών
- διδακτικά χαρακτηριστικά
 - τρόποι πραγμάτευσης και διαπραγμάτευσης μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών

Επεισόδιο

(επιστημολογικά, αναπαραστατικά, διδακτικά)

- Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
- Δ: Τι είναι οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
- Μ: Ένα κλάσμα που έχει x στον παρονομαστή
- Δ: Όπως;
- Μ: $5/x$
- Δ : και τι τιμές παίρνει το x ;
- Μ: Όλες εκτός από το 0.
- Δ: Και γιατί όχι 0;
- Μ: Γιατί δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή 0
- Δ: Και γιατί δεν υπάρχει τέτοιο κλάσμα
- Μ: Γιατί δεν υπάρχει διαίρεση με το 0.....

επιστημολογικά χαρακτηριστικά

- πολλαπλασιασμός
 - διαφορετική δομή από την πρόσθεση
- κλάσματα
 - πυκνή δομή, διαφορετική από τη διακριτή δομή των φυσικών/ακεραίων
- συναρτήσεις
 - *σχέση, απεικόνιση, μετασχηματισμός, αντικείμενο...*
 - *σημειακή επεξεργασία – τοπική αντίληψη γραφικής παράστασης*
 - *οι πράξεις στο δεξί μέλος μιας αναλυτικής έκφρασης – αντίληψη πράξης / ενέργειας για τη συνάρτηση*

αναπαραστατικά χαρακτηριστικά

- κλάσματα
 - αναπαράσταση με 2 αριθμούς
 - σύνθεση με αναπαράστασεις μέρους/όλου
- συναρτήσεις
 - τρεις αναπαράστασεις για τη συνάρτηση:
 - τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών

αναπαραστατικά χαρακτηριστικά

- κάθε μορφή αναπαράστασης ανα-δεικνύει διαφορετικές πληροφορίες, απαιτεί διαφορετική "ανάγνωση", έχει άλλες γνωστικές απαιτήσεις
- η μετάβαση από τον έναν τύπο στον άλλο δεν είναι αυτόματη

αναπαραστατικά χαρακτηριστικά

- κάθε τύπος αναπαράστασης "αναπαριστά" κάποια στοιχεία της συνάρτησης
- κανένας τύπος αναπαράστασης δεν "αναπαριστά" πλήρως τη συνάρτηση, δεν στέκει στη θέση της

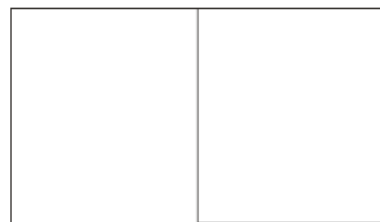
διδασκτικά χαρακτηριστικά

- πολλαπλασιασμός
 - επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
 - σύνδεση με «αύξηση»

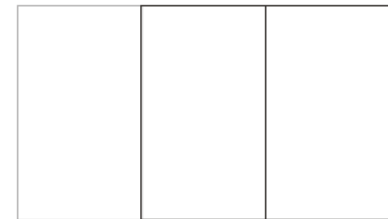
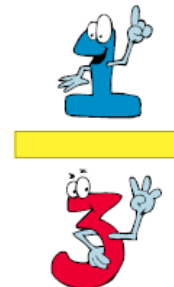
διδασκτικά χαρακτηριστικά

- κλάσματα / ρητοί
 - μέρος – όλο: αριθμητής ίσος με πλήθος των τμημάτων που αποτελούν το μέρος, παρονομαστής ίσος με το πλήθος των τμημάτων που αποτελούν το όλο

Χρωματίζω όσο λέει το κλάσμα. Γράφω από κάτω το κλάσμα με λόγια.




Ένα δεύτερο




διδασκτικά χαρακτηριστικά


- αναπαραστάσεις: στερεότυπες, γεωμετρικές, σχήματα ήδη χωρισμένα ομοιόμορφα, που επιτρέπουν τη διαδικασία καταμέτρησης







Τα παιδιά έχουν από μια ίδια σοκολάτα και έφαγαν:



2



Η Άννα		το $\frac{1}{2}$	της σοκολάτας
Ο Γιώργος		τα —	της σοκολάτας
Η Δανάη		το —	της σοκολάτας
Ο Θωμάς		τα —	της σοκολάτας

- Ποια παιδιά έφαγαν την ίδια ποσότητα σοκολάτας;
- Ποια κλάσματα έχουν την ίδια αξία;

διδασκτικά χαρακτηριστικά

- κλασματική μονάδα και δημιουργία κλασματικών αριθμών με επανάληψη κλασματικής μονάδας

Επισημάνετε - Μανθάνουμε



- Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε v ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται **νιοστό** και συμβολίζεται με το $\frac{1}{v}$.

- Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από k τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{k}{v}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».

- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

αριθμητής → 2
κλασματική γραμμή → —
παρονομαστής → 3

όροι του κλάσματος

διαβάζεται "δύο τρίτα"

$$\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$$

$$k \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \cdot k = \frac{k}{v} \quad v \neq 0$$

Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

$$6 = \frac{6}{1}, \quad 15 = \frac{15}{1}, \quad 21 = \frac{21}{1}$$

διδασκτικά χαρακτηριστικά

- συνάρτηση
 - ειδικές συναρτήσεις
 - υπεροχή των συναρτήσεων που ορίζονται από αναλυτικούς τύπους
 - διαπραγμάτευση της συνέχειας σε ειδικές μορφές και κυρίως μόνο σε συνεχή πεδία ορισμού
 - μη πλήρεις ορισμοί / περιγραφές
 - χρήση όρων "μηχανή" και "κανόνας"

διδακτικός μετασχηματισμός

- διδακτική οργάνωση του περιεχομένου που προκαλεί εννοιολογικές και επιστημολογικές διαφοροποιήσεις του μαθηματικού νοήματος στα σχολικά μαθηματικά