ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Δευτέρα, 2 Σεπτεμβρίου 2024 12:00-15:00, ΑΠ1_11, ΑΠ1_12
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

ΘΕΜΑ 1

Διαστημικό όχημα βρίσκεται σε κυκλική τροχιά, ακτίνας $r = 2R$, γύρω από πλανήτη ακτίνας $R = 6.400$ km και μάζας M. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι $g = 9$ N/kg. Το όχημα διαθέτει πυραύλους οι οποίοι όταν πυροδοτούνται εκτοξεύουν καυσαέρια με ταχύτητα $u = 3{,}0$ km/s ως προς το όχημα.

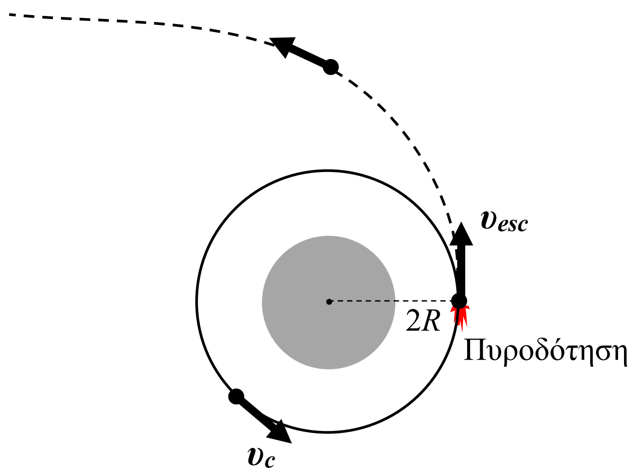
1.1 [0,1] Δείξτε ότι $GM = gR^2$

1.2 [0,8] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα κυκλικής τροχιάς ακτίνας r και υπολογίστε την ;

1.3 [0,8] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα διαφυγής από απόσταση r και υπολογίστε την.

1.4 [0,8] Το όχημα πυροδοτεί τους πυραύλους του και διαφεύγει από τη βαρυτική έλξη του πλανήτη. Ποιο είναι το ελάχιστο κλάσμα της μάζας του που πρέπει να κάψει σε καύσιμα;

ΛΥΣΗ



Σχήμα 2

1.1 [0,1] Στην επιφάνεια κάθε πλανήτη

$$W = F_G \Rightarrow \cancel{m} g = G\frac{\cancel{m}M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM$$

1.2 [0,8] Στην κυκλική τροχιά, η μόνη διαθέσιμη δύναμη στην ακτινική διεύθυνση, η δύναμη της βαρύτητας, θα προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση του οχήματος προς το κέντρο του πλανήτη.

$$ma_c = F_G \Rightarrow m\frac{\upsilon^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad [0,4]$$

$$\upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR^2}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}} = \sqrt{\frac{(9)(6.400.000)}{2}} = (3)(8)(100)\sqrt{5} = 5.366{,}6 \text{ m/s} \quad [0,4]$$

1.3 [0,8] Στο άπειρο, το σώμα θα έχει την ίδια ενέργεια με αυτή που είχε σε απόσταση r, αφού η ενέργεια διατηρείται. Η ταχύτητα διαφυγής είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει σε απόσταση r για να καταφέρει να φτάσει ίσα ίσα στο άπειρο, δηλαδή όταν φτάσει εκεί να έχει ταχύτητα μηδέν, $\upsilon_\infty = 0$.

$$K_c + U_c = K_\infty + U_\infty \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 - \frac{GMm}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 - 0 \Rightarrow$$

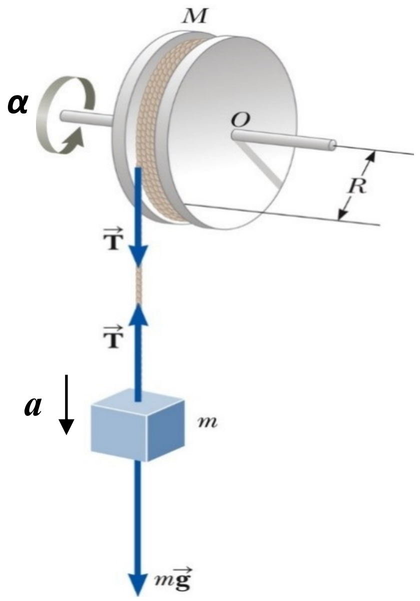
$$\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{2R}} = \sqrt{gR} = \sqrt{2}\,\upsilon_c = 7.589,5 \text{ m/s}$$

1.4 [0,8] Η απαιτούμενη μεταβολή που πρέπει να επιτευχθεί στο μέτρο της ταχύτητας πρέπει να είναι τουλάχιστον :

$$\Delta\upsilon = \upsilon_{esc} - \upsilon_c = 7.589,5 - 5.366,6 = 2.222,9 \text{ m/s} \ \ [0,1]$$

Από την εξίσωση του πυραύλου (στο κενό ή για στιγμιαία πυροδότηση) :

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta\upsilon}{u}} = e^{-\frac{2.222,9}{3.000}} = e^{-0,740967} = 0,47665 = 47,67\% \ \ [0,4]$$



ΘΕΜΑ 2

Τη χρονική στιγμή t=0 το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος h = 1,125 m πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο.

m= 2 kg, M= 6 kg, $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, $g = 9,80$ N/kg

2.1 [0,6] Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν φτάνει στο έδαφος;
2.2 [0,6] Ποια χρονική στιγμή φτάνει το βαρίδιο στο έδαφος;
2.3 [0,6] Βρείτε την επιτάχυνση a του βαριδίου
2.4 [0,7] Βρείτε την τάση του νήματος T.

ΛΥΣΗ

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει θα κινείται με την ίδια ταχύτητα με το βαρίδιο και άρα η γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu}$ των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας θα είναι ίση με την ταχύτητα υ του βαριδίου: $\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu}$

Όμως $\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} = \omega R$ άρα $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$

Με την ίδια σχέση συνδέονται και η επιτάχυνση του βαριδίου με την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

2.1 Από διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε την ταχύτητα

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 + \cancel{MgH} + 0 + mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \ \ [0,2]$$

$$mgh = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow 4mgh = M\upsilon^2 + 2m\upsilon^2 \Rightarrow \qquad [0,2]$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4mgh}{M+2m}} = \sqrt{\frac{4(2)(9,80)(1,125)}{(6)+2(2)}} = \sqrt{0,980\cdot 9} = 3\sqrt{0,980} = 2,97 \text{ m/s} \ \ [0,2]$$

2.3 [0,6] Η εξωτερική δύναμη που προκαλεί την κίνηση είναι το βάρος mg του βαριδίου που είναι σταθερή δύναμη και άρα θα προκαλέσει σταθερή επιτάχυνση. Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει το θεώρημα της μέσης ταχύτητας : η μέση ταχύτητα σε κάποιο χρονικό διάστημα είναι ίση με το μέσο όρο των ταχυτήτων στην αρχή και στο τέλος του χρονικού διαστήματος

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \Rightarrow \frac{h}{t} = \frac{\upsilon}{2} \Rightarrow t = \frac{2h}{\upsilon} = \frac{2(9/8)}{3\sqrt{0,980}} = \frac{3/4}{\sqrt{0,980}} = 0,758 \text{ s}$$

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα από την 2.2 παρακάτω για την a, ισχύει :

$$h=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{a}}=\sqrt{\frac{2(1,125)}{3,92}}=0,758\,\text{s}$$

2.3 [0,6] Το βαρίδιο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση όπου η επιτάχυνση και η μετατόπιση συνδέονται με τη σχέση:

$$\upsilon^2-\upsilon_0^2=2a\Delta x \Rightarrow \upsilon^2=2ah \Rightarrow a=\frac{\upsilon^2}{2h}=\frac{0,980\cdot 9}{2(9/8)}=4(0,980)=3,92\ \text{m/s}^2$$

$1,125=9/8$

2.4 Στροφική κίνηση τροχαλίας : $\tau_{\sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau}=I\alpha \quad \Rightarrow TR=\frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a}{R} \quad \Rightarrow T=\frac{1}{2}Ma$

$$T=\frac{1}{2}Ma=\frac{1}{2}(6)(3,92)=11,76\ \text{N}$$

Έλεγχος. Μεταφορική βαριδίου:

$$F_{\sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau}=ma \quad \Rightarrow \quad mg-T=ma \Rightarrow a=g-\frac{T}{m}=9,80-\frac{11,76}{2}=3,92\ \text{m/s}^2 \quad \text{OK}$$

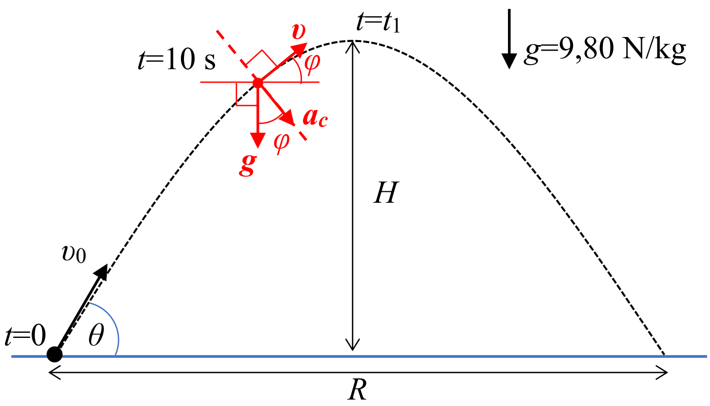
Ισοδύναμα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα

$\beta\alpha\rho\acute{\iota}\delta\iota o:\quad F_{net}=ma \Rightarrow mg-T=ma \Rightarrow \quad T+ma=mg \ (1)$

$\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha:\quad \tau_{net}=I\alpha \Rightarrow TR=\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow T=\frac{1}{2}Ma \quad (2)$

(2)→(1): $T+ma=mg \Rightarrow \frac{1}{2}Ma+ma=mg \Rightarrow a=g\dfrac{m}{m+\dfrac{M}{2}}=(9,8)\dfrac{2}{2+\dfrac{6}{2}}=(9,8)\dfrac{2}{5}=3,92\ \text{m/s}^2$

(2): $T=\frac{1}{2}Ma=\frac{1}{2}(6)(3,92)=11,76\ \text{N}$ [1,3]



ΘΕΜΑ 3

Τη χρονική στιγμή t=0, βλήμα εκτοξεύεται υπό γωνία θ=36,87° από οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0= 245 m/s. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να υπολογίσετε:

3.1 [1] την ταχύτητά του, την κεντρομόλο επιτάχυνση και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς όταν t=10 s

3.2 [0,5]Το ύψος στο οποίο η δυναμική ενέργεια του βλήματος γίνεται ίση με το ένα τρίτο της κινητικής του ενέργειας

3.3 [0,5]Το μέγιστο ύψος H.

3.4 [0,5]Το βεληνεκές R.

ΛΥΣΗ

Χρονικές εξισώσεις πλάγιας βολής:

$$\upsilon_x=\upsilon_{0x}=\upsilon_0\cos\theta=\sigma\tau\alpha\theta \quad (1) \qquad \upsilon_y=\upsilon_0\sin\theta-gt \quad (2)$$

$$x=\upsilon_x t \quad (3) \qquad y=\upsilon_0\sin\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

[0,4]

$\sin 36,87^\circ=0,600 \qquad \cos 36,87^\circ=0,800$

3.1 [1] Για t=10 s

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta = 245\cos(36,87^\circ) = 245(0,800) = 196 \text{ m/s} \ [0,1]$$
$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - gt = 245\sin 36,87^\circ - (9,80)(10) = 245(0,600) - 98 = 147 - 98 = 49 \text{ m/s} \ [0,1]$$

Μέτρο της ταχύτητας: $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 196^2 + 49^2 = 40.817 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$\upsilon = 202,03 \text{m/s}$ [0,1]

Γωνία της ταχύτητας ως προς την οριζόντιο: $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{49}{196}\right) = 14,04^\circ$ [0,1]

Κεντρομόλος είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{g}$ που είναι κάθετη στην ταχύτητα

$$a_c = g\cos\varphi = (9,8)\cos 14,04^\circ = (9,80)(0,970) = 9,506 \text{ m/s}^2 \ [0,3]$$

Η ακτίνα καμπυλότητας και η κεντρομόλος επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση :

$$a_c = \frac{\upsilon^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\upsilon^2}{a_c} = \frac{40.817}{9,506} = 4.293,8144 = 4.294 \text{m} \ [0,3]$$

3.2 [0,5] Η κινητική ενέργεια, στο ζητούμενο ύψος, θα είναι ίση με K=3U, ενώ η μηχανική ενέργεια διατηρείται και είναι ίση με την αρχική:

$$K + U = E_0 \Rightarrow 3U + U = E_0 \Rightarrow 4mgy = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow y = \frac{\upsilon_0^2}{8g} = \frac{245^2}{8(9,80)} = 765,625 = 766 \text{ m}$$

3.3 [0,5] Θέτοντας $\upsilon_y = 0$ στη (2) βρίσκουμε το χρόνο ανόδου t_1

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - gt \Rightarrow \quad 0 = \upsilon_0 \sin\theta - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g} = \frac{(245)(0,6)}{9,80} = 15 \text{s} \qquad [0,2]$$

Θέτοντας $t = t_1$ στην (4) βρίσκουμε το μέγιστο ύψος :

$$y = \upsilon_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$
$$H = \upsilon_0 \sin\theta\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = (245)(0,600)(15) - \frac{1}{2}(9,80)(15^2) = 1102,5 \text{ m} \qquad [0,3]$$

Ισοδύναμα από διατήρηση της ενέργειας και $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$, $\upsilon_y = 0$ που ισχύουν στο μέγιστο ύψος $y = H$

$$E_0 = E_H \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgH \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_{0x}^2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{0y}^2 = \cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_x^2} + \frac{1}{2}m\cancel{\upsilon_y^2} + mgH \Rightarrow$$

$$H = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(245^2)(0,6^2)}{2(9,8)} = 1.102,5 \text{ m}$$

3.4 [0,5] Θέτοντας $y = 0$ στην (4) βρίσκουμε το χρόνο πτήσης t_2 :

$$y = \upsilon_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \ 0 = \upsilon_{y0}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g} = 2t_1 = 2(15) = 30 \text{ s} \qquad [0,2]$$

Ο χρόνος πτήσης t_2 είναι διπλάσιος από το χρόνο ανόδου t_1

Θέτοντας $t = t_2$ στην (3) βρίσκουμε το βεληνεκές $x = \upsilon_x t \Rightarrow R = \upsilon_x t_2 = (196)(30) = 5.880 \text{ m}$ [0,3]

ΘΕΜΑ 4.

Να γράψετε στο SI, εξισώσεις που να περιγράφουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος και να δείξετε σε σχήμα τα τρία διανύσματα των πεδίων $\vec{E}$, $\vec{B}$ και του διανύσματος διάδοσης $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$. Δεδομένα : συχνότητα κύματος 36×10^{14} Hz , κατεύθυνση διάδοσης προς τον θετικό ημιάξονα z, πλάτος ηλεκτρικού πεδίου 1.800 V/m. Θεωρήστε $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Λύση

Επειδή το κύμα είναι ημιτονοειδές και διαδίδεται στη θετική z κατεύθυνση τα διανυσματικά πεδία θα είναι της μορφής:

$$\vec{E} = E_{\max}\sin(\omega t - kz)\hat{E} \qquad \vec{B} = B_{\max}\sin(\omega t - kz)\hat{B} \qquad [0,4]$$

(το μείον – στη φάση, επειδή διαδίδεται στην $+z$)

Τα μέτρα των πλατών των πεδίων συνδέονται με τη σχέση: $B_{\max} = \dfrac{E_{\max}}{c}$,

άρα $B_{\max} = \dfrac{18\times 10^2}{3\times 10^8} = 6\times 10^{-6}$ T [0,4]

Η κυκλική συχνότητα είναι : $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot\ 36\times 10^{14} = 72\pi\times 10^{14}$ rad/s [0,4]

Ο κυματαριθμός είναι : $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{72\pi\times 10^{14}}{3\times 10^8} = 24\pi\times 10^6\ \mathrm{m}^{-1}$ [0,4]

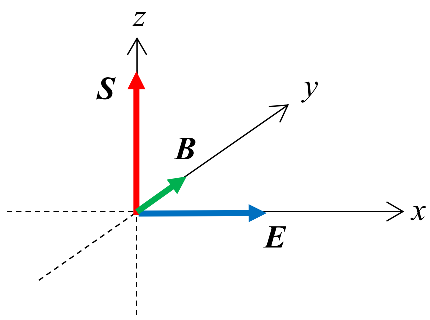
Οπότε η φάση είναι $\omega t - kz = 72\pi\times 10^{14} t - 24\pi\times 10^6 z = 24\pi\times 10^6(3\times 10^8 t - z)$. [0,1]

Η διάδοση του κύματος γίνεται στην κατεύθυνση $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ η οποία είναι η $+\hat{z}$. Άρα μια επιλογή είναι το $\hat{E}$ να είναι στην κατεύθυνση $+x$ και το $\hat{B}$ στην $+y$ αφού $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$ [0,4]

Οπότε μία λύση είναι :

$$\vec{E} = 1.800\sin\left\lfloor 24\pi\times 10^6(3\times 10^8 t - z)\right\rfloor \hat{x} \quad \text{(SI)} \quad [0,1]$$
$$\vec{B} = 6\times 10^{-6}\sin\left\lfloor 24\pi\times 10^6(3\times 10^8 t - z)\right\rfloor \hat{y} \quad \text{(SI)} \quad [0,1]$$

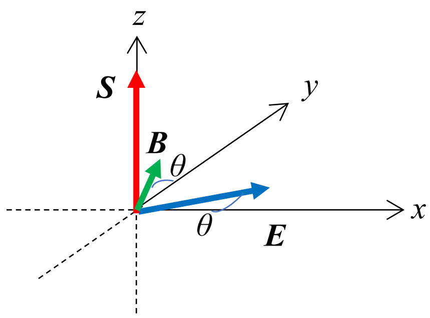
Δεξιόστροφο
$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$



[0,2]

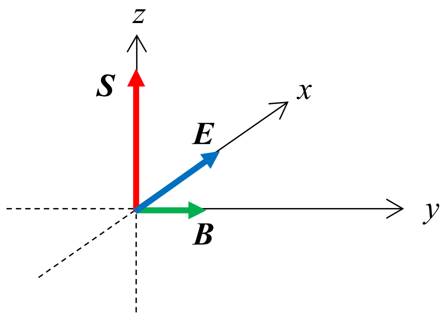
Γενικά τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ πρέπει να είναι σε κάθετες κατευθύνσεις μεταξύ τους και με το $\vec{S}$ φτιάχνοντας δεξιόστροφο σύστημα $E - B - S$. Άρα περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα z κατά τυχαία γωνία $0 \le \theta < 2\pi$ παίρνουμε τη γενική λύση

$$\vec{E} = 1.800\sin\left\lfloor 24\pi\times 10^6(3\times 10^8 t - z)\right\rfloor (\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta) \quad \text{(SI)}$$
$$\vec{B} = 6\times 10^{-6}\sin\left\lfloor 24\pi\times 10^6(3\times 10^8 t - z)\right\rfloor (-\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta) \quad \text{(SI)}$$



Αυτό που κάνετε πολλοί/πολλές είναι να μην σχεδιάζεται το σύστημα αξόνων δεξιόστροφο, όπως πρέπει να είναι, αλλά αριστερόστροφο που είναι ΛΑΘΟΣ

Αριστερόστροφο
$\hat{x}\times\hat{y}=-\hat{z}$



ΛΑΘΟΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ