ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Πέμπτη, 22 Σεπτεμβρίου 2022 12-3 μ.μ. αίθ. ΑΜΦ1

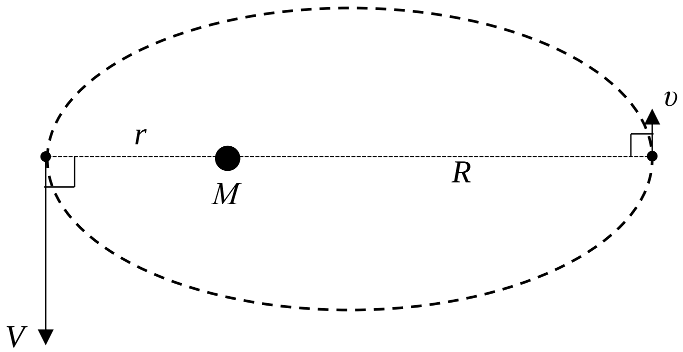
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

g = 9,80 N/kg

ΘΕΜΑ 1. [2]

Δορυφόρος βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη με $GM = 4{,}00\times10^{14}$ m^{3}s^{-2} , όπως στο σχήμα. Το «περίγειο» βρίσκεται σε απόσταση r = 1,60×10^6 m και η ταχύτητα στο «περίγειο» έχει μέτρο V =2,00×10^4 m/s.

Να βρείτε την απόσταση R στην οποία βρίσκεται το «απόγειο» και την ταχύτητα υ του δορυφόρου στο απόγειο.



Λύση

Κατά την κίνηση σε πεδίο κεντρικής δύναμης, όπως είναι η βαρύτητα, η μηχανική ενέργεια και η στροφορμή διατηρούνται, ενώ στο περίγειο και στο απόγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GmM}{R}=E=\sigma\tau\alpha\theta\,, \qquad mVr=m\upsilon R=L=\sigma\tau\alpha\theta$$

Έχουμε δύο εξισώσεις για δύο αγνώστους. Επειδή η μια είναι δευτεροβάθμια θα βρούμε δύο λύσεις να την ικανοποιούν. Την (V, r) για το περίγειο, που ήδη γνωρίζουμε (τετριμμένη) και την (υ, R) την ταχύτητα και απόσταση στο απόγειο.

$$mVr=m\upsilon R\Rightarrow R=r\frac{V}{\upsilon} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GmM}{R}=\frac{1}{2}mV^2-\frac{GmM}{r}\Rightarrow \upsilon^2-\frac{2GM}{R}=V^2-\frac{2GM}{r} \qquad (2)$$

$$(1)\rightarrow(2):\ \upsilon^2-\frac{2GM}{Vr}\upsilon+\frac{2GM}{r}-V^2=0\Rightarrow a\upsilon^2+b\upsilon+c=0$$

Δευτεροβάθμια με $a=1,\quad b=-\frac{2GM}{Vr},\quad c=\frac{2GM}{r}-V^2$ και

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{4G^2M^2}{V^2r^2}-\frac{8GM}{r}+4V^2=4\left[\left(\frac{GM}{Vr}\right)^2-2\frac{GM}{Vr}V+V^2\right]=4\left(\frac{GM}{Vr}-V\right)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta}=2\left(\frac{GM}{Vr}-V\right)$$

$$\upsilon=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{GM}{Vr}\pm\left(\frac{GM}{Vr}-V\right)\Rightarrow \begin{array}{l}\upsilon=V\ \text{τετριμμένη}\\ \upsilon=\dfrac{2GM}{Vr}-V\end{array}$$

$$\upsilon=\frac{2GM}{Vr}-V=\frac{2\cdot\ 4{,}00\times10^{14}}{2{,}00\times10^4\cdot\ 1{,}60\times10^6}-2{,}00\times10^4=2{,}50\times10^4-2{,}00\times10^4=0{,}50\times10^4\ \text{m/s}$$

$$R=r\frac{V}{\upsilon}=1{,}60\times10^6\,\frac{2{,}00\times10^4}{0{,}50\times10^4}=6{,}40\times10^6\ \text{m}$$

ΜΗ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΟΥΝ ΑΠΟΜΝΗΜΟΝΕΥΣΗ ΤΥΠΟΥ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΘΗΚΑΝ ΑΠΟ ΦΟΙΤΗΤΕΣ/ΦΟΙΤΗΤΡΙΕΣ (όμως έκαναν λάθος στις πράξεις, εκτός ece1333).

<u>Από την σχέση ταχύτητας-απόστασης στην ελλειπτική τροχιά</u> (ece1420):

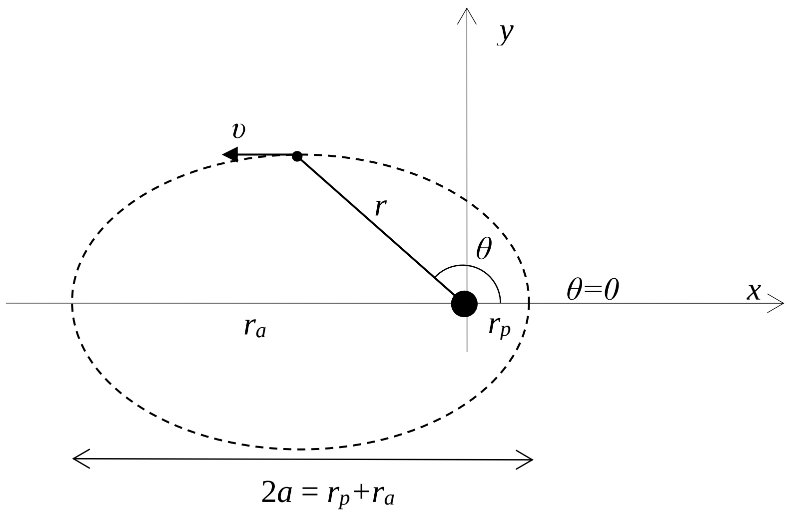
$$\upsilon = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}, \qquad \text{όπου } a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

Με το συμβολισμό της άσκησης $r_p = r$, $r_a = R$

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} \Rightarrow V^2 = GM\left(\frac{2}{r}-\frac{2}{r+R}\right) = 2GM\,\frac{R}{r(r+R)} \Rightarrow$$

$$\cancel{4}\times 10^{\cancel{8}} = 2\cdot\ \cancel{4}\times 10^{\cancel{14}}\ \frac{R}{1,6\times 10^{\cancel{6}}\,(R+1,6\times 10^6)} \Rightarrow 1 = 2\,\frac{R}{1,6(R+1,6\times 10^6)} \Rightarrow$$

$$1,6R + 2,56\times 10^6 = 2R \Rightarrow 0,4R = 2,56\times 10^6 \Rightarrow R = \frac{2,56}{0,4}\times 10^6 = 6,4\times 10^6 \text{ m}$$



<u>Από την εξίσωση της τροχιάς</u> σε πολικές συντεταγμένες (ece1333, ece1465, ece1455):

$$r = \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + C\cos\theta}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΝΕΝΑΣ ΛΟΓΟΣ ΟΥΤΕ ΕΥΚΟΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΝΑ ΑΠΟΜΝΗΜΟΝΕΥΣΕΤΕ ΑΥΤΟΝ ΤΟΝ ΤΥΠΟ

$$h = \frac{L}{m} = \frac{mVr}{m} = Vr = (1,6\times 10^6)(2\times 10^4) = 3,2\times 10^{10} \Rightarrow h^2 = 10,24\times 10^{20}$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{4\times 10^{14}}{10,24\times 10^{20}} = 0,390625\times 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$$

Από το περίγειο με r και θ=0 βρίσκουμε τη σταθερά C:

$$r = \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + C\cos 0^{\text{o}}} \Rightarrow 1,6\times 10^6 = \frac{1}{0,390625\times 10^{-6} + C\cdot\ (+1)} \Rightarrow 0,390625\times 10^{-6} + C = \frac{10^{-6}}{1,6} \Rightarrow$$

$$C = (0,625 - 0,390625)\times 10^{-6} = 0,234375\times 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$$

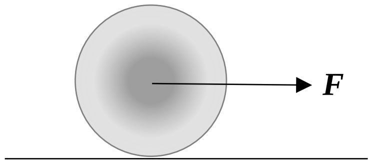
Αντικαθιστούμε για το απόγειο όπου έχουμε R και θ=180$^{\text{o}}$ και βρίσκουμε το R:

$$R = \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + C\cos 180^{\text{o}}} \Rightarrow R = \frac{1}{0,390625\times 10^{-6} + 0,234375\times 10^{-6}\cdot\ (-1)} = \frac{1}{0,15625}10^6 = 6,4\times 10^6 \quad \text{m}$$

$$\upsilon = \frac{r}{R}V = \frac{1,6\times10^6}{6,4\times10^6}2\times10^4 = 0,5\times10^4 \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ 2. [3]

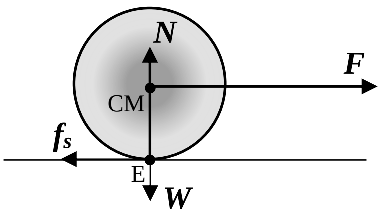
Σώμα με κυλινδρική συμμετρία, μάζας m= 10,00 kg, ακτίνας R=0,100 m και ροπής αδράνειας $I = 0,700mR^2$, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής μ_s=0,800 και συντελεστή κινητικής τριβής μ_k=0,750. Τη χρονική στιγμή t =0 ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη F=200,0 N.



2.1 Να δείξετε ότι θα κάνει κύλιση με ολίσθηση
2.2 Να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του και την γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=0,6 s
2.3 Αν τη στιγμή αυτή καταργηθεί η δύναμη F ποια θα είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του όταν θα επιτευχθεί τελικά κύλιση χωρίς ολίσθηση;

Λύση

Κάνουμε το σχεδιάγραμμα των δυνάμεων θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε η τριβή είναι στατική.



Η στατική τριβή f_s είναι προς τα αριστερά επειδή αν δεν υπήρχε, το σώμα θα γλιστρούσε προς τα δεξιά χωρίς να περιστρέφεται.
Για τη στατική τριβή f_s δεν υπάρχει τύπος και είναι ένας άγνωστος του προβλήματος. Η τιμή της προκύπτει από τη λύση του προβλήματος ώστε το σώμα να κάνει την παρατηρούμενη κίνηση. Το μέτρο της όμως περιορίζεται από $f_s \le \mu_s N$, όπου επειδή το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα: $N = W = mg$.

2.1 Για να γίνεται η επιτάχυνση με κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει διαρκώς να ισχύει $a = \alpha R$.
Από τις αρχές της ορμής και της στροφορμής (2^{ος} νόμος Νεύτωνα για μεταφορική και περιστροφική κίνηση) παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{r} F_{net} = ma \\ \tau_{net(CM)} = I_{CM}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} F - f_s = ma \\ f_s R = I\alpha = \kappa m R^2 \dfrac{a}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} F - f_s = ma \\ f_s = \kappa ma \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{F}{m(1+\kappa)} = \dfrac{200}{10(1+0,7)} = 11,76 \text{ m/s}^2 \\ f_s = \dfrac{\kappa}{1+\kappa}F = \dfrac{0,7}{1+0,7}200 = 82,35 \text{ N} \end{array}$$

Η απαιτούμενη στατική τριβή πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη δυνατή στατική τριβή

$$f_s \le \mu_s N \Rightarrow \ f_s \le \mu_s mg \Rightarrow \ 82,35 \le (0,8)(10)(9,8) \Rightarrow 83,35 \text{ N} \le 78,4 \text{ N}$$

Επειδή όμως αυτό δεν ισχύει, η κίνηση αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Το σώμα θα κάνει ΚΥΛΙΣΗ ΜΕ ΟΛΙΣΘΗΣΗ.

Επίσης από $f_s \le \mu_s N \Rightarrow \dfrac{\kappa}{1+\kappa}F \le \mu_s mg \Rightarrow F \le \dfrac{1+\kappa}{\kappa}\mu_s mg = \dfrac{1+0,7}{0,7}(0,8)(10)(9,8) = 190,4 \text{ N}$ που δεν ισχύει αφού η $F = 200 \text{ N}$, είναι μεγαλύτερη.

Οπότε η τριβή θα είναι κινητική (ή ολίσθησης) για την οποία υπάρχει τύπος $f_k = \mu_k N$ και άρα δεν θα αποτελεί πλέον άγνωστο του προβλήματος. Για τις δύο επιταχύνσεις όμως δεν θα ισχύει πλέον $a = \alpha R$, αλλά $a \ne \alpha R$ και θα πρέπει να υπολογιστουν ανεξάρτητα.

2.2 Οι επιταχύνσεις του σώματος βρίσκονται απευθείας αφού πλέον όλες οι δυνάμεις W, N, f_k και F είναι σταθερές και γνωστές:

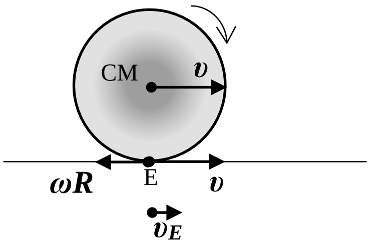
$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{F - \mu_k N}{m} = \frac{F - \mu_k mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu_k g = \frac{200}{10} - (0,75)(9,8) = 12,65 \text{ m/s}^2$$

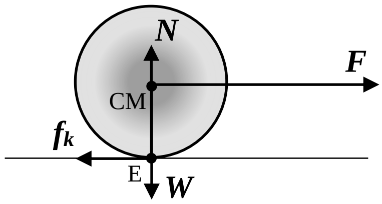
$$\alpha = \frac{\tau_{net(CM)}}{I_{CM}} = \frac{f_k R}{I_{CM}} = \frac{\mu_k NR}{\kappa m R^2} = \frac{\mu_k mg}{\kappa m R} = \frac{\mu_k g}{\kappa R} = \frac{(0,75)(9,8)}{(0,7)(0,1)} = 105,0 \text{ rad/s}$$

Οι ταχύτητες τη χρονική στιγμή t = 0,6 s θα είναι :

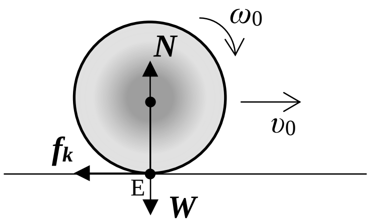
$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = at \\ \omega = \alpha t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon = (12,65)(0,6) = 7,59 \text{ m/s} \\ \omega = (105,0)(0,6) = 63,0 \text{ rad/s} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $\upsilon > \omega R$ αφού $7,59 > 6,30$ οπότε το σημείο επαφής με το δάπεδο Ε σύρεται προς τα δεξιά $\upsilon_{\mathrm{E}} = \upsilon - \omega R > 0$ και άρα η τριβή ολίσθησης είναι προς τα αριστερά.





2.3 Από τη στιγμή που θα καταργηθεί η δύναμη F (ξαναθέτουμε t=0) η μεταφορική κίνηση του σώματος θα επιβραδύνεται $\upsilon\downarrow$, λόγω της κινητικής τριβής, ενώ η περιστροφική κίνηση θα συνεχίσει να επιταχύνεται $\omega\uparrow$, λόγω της ροπής της κινητικής τριβής, **έως να επιτευχθεί κυλιση χωρίς ολίσθηση** όταν η μεταφορική και η περιστροφική ταχύτητα εξισωθούν $\upsilon_r = \omega_r R$ οπότε εξαφανίζεται και η τριβή



Επειδή όλες οι δυνάμεις διέρχονται από το σημείο επαφής με το δάπεδο Ε, η συνολική ροπή ως προς το σημείο Ε θα είναι μηδέν και άρα η στροφορμή ως προς αυτό το σήμείο θα διατηρείται. Η συνολική στροφορμή είναι ίση με τη στροφορμή του CM ως προς το Ε λόγω της μεταφορικής κίνησης συν την στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας λόγω της περιστροφικής κίνησης:

$$L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I_{CM}\omega_0 = m\upsilon_r R + I_{CM}\omega_r$$

όπου $\upsilon_0 = 7,59 \text{ m/s}$ και $\omega_0 = 63 \text{ rad/s}$,

Όμως $\upsilon_r = \omega_r R$ οπότε

$$m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2 \frac{\upsilon_r}{R} \Rightarrow$$

$$mR(\upsilon_0 + \kappa R\omega_0) = m\upsilon_r R(1+\kappa) \Rightarrow \upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa} = \frac{(7,59) + (0,7)(0,1)(63)}{1+0,7} = 7,06 \text{ m/s}$$

Αν μας ζητούνταν και ο χρόνος που χρειάστηκε για να επιτευχθεί η κύλιση ή αν θέλαμε να το λύσουμε μέσω του χρόνου, τότε θα λύναμε την

$$\upsilon_r = \omega_r R \Rightarrow \upsilon_0 + a_{CM} t_r = \omega_0 R + \alpha R t_r \Rightarrow t_r = \frac{\upsilon_0 - \omega_0 R}{\alpha R - a_{CM}}$$

όπου $\alpha = 105 \text{ rad/s}$ και $a_{CM} = \dfrac{F_{net}}{m} = \dfrac{-f_k}{m} = -\mu_k g = -(0,75)(9,8) = -7,35 \text{ m/s}^2$

$$t_r = \frac{7,59 - (63)(0,1)}{(105)(0,1) - (-7,35)} = \frac{1,29}{17,85} = 0,07227 \text{ s}$$

Έλεγχος : $\upsilon_r = \upsilon_0 + a_{CM} t_r = 7,59 - (7,35)(0,07227) = 7,06 \text{ m/s}$

ΘΕΜΑ 3. [2]

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο κάποιου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην ορατή περιοχή (φως) του φάσματος:

$$\vec{E}(z,t) = 300\sin(12\times10^{6} z - \omega t)\hat{x} \quad \text{(SI)}$$

3.1 Ποια είναι η τιμή και οι μονάδες της σταθεράς ω ?
3.2 Σε ποια κατεύθυνση διαδίδεται το κύμα?
3.3 Συμβουλευτείτε τον παρακάτω πίνακα για να προσδιορίσετε τι χρώμα έχει το φωτεινό κύμα

Μήκος κύματος λ (nm)	Χρώμα	Μήκος κύματος λ (nm)	Χρώμα
380 – 450	Ιώδες (μωβ)	**571 – 590**	Κίτρινο
451 - 495	Κυανό (μπλε)	**591 – 620**	Πορτοκαλί
496 – 570	Πράσινο	**621 - 750**	Κόκκινο

3.4 Σε ποια κατεύθυνση είναι το μαγνητικό πεδίο του κύματος?
3.5 Πόση είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου του κύματος?

Λύση

Για τα Η/Μ κύματα : $\vec{E}(\vec{r},t) = E\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} \mp \omega t)\hat{e}$

$\vec{B}(\vec{r},t) = B\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} \mp \omega t)\hat{b}$

ισχύουν:

1) Το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση $\pm\hat{k}$, αντίθετα με το σχετικό πρόσημο των όρων $\vec{k}\cdot\vec{r},\ \ \omega t$

2) Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\dfrac{\omega}{k} = c = 3\times10^{8}$ m/s

3) Τα πλάτη των δύο πεδίων συνδέονται με τη σχέση $B = \dfrac{E}{c}$

4) Τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους : $\hat{e}\cdot\hat{b} = 0$

5) Τα πεδία είναι κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης (εγκάρσια κύματα) με : $\hat{e}\times\hat{b} = \hat{k}$

6) Όπως για κάθε περιοδικό κύμα : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Διαβάζουμε : $E = 300$ V/m
$k = 12\times10^{8}$ rad/m
$\hat{e} = \hat{x}$

3.1

$$\frac{\omega}{k} = c \Rightarrow \frac{\omega}{12\times10^{6}\,\text{rad/m}} = 3\times10^{8}\,\text{m/s} \Rightarrow \omega = 36\times10^{14}\,\text{rad/s}$$

3.2

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 0x + 0y + 12\times10^{6} z \Rightarrow \vec{k} = (0,0,12\times10^{6}) = 12\times10^{6}\hat{z}$$

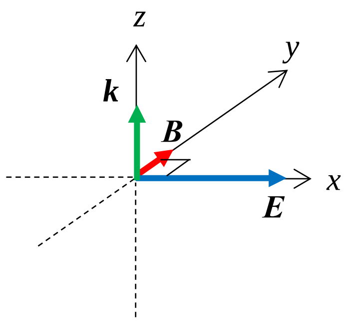
Μόνο στην διεύθυνση z μεταβάλλονται τα πεδία (αφού μόνο το z εμφανίζεται) και άρα σε αυτήν τη διεύθυνση διαδίδεται το κύμα.
Το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση $+\hat{z}$ επειδή υπάρχει το σχετικό πρόσημο μείον $(-)$ μεταξύ των όρων kz και ωt.

3.3

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12\times10^{6}} = \frac{\pi}{6}\times10^{-6} = 0,5236\times10^{-6} = 523,6\times10^{-9} = 523,6 \text{ nm} \rightarrow \text{ Χρώμα πράσινο}$$

3.4

Πρέπει να έχουμε $\hat{x}\times\hat{b} = \hat{z}$ άρα το μαγνητικό πεδίο είναι στην κατεύθυνση $\hat{y}$ επειδή $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$



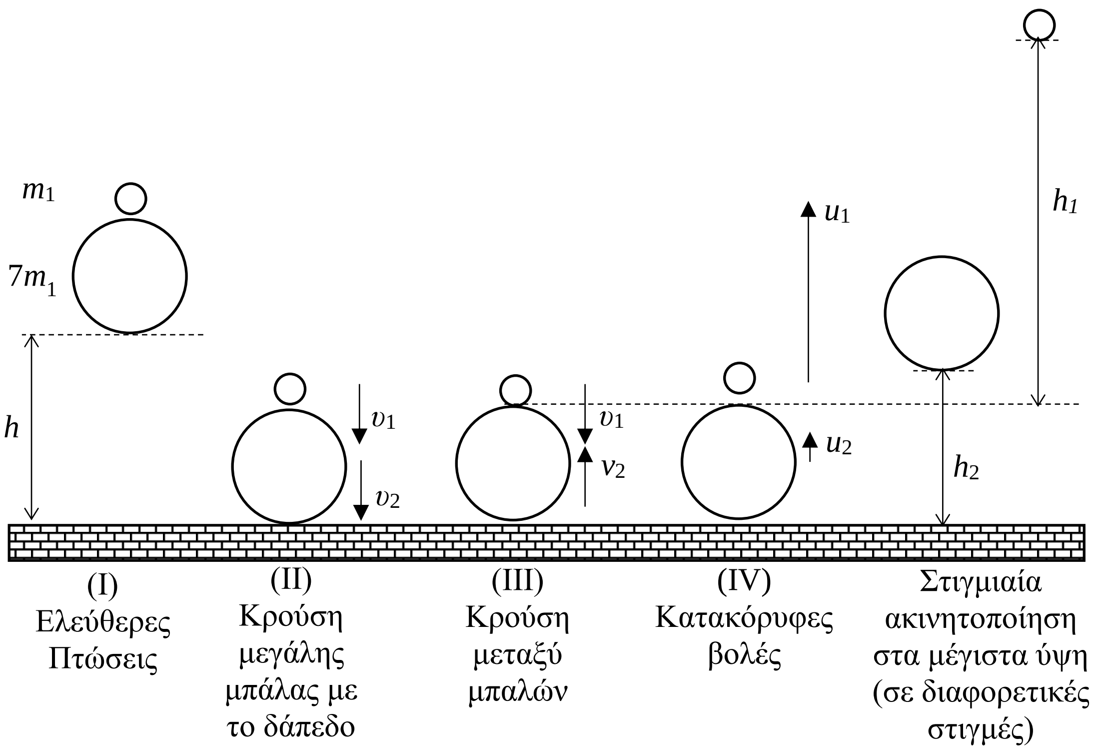
3.5

$$B = \frac{E}{c} = \frac{300}{3\times10^{8}} = 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

ΘΕΜΑ 4. [3]

Οι δύο μπάλες είναι σχεδόν σε επαφή και αφήνονται ταυτόχρονα να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση όπως στο σχήμα. Όλες οι κρούσεις είναι ελαστικές. Ο λόγος των μαζών των μπαλών είναι $\frac{m_2}{m_1} = 7$

Να βρείτε το λόγο $r = \frac{h_1}{h_2}$ των υψών στα οποία θα ανέβουν οι μπάλες μετά τις κρούσεις.



Λύση

Για τις ελαστικές κρούσεις θυμόμαστε τους τύπους που συνδέουν τις αρχικές με τις τελικές ταχύτητες και προκύπτουν από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1) \qquad \text{και} \quad \upsilon_2' = \upsilon_1'(1 \leftrightarrow 2) \quad (2)$$

Ή αντί της (2), ισοδύναμα τον κανόνα κρούσης του Νεύτωνα : $\upsilon_2' + \upsilon_2 = \upsilon_1' + \upsilon_1$ (3) για να βρούμε την υ_2'

Θέτουμε $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$ για να βρούμε και τον γενικό τύπο για κάθε λόγο μαζών.

Φάση (I)
Και οι δύο μπάλες πέφτουν αρχικά κατά ύψος *h* η κάθε μια. Η μεγάλη μέχρι το δάπεδο. Η μικρή μέχρι την πάνω πλευρά της μεγάλης. Από διατήρηση ενέργειας κατά την ελεύθερη πτώση:

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = \sqrt{2gh} = \upsilon$$

Φάση (II)
Από την ελαστική κρούση της μπάλας 2 με το ακίνητο δάπεδο, όπου θεωρούμε ότι η μάζα του δαπέδου είναι $M >> m_2$, δηλαδή θα πάρουμε στους τύπους της ελαστικής κρούσης $M \to \infty$, έχουμε:

$$v_2 = \frac{m_2 - M}{m_2 + M}\upsilon_2 \xrightarrow{M\to\infty} v_2 = -\upsilon_2 = -\upsilon_1 = -\sqrt{2gh} = -\upsilon$$

Σε ελαστική κρούση με ακίνητο στόχο μεγάλης μάζας το βλήμα απλά αντιστρέφει την ταχύτητά του. Ανακλάται στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ίσου μέτρου με την αρχική.

Φάση (III)
Από την ελαστική κρούση μεταξύ των δυο μπαλών:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1}\upsilon + \frac{2\cdot\ \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1}(-\upsilon) = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda}\upsilon = \frac{-20}{8}\upsilon = -2,5\upsilon$$

$$u_2 = \upsilon_1 + u_1 - v_2 = \left(1 + \frac{1-3\lambda}{1+\lambda} - (-1)\right)\upsilon = \left(\frac{2+2\lambda+1-3\lambda}{1+\lambda}\right)\upsilon = \frac{3-\lambda}{1+\lambda}\upsilon = \frac{-4}{8}\upsilon = -0,5\upsilon$$

Φάση (IV)

Από διατήρηση ενέργειας στην κατακόρυφη βολή: $m_1 g h_1 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 \Rightarrow \qquad h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\frac{1-3\lambda}{1+\lambda}\right)^2$

και παρομοίως $\qquad h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$

Οπότε διαιρώντας παίρνουμε $r = \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{1-3\lambda}{3-\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1-3\cdot\ 7}{3-7}\right)^2 = \left(\frac{1-21}{-4}\right)^2 = \left(\frac{20}{4}\right)^2 = 5^2 = 25$

Η ελαφρύτερη μπάλα θα εκτοξευθεί σε ύψος 25 φορές μεγαλύτερο από αυτό της βαριάς παρόλο που αφέθηκαν αρχικά να πέσουν από το ίδιο ύψος. Αν έπεφταν ξεχωριστά η κάθε μία θα ανέβαιναν στο ίδιο ύψος h.

Αν δεν θυμάστε τον πρώτο τύπο (1) μέσα στο πλαίσιο, τότε χρησιμοποιείστε διατήρηση ορμής και κανόνα κρούσης του Νεύτωνα και λύστε το σύστημα:

$$m_1\upsilon_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow m_1\upsilon + 7m_1(-\upsilon) = m_1 u_1 + 7m_1 u_2 \Rightarrow u_1 + 7u_2 = -6\upsilon \quad (1)$$

$$\upsilon_1 + u_1 = v_2 + u_2 \Rightarrow \upsilon + u_1 = -\upsilon + u_2 \Rightarrow -u_1 + u_2 = 2\upsilon \quad (2)$$

(1)+(2) → $8u_2 = -4\upsilon \Rightarrow u_2 = -\frac{\upsilon}{2}$ (3)

(3)→(2) $-u_1 - \frac{\upsilon}{2} = 2\upsilon \Rightarrow u_1 = -\frac{5}{2}\upsilon$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{u_1^2}{u_2^2} = 5^2 = 25$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ