

ΠΕΡΙ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ *ΕΝΝΟΙΩΝ*

Μαρία Καλδρυμίδου

μάθηση των μαθηματικών εννοιών

- από τις επιδόσεις των μαθητών και τον εντοπισμό και την κατηγοριοποίηση των λαθών τους
- στην αναζήτηση θεωρητικών εργαλείων περιγραφής των μηχανισμών μάθησης των μαθηματικών εννοιών.

μάθηση των μαθηματικών εννοιών

- θεωρητικές προσεγγίσεις
 - περιγραφής και ερμηνείας της γνώσης
 - σωστής ή λανθασμένης, που αποκτούν οι μαθητές
- διαφορετικές θεωρήσεις
 - για τις μαθηματικές έννοιες,
 - για τη μάθηση

Αρχικές θεωρητικές προσεγγίσεις

- από το πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας

It is clear that cognitive psychology generally forms the basis of the theoretical framework as well as most of the methodological tools, the data analyses as well their interpretation and conclusions. (R. Hershkowitz & C. Breen, 2006 p. ix)

- η πιαζετιανή θεωρία και η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση ήταν κυρίαρχες.

Αρχικές θεωρητικές προσεγγίσεις

- εποικοδομισμός (constructivism)
- ριζοσπαστικός εποικοδομισμός (radical constructivism)

*...refer to a constructivist approach, according to which children not only are taught mathematics, but also **develop their mathematical competencies and ideas by facing situations, interpreting them, and generating processes and behaviors on the spot**....Generally, it meant that the student was an active constructor of knowledge, and that no one else could really understand the student's ideas (J. Mulligan & G. Vergnaud, 2006, p. 123)*

Θεωρητικές προσεγγίσεις

- ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός (social constructivism),
- η θεωρία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (social interactionism),
- η θεωρία συστημάτων (system theory)
- η θεωρία της δραστηριότητας (activity theory).

μαθηματική γνώση

- για το ρεύμα του εποικοδομισμού (constructivism), η (μαθηματική) γνώση είναι το αποτέλεσμα της προσαρμογής του υποκειμένου σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον,

μαθηματική γνώση

- για τη κοινωνική-πολιτισμική (socio-cultural) θεώρηση είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας πολιτιστικής ενσωμάτωσης σε μια δεδομένη κουλτούρα, ενώ

μαθηματική γνώση

- για την αλληλεπιδραστική (interactionism) προσέγγιση η ατομική κατασκευή του νοήματος γίνεται σε αλληλεπίδραση με την κουλτούρα της τάξης στη διαμόρφωση της οποίας συμμετέχει το άτομο.

μαθηματική γνώση

- για τη συστημική προσέγγιση
 - η μαθηματική γνώση δημιουργείται μέσα σε ένα σύστημα (σχολείο, τάξη),
 - σε ένα πλαίσιο (μαθηματικό περιεχόμενο, τρόπος διαπραγμάτευσης και λειτουργία αυτού του περιεχομένου στις συγκεκριμένες καταστάσεις, δραστηριότητες και έργα που δίνονται)
 - και με αναφορά σε αυτό (η γνώση που αναδύεται ή κατασκευάζεται στοχεύει στη βέλτιστη λειτουργία για την αντιμετώπιση αυτού του πλαισίου).
- Τα χαρακτηριστικά του συστήματος και του πλαισίου καθορίζουν το περιεχόμενο και τη φύση της μαθηματικής γνώσης. (Chevallard, 1992, Brousseau, 1997)

μαθηματική γνώση/μαθηματικές έννοιες

- Οι μαθηματικές έννοιες είναι τα βασικά αντικείμενα, η διερεύνηση των οποίων (ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, αναπαραστάσεις) αποτελεί τον άξονα ανάπτυξης και οργάνωσης της Μαθηματικής επιστήμης.

μαθηματική γνώση/μαθηματικές έννοιες

- οι μαθηματικές έννοιες έχουν πολλές όψεις, εμφανίζονται με διαφορετικό ρόλο στα διάφορα πεδία και στις διαφορετικές χρήσεις τους, γεγονός που κάνει τη φύση των εννοιών να διαφοροποιείται επιστημολογικά, ανάλογα με την κατάσταση που αντιμετωπίζεται κάθε φορά.

εννοιολογικές αντιλήψεις

- μελέτη των λαθών των μαθητών στη δεκαετία του 1980.
- συστηματικά λάθη
- παγιωμένες, σταθερές και κοινές λανθασμένες εννοιολογικές αντιλήψεις
- παρανοήσεις, “misconceptions”
- γνώση

misconceptions

- Δεν πρόκειται για περιστασιακές ιδέες και λάθη, αλλά για το αποτέλεσμα προηγούμενης γνώσης, η οποία είναι σωστή, λειτουργεί και είναι αποτελεσματική αλλά σε κάποιο άλλο πλαίσιο
“μια λανθασμένη εννοιολογική αντίληψη έχει τομέα εγκυρότητας, αλλιώς δεν θα υπήρχε ως τέτοια”
(Balacheff & Gaudin, 2002)

μάθηση

- μαθηματική γνώση που αναπτύσσεται μέσα στη σχολική τάξη των Μαθηματικών και το νόημα που της αποδίδεται από τους μαθητές υπόκειται και εξαρτάται από περιορισμούς:
 - ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο,
 - ως προς την κατάσταση υπό εξέταση,
 - ως προς το κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον,
 - ως προς το διδακτικό περιβάλλον.

Θεωρητικές προσεγγίσεις

- έμφαση στον αναπαραστατικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης
- έμφαση στο σταδιακό χαρακτήρα ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης
- διπολικές προσεγγίσεις
- έμφαση στη διασύνδεση και στη συνθετική φύση των μαθηματικών εννοιών
- έμφαση στη επιστημολογία και την ανάδειξη του μαθηματικού νοήματος

Προσεγγίσεις που δίνουν
έμφαση στον αναπαραστατικό
χαρακτήρα της μαθηματικής
γνώσης

- Bruner (1964)
 - η εμπράγματη ή βιωματική αναπαράσταση (enactive), η εικονική (iconic) και η συμβολική (symbolic) αναπαράσταση
- Fischbein (1978, 1983)
 - πρωταρχικά, διαισθητικά μοντέλα (intuitive models) λειτουργούν ως παραδειγματικά μοντέλα για την ανάπτυξη των εννοιών

- Οι Tall & Vinner (1981) θεωρούν ότι η μαθηματική γνώση των μαθητών οργανώνεται σε διαφορετικές οντότητες:
 - τη διατυπωμένη ή λεκτική γνώση, την έννοια-ορισμό (concept definition) και
 - την έννοια-εικόνα (concept image), η οποία αποτελείται από τα αναπαραστατικά σχήματα που έχουν οργανωθεί με βάση τις αναπαραστάσεις που κυριαρχούν στην καθημερινή σχολική πρακτική των μαθητών

μάθηση των εννοιών κυρίως της μαθηματικής ανάλυσης και του συναρτησιακού λογισμού

- η θεώρηση της δημιουργίας του πρωτοτυπικού (prototypical) σχήματος (Hershkowitz, R, 1990), το οποίο λειτουργεί ως βασικό εργαλείο αναγνώρισης των μαθηματικών εννοιών κατά τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

μάθηση των γεωμετρικών εννοιών, των κλασμάτων και των συναρτήσεων.

Προσεγγίσεις που δίνουν
έμφαση στο σταδιακό/δομικό
χαρακτήρα ανάπτυξης της
μαθηματικής γνώσης

- Οι Breidenbach & als (1992) και Dubinsky & Harel (1992) διατύπωσαν τη θέση ότι οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται σταδιακά:
 - προ-έννοια (preconcept)
 - ενέργεια (action)
 - διαδικασία (process)
 - αντικείμενο (object)
- διαφοροποιητικό ρόλο παίζει η μαθηματική φύση της αντίστοιχης εννοιολογικής αντίληψης

- Στο αρχικό στάδιο της προ-έννοιας η συνάρτηση, έτσι όπως γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές, έχει ελάχιστα χαρακτηριστικά της μαθηματικής έννοιας και ο μαθητής δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει ή να εκτελέσει διαδικασίες σε συγκεκριμένες συναρτήσεις.
- Το στάδιο των ενεργειών (action) αντιστοιχεί στην ικανότητα χειρισμού (π.χ. εκτέλεση υπολογισμών στον τύπο της συνάρτησης, υπολογισμός των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής από τον αλγεβρικό τύπο μιας συνάρτησης)

- το στάδιο της διαδικασίας (process) αντιστοιχεί στην ικανότητα μετασχηματισμού του αντικειμένου: ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί την ιδιότητα της 1-1 συνάρτησης, να υπολογίσει π.χ. την αντίστροφη μιας συνάρτησης
- το στάδιο του αντικειμένου αντιστοιχεί στην ενοποίηση και ολοκλήρωση της έννοιας (το άτομο μπορεί και να χειρίζεται και να εφαρμόζει διαδικασίες πάνω στο αντικείμενο)

Διπολικές προσεγγίσεις

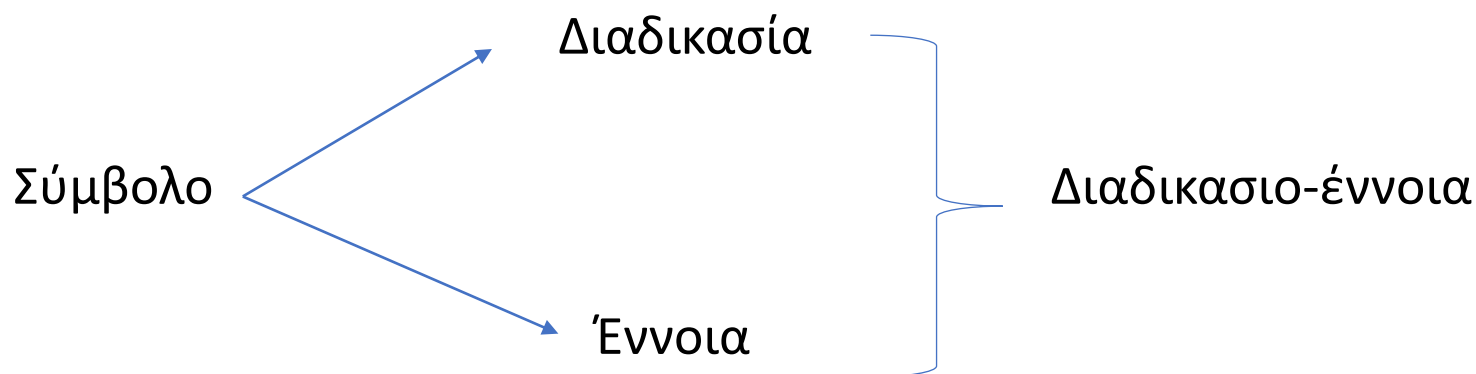
Διττή φύση των μαθηματικών εννοιών

- Η Sfard (1991, 1992) διατυπώνει τη θεώρηση ότι μια μαθηματική έννοια αναπτύσσεται μέσα από μια διαλεκτική σχέση ανάμεσα σε λειτουργικούς και δομικούς τρόπους σκέψης
- η γνώση των μαθητών έχει διττή φύση, τη διαδικαστική αντίληψη για την έννοια και την εννοιολογική αντίληψη

- Έτσι, η κυρίαρχη αντίληψη των μαθητών, ότι μία συνάρτηση δίνεται υποχρεωτικά από έναν αλγεβρικό τύπο, αποδίδεται από τη Sfard στην επικράτηση της διαδικαστικής αντίληψης.
- Όπως και η δυσκολία των μαθητών να δουν ότι στο σχήμα υπάρχει αναπαράσταση του $1/2$



Procept (διαδικασιο-έννοια)



π.χ το σύμβολο +
πράξη , αλλά και άθροισμα (αριθμός)

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2)

- The child begins with human perception and action, linking them together in a coherent way. Symbols are introduced to denote mathematical processes (such as addition) that can be compressed as mathematical concepts (such as sum) to give symbols that operate flexibly as process and concept (procept). Knowledge becomes more sophisticated through **building on experiences** met before, **focusing on relationships between properties**, leading eventually to the advanced mathematics of concept definition and deduction. (Tall, 2007, σελ. 145)

πραξεολογία

- Ο Chevallard(2005)θεωρεί ότι η ανάπτυξη και μάθηση των μαθηματικών εννοιών δεν ξεχωρίζει από τη διδασκαλία και η έννοια κλειδί που χρησιμοποιεί είναι η πραξεολογία (praxeologie).
- Η πραξεολογία, αποτελούμενη από δύο πόλους την πράξη και το λόγο, ενοποιεί το τι κάνει ο άνθρωπος (πράξη) και το τι σκέπτεται (λόγος).

...we include in “praxeology” the study, not only of what people do, and how they do it, but also of what they think, and how they do so.(Chevallard, 2005, p. 22)

συνθέτωντας τις
αναπαραστατικές
προσεγγίσεις, τις σταδιακές
και τις διπολικές
προσεγγίσεις

- Μία άλλη θεωρητική προσέγγιση είναι αυτή του Tall (2004, 2007) που θεωρεί ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών ακολουθεί τρία στάδια:
- το εννοιολογικό-βιωματικό (conceptual-embodiment),
- το διαδικασιοεννοιολογικό-συμβολικό (proceptual-symbolism) και
- το αξιωματικό-τυπικό (axiomatic-formalism)

- η διδακτική προσέγγιση πρέπει να δίνει έμφαση στη δημιουργία στην ανάπτυξη ενός διαδικασιο-ενοιολογικού-συμβολικού περιβάλλοντος,
- το οποίο θα επιτρέψει τη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στις αρχικές έννοιες (που βασίζονται σε σύνολα αντικειμένων ομαδοποιημένα διαμέσου της εμπειρίας και των ιδιοτήτων τους) και την αξιωματική-τυπική τους σύλληψη.

- Οι Μπιζιά, Πίττα, Χρίστου & Ζαχαριάδης (2003) δίνουν μία ενδιαφέρουσα διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία του ορίου: η γεωμετρική προσέγγιση του ορίου μέσα από τον υπολογισμό του εμβαδού από κατάλληλες ακολουθίες γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί εντάσσεται στην εννοιολογική-βιωματική προσέγγιση ("ενσαρκωμένο κόσμο", σύμφωνα με τους συγγραφείς).

- Οι δράσεις υπολογισμού του ορίου με πράξεις στην αλγεβρική αναπαράσταση μιας ακολουθίας αποτελούν τη διαχείριση στο διαδικασιο-εννοιολογικό-συμβολικό περιβάλλον, πριν το πέρασμα στη χρήση προσεγγίσεων που βασίζονται στη μαθηματική επαγωγή, που εντάσσεται στον αξιωματικό κόσμο των Μαθηματικών

Προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση
στη διασύνδεση και στη συνθετική
φύση των μαθηματικών εννοιών

- Ο Vergnaud (1996) εισάγει το εννοιολογικό πεδίο (champ conceptuel, conceptual field) ως εργαλείο ανάλυσης και περιγραφής των μαθηματικών εννοιών που είναι ένα σύνθετο και πολύπλευρο αντικείμενο.

Οι μαθηματικές έννοιες θεωρούνται ως ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις παράγοντες:

- το σύνολο των καταστάσεων όπου η έννοια εμπλέκεται,
- το σύνολο των αναπαραστάσεων της έννοιας και
- το σύνολο των αναλλοίωτων (ιδιότητες, θεωρήματα) της έννοιας.

μαθηματικές έννοιες – εννοιολογικό πεδίο

μαθηματικές έννοιες (*concepts*)

• (S, I, S)

S: το σύνολο των
καταστάσεων

I: το σύνολο των
αναλλοίωτων

S: το σύνολο των
σημαινόντων
(αναπαραστάσεις)

αντίληψη έννοιας (*conceptions*)

• το ανάλογο της
μαθηματικής έννοιας, η
γνώση του υποκειμένου

ποιες καταστάσεις

ποιες ιδιότητες

ποιες αναπαραστάσεις

γνωρίζει το υποκείμενο

- Το εννοιολογικό πεδίο αναφέρεται στην ανάδειξη συστηματικών συνόλων καταστάσεων που περιλαμβάνουν τις κύριες σχέσεις των μαθηματικών αντικειμένων που μελετούνται.
- Η μάθηση των βασικών αριθμητικών εννοιών και πράξεων (προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις) αποτέλεσε το κύριο πεδίο όπου η έννοια του εννοιολογικού πεδίου χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο ανάλυσης.

• Έτσι, οι βασικές κατηγορίες καταστάσεων που το εννοιολογικό πεδίο της προσθετικής δομής (πρόσθεση και αφαίρεση) (Vergnaud, 1982) είναι:

- η ένωση συνόλων, σε μία τελική,
- η σχέση δύο ποσοτήτων,
- ο μετασχηματισμός ενός μέτρου
- η σύνθεση μετασχηματισμών,
- η σύνθεση σχέσεων και
- ο μετασχηματισμός σχέσεων

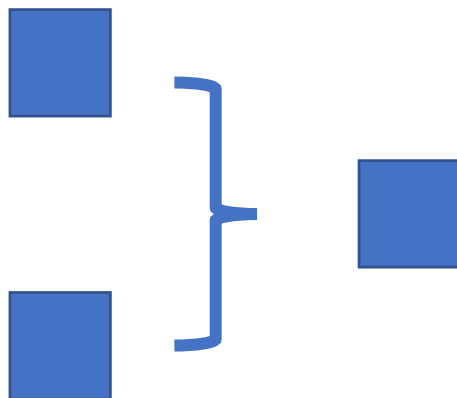
Προσθετικές καταστάσεις

$$\alpha = \beta + \gamma$$

(Vergnaud, 1986)

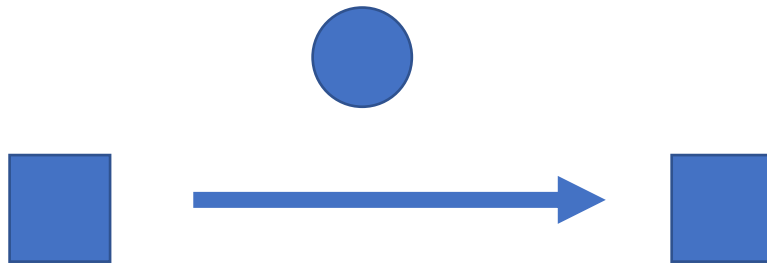
Ένωση συνόλων (σύνθεση μέτρων)

- Στη φρουτιέρα υπάρχουν 3 μήλα και 4 αχλάδια. Πόσα φρούτα υπάρχουν στη φρουτιέρα;



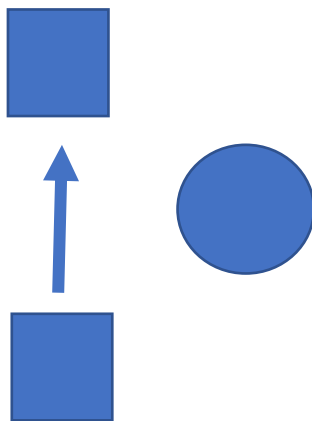
Μετασχηματισμός συνόλου (μετασχηματισμός μέτρου)

- Στη φρουτιέρα υπάρχουν 7 μήλα. Ο Γιάννης και η αδελφή του τρώνε τα 3 μήλα. Πόσα μήλα έμειναν στη φρουτιέρα;



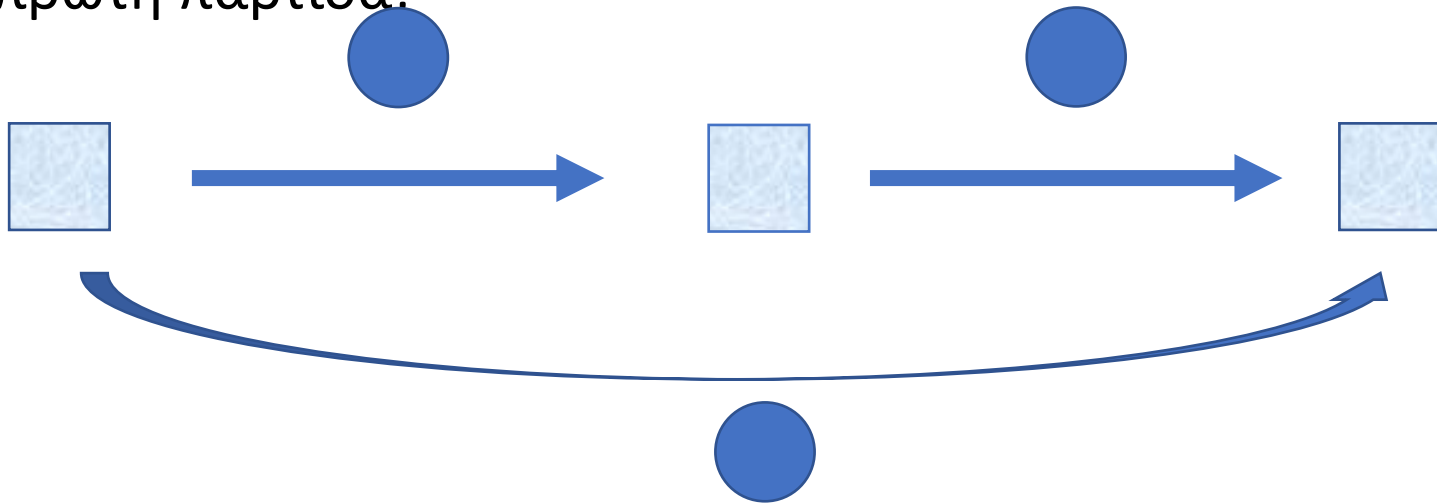
Σύγκριση συνόλων (σύγκριση μέτρων)

- Ο Κώστας έχει 7 αυτοκινητάκια και ο Γιάννης 4. Πόσα περισσότερα έχει ο Κώστας;



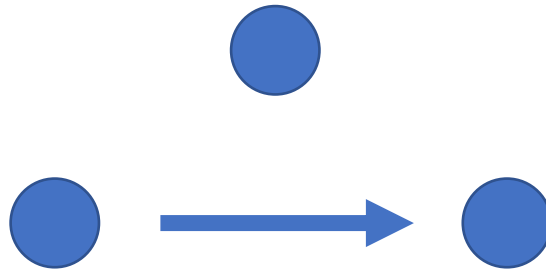
Σύνθεση μετασχηματισμών

- Ο Κώστας έπαιξε 2 παρτίδες με μπίλιες. Στη δεύτερη παρτίδα κέρδισε 3 μπίλιες και στο τέλος είχε 8 μπίλιες περισσότερες από όταν άρχισε το παιχνίδι. Τι έγινε στην πρώτη παρτίδα:



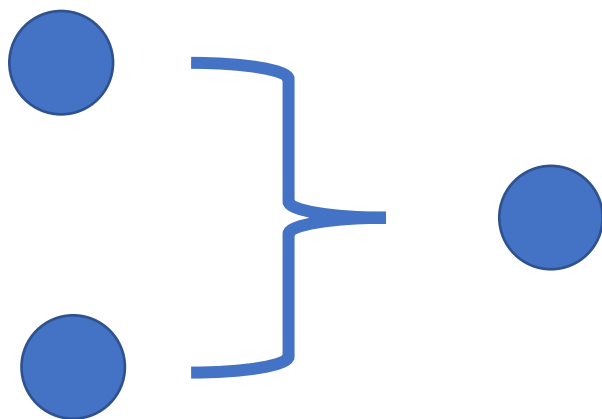
Μετασχηματισμός σχέσης

- Ο Παύλος χρωστάει 5 μπίλιες στον Κώστα. Του επιστρέφει 4. Πόσες του χρωστάει τώρα;



Σύνθεση σχέσεων

- Ο Παύλος χρωστάει 6 μπίλιες στον Κώστα, αλλά ο Κώστας του χρωστάει 4. Πόσες μπίλιες χρωστάει ο Παύλος στον Κώστα;



Θεωρήματα εν δράσει

- Πεποιθήσεις και υιοθέτηση γενικεύσεων δια μέσου συσσωρευμένης εμπειρίας

Σωστές αλλά και λανθασμένες

Π.χ.:

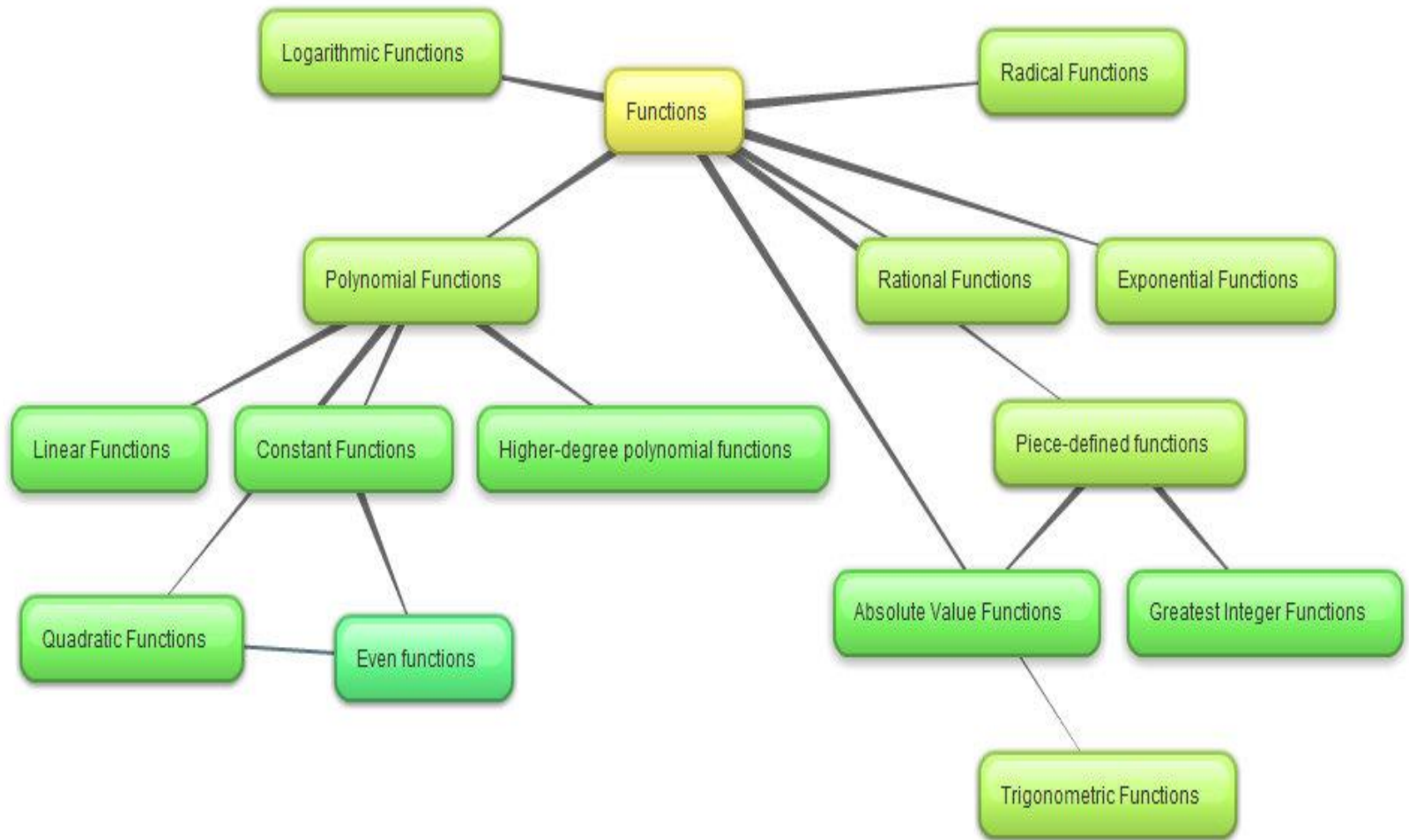
αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης
πιο πολλά, πιο μεγάλα (more A, more B)

- Οι Balacheff & Gaudin (2002), θεωρούν την εννοιολογική αντίληψη, ορισμένη ως τετράδα (P, R, L, Σ), αναλύουν παραδειγματικά τις εννοιολογικές αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και διακρίνουν τέσσερις κατηγορίες : την αντίληψη πίνακα, την αντίληψη καμπύλη, την αναλυτική αντίληψη και τη σχεσιακή αντίληψη (σελ. 9).

- η έννοια του εννοιολογικού χάρτη (Conceptual map, Novak, 1998) θεωρεί συνολικά μια μαθηματική έννοια σε σχέση με άλλες έννοιες, αναπαραστάσεις και καταστάσεις-προβλήματα με τα οποία συνδέεται

- Ένας εννοιολογικός χάρτης είναι μια εικονική/γραφική ιεραρχική αναπαράσταση με στόχο την οργάνωση και την αναπαράσταση της γνώσης.
- Τα βασικά δομικά στοιχεία είναι οι κόμβοι, που αναπαριστούν έννοιες και οι συνδέσεις που αναπαριστούν σχέσεις μεταξύ τους.

- Οι εννοιολογικές χάρτες χρησιμοποιούνται κυρίως για την ανάλυση της μαθηματικής γνώσης σε έρευνες που έχουν στόχο την διερεύνηση της γνώσης και των αντιλήψεων των μαθητών (McGowen&Tall, 1999),
- αλλά και ως εργαλείο διδασκαλίας με στόχο την ανάπτυξη της γνώσης για τη μαθηματική γνώση, της μεταγνώσης των μαθητών (Novac, 1990)



<https://mathvisions.wordpress.com/2012/01/31/rational-functions-unit/>

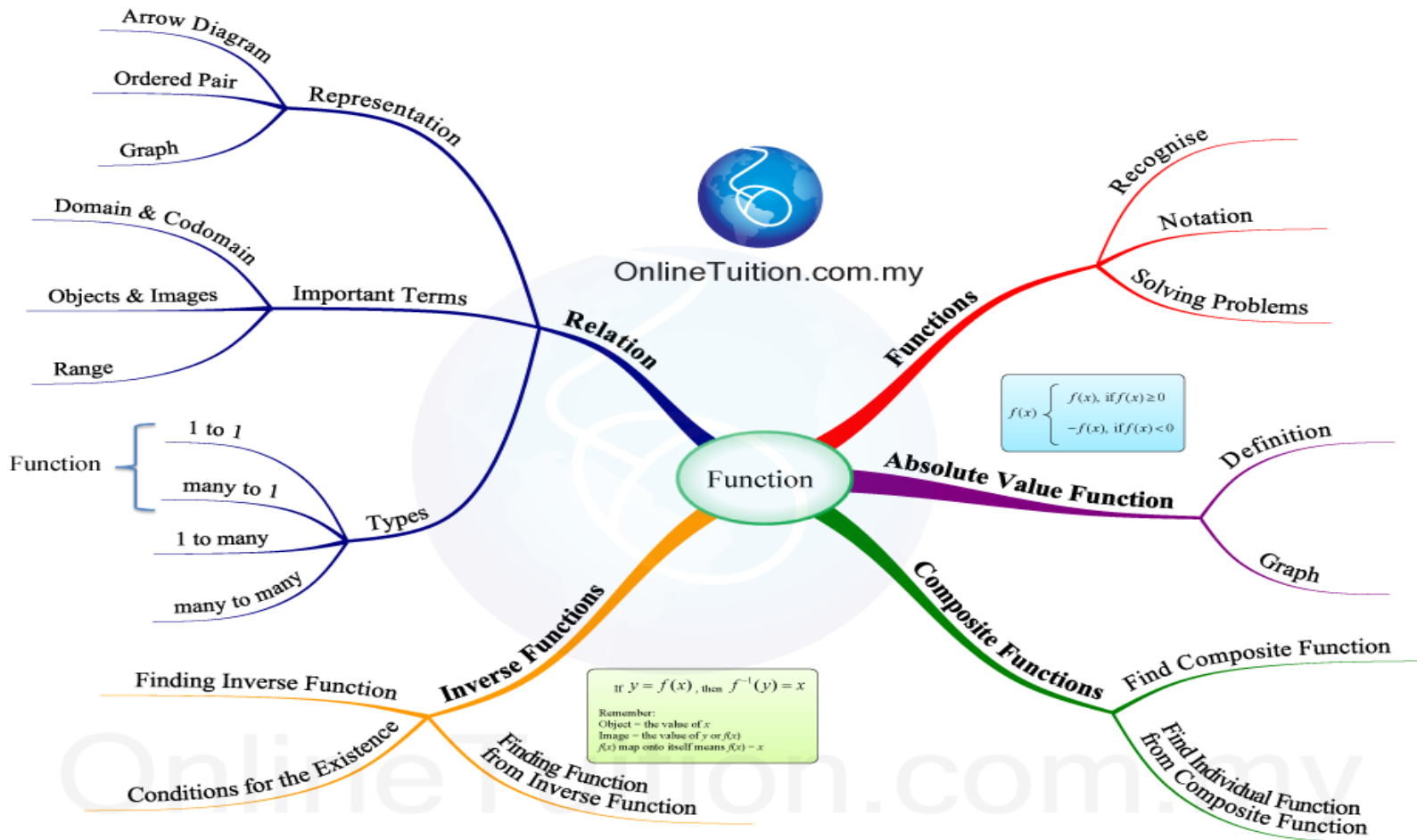
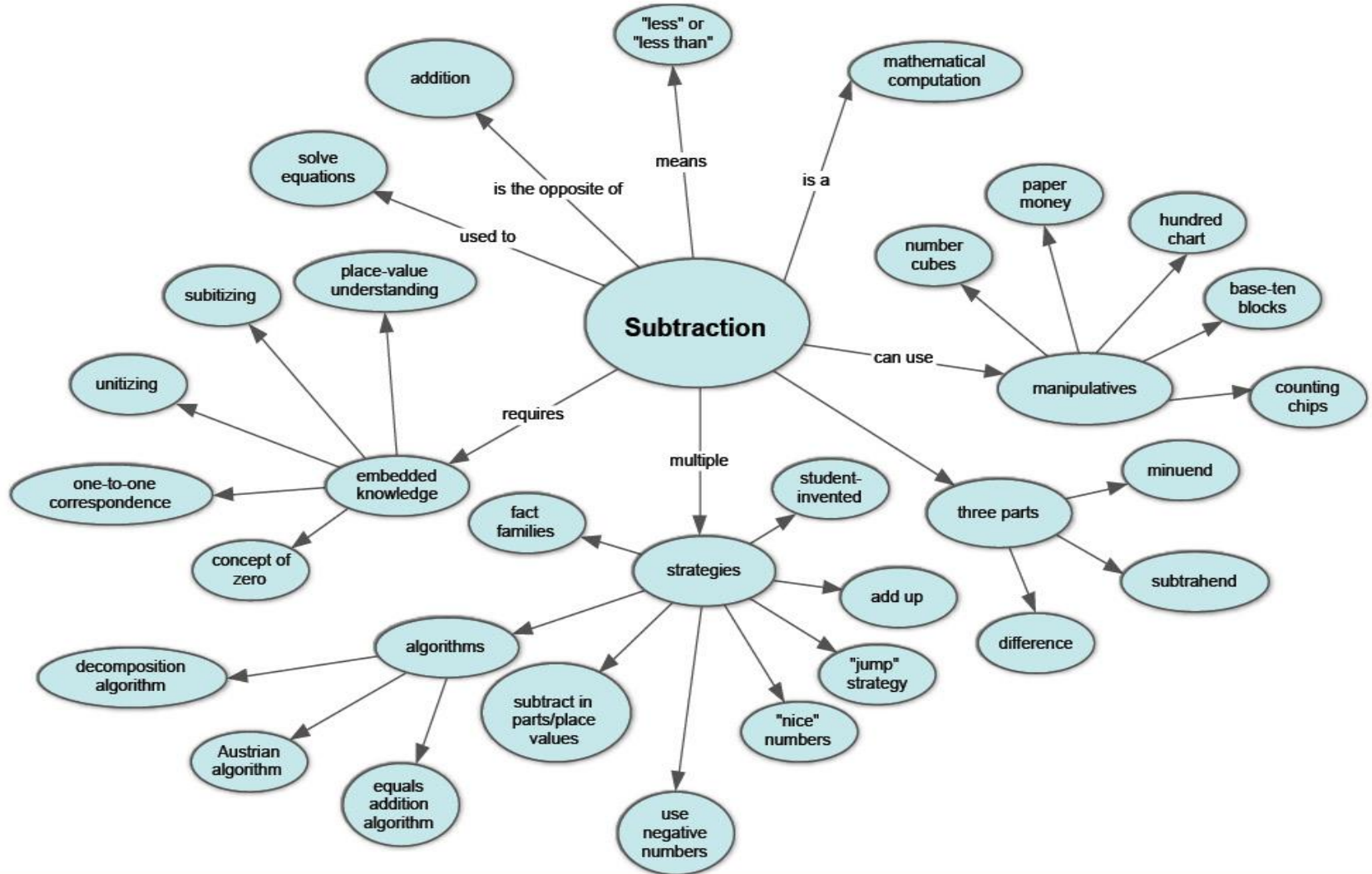


FIGURE 2

This iteration of the concept map shows how Lynley's depth of knowledge expands on the basis of her experience with the video and class discussions.



<http://www.nctm.org/Publications/Teaching-Children-Mathematics/2015/Vol21/Issue9/Mapping-the-Way-to-Content-Knowledge/>

Προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση
στη επιστημολογία και την ανάπτυξη
του μαθηματικού νοήματος

- ο **Steibring** (1991, 1997, 1998a, 1998b, 2005) δίνει έμφαση στην ανάπτυξη του μαθηματικού νοήματος για τις μαθηματικές έννοιες.
- Το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας αναδεικνύεται μέσα από την αλληλεπίδραση (interplay) μεταξύ των καταστάσεων, που αποτελούν το πλαίσιο αναφοράς, των σημείων και συμβόλων, που αποτελούν το πλαίσιο αναπαράστασης και της έννοιας.

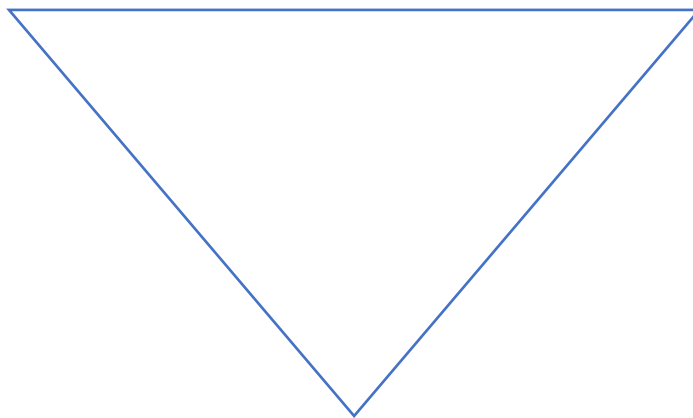
- Έτσι, διαμέσου διεργασιών όπου τα νοήματα μεταφέρονται από οικείες καταστάσεις (σύστημα αναφοράς) σε μη οικεία αναπαραστατικά συστήματα, οδηγείται το άτομο στη μαθηματική έννοια, η οποία είναι

αφηρημένη, σχεσιακή και γενική.

επιστημολογικό τρίγωνο

αντικείμενο/
σημείο/σύμβολο

πλαίσιο αναφοράς



έννοια

- Το πλαίσιο αναφοράς, το πλαίσιο αναπαράστασης και η έννοια αποτελούν τις τρεις κορυφές του επιστημολογικού τριγώνου, όπου οι συνδέσεις (πλευρές του τριγώνου) μεταξύ των τριών κορυφών αποτελούν ένα αμοιβαία υποστηριζόμενο εξισορροπημένο σύστημα.

- Η ερμηνεία των συμβόλων και των αντίστοιχων πλαισίων αναφοράς μετασχηματίζονται και προκαλούν εξέλιξη στη γνώση.

- π.χ

- τι σημαίνει $3+2$

.....

- τι σημαίνει $\alpha+\beta$

- Θεωρώντας, π.χ. την έννοια της πιθανότητας, το νόημα της αρχικά προκύπτει μέσα από τη διασύνδεση μεταξύ των κλασματικών αριθμών που αναπαριστούν την πιθανότητα και το ιδεατό ζάρι, που αποτελεί την κατάσταση αναφοράς.
- Αργότερα, η διασύνδεση αυτή γίνεται μεταξύ του ορίου της σχετικής συχνότητας και των στατιστικών δεδομένων και
- σε επόμενο στάδιο μεταξύ στοχαστικά ανεξάρτητες και εξαρτημένες δομές και έμμεσα οριζόμενα αξιώματα (Steinbring 2006, σελ. 138)

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- Δ: Τι είναι οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;
- Μ: Ένα κλάσμα που έχει x στον παρονομαστή
- Δ: Όπως;
- Μ: $5/x$
- Δ : και τι τιμές παίρνει το x ;
- Μ: Όλες εκτός από το 0.
- Δ: Και γιατί όχι 0;
- Μ: Γιατί δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή 0
- Δ: Και γιατί δεν υπάρχει τέτοιο κλάσμα;
- Μ: Γιατί δεν υπάρχει διαίρεση με το 0.....

- Σε μια άλλη προοπτική οι Καλδρυμίδου, Σακονίδης και Τζεκάκη (2008) δίνουν έμφαση στην επιστημολογική οργάνωση του περιεχομένου, όπως αυτό αναδεικνύεται μέσα από τη διαχείριση του στην τάξη των Μαθηματικών.

- Στην προσέγγιση αυτή υιοθετείται η θεώρηση ότι τα επιμέρους στοιχεία που αποτελούν τα Μαθηματικά, ορισμοί, θεωρήματα, διαδικασίες είναι διαφορετικής φύσης και έχουν διαφορετικό ρόλο και λειτουργία στα Μαθηματικά και η μη διαφοροποίησή τους ή η επιστημολογική διαστρέβλωση τους έχει άμεση επίπτωση στη φύση και το νόημα της Μαθηματικής γνώσης που κατασκευάζεται στην τάξη.

Επεισόδιο

- Δ: Προσοχή παιδιά, έχει δύο χαρακτηριστικά. Δηλαδή α και β. Πρώτον, τι τρίγωνο είναι σύμφωνα με τις γωνίες του, Νίκο;
- Ν: Ορθογώνιο
- Δ: Ορθογώνιο. Προσέξτε τώρα παιδιά. Σύμφωνα με τις πλευρές, μήπως είναι κάτι άλλο; Τάνια;
- Τ: Ισοσκελές
- Δ: Ισοσκελές. Θαυμάσια, Τάνια. Είναι παιδιά, ορθογώνιο και ισοσκελές. Κι εμείς ξέρουμε τη μία γωνία την ορθή. Μιχάλη;

- Μ: Η β και γ γωνία...
- Δ: Ναι...
- Μ: Είναι 45 η κάθε μία
- Δ: Γιατί όμως;
- Μ: Επειδή....
- Δ: Το τρίγωνο είναι....
- Μ: Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- Δ: Μπράβο, Μιχάλη....(!!!!!!!!!!)

κλείνοντας....

- Η επισκόπηση των θεωρητικών προσεγγίσεων που παρουσιάστηκε επιβεβαιώνει την πολυπλοκότητα του πεδίου –πολυπλοκότητα τόσο των μαθηματικών εννοιών και της σχέσης αυτών με τις σχολικές μαθηματικές έννοιες, όσο και των διαδικασιών μάθησης που εμπλέκουν το άτομο και συνδέονται παράλληλα με την κοινωνική και συλλογική φύση της γνώσης που αναπτύσσεται στο σχολείο

- Στον πυρήνα αυτών των προσεγγίσεων βρίσκουμε την ιδιαιτερότητα των μαθηματικών εννοιών. Η αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη τους και το γεγονός αυτό αντανakλάται σε αρκετές από τις θεωρητικές προσεγγίσεις.

- Η ιδιαίτερη επιστημολογική οργάνωση των Μαθηματικών δεν μπορεί να αγνοηθεί από τα σχολικά Μαθηματικά και τη διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη, γεγονός που αντανακλάται σε κάποιες από τις θεωρητικές προσεγγίσεις για τη φύση και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών.

- Η διασύνδεση των μαθηματικών εννοιών (αυτό που ακόμη και σήμερα συναντάται στον καθημερινό λόγο ότι «τα Μαθηματικά είναι μια αλυσίδα») αντανακλάται τόσο στις θεωρητικές προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση στο εννοιολογικό πεδίο και την εννοιολογική αντίληψη, όσο και στις προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση στο σταδιακό χαρακτήρα της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών.