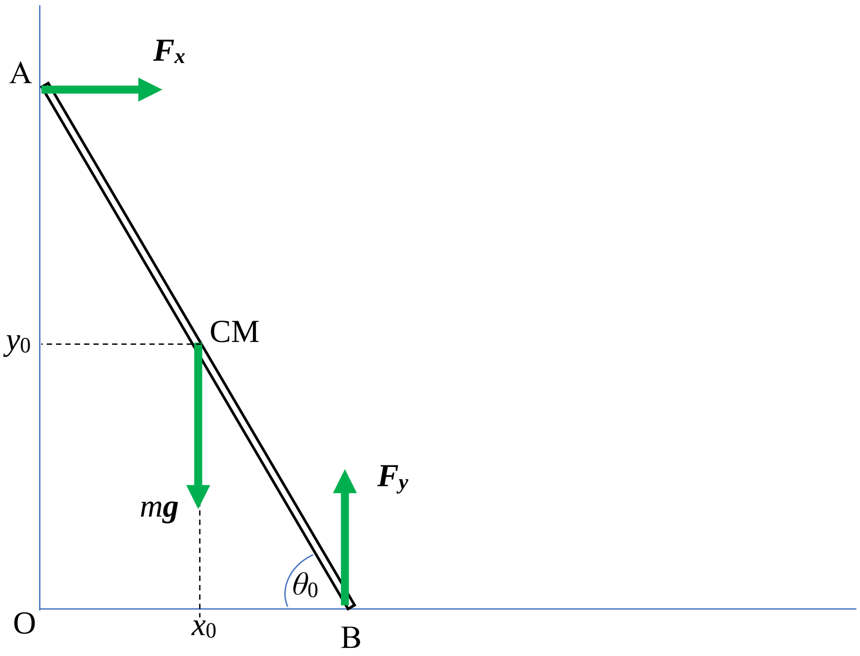
Ολισθαίνουσα ράβδος σε τοίχο και δάπεδο χωρίς τριβές



Νόμοι Νεύτωνα

Μεταφορική κίνηση κέντρου μάζας (CM)

$$F_x = ma_x \qquad (1)$$

$$F_y - mg = ma_y \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση γύρω από σημείο *P*

$$\sum_P \tau = I_P \alpha \qquad (3)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα συμπαγές σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και γωνιακή επιτάχυνση α γύρω από ένα σημείο, περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση α και γύρω από οποιοδήποτε άλλο σημείο.

Αρχικές συνθήκες

$$\theta_0, \qquad x_0 = \frac{L}{2}\cos\theta_0, \qquad y_0 = \frac{L}{2}\sin\theta_0 \qquad (4)$$

$$\upsilon_{x0} = 0, \qquad \upsilon_{y0} = 0$$

Ερώτηση 1.

Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή *t*=0 που την αφήνουμε ελεύθερη

Απάντηση

1ος τρόπος. Από διατήρηση ενέργειας και παραγώγιση.

Κάθε χρονική στιγμή :

$$x = \frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} \quad (5) \qquad y = \frac{L}{2}\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \quad (6)$$

Άρα $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dfrac{L^2}{4}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \;\; \upsilon^2 = \dfrac{L^2}{4}\dot{\theta}^2$ (7)

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$mg\frac{L}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)mL^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow g(\sin\theta_0 - \sin\theta) = \left(\frac{1}{3}\right)L\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)} \qquad (8)$$

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση

$$\ddot{\theta} \equiv \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}\left(\pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}\right) = \pm\sqrt{\frac{3g}{L}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}}(-\cos\theta)\dot{\theta} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3g}{L}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}}(-\cos\theta)(\pm)\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\cos\theta \qquad (9)$$

2^{ος} τρόπος. Από εξίσωση περιστροφικής κίνησης (Αρχή στροφορμής)

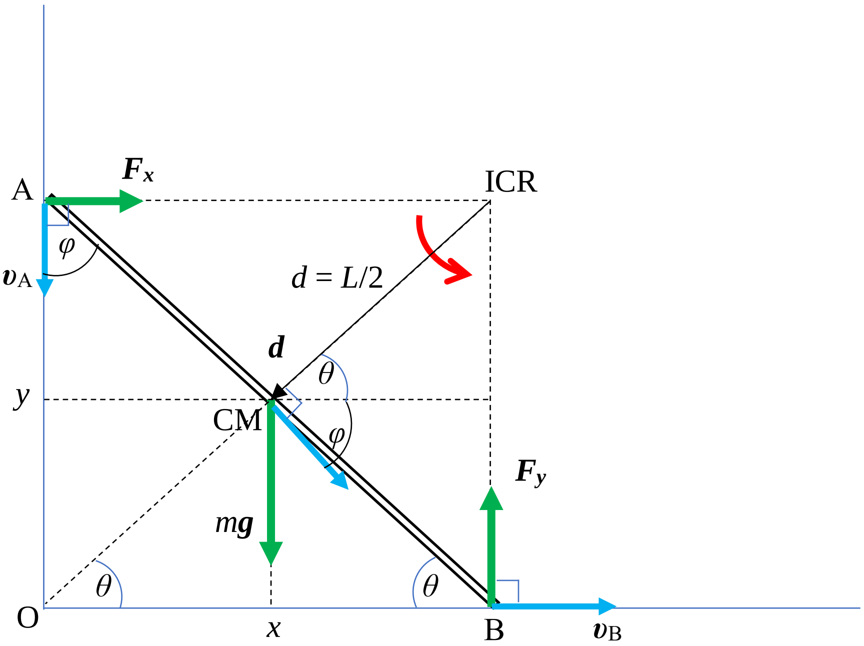
Μπορούμε να βρούμε την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή t=0 αλλά και κάθε άλλη χρονική στιγμή t>0, από την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης επιλέγοντας κατάλληλα το σημείο P. Αν επιλέξουμε ως P το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων F_x και F_y τότε οι δυνάμεις αυτές, που είναι μεταβλητές και άγνωστες, δεν θα προκαλούν ροπή ως προς αυτό το σημείο και άρα δεν θα εμφανίζονται στο άθροισμα των ροπών. Μόνο το βάρος θα προκαλεί ροπή γύρω από αυτό το σημείο. Το σημείο αυτό είναι και ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής της ράβδου (ICR = instantaneous center of rotation). Οι κάθετες των ταχυτήτων των ακραίων σημείων της ράβδου A και B περνάνε από αυτό το σημείο. Ως προς το σημείο ICR η ράβδος φαίνεται στιγμιαία να εκτελεί μόνο στροφική κίνηση. Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο και οι δυο διαγώνιες έχουν μήκος L. Άρα η απόσταση του κέντρου μάζας (CM) από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής (ICR) είναι L/2.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το CM είναι: $I_{CM} = \kappa mL^2$ με $\kappa = \dfrac{1}{12}$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το ICR είναι:

$$I_{ICR} = I_{CM} + md^2 = \kappa mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2\left(\kappa + \frac{1}{4}\right) = mL^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}mL^2 \qquad (10)$$

Ο μοχλοβραχίονας του βάρους ως προς το ICR είναι: $\dfrac{\text{OB}}{2} = \dfrac{L\cos\theta}{2}$



Άρα για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης έχουμε:

$$\sum_{ICR}\tau = I_{ICR}\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}mL^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}\cos\theta \qquad (11)$$

Η φορά της περιστροφής είναι αυτή που δείχνει το κόκκινο βελάκι άρα από τον κανόνα του δεξιού χεριού η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης είναι κατά τον άξονα z.

Η ροπή και διανυσματικά. Το διάνυσμα $\vec{d}$ από το ICR στο CM είναι ίσο με:

$\vec{d} \equiv \vec{r}_{CM/ICR} = -\dfrac{L}{2}\cos\theta\hat{x} - \dfrac{L}{2}\sin\theta\hat{y}$ οπότε η ροπή του βάρους είναι :

$$\sum_{ICR}\vec{\tau} = \vec{d}\times(-mg\hat{y}) = \left(-\frac{L}{2}\cos\theta\hat{x} - \frac{L}{2}\sin\theta\hat{y}\right)\times(-mg\hat{y}) = mg\frac{L}{2}\cos\theta\hat{x}\times\hat{y} = mg\frac{L}{2}\cos\theta\hat{z}$$

Ποιας γωνίας είναι αυτή η επιτάχυνση; Η γωνία φ αυξάνει και η γωνία θ μειώνεται όπως η ράβδος περιστρέφεται ολισθαίνοντας. Η επιτάχυνση (11) ως θετική, θα είναι της γωνίας που αυξάνεται, της φ. Οπότε επειδή $\theta + \varphi = 90^o$, αναφορικά με τις γωνίες τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις τους ισχύει

$$\theta = 90^o - \varphi \Rightarrow \dot{\theta} = -\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3L}\cos\theta$$

Ερώτηση 2
Σε ποια γωνία θ η ράβδος θα χάσει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο;

Απάντηση
1ος τρόπος. Παραγώγιση ως προς το χρόνο.

Όταν χαθεί η επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο η δύναμη $F_x = 0$ μηδενίζεται και άρα θα μηδενίζεται και η οριζόντια επιτάχυνση $a_x = 0$. Άρα η οριζόντια ταχύτητα του κέντρου μάζας

υ_x φτάνει σε μέγιστη τιμή την οποία μετά διατηρεί σταθερή. Πρόκειται για πρόβλημα ελαχίστων-μεγίστων. Από την διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε την έκφραση της οριζόντιας ταχύτητας συναρτήσει της γωνίας και στη συνέχεια, με τη γνωστή μαθηματική μέθοδο, αναζητούμε τη γωνία που μεγιστοποιεί αυτή την έκφραση.
Κάθε χρονική στιγμή :

$$x=\frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{x}=-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x}=-\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2-\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} \qquad (12)$$

Συνθήκη μεγιστοποίησης της $\upsilon_x \equiv \dot{x}$: $\qquad \ddot{x}=0$ και $\dddot{x}<0$

Οπότε: $\ddot{x}=0 \Rightarrow -\dfrac{L}{2}(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta)=0 \Rightarrow$

$$\boxed{\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta=0 \qquad (13)}$$

Αντικαθιστώντας στη (13) τις εκφράσεις που έχουμε για τη γωνιακή ταχύτητα έχουμε:

$$\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta=0 \Rightarrow \frac{3g}{L}(\sin\theta_0-\sin\theta)\cos\theta-\frac{3g\cos\theta}{2L}\sin\theta=0 \Rightarrow \sin\theta_0-\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta_0 \qquad (14)}$$

Η απάντηση δεν εξαρτάται ούτε από το μήκος της ράβδου *L*, ούτε από τη μάζα της ράβδου *m*, ούτε από τον πλανήτη που γίνεται το πείραμα δηλαδή το *g*!

Η ράβδος θα χάσει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο όταν θα έχει κατέλθει στα 2/3 του αρχικού της ύψους $y=\dfrac{L}{2}\sin\theta=\dfrac{L}{2}\dfrac{2}{3}\sin\theta_0 \Rightarrow$

$$y=\frac{2}{3}y_0 \quad (15)$$

[Δείξτε ότι για αυτή την θ η δεύτερη παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή η $\dddot{x}$ είναι αρνητική, άρα αυτή η τιμή δίνει μέγιστο για την ταχύτητα]

2ος τρόπος. Παραγώγιση ως προς τη γωνία.

Αφού έχουμε την έκφραση της οριζόντιας ταχύτητας υ_x, ως προς τη γωνία θ και τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$, για να βρούμε το μέγιστό της παραγωγίζουμε ως προς θ και θέτουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν:

$$x=\frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \upsilon_x \equiv \dot{x}=-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}=-\frac{L}{2}\sin\theta\left(\pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0-\sin\theta)}\right)$$

Η τιμή της γωνίας που μεγιστοποιεί την οριζόντια ταχύτητα είναι αυτή που ικανοποιεί την

$$\frac{d\upsilon_x}{d\theta}=0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\sqrt{(\sin\theta_0-\sin\theta)}\right)=0 \Rightarrow \cos\theta\sqrt{(\sin\theta_0-\sin\theta)}+\frac{1}{2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(\sin\theta_0-\sin\theta)}}=0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(\sin\theta_0-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{2\sqrt{(\sin\theta_0-\sin\theta)}}=0 \Rightarrow 2(\sin\theta_0-\sin\theta)=\sin\theta \Rightarrow 2\sin\theta_0=3\sin\theta \Rightarrow$$

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0$$

Ερώτηση 3
Πόση είναι η μέγιστη οριζόντια ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος;

Απάντηση
Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε.

$$\upsilon_x \equiv \dot{x} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} = -\frac{L}{2}\sin\theta\left(-\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon_{x\max} = \frac{L}{2}\frac{2}{3}\sin\theta_0\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \frac{2}{3}\sin\theta_0\right)} = \frac{L}{3}\sin\theta_0\sqrt{\frac{3g}{L}\frac{1}{3}\sin\theta_0} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{x\max} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g}{L}}\sin^{3/2}\theta_0$$

Ερώτηση 4
Ποια είναι η τροχιά που ακολουθεί το κέντρο μάζας;

Απάντηση
Οι συντεταγμένες του CM κάθε χρονική στιγμή κατά την οποία η ράβδος είναι σε επαφή με τον τοίχο και το δάπεδο είναι:

$$x = \frac{\mathrm{OA}}{2} = \frac{L}{2}\cos\theta \qquad \text{και} \qquad y = \frac{\mathrm{OB}}{2} = \frac{L}{2}\sin\theta$$

Τετραγωνίζοντας και προσθέτοντας παίρνουμε την εξίσωση κύκλου ακτίνας $L/2$:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{L}{2}\right)^2\sin^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Αφού χαθεί η επαφή με τον τοίχο το CM έχει σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_{x\max}$ ενώ "πέφτει" κατακόρυφα στηριζόμενο στο μπροστινό άκρο του.

Ερώτηση 5
Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας και την έννοια του στιγμιαίου κέντρου περιστροφής.

Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια ως προς το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (ICR). Ως προς το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (ICR), εξ ορισμού, η κινητική ενέργεια είναι μόνο στροφική.

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}I_{ICR}\omega^2 \Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \Rightarrow mg\frac{L}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

Παίρνουμε πάλι την ίδια έκφραση για τη γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega \equiv \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

Ως προς το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (ICR) το κέντρο μάζας εκτελεί μόνο στροφική κίνηση οπότε η ταχύτητά του είναι ίση με

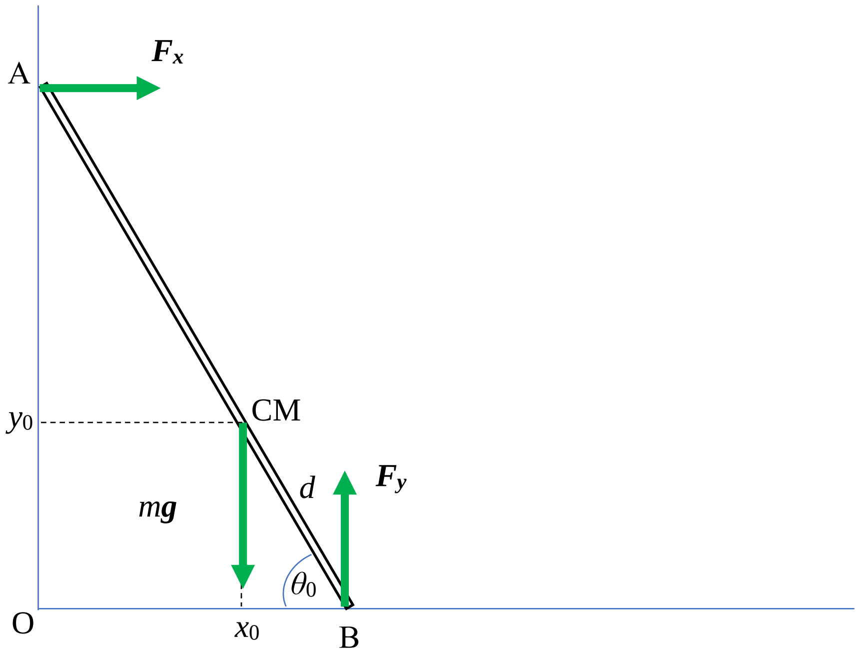
$$\upsilon = \omega\frac{L}{2}$$

Η οριζόντια συνιστώσα είναι πάλι ίση με:

$$\upsilon_x = \upsilon \cos\varphi = \omega \frac{L}{2} \sin\theta = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}\sin\theta$$

Ερώτηση 6

Αν το CM της ράβδου δεν ήταν στο μέσο της αλλά σε κάποια απόσταση *d* από το άκρο που πατάει στο έδαφος και άρα η ροπή αδράνειας θα ήταν $I_{CM} = \kappa m L^2$ σε ποια γωνία θα έχανε τώρα την επαφή με τον τοίχο η ράβδος? Θα άλλαζε το προηγούμενο αποτέλεσμα;



Απάντηση

ΟΧΙ. Όπως και πριν έτσι και τώρα τόσο το d όσο και το κ δεν θα επηρεάσουν την εξίσωση μεγιστοποίησης $\ddot{x} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι και οποιουδήποτε σχήματος λεπτό επίπεδο φύλλο (lamina) θα χάσει την επαφή με τον τοίχο αφού κατέβει κατά 1/3 του αρχικού ύψους στο οποίο βρισκόταν το CM. Επειδή η πλαϊνή όψη κάθε φύλλου είναι «ράβδος».

$$x = d\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = -d\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = -d(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})$$
$$y = d\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = d\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = d^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \quad \upsilon^2 = d^2\dot{\theta}^2$$

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\kappa mL^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$gd(\sin\theta_0 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\left(d^2 + \kappa L^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2gd}{d^2 + \kappa L^2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο και των δύο πλευρών βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=\frac{2gd}{d^2+\kappa L^2}(-\cos\theta)\dot{\theta}\Rightarrow\ \ddot{\theta}=-\frac{gd}{d^2+\kappa L^2}\cos\theta$$

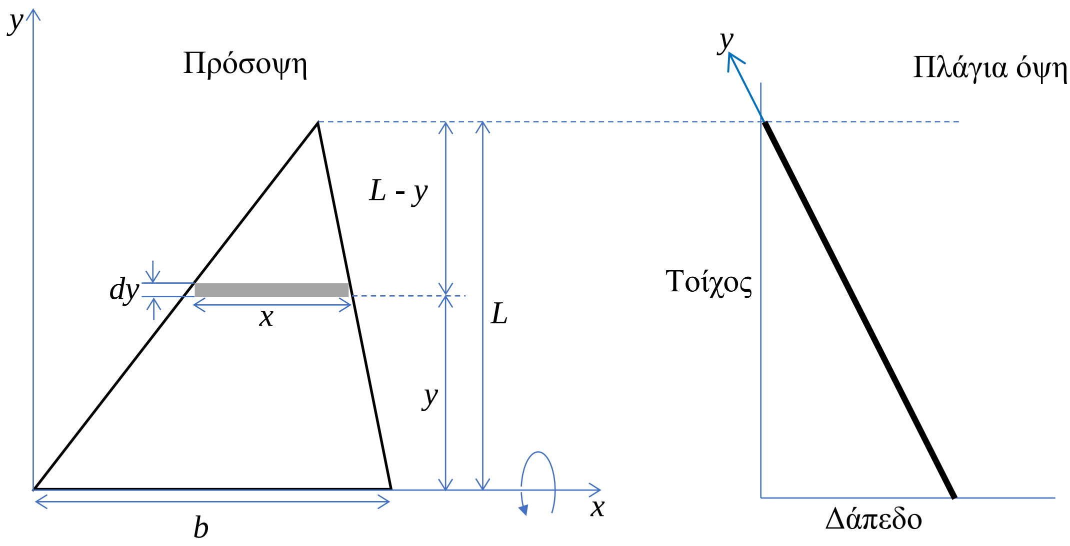
$$\ddot{x}=0\Rightarrow\ \cos\theta\dot{\theta}^2+\sin\theta\ddot{\theta}=0\Rightarrow\ \cos\theta\frac{2gd}{d^2+\kappa L^2}(\sin\theta_0-\sin\theta)\ +\sin\theta\left(-\frac{gd}{d^2+\kappa L^2}\cos\theta\right)\Rightarrow$$

$$2\cos\theta(\sin\theta_0-\sin\theta)\ -\cos\theta\sin\theta=0\Rightarrow 2\sin\theta_0-2\sin\theta-\sin\theta=0\Rightarrow$$

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta_0\ \text{ ακριβώς όπως και πριν}$$

Ερώτηση 7

Ένα από τα σχήματα του φύλου μπορεί να είναι τρίγωνο. Επί τη ευκαιρία βρείτε τη ροπή αδράνειας ομογενούς τριγώνου μάζας *m*, βάσης *b* και ύψους *L* γύρω από τη βάση του.



Εμβαδόν τριγώνου : $A=\frac{1}{2}bL$

Επιφανειακή πυκνότητα μάζας φύλλου : $\sigma=\frac{m}{A}$

Μάζα τριγώνου: $m=\sigma A=\sigma\frac{1}{2}bL$

Εμβαδόν λωρίδας: $dA=xdy$

Στοιχειώδης μάζα λωρίδας : $dm=\sigma dA=\sigma xdy$

Απόσταση λωρίδας από άξονα *x*: y

Ροπή αδράνειας λωρίδας γύρω από άξονα *x*: $dI=y^2dm$

Όμοια τρίγωνα : $\frac{x}{b}=\frac{L-y}{L}\Rightarrow x=b\left(1-\frac{y}{L}\right)$

Ροπή αδράνειας τριγώνου :

$$I = \int dI = \int y^2 dm = \sigma \int_0^L y^2 dA = \sigma b \int_0^L y^2 x dy = \sigma b \int_0^L y^2 \left(1 - \frac{y}{L}\right) dy =$$

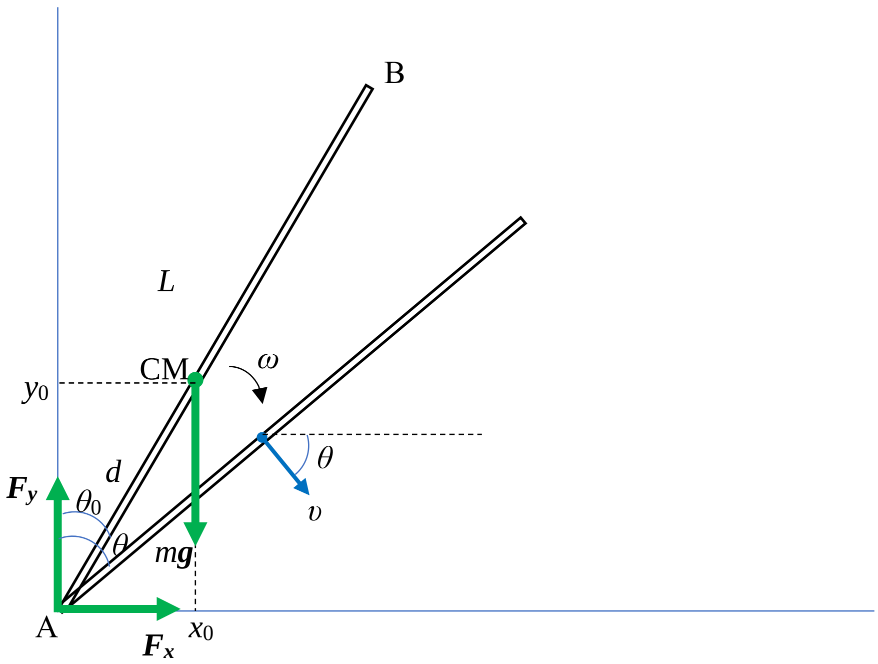
$$= \sigma b \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4L} \right]_0^L = \sigma b L^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\sigma b L^3}{12} = \frac{1}{6} \left(\sigma \frac{1}{2} b L \right) L^2 \Rightarrow \quad I = \frac{1}{6} m L^2$$

Άρα, η ροπή αδράνειας τριγώνου γύρω από μια βάση του, προς την οποία το ύψος είναι L είναι ίση με :

$$I = \kappa m L^2 \qquad \text{με} \qquad \kappa = \frac{1}{6}$$

Περιστρεφόμενη ράβδος

Που χάνει την επαφή τώρα; Πάλι στο 2/3 του ύψους του CM



$$y = d \cos\theta$$

Τώρα το σημείο A είναι και το στιγμιαίο κέντρο περιστροφή ICR. Παίρνουμε την γενικότερη περίπτωση όπου η ράβδος δεν είναι καν ομογενής. Η απόσταση του CM από το άκρο A είναι d (όχι $L/2$) και η ροπή αδράνειας είναι $I_A = \kappa m L^2$.

$$\sum_A \tau = I_A \alpha \Rightarrow mgd \sin\theta = \kappa m L^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{gd \sin\theta}{\kappa L^2} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{gd \sin\theta}{\kappa L^2}$$

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2} I_A \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \kappa m L^2 \omega^2 = mg(y_0 - y) \Rightarrow \frac{1}{2} \kappa L^2 \omega^2 = gd(\cos\theta_0 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{2gd}{\kappa L^2} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2gd}{\kappa L^2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\upsilon_x = \upsilon\cos\theta = \omega d\cos\theta \Rightarrow \ddot{x} \equiv \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d(\dot{\theta} d\cos\theta)}{dt} = \ddot{\theta} d\cos\theta - \dot{\theta}^2 d\sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = d(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{gd\sin\theta}{\kappa L^2}\cos\theta - \frac{2gd}{\kappa L^2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{gd}{\kappa L^2}\sin\theta(\cos\theta - 2\cos\theta_0 + 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow 3\cos\theta = 2\cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

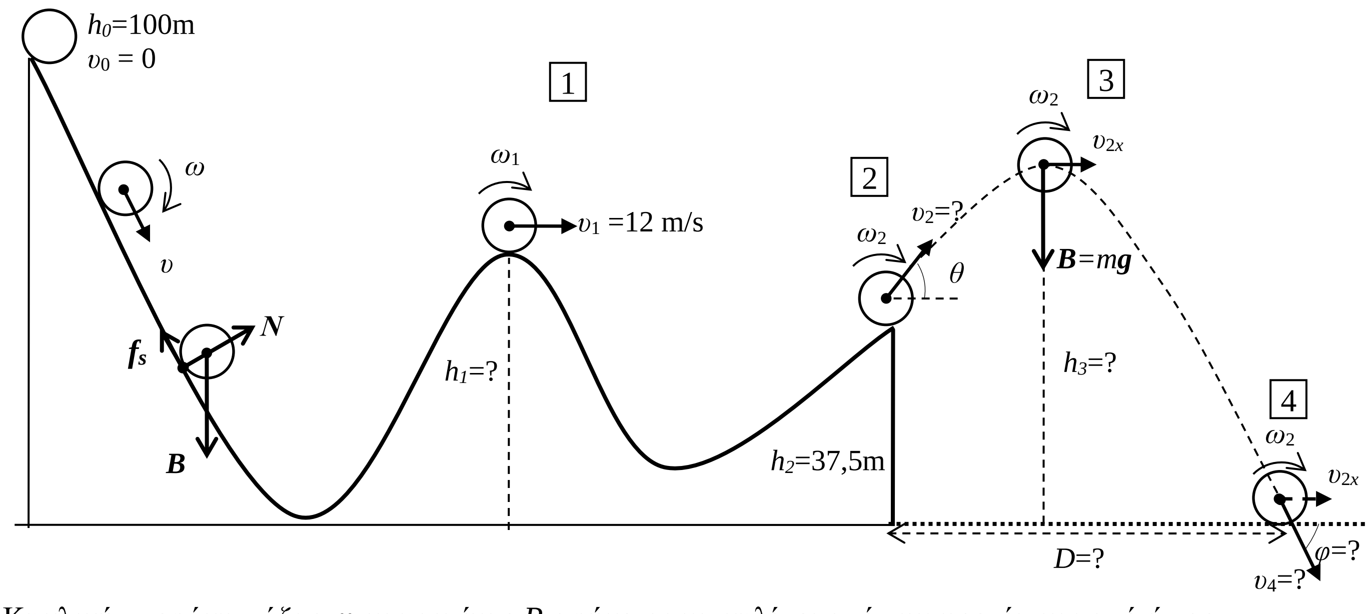
Πάλι η επαφή χάνεται όταν το CM κατέβει κατά το 1/3 του αρχικού του ύψους

$$y = d\cos\theta = d\frac{2}{3}\cos\theta_0 = \frac{2}{3}y_0$$

Οπότε αν $\theta_0 = 15^{\circ}$:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos 15^{\circ}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cdot\ 0,965925826\right) = \cos^{-1}(0,643950551) = 49,91^{\circ}$$

Κυλιόμενη στεφάνη



Κυκλική στεφάνη μάζας m και ακτίνας R αφήνεται να κυλίσει από την ηρεμία και από ύψος h_0=100 m στα λοφάκια του σχήματος και από τον γκρεμό στο σημείο 2 εκτελεί πλάγια βολή και πέφτει στη θάλασσα. Η ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I = mR^2$. Η στεφάνη κυλάει χωρίς να ολισθαίνει.

Α) Να δείξετε ότι κατά την κύλιση η συνολική κινητική ενέργεια της στεφάνης, μεταφορική και περιστροφική, που υπολογίζεται από τον τύπο $K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} = m\upsilon_x^2/2 + m\upsilon_y^2/2 + I\omega^2/2$, είναι ίση με $K = m\upsilon^2$ όπου υ η ταχύτητα του κέντρου μάζας της.

Β) Η στεφάνη περνάει από την κορυφή στο σημείο 1 με ταχύτητα υ_1= 12 m/s. Τι ύψος h_1 έχει το σημείο 1;

Γ) Με τι ταχύτητα υ_2 εκτοξεύεται από τον γκρεμό στο σημείο 2 όπου h_2=37,5 m;
Δ) Ποιες είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας υ_{2x} και υ_{2y}, στο σημείο 2 αν η γωνία βολής θ έχει ημθ=0,6 και συνθ=0,8;
Ε) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη όσο βρίσκεται στον αέρα και να εξηγήσετε γιατί στο εξής όσο η στεφάνη εκτελεί πλάγια βολή στον αέρα η οριζόντια ταχύτητα της υ_{2x} και η γωνιακή της ταχύτητα ω_2 θα παραμένουν σταθερές.
ΣΤ) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος h_3 που φτάνει η στεφάνη στο σημείο 3
Ζ) Με τι ταχύτητα και με τι γωνία χτυπάει στη θάλασσα στο σημείο 4;
Η) Για πόσο χρόνο $t_{πτησης}$ παραμένει η στεφάνη στον αέρα?
Θ) Σε τι απόσταση D μακριά από τον γκρεμό πέφτει στη θάλασσα?

Α) Η στεφάνη κυλιεται χωρίς να ολισθαίνει άρα η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω με την ταχύτητα του κέντρου μάζας υ συνδέονται με τη σχέση :

$$\omega = \upsilon / R$$

$$K_{περ} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot mR^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

$$K = K_{μετ} + K_{περ} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{K = m\upsilon^2}$$

Β) Ισχύει μεταξυ δυο οποιονδήποτε σημείων η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας επειδή μονο το βάρος παραγει έργο το οποίο είναι διατηρητική δύναμη:

$$E_0 = E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = σταθ.$$

όπου

$$E = K + U = K_{μετ} + K_{περ} + U_{βαρ} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + mgh = m\upsilon^2 + mgh$$

Άρα

$$E_0 = E_1 \Rightarrow mgh_0 = m\upsilon_1^2 + mgh_1 \Rightarrow h_1 = h_0 - \upsilon_1^2 / g = 100 - 12^2/10 \Rightarrow \boxed{h_1 = 85,6 \text{ m}}$$

Γ)

$$E_0 = E_2 \Rightarrow mgh_0 = m\upsilon_2^2 + mgh_2 \Rightarrow \upsilon_2^2 = g(h_0 - h_1) = 10(100 - 37,5) = 625 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 25 \text{ m/s}}$$

Δ)

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_2 συν\theta = 25 \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{2x} = 20 \text{ m/s}}$$

$$\upsilon_{2y} = \upsilon_2 ημ\theta = 25 \cdot 0,6 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{2y} = 15 \text{ m/s}}$$

Ε) Όσο η στεφάνη βρίσκεται στον αέρα ασκείται πάνω της μόνο η δυναμη του βάρους της. Το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας (CM) κατακόρυφα. Άρα δεν επάγει ροπή γύρω από το CM ώστε να μεταβάλει την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Επίσης επειδή το βάρος είναι κατακόρυφη δύναμη δεν επηρρεάζει ούτε την οριζόντια συνιστώσα της γραμμικής ταχύτητας. Οπότε στο σημείο 3 η στεφάνη έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας που είχε και στο σημείο 2 :

$$\upsilon_{3x} = \upsilon_{2x} \qquad \omega_3 = \omega_2$$

Το ίδιο ισχύει και για το σημείο 4 :

$$\upsilon_{4x} = \upsilon_{2x} \qquad \omega_4 = \omega_2$$

ΣΤ)

$$E_3 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_{2x}^2 + \frac{1}{2} I\omega_2^2 + mgh_3 = \frac{1}{2} m\upsilon_{2x}^2 + \frac{1}{2} m\upsilon_{2y}^2 + \frac{1}{2} I\omega_2^2 + mgh_2 \Rightarrow h_3 = \frac{\upsilon_{2y}^2}{2g} + h_2 \Rightarrow$$

$$h_3=\frac{15^2}{2\cdot 10}+37,5=11,25+37,5\Rightarrow \boxed{h_3=48,75\text{ m}}$$

Ή

$$E_3=E_0\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{2x}^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+mgh_3=mgh_0\Rightarrow h_3=h_0-\frac{\upsilon_{2x}^2}{2g}-\frac{\upsilon_2^2}{2g}\Rightarrow h_3=80-\frac{20^2}{20}-\frac{25^2}{20}=100-20-31,25\Rightarrow$$

$$h_3=48,75\text{ m}$$

Ζ)

$$E_0=E_4\Rightarrow mgh_0=\frac{1}{2}m\upsilon_4^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2\Rightarrow mgh_0=\frac{1}{2}m\upsilon_4^2+\frac{1}{2}mR^2\omega_2^2=\frac{1}{2}m\upsilon_4^2+\frac{1}{2}m\upsilon_2^2\Rightarrow \upsilon_4^2=2gh_0-\upsilon_2^2\Rightarrow$$

$$\upsilon_4^2=2\cdot 10\cdot 100-25^2=2000-625=1375\Rightarrow \upsilon_4=\sqrt{25\cdot 5\cdot 11}\Rightarrow \boxed{\upsilon_4=5\sqrt{55}\ \text{ m/s}=37,1\ \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\upsilon_{4x}=\upsilon_{2x}=20\ \text{ m/s}},$$

$$\upsilon_4^2=\upsilon_{4x}^2+\upsilon_{4y}^2\Rightarrow \upsilon_{4y}=-\sqrt{\upsilon_4^2-\upsilon_{4x}^2}=-\sqrt{1375-400}=-\sqrt{975}=-\sqrt{25\cdot 3\cdot 13}=-5\sqrt{39}\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_{4y}=31,225\,\text{m/s}}$$

$$\text{εφ}\varphi=\frac{\upsilon_{4y}}{\upsilon_{4x}}=\frac{-31,225}{20}\Rightarrow \varphi=\text{εφ}^{-1}\left(\frac{-31,225}{20}\right)\Rightarrow \boxed{\varphi=-57,36^{\text{o}}}$$

$$\vec{\upsilon}_4=(16,\ \ -30,725)=\left(20\sqrt{3},\ \ -57,36^{\text{o}}\right)$$

Η) Πλάγια βολή από το σημείο 2:

$$\upsilon_{4y}=\upsilon_{2y}-gt_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}\Rightarrow t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}=\frac{\upsilon_{2y}-\upsilon_{4y}}{g}=\frac{15-(-31,225)}{10}\Rightarrow \boxed{t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}=4,6225\text{ s}}$$

Ή κατακόρυφη βολή και ελεύθερη πτώση στην *y* διεύθυνση

$$t_{\alpha\nu o\delta o\upsilon}=\frac{\upsilon_{2y}}{g}=\frac{15}{10}=1,5\text{ s}$$

$$h_3=\frac{1}{2}gt_{\pi\tau\omega\sigma\eta\varsigma}^2\Rightarrow t_{\pi\tau\omega\sigma\eta\varsigma}=\sqrt{\frac{2h_3}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 48,75}{10}}=3,1225\text{ s}$$

$$t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}=t_{\alpha\nu o\delta o\upsilon}+t_{\pi\tau\omega\sigma\eta\varsigma}=1,5+3,1225=4,6225\text{ s}$$

Θ) Ευθύγραμμη ομαλή με υ_{2x} στην *x* διεύθυνση μετά το σημείο 2

$$D=\upsilon_{2x}\cdot t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}=20\cdot 4,6225\Rightarrow \boxed{D=92,45\text{ m}}$$