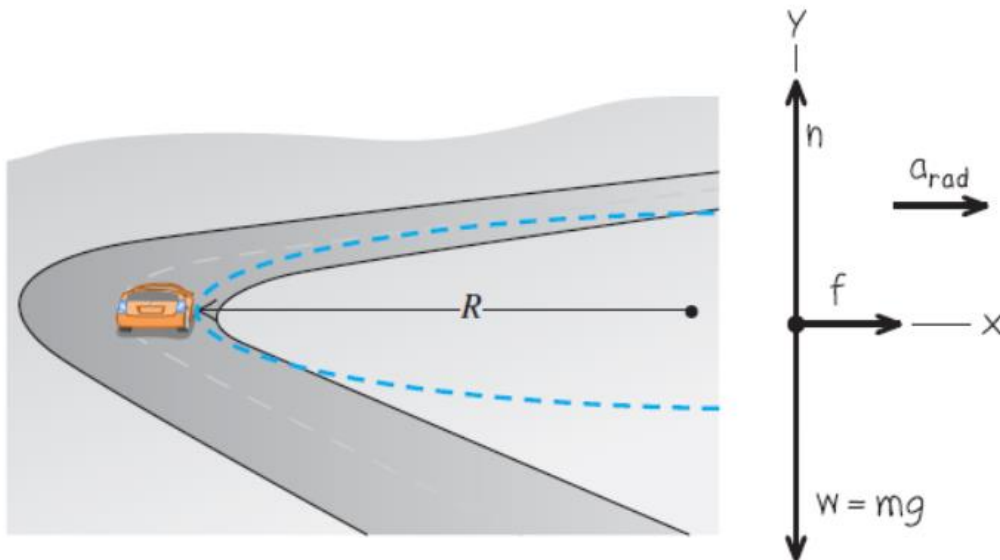


ΣΥΛΛΟΓΗ ΛΥΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

Οριζόντια στροφή

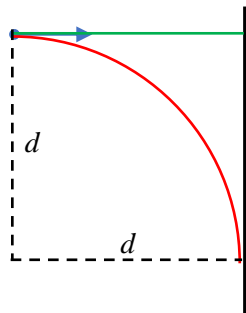


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow f_s = \frac{mv^2}{R}$$

$$\mu_s N \geq f_s \Rightarrow \mu_s mg \geq \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 \leq \mu_s gR \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\mu_s gR}$$

Αποφυγή τοίχου



Τι σχέση πρέπει να έχουν ο συντελεστής κινητικής τριβής με τον συντελεστή στατικής τριβής για να μπορώ να αποφύγω τον τοίχο είτε φρενάροντας είτε στρίβοντας?  
Με φρενάρισμα (πέδηση)

$$W_f = K_2 - K_1 \Rightarrow -f_k s_{stop} = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \mu_k mgs_{stop} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow s_{stop} = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu_k g}$$

$$v_{τελ}^2 = v_{αρχ}^2 + 2as \Rightarrow 0 = v^2 - 2\frac{f_k}{m}s_{stop} \Rightarrow 2\frac{\mu_k mg}{m}s_{stop} = v^2 \Rightarrow s_{stop} = \frac{v^2}{2\mu_k g}$$

$$s_{stop} \leq d \Rightarrow \frac{v^2}{2\mu_k g} \leq d \Rightarrow v \leq \sqrt{2\mu_k gd}$$

Με στροφή  $v_{max} = \sqrt{\mu_s gR} = \sqrt{\mu_s gd}$

$$v \leq v_{max} \Rightarrow \sqrt{2\mu_k gd} \leq \sqrt{\mu_s gd} \Rightarrow 2\mu_k \leq \mu_s$$

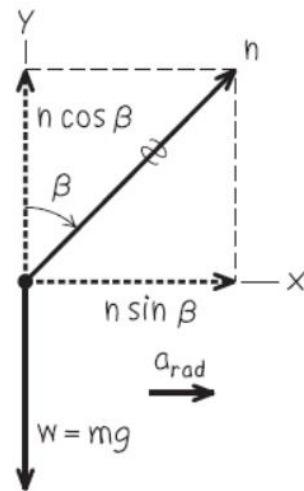
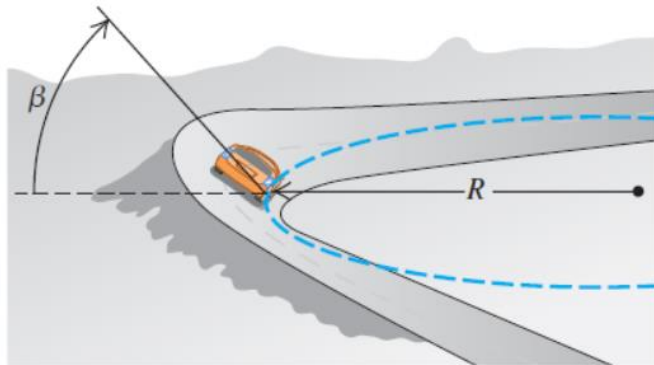
Αυτό ποτέ δεν συμβαίνει επειδή  $\mu_s \geq \mu_k$  οπότε για να αποφύγω τον τοίχο με στροφή θα πρέπει να στρίψω όταν είμαι σε απόσταση  $2s_{stop}$

Για  $\mu_s \approx \mu_k$

$$v \leq v_{max} \Rightarrow \sqrt{2\mu_k gs_{stop}} \leq \sqrt{\mu_s gR} \Rightarrow 2s_{stop} \leq R$$

### Κεκλιμένη στροφή

Τι κλίση πρέπει να έχει η στροφή ώστε να μπορούμε να την πάρουμε με ταχύτητα  $v$  ακόμα και αν ο δρόμος καλυμμένος με πάγο, δηλαδή χωρίς τριβή. Λόγω της κλίσης η κάθετη αντίδραση θα παίζει τώρα το ρόλο της κεντρομόλου.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \cos \beta = mg$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N \sin \beta = \frac{mv^2}{R}$$

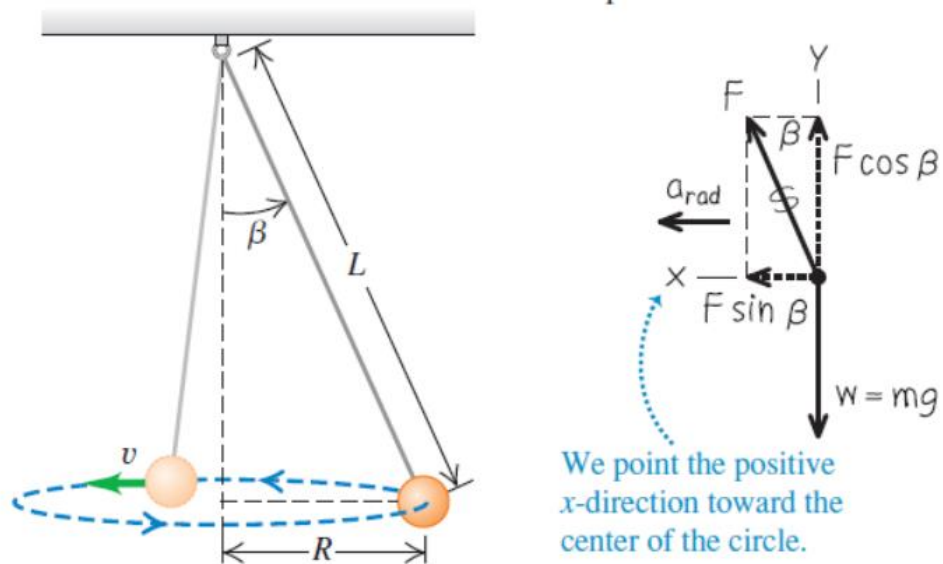
Διαιρώντας :  $\tan \beta = \frac{v^2}{gR}$

Αριθμητική εφαρμογή  $v = 120 \text{ km/h} = 33,3 \text{ m/s}$ ,  $R = 500 \text{ m}$

$$\beta = \arctan\left(\frac{v^2}{gR}\right) = \arctan\left(\frac{33,3^2}{9,8 \cdot 500}\right) = \arctan(0,226) = 12,8^\circ$$

### Κωνικό εκκρεμές

Έχει ίδιο διάγραμμα δυνάμεων με την κεκλιμένη στροφή.



Αν το νήμα έχει μήκος  $L$  και η μάζα κινείται με ταχύτητα  $v$  σε γωνία  $\beta$  από την κατακόρυφο πόση είναι η τάση  $F$  του νήματος και η περίοδος  $T$  της κυκλικής κίνησης ?

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F \cos \beta = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\cos \beta}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F \sin \beta = \frac{mv^2}{R}$$

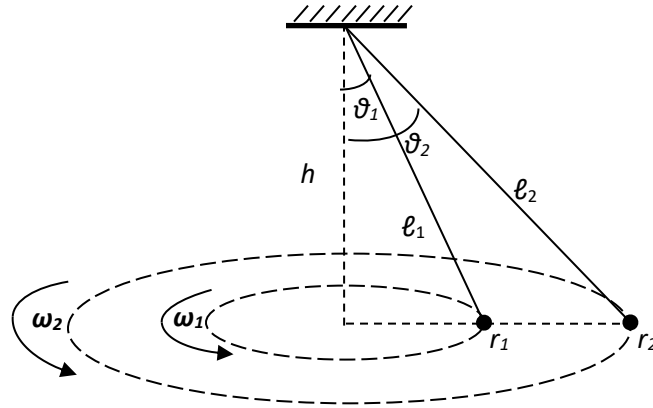
Διαιρώντας παίρνουμε πάλι :  $\tan \beta = \frac{v^2}{gR}$

Αντικαθιστούμε  $v = \frac{2\pi R}{T}$  και  $R = L \sin \beta$ , οπότε

$$\tan \beta = \frac{v^2}{gR} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 g R} = \frac{4\pi^2}{g} L \sin \beta \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \beta}{g}}$$

### Γωνιακή ταχύτητα κωνικού εκκρεμούς

Δύο κωνικά εκκρεμή διαγράφουν οριζόντιους κύκλους στην ίδια απόσταση από την οροφή. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



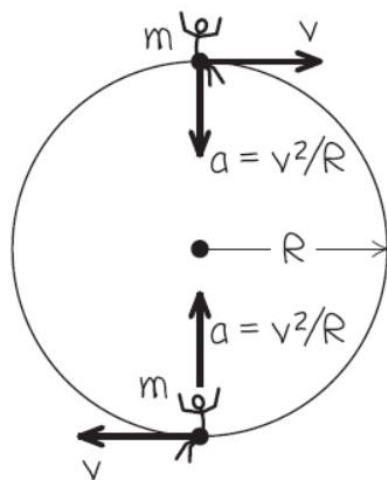
Για τις γωνιακές τους ταχύτητες ισχύει :      Α.  $\omega_1 < \omega_2$     Β.  $\omega_1 = \omega_2$     Γ.  $\omega_1 > \omega_2$

Σωστή απάντηση : Β      
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{l_1 \cos \theta_1}} = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{g}{l_2 \cos \theta_2}} = \omega_2$$

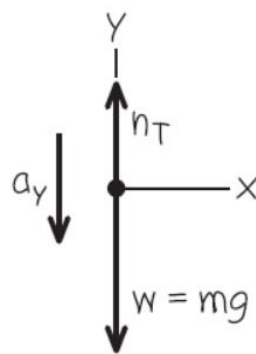
**Κατακόρυφος κύκλος**

Κάθετη αντίδραση στην κορυφή και στο χαμηλότερο σημείο  
 Επιβάτης διαγράφει κύκλο με σταθερή ταχύτητα  $v$  σε ρόδα λούνα παρκ ακτίνας  $R$ . Το κάθισμα του παραμένει πάντα όρθιο. Τι κάθετη αντίδραση δέχεται από το κάθισμα όταν βρίσκεται στην κορυφή και στο χαμηλότερο σημείο του κύκλου.

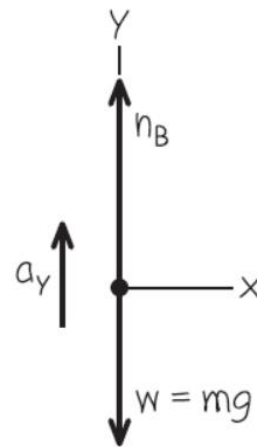
(a) Sketch of two positions



(b) Free-body diagram for passenger at top



(c) Free-body diagram for passenger at bottom



Η κάθετη αντίδραση και το βάρος συνεισφέρουν στην κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$\text{Κορυφή : } \sum F_y = ma_y \Rightarrow N_T - mg = -\frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_T = m \left( g - \frac{v^2}{R} \right)$$

$$\text{Χαμηλότερο σημείο : } \sum F_y = ma_y \Rightarrow N_B - mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_B = m \left( g + \frac{v^2}{R} \right)$$

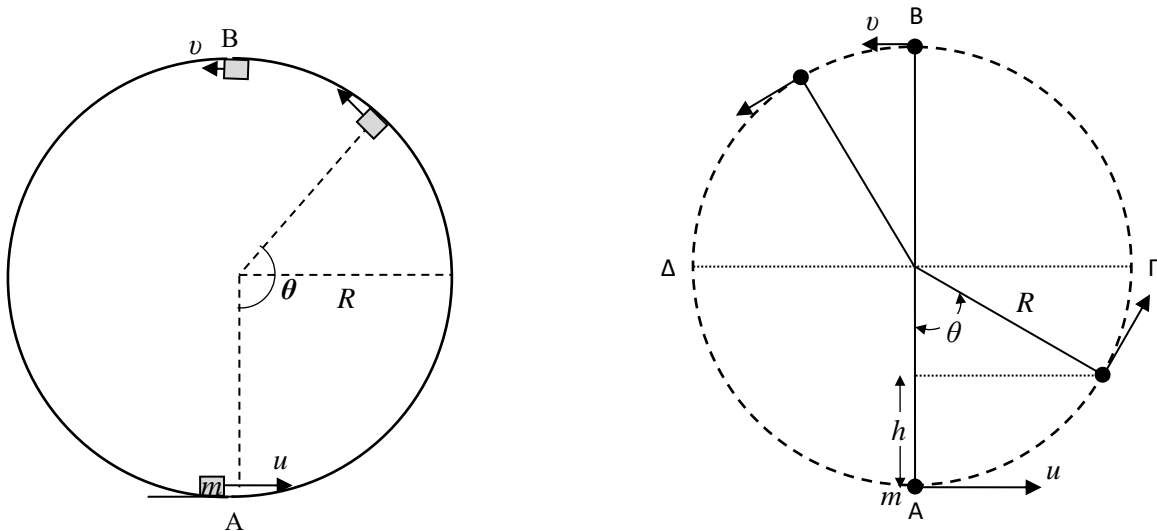
Παρατηρούμε ότι στην κορυφή όσο αυξάνεται η ταχύτητα η κάθετη αντίδραση μειώνεται. Για κάποια ταχύτητα η κάθετη αντίδραση γίνεται μηδέν. Αυτή είναι :

$$N_T = 0 \Rightarrow m \left( g - \frac{mv_{\max}^2}{R} \right) = 0 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{gR}$$

Τότε το βάρος από μόνο του αρκεί για να προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση. Για ακόμα μεγαλύτερη ταχύτητα το βάρος δεν θα επαρκεί και ο επιβάτης θα φύγει από τη θέση του και θα εκτελέσει οριζόντια βολή.

Ταχύτητα ανακύκλωσης

Σώμα μάζας εισέρχεται σε κατακόρυφο κυκλικό οδηγό (ή ισοδύναμα κρέμεται στην άκρη νήματος και του δίνεται οριζόντια ώθηση). Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα  $u$  ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση.

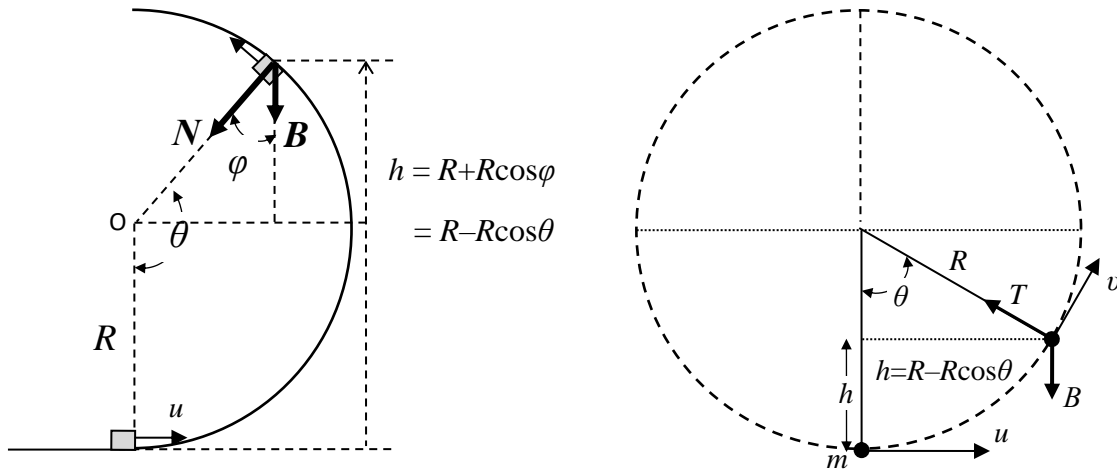


Η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να περάσει από την κορυφή παραμένοντας στον κύκλο είναι αυτή στην οποία η κάθετη αντίδραση (τάση νήματος) γίνεται μηδέν και το βάρος μόνο είναι η κεντρομόλος δύναμη :  $v = \sqrt{gR}$

Για να έχει αυτήν την ταχύτητα στην κορυφή, από διατήρηση της ενέργειας, θα πρέπει στη βάση να έχει ταχύτητα :

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + mgh \Rightarrow u^2 = gR + 2 \cdot g \cdot 2R \Rightarrow u = \sqrt{5gR}$$

Κάθετη αντίδραση σε τυχαία θέση



Το ύψος  $h$  και η γωνία  $\theta$  από την κατακόρυφο συνδέονται με τη σχέση

$$h = R - R \cos \theta$$

Η αρχική ταχύτητα  $u$  με την ταχύτητα  $v$  σε τυχαίο ύψος συνδέονται με τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g h \Rightarrow v^2 = u^2 - 2 g h = u^2 - 2 g R (1 - \cos \theta)$$

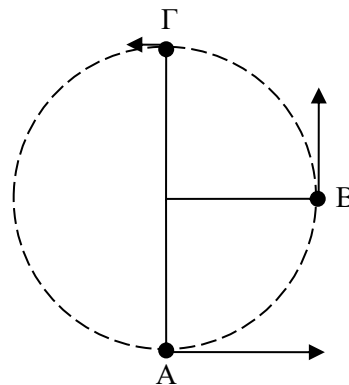
Η ακτινική συνιστώσα του βάρους με φορά προς το κέντρο είναι

$$B_r = m g \cos \varphi = -m g \cos \theta$$

Η κάθετη αντίδραση και η ακτινική συνιστώσα του βάρους προκαλούν την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$N + B_r = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N - m g \cos \theta = m \frac{u^2 - 2 g R (1 - \cos \theta)}{R} \Rightarrow N = \frac{m u^2}{R} - m g (2 - 3 \cos \theta)$$

**Κατακόρυφος κύκλος (ράβδος)**



Σώμα μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  είναι προσαρτημένο στο ένα άκρο ράβδου, χωρίς μάζα, μήκους  $\ell = 0,1 \text{ m}$ , και περιστρέφεται κατακόρυφα όπως στο παραπάνω σχήμα.

Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στη βάση του κύκλου (A) για να μπορέσει να εκτελέσει ανακύκλωση?

Επειδή εδώ έχουμε ράβδο η οποία μπορεί και να σπρώχνει και να τραβά το σώμα για να εκτελέσει το σώμα ανακύκλωση πρέπει απλά να φτάσει στην κορυφή, δηλ. να έχει  $v=0$  στην κορυφή :

$$\frac{1}{2} mu^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow u^2 = 2g \cdot 2\ell \Rightarrow u = 2\sqrt{g\ell} = 2 \text{ m/s}$$

Έστω ότι οι ταχύτητες του σώματος στα αντίστοιχα σημεία της τροχιάς του είναι :

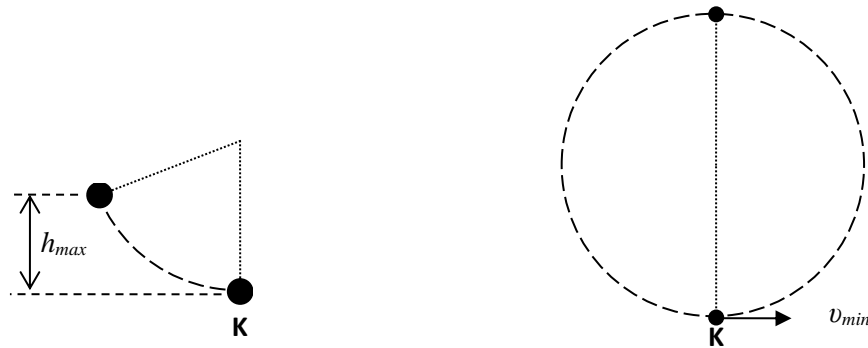
$$v_A = \sqrt{4,25} \text{ m/s}, \quad v_B = 1,5 \text{ m/s}, \quad v_A = 0,5 \text{ m/s}$$

Από τις τιμές των ταχυτήτων να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη δύναμη που να παράγει έργο στο σώμα, π.χ. αντίσταση του αέρα.

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε στο σχήμα την δύναμη  $F$  που ασκεί η ράβδος στο σώμα στα σημεία A, B και Γ. Να φαίνεται καθαρά η φορά της σε κάθε σημείο.

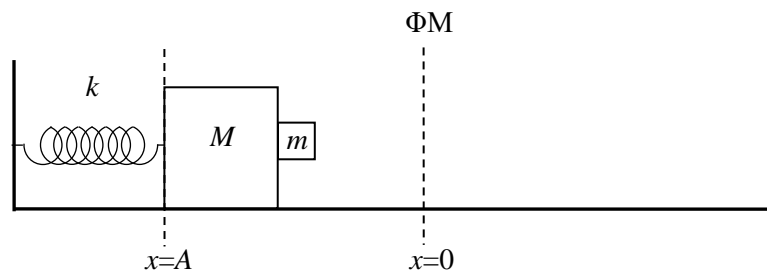
### Κατακόρυφος κύκλος (νήμα)

Διαθέτουμε νήμα με όριο θραύσης  $T_{\thetaραύσης} = 60 \text{ N}$ . Κατασκευάζουμε εκκρεμές με μήκος νήματος  $\ell = 1 \text{ m}$  στο οποίο κρεμάμε σώμα μάζας  $M = 5 \text{ kg}$ . Ποιο είναι το μέγιστο ύψος από το οποίο μπορούμε να αφήσουμε ελεύθερο το εκκρεμές να ταλαντωθεί ώστε το νήμα να μην σπάσει όταν θα διέρχεται από το κατώτατο σημείο της τροχιάς Κ ;



Αντικαθιστούμε την προηγούμενη μάζα  $M$  με μια μικρότερη μάζα  $m = 1 \text{ kg}$ . Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα  $v$  με την οποία πρέπει να την εκτοξεύσουμε οριζόντια από το σημείο Κ ώστε το εκκρεμές να εκτελέσει ανακύκλωση ;

### Κατακόρυφη στατική τριβή



Σπρώχνουμε τα σώματα  $M$  και  $m$  ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί και στη συνέχεια τα αφήνουμε να κινηθούν πάνω στο οριζόντιο λείο επίπεδο. Το σώμα  $m$  δεν είναι συγκολλημένο στο σώμα  $M$  και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τους είναι  $\mu$ . Για

ποια τιμή του  $x$  το σώμα  $m$  δεν θα μπορεί πλέον να συγκρατηθεί στη θέση του και θα ολισθήσει προς τα κάτω;

A)  $\frac{(M+m)g}{k\mu}$       B)  $\frac{mg}{k\mu}$       Γ)  $\frac{Mg}{k\mu}$       Δ)  $\frac{Mmg}{(M+m)k\mu}$       E)  $\frac{(1+m/M)mg}{k\mu}$

A) Στην οριζόντια διεύθυνση τα σώματα κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση αφού η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα είναι μόνο η δύναμη του ελατηρίου

$$\sum_{m+M} F_x = -kx \Rightarrow (m+M)a = -kx \Rightarrow a = -\omega^2 x \quad \text{με} \quad \omega^2 = \frac{k}{M+m}$$

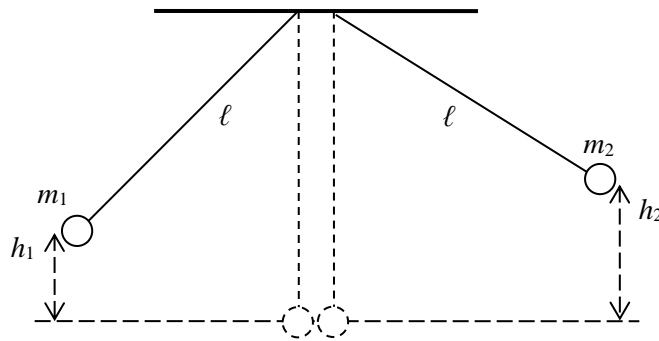
Οπότε για το σώμα  $m$  ισχύει:  $\sum_m F_x = ma \Rightarrow N = -m\omega^2 x$

Η κάθετη αντίδραση είναι η δύναμη επαναφοράς για το σώμα  $m$ .

Για να ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση θα πρέπει η στατική τριβή να είναι ίση με το βάρος του:  $B = f_s \leq \mu|N| = \mu m\omega^2 x \Rightarrow mg = \mu m\omega^2 x_{\min} \Rightarrow x_{\min} = \frac{(M+m)g}{k\mu}$

Σε αυτήν τη θέση η τριβή δεν επαρκεί για να κρατήσει το σώμα ψηλά και αυτό θα ολισθήσει προς το οριζόντιο δάπεδο. Η επαφή με το σώμα  $M$  δεν έχει χαθεί ακόμα. Θα χαθεί για  $x=0$ .

### Κούνια του Νεύτωνα 1



Οι δύο σφαίρες ίσης μάζας  $m_1=m_2$  αφήνονται από τα αντίστοιχα ύψη και συγκρούονται ελαστικά όταν τα νήματά τους είναι κατακόρυφα. Η σφαίρα 1 μετά την κρούση ανέρχεται σε ύψος:

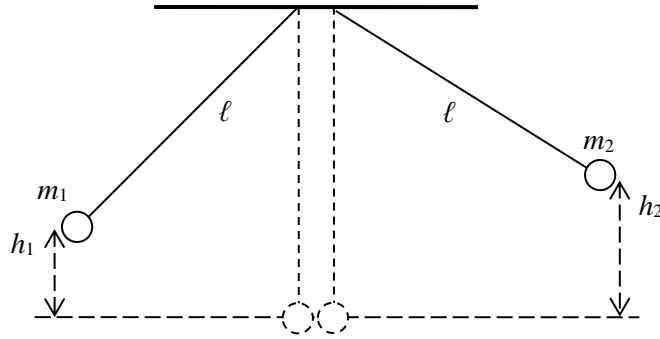
A)  $h_1$       B)  $h_2$       Γ)  $\frac{h_1+h_2}{2}$       Δ)  $\frac{h_2-h_1}{2}$       E)  $\sqrt{h_1(h_1+h_2)}$

B)

Αφού τα σώματα έχουν ίσες μάζες, κατά την ελαστική κρούση θα ανταλλάξουν ταχύτητες και άρα από ΑΔΜΕ θα ανταλλάξουν και ύψη.

### Κούνια του Νεύτωνα 2





Οι δύο σφαίρες, με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα, αφήνονται από τα αντίστοιχα ύψη και συγκρούονται ελαστικά όταν τα νήματά τους είναι κατακόρυφα. Βρείτε τα ύψη στα οποία θα ανέλθουν οι σφαίρες αν  $h_1=4$  cm,  $m_1=1,5$  kg,  $h_2=9$  cm,  $m_2=0,5$  kg.

Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση θα είναι (από ΑΔΜΕ) :

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 4} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 4} = 40\sqrt{5} \text{ cm/s},$$

$$v_2 = -\sqrt{2gh_2} = -\sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 9} = -60\sqrt{5} \text{ cm/s}$$

Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση υπολογίζονται ως συνήθως από :

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{1}{2} 40\sqrt{5} + \frac{1}{2} (-60\sqrt{5}) = -10\sqrt{5} \text{ cm/s} \quad \text{και}$$

$$v'_2 + v_2 = v'_1 + v_1 \Rightarrow v'_2 = v'_1 + v_1 - v_2 = -10\sqrt{5} + 40\sqrt{5} - (-60\sqrt{5}) = 90\sqrt{5} \text{ cm/s}$$

Τα ύψη που θα ανέλθουν μετά την κρούση (πάλι από ΑΔΜΕ) θα είναι :

$$h'_1 = \frac{v'^2_1}{2g} = \frac{100 \cdot 5}{2000} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{και}$$

$$h'_2 = \frac{v'^2_2}{2g} = \frac{8100 \cdot 5}{20000} = \frac{81}{40} = 20,25 \text{ cm}$$

Επαλήθευση

$$m_1gh_1 + m_2gh_2 = m_1gh'_1 + m_2gh'_2 \Rightarrow m_1h_1 + m_2h_2 = m_1h'_1 + m_2h'_2 \Rightarrow$$

$$1,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 9 = 1,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 20,25 \Rightarrow 6 + 4,5 = 0,375 + 10,125 \Rightarrow$$

$$10 = 10$$

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο που δίνει τα τελικά ύψη από τα αρχικά κάνουμε τις πράξεις:

$$h'_1 = \frac{v'^2_1}{2g} = \frac{1}{2g} \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \right]^2 = \frac{1}{2g(m_1 + m_2)^2} [(m_1 - m_2)^2 v_1^2 + 2 \cdot (m_1 - m_2) 2m_2 v_1 v_2 + 4m_2^2 v_2^2] =$$

$$= \frac{1}{2g(m_1 + m_2)^2} [(m_1 - m_2)^2 2gh_1 - 2 \cdot (m_1 - m_2) 2m_2 2g\sqrt{h_1 h_2} + 4m_2^2 2gh_2] =$$

$$= \frac{(m_1 - m_2)^2 h_1 - 4m_2(m_1 - m_2)\sqrt{h_1 h_2} + 4m_2^2 h_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{(1,5 - 0,5)^2 4 - 4 \cdot 0,5(1,5 - 0,5)\sqrt{4 \cdot 9} + 4 \cdot 0,5^2 \cdot 9}{(1,5 + 0,5)^2} = \frac{4 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 9}{4} = \frac{13 - 12}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ cm}$$

$$h_2' = \frac{v_2'^2}{2g} = h_1'(1 \leftrightarrow 2)$$

### Σύγκρουση στο CM

Δύο υλικά σημεία συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με αντίθετες ορμές. Να δείξετε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση απλά αναστρέφονται. Δηλαδή  $v_1' = -v_1$  και  $v_2' = -v_2$ .

Αντίθετες ορμές αρχικά σημαίνει :  $p_1 = -p_2 \Rightarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$

(1)

Οι τελικές ταχύτητες δίνονται από τους γνωστούς τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{και} \quad v_2' = v_2' \text{ (με } 1 \leftrightarrow 2) \quad (2)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (1) στην (2) παίρνουμε απευθείας :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2 - 2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = -v_1$$

Παρόμοια με τον αντίστοιχο τύπο και για την  $v_2'$

$$\text{Ή από τη σχέση } v_2' + v_2 = v_1' + v_1 \Rightarrow v_2' + v_2 = 0 \Rightarrow v_2' = -v_2$$

### Λόγος μαζών 1:3

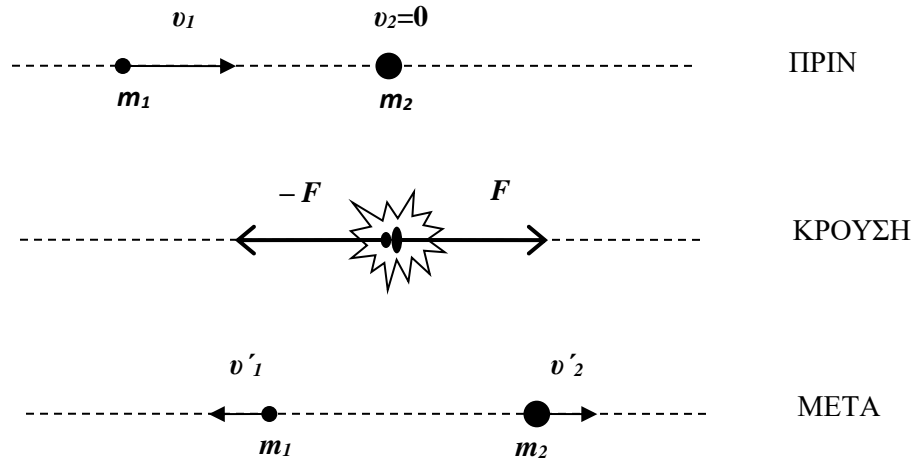
Σώμα μάζας  $m_1$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  $m_2 = 3m_1$ .

Να δείξετε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι αντίθετες  $v_1' = -v_2'$ .

Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ v_1 + v_1' &= v_2 + v_2' \end{aligned}$$

καταλήγουμε στους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης (τους οποίους παίρνουμε έτοιμους χωρίς να τους αποδεικνύουμε) :



$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$$

Οπότε για  $v_2=0$  (ακίνητο στόχο) παίρνουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 = \frac{-2m_1}{4m_1} v_1 = -\frac{v_1}{2}$$

$$v'_2 = v_1 - \frac{v_1}{2} - 0 = \frac{v_1}{2}$$

$$\text{Δηλαδή } v'_1 = -v'_2$$

### Εισχώρηση καρφιού

Μια κοτρώνα 5 kg αφήνεται να πέσει πάνω σε ένα όρθιο καρφί το οποίο βρίσκεται με ταχύτητα 10 m/s και το καρφώνει 0,025 m μέσα σε ξύλο.

1) Αν η πέτρα έμεινε διαρκώς σε επαφή με το καρφί, πόση μέση δύναμη του άσκησε όσο εισχωρούσε στο ξύλο.

- A) 10 N
- B) 100 N
- Γ) 1.000 N
- Δ) 10.000 N
- E) 100.000 N

2) Πόσο διήρκησε η εισχώρηση ?

- A) 5 s
- B) 0,5 s
- Γ) 0,05 s
- Δ) 0,005 s
- E) 0,0005 s

1: Δ)      2: Δ)

Και τα δύο ερωτήματα απαντώνται από τις σχέσεις :  $\frac{\Delta K}{\Delta x} = F_{οδ} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

Η πρώτη είναι το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας και η δεύτερη ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα.

Η συνισταμένη δύναμη στην πέτρα είναι :  $F_{ολ} = N_{από\ καρφί} - B$  οπότε

$$N_{από\ καρφί} = F_{ολ} + B = \frac{\Delta K}{\Delta x} + B = \frac{0 - mv^2/2}{\Delta x} + mg = -\frac{5(-10)^2/2}{-0,025} + 5 \cdot 9,8 = \frac{2,5 \cdot 100}{0,025} + 48 = 100 \cdot 100 + 48 \Rightarrow$$

$$N_{από\ καρφί} = 10.048 \text{ N}$$

Το καρφί δέχεται από την πέτρα την αντίθετη δύναμη  $N_{στο\ καρφί} = -10.048 \text{ N}$  άρα Δ)

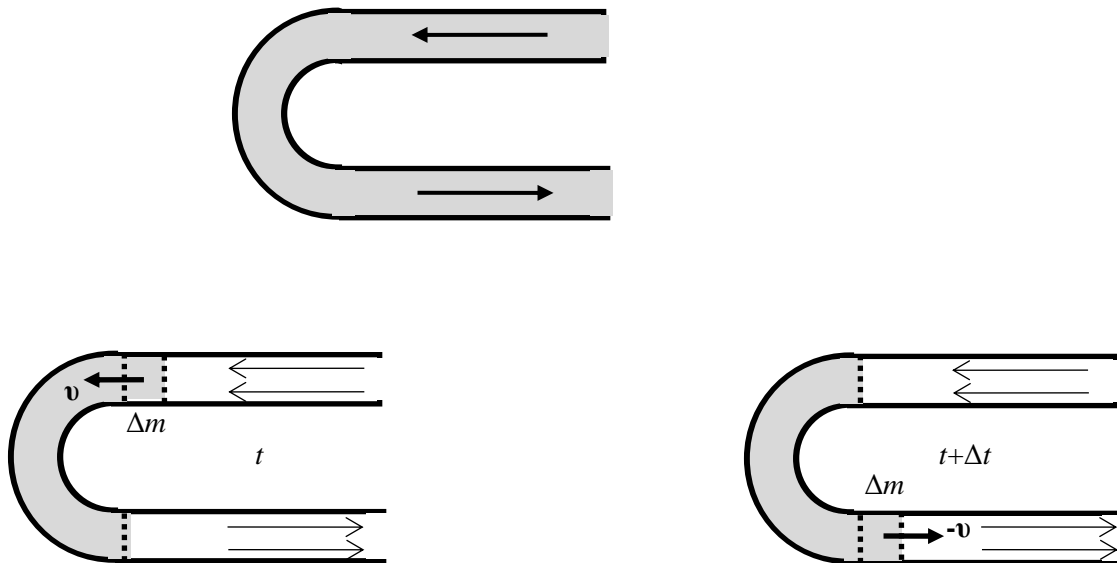
Η εισχώρηση του καρφιού διήρκησε

$$F_{ολ} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F_{ολ}} = \frac{0 - mv}{N_{από\ καρφί} - B} = \frac{0 - 5 \cdot (-10)}{10.048 - 48} = \frac{50}{10.000} = 0,005 \text{ s}$$

231.

### Δύναμη σε σωλήνα

Ένας σωλήνας που περιλαμβάνει ημικυκλική στροφή διοχετεύει νερό με παροχή  $\Delta V/\Delta t = 10 \text{ L/s}$ . Δηλαδή από κάθε διατομή του περνούν 10 L νερό κάθε δευτερόλεπτο. Η ταχύτητα του νερού είναι 15 m/s και η πυκνότητά του  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Πόση δύναμη δέχεται το ημικυκλικό μέρος του σωλήνα από την κίνηση του νερού ;



Τη μια χρονική στιγμή μια μικρή μάζα νερού μπαίνει στο ημικόκλιο και την επόμενη χρονική στιγμή μετά από  $\Delta t$  μια άλλη ίση μάζα νερού βγαίνει από το ημικόκλιο με αντίθετη ταχύτητα. Όλο το υπόλοιπο νερό στο ημικόκλιο δεν αλλάζει την κατάσταση του. Η εικόνα είναι παρόμοια με τη μπάλα που αναπηδά στο πάτωμα. Η δύναμη στον ημικυκλικό σωλήνα προκαλείται από την αλλαγή ορμής της μικρής μάζας νερού σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ .

Η μικρή μάζα νερού εκφράζεται μέσω της πυκνότητας και του όγκου :  $\Delta m = \rho \Delta V$

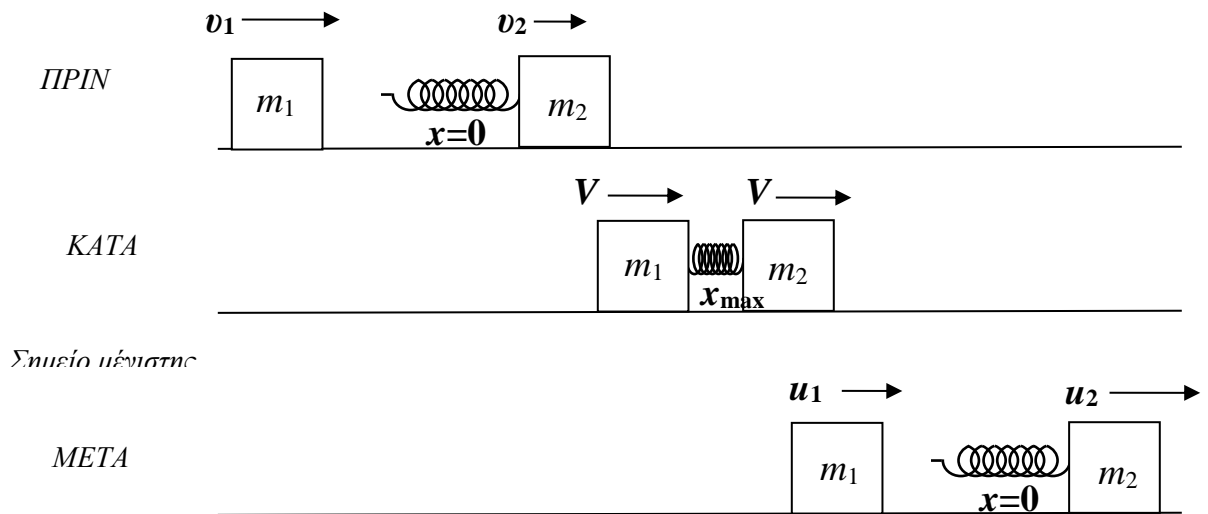
Η παροχή του νερού είναι  $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 10 \frac{\text{L}}{\text{s}} = 10 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Η δύναμη που δέχεται το νερό είναι προς τα δεξιά :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot (-v) - \Delta m \cdot v}{\Delta t} = -2v \frac{\Delta m}{\Delta t} = -2v\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = -2 \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = -300 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -300 \text{N}$$

Άρα ο ημικυκλικός σωλήνας δέχεται δύναμη 300 N προς τα αριστερά.

### Ελαστική κρούση μέσω ελατηρίου



Οι μάζες του σχήματος ολισθαίνουν χωρίς τριβή στο οριζόντιο δάπεδο. Η μάζα  $m_1 = 6 \text{ kg}$  κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_1 = 1,8 \text{ m/s}$  και συγκρούεται ελαστικά με την μάζα  $m_2 = 3 \text{ kg}$  που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_2 = 0,9 \text{ m/s}$ . Το ελατήριο που είναι προσαρμοσμένο στη μάζα 2 έχει σταθερά  $k = 200 \text{ N/m}$ .

A) Να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών  $u_1$  και  $u_2$  μετά την κρούση

B) Να βρείτε την κοινή ταχύτητα  $V$  των μαζών στο σημείο πλησιέστερης προσέγγισης όπου το ελατήριο έχει την μέγιστη συσπείρωση του.

Γ) Πόση είναι η μέγιστη συσπείρωση  $x_{\text{max}}$  του ελατηρίου?

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{6 - 3}{6 + 3} \cdot 1,8 + \frac{2 \cdot 3}{6 + 3} \cdot 0,9 = \frac{3}{9} \cdot 1,8 + \frac{6}{9} \cdot 0,9 = 3 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 \Rightarrow$$

$$u_1 = 1,2 \text{ m/s}$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{3 - 6}{6 + 3} \cdot 0,9 + \frac{2 \cdot 6}{6 + 3} \cdot 1,8 = \frac{-3}{9} \cdot 0,9 + \frac{12}{9} \cdot 1,8 = -3 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$u_2 = 2,1 \text{ m/s}$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow V = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} = \frac{6 \cdot 1,8 + 3 \cdot 0,9}{6 + 3} = 6 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow kx_{\max}^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + (m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow$$

$$200x_{\max}^2 = 6 \cdot 1,8^2 + 3 \cdot 0,9^2 - 9 \cdot 1,5^2 = 1,62 \Rightarrow x_{\max}^2 = \frac{1,62}{200} = 0,0081 \Rightarrow x_{\max} = 0,09 \text{ m}$$

Πιο γρήγορα

$$E = K + U_{\varepsilon\lambda} = K_{CM} + K_{\sigma\chi\epsilon\tau} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$E_0 = E_{CA} \Rightarrow K_{CM0} + K_{\sigma\chi\epsilon\tau0} + U_{\varepsilon\lambda0} = K_{CMCA} + K_{\sigma\chi\epsilon\tauCA} + U_{\varepsilon\lambdaCA} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 + 0 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max}^2 = \frac{\mu}{k} v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{k} (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow$$

$$x_{\max}^2 = \frac{3 \cdot 9}{3+9} \cdot \frac{1}{200} (1,8 - 0,9)^2 = \frac{2}{200} 0,9^2 = \frac{0,9^2}{10^2} \Rightarrow x_{\max} = 0,09 \text{ m}$$

### Έκρηξη σε τρία θραύσματα

Αρχικά ακίνητο σώμα διασπάται σε τρία θραύσματα. Δύο από αυτά έχουν ίσες μάζες και ταχύτητες (1,2,0) και (2,3,-2). Το τρίτο θραύσμα έχει μάζα μισή από αυτή των άλλων δύο. Ποια είναι η ταχύτητά του;

A) (-3,-1,4) B) (-6,-2,8) Γ) (-6,-2,-2) Δ) (-6,-10,4) E) (3,-1,-4)

Δ)

$$v_{3x} = -6$$

$$2m(1,2,0) + 2m(2,3,-2) + m(v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}) = 0 \Rightarrow v_{3y} = -10$$

$$v_{3z} = 4$$

### Η δύναμη είναι η βαθμίδα της δυναμικής ενέργειας

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος δίνεται από την έκφραση  $U(x, y) = 3xy^2 - 2x^2$ . Η δύναμη που ασκείται στο σώμα όταν βρίσκεται στη θέση (-1,1) είναι :

A)  $\vec{F} = (-7, 6)$

B)  $\vec{F} = (-3, 2)$

Γ)  $\vec{F} = (3, -2)$

Δ)  $\vec{F} = (-1, 1)$

E)  $\vec{F} = (-3, -2)$

A)  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} = -(3y^2 - 4x)\hat{x} - 6xy\hat{y} = (4x - 3y^2, -6xy) \Rightarrow$

$$\vec{F}(-1,1) = (4(-1) - 3 \cdot 1^2, -6(-1)1) = (-7, 6)$$

**Ταχύτητα κυκλικής τροχιάς  $v_c$  στην βαρύτητα**

$$r = R = \text{σταθ}$$

Η βαρυτική δύναμη  $F = GM \frac{m}{r^2}$  είναι η κεντρομόλος :

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow GM \frac{m}{R^2} = m \frac{v_c^2}{R} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Π.χ. ταχύτητα διεθνούς διαστημικού σταθμού που βρίσκεται σε ύψος 409 km πάνω από την επιφάνεια της Γης

$$M_E = (5,9722 \pm 0,0006) \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6,67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\mu = GM = 39,860 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$$

$$R_E = 6.371 \text{ km}$$

$$R = R_E + h = 6.371 + 409 = 6.780 \text{ km}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{39,860 \times 10^{13}}{0,6780 \times 10^7}} = 10^3 \sqrt{58,7906} = 7,67 \text{ km/s}$$

$$\text{Περίοδος } T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6.780}{7,67} = 5.555,7 \text{ s} \approx 92,6 \text{ min}$$

Π.χ. ταχύτητα δορυφόρου σε ύψος λίγο πάνω από την επιφάνεια της Γης (tree top satellite)

$$R = R_E$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{\frac{39,860 \times 10^{13}}{0,6371 \times 10^7}} = 10^3 \sqrt{62,56475} = 7,91 \text{ km/s}$$

**Περίοδος κυκλικής τροχιάς**

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) R^3 \quad \text{3ος νόμος Kepler}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

**Γεωστατική ή Γεωσύγχρονη τροχιά**

Δορυφόρος γύρω από τον Ισημερινό με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης ώστε να φαίνεται στατικός πάνω από το ίδιο πάντα σημείο της επιφάνειας της Γης.

$$M_E = (5,9722 \pm 0,0006) \times 10^{24} \text{ kg}$$

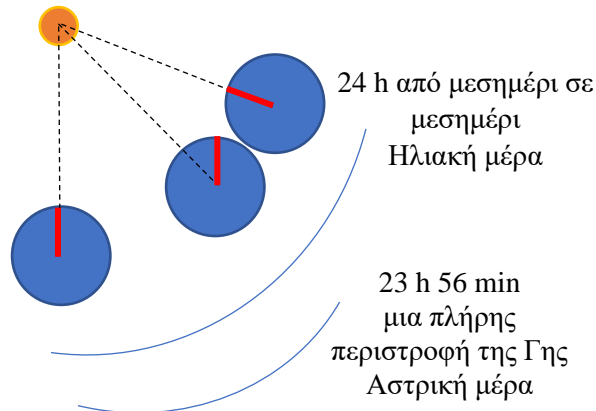
$$R_E = 6.371 \text{ km}$$

$$G = 6,67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\mu = GM_E = 39,8603 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$$

Ηλιακή ημέρα  $T = 24 \text{ h} = 1.440 \text{ min} = 86.400 \text{ s}$

Αστρική ημέρα  $T_{\text{sidereal}} = 86.164,0905 \text{ s} = 23\text{h } 56 \text{ min } 4,0905 \text{ s} \approx 1436 \text{ min}$



$$F = \mu \frac{m}{r^2}$$

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow \mu \frac{m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{\mu}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{39,8603 \times 10^{13} \cdot 864^2 \times 10^4}{4 \cdot (3,1415)^2}} \Rightarrow$$

$$r = 10^6 \sqrt[3]{\frac{39,8603 \cdot 864^2 \times 0,1}{4 \cdot (3,1415)^2}} = 42,241 \times 10^6 \text{ m} = 42.241 \text{ km}$$

$$r_s = 10^6 \sqrt[3]{\frac{39,860 \cdot 861,640905^2 \times 0,1}{4 \cdot (3,1415)^2}} = 42,164 \times 10^6 \text{ m} = 42.164 \text{ km}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{6.371}{42.241} = 6,630$$

$$h = r - R = 42.241 - 6.371 = 35.870 \text{ km}$$

$$\frac{h}{R} = 5,63$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 42.164 \text{ km}}{86.164,0905 \text{ s}} = 3,0746 \text{ km/s}$$

**Ενέργεια κυκλικής τροχιάς**

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R}$$



$$U = -m \frac{GM}{R}$$

Παρατηρούμε ότι  $U = -2K \Rightarrow K = -\frac{U}{2}$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m \frac{GM}{R} - m \frac{GM}{R} = -\frac{GMm}{2R} < 0$$

Παρατηρούμε ότι

$$E = -K \text{ και } E = \frac{U}{2}$$

### Στροφορμή κυκλικής τροχιάς

$$L = mv_c R = m \sqrt{\frac{GM}{R}} R = m \sqrt{GMR}$$

### Ταχύτητα διαφυγής $v_{esc}$

Η απαιτούμενη ταχύτητα σε απόσταση  $r$  ώστε το σώμα μόλις και να φτάσει στο άπειρο διαφεύγοντας από την βαρυτική έλξη.

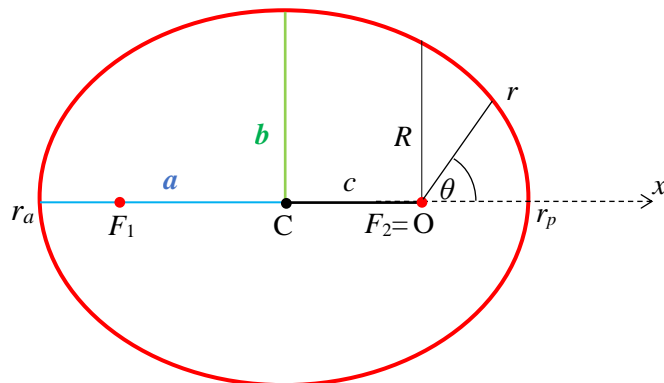
$$E_r = E_\infty \Rightarrow U_r + K_r = U_\infty + K_\infty \Rightarrow -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = 0 + 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = v_c \sqrt{2}$$

Π.χ. ταχύτητα διαφυγής από τη Γη

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39,860 \times 10^{13}}{6.371 \times 10^3}} = 10^5 \sqrt{0,01251295} = 11,2 \text{ km/s}$$

### Ενέργεια ελλειπτικής τροχιάς

Η γεωμετρία της έλλειψης δίνεται στο παρακάτω σχήμα



$$\begin{aligned} a, & \quad 0 < e < 1 \\ b & = a\sqrt{1-e^2} \\ c & = ea \\ R & = a(1-e^2) \\ a & = \frac{r_a + r_p}{2} \\ b & = \sqrt{r_a r_p} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = 1 \\ r & = \frac{R}{1 + e \cos \theta} \end{aligned}$$

Στο απόκεντρο (αποαψίδα)  $r_a$  και στο περίκεντρο (περιαψίδα)  $r_p$  η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα ενώ η στροφορμή και η ενέργεια διατηρούνται.

$$E = \frac{1}{2} m v_a^2 - m \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - m \frac{GM}{r_p} \quad (1)$$

$$L = m v_a r_a = m v_p r_p \quad (2)$$

Από την (1) χρησιμοποιώντας την (2) βρίσκουμε την ταχύτητα  $v_a$  σαν συνάρτηση του  $r_a$  και υπολογίζουμε την  $E$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_a^2 - \frac{GM}{r_a} &= \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{GM}{r_p} \Rightarrow \frac{1}{2} v_a^2 - \frac{1}{2} \frac{r_a^2}{r_p^2} v_a^2 = GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} v_a^2 \left( \frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2} \right) = GM \frac{r_p - r_a}{r_p r_a} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} v_a^2 \frac{(r_p - r_a)(r_p + r_a)}{r_p} &= GM \frac{r_p - r_a}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2} v_a^2 2a = GM \frac{r_p}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2} v_a^2 = GM \frac{2a - r_a}{2ar_a} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} v_a^2 &= GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την  $a = \frac{r_a + r_p}{2}$ .

Οπότε η ενέργεια της τροχιάς είναι

$$E = \frac{1}{2} m v_a^2 - m \frac{GM}{r_a} = m GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right) - m \frac{GM}{r_a} \Rightarrow E = -\frac{GMm}{2a}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ενέργεια της κυκλικής τροχιάς για  $a=r$ .

### Ταχύτητα ελλειπτικής τροχιάς

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - m \frac{GM}{r} = -m \frac{GM}{2a} \Rightarrow v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς για  $r=a=R$ .

### Στροφορμή ελλειπτικής τροχιάς

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις  $r_a + r_p = 2a$  και  $r_a r_p = b^2$

$$\frac{1}{2} v_a^2 = GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right) \Rightarrow v_a^2 = 2GM \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_a + r_p} \right) = 2GM \left( \frac{r_a + r_p - r_a}{r_a (r_a + r_p)} \right) \Rightarrow v_a^2 = \frac{GM}{a} \frac{r_p}{r_a} \Rightarrow$$

$$v_a^2 = \frac{GM}{a} \frac{b^2}{r_a^2} \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{b}{r_a}}$$

$$L = m\omega_a r_a = m\sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{b}{r_a} r_a \Rightarrow L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε τη στροφορμή της κυκλικής τροχιάς για  $a=b=R$ .

### Περίοδος ελλειπτικής τροχιάς

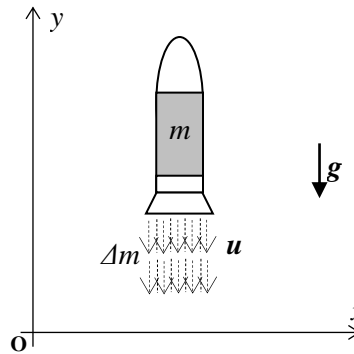
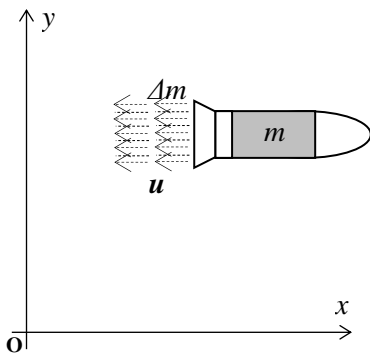
Η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή (2<sup>ος</sup> νόμος Kepler) και είναι ανάλογη της στροφορμής. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με  $A = \pi ab$  (δείτε ότι παίρνουμε το εμβαδόν του κύκλου για  $a=b=R$ )

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \frac{\pi ab}{T} = mb\sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{1}{2m} \Rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \quad \text{3<sup>ος</sup> νόμος Kepler}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την περίοδο της κυκλικής τροχιάς για  $a=R$ .

### Εξισώσεις πυραύλου



Σύστημα = πύραυλος (πυλότηριο, δεξαμενή καυσίμων, μηχανή)+εναπομείναντα καύσιμα

Μάζα πυραύλου τη χρονική στιγμή  $t$ :

$$m_R(t)$$

Μάζα πυραύλου την επόμενη χρονική στιγμή  $t+dt$ :

$$m_R(t+dt) = m_R(t) - dm$$

$$\frac{dm_R(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}$$

Ταχύτητα πυραύλου ως προς το σημείο αναφοράς O :

$$\vec{v}_R \equiv \vec{v}_{R/O}$$

Ταχύτητα καυσαερίων ως προς τον πύραυλο :

$$\vec{u}_E \equiv \vec{v}_{E/R}$$

Ταχύτητα καυσαερίων ως προς το σημείο αναφοράς O :

$$\vec{v}_E \equiv \vec{v}_{E/O} = \vec{v}_{E/R} + \vec{v}_{R/O} = \vec{u}_E + \vec{v}_R$$

Ορμή συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$ :

$$\vec{p}(t) = m_R(t)v_R(t)$$

Ορμή συστήματος την επόμενη χρονική στιγμή  $t+dt$ :

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) - \vec{v}_E dm = \vec{p}(t) - (\vec{u}_E + \vec{v}_R) dm$$

Ρυθμός μεταβολής ορμής :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}(\vec{u}_E + \vec{v}_R) = \frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E + \vec{v}_R)$$

Όμως μαθηματικώς :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_R(t)\vec{v}_R(t))}{dt} = \frac{dm_R}{dt}\vec{v}_R + m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt}$$

Εξισώνοντας παίρνουμε την εξίσωση του πυραύλου :

$$\frac{dm_R}{dt}\vec{v}_R + m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E + \vec{v}_R) \Rightarrow m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} \quad (1)$$

Αν ο πύραυλος δεν είναι στο κενό αλλά μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων τότε στη μεταβολή της ορμής του θα συνεισφέρει και η εξωτερική δύναμη, έστω βαρυτική  $\vec{F} = m_R \vec{g}$  :

Ορμή συστήματος την επόμενη χρονική στιγμή  $t+dt$ :

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) - \vec{v}_E dm + \vec{F} dt = \vec{p}(t) - (\vec{u}_E + \vec{v}_R) dm + \vec{F} dt \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}(\vec{u}_E + \vec{v}_R) + \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E + \vec{v}_R) + \vec{F}$$

Εξισώνοντας πάλι με

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_R(t)\vec{v}_R(t))}{dt} = \frac{dm_R}{dt}\vec{v}_R + m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt}$$

παίρνουμε την εξίσωση του πυραύλου στο πεδίο βαρύτητας :

$$m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} + \vec{F} \Rightarrow m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} + m_R \vec{g} \quad (2)$$

Όταν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη η κίνηση είναι μονοδιάστατη:

$$m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} \xrightarrow{\text{κίνηση σε μια διάσταση } x} m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \Rightarrow mdv = -udm \quad (3)$$

Όταν η κίνηση είναι κατακόρυφη στο πεδίο βαρύτητας η κίνηση είναι επίσης μονοδιάστατη :

$$m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} + m_R \vec{g} \xrightarrow{\text{κίνηση σε μια διάσταση } y} m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg \Rightarrow mdv = -udm - mg \quad (4)$$

Όπου στις παραπάνω εξισώσεις παραλείψαμε τον δείκτη  $R$  (rocket).

**Γιατί επιθυμούμε να εμφανίζεται η σχετική ταχύτητα  $u$  ;**

Επειδή η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων είναι σταθερή. Προσδιορίζεται από θερμοχημεία και διατήρηση της ενέργειας.

Η εκλυόμενη ενέργεια από την καύση θα είναι ανάλογη της μάζας  $\Delta m$  που αντιδρά και μπορούμε να γράψουμε :

$$Q = \lambda \Delta m \Rightarrow dQ = \lambda dm$$

όπου  $\lambda$  (J/kg=m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>) κάποια σταθερά από τη θερμοχημεία. Αν όλη αυτή η χημική ενέργεια μετατραπεί σε κινητική θα έχουμε για την κινητική ενέργεια στο κέντρο μάζας

$$K' = Q \Rightarrow dK' = dQ$$

Όμως  $K' = \frac{1}{2} \mu u^2$  όπου  $u$  η σχετική ταχύτητα των δύο «σωμάτων»  $m$  και  $\Delta m$  και  $\mu$  η ανηγμένη μάζα τους. Αυτή είναι

$$\mu = \frac{m \Delta m}{m + \Delta m} \xrightarrow[\Delta m \rightarrow 0]{\Delta m \rightarrow 0} dm$$

$$\text{Άρα } dK' = \frac{1}{2} dm u^2$$

$$\text{Οπότε θα έχουμε } dK' = dQ \Rightarrow \frac{1}{2} dm u^2 = \lambda dm \Rightarrow u = \sqrt{2\lambda}$$

Η ταχύτητα των καυσαερίων εξαρτάται αποκλειστικά από το καύσιμο που χρησιμοποιούμε. Τα διαθέσιμα καύσιμα που υπάρχουν δίνουν τιμές από 2,2 έως 4,5 km/s.

Ο ρυθμός μείωσης της μάζας  $dm/dt$  ελέγχεται και μπορεί να διατηρηθεί σταθερός. Είναι ανάλογος της ταχύτητας της αντίδρασης η οποία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες (συγκέντρωση αντιδρώντων, θερμοκρασία, πίεση, κλπ.) τους οποίους μπορούμε να ρυθμίζουμε.

### Λύση στο κενό

Παραλείπουμε το δείκτη  $R$  και αναγνωρίζουμε ότι η κίνηση πραγματοποιείται σε μια διάσταση

$$m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} \xrightarrow[\text{κίνηση σε μια διάσταση } x]{\text{κίνηση σε μια διάσταση } x}} m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \Rightarrow mdv = -udm$$

$$\text{Θεωρούμε σταθερό ρυθμό καύσης } \frac{dm}{dt} = -c = \frac{m - m_0}{t}, \quad dm = -c dt \Leftrightarrow dt = -\frac{dm}{c}$$

και σταθερή ταχύτητα  $u$  εκτόξευσης των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο. Τα δύο αυτά μεγέθη θεωρούνται δεδομένα του προβλήματος.

Ολοκλήρωση :

$$mdv = -udm = -udm \Rightarrow dv = -u \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \Rightarrow v - v_0 = -u \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) \Rightarrow \frac{\Delta v}{u} = \ln \left( \frac{m_0}{m} \right)$$

$$\Delta v = u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - ct} \right)$$

$v = v_0 - u \ln \left( 1 - \frac{c}{m_0} t \right)$  (ο λογάριθμος είναι αρνητικός επειδή το όρισμά του είναι μικρότερο από τη μονάδα και άρα η ταχύτητα αυξάνει)

$$\frac{\Delta v}{u} = \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{\Delta v/u} \Rightarrow m = m_0 e^{-\Delta v/u}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση του πυραύλου

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \Rightarrow dx = v_0 dt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) dt = v_0 dt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \left( \frac{-dm}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^x dy = v_0 \int_0^t dt + \frac{u}{c} \int_{m_0}^m \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) dm \Rightarrow$$

$$x = v_0 t + \frac{u}{c} m_0 \int_1^{m/m_0} \ln r dr \quad \text{με} \quad r = \frac{m}{m_0}, \quad dm = m_0 dr$$

Όμως  $\int \ln r dr = r \ln r - r + C$ , οπότε

$$x = v_0 t + \frac{u}{c} m_0 (r \ln r - r) \Big|_1^{m/m_0} = v_0 t + \frac{u}{c} m_0 \left[ \frac{m}{m_0} \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) - \frac{m}{m_0} + 1 \right] =$$

$$= v_0 t + \frac{u}{(m_0 - m)/t} \left[ m \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) - m + m_0 \right] \Rightarrow$$

$$x = (v_0 + u)t + \frac{mut}{m_0 - m} \ln \left( \frac{m}{m_0} \right)$$

### Παράδειγμα

Αγνοούμε την επίδραση της βαρύτητας (που διαρκεί μερικά λεπτά και μειώνεται όπως ο πύραυλος απομακρύνεται από τη Γη από 9,80 σε 8,67), αγνοούμε την αντίσταση του αέρα (που είναι περίπου ίση με το 2 % του βάρους του πυραύλου) και αγνοούμε τις μικρές πλαϊνές ωθήσεις που χρειάζεται ο πύραυλος για να στρίψει ώστε η τελική του ταχύτητα να είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά του. Το καύσιμο που χρησιμοποιούμε δίνει  $u=3,5$  km/s. Τι ποσοστό της αρχικής μάζας του χρειάζεται να κάνει σε καύσιμα ο πύραυλος, ώστε να μπει σε κυκλική τροχιά στο ύψος του διεθνούς διαστημικού σταθμού όπου πρέπει να έχει ταχύτητα  $v = 7,67$  km/s.

Η τελική μάζα του πυραύλου θα είναι

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\Delta v/u} = e^{-7,67/3,5} = 0,1118m_0 = 11,2\%m_0$$

Η μάζα του καυσίμου που χρησιμοποιήθηκε είναι

$$m_{\text{προωθητικό}} = m_0 - m_f = m_0(1 - e^{-\Delta v/u}) = m_0(1 - 0,112) = 0,888m_0 = 88,8\%m_0$$

Άρα θα έχει κάψει σε καύσιμα το 88,8% της μάζας του. Η μάζα του σκάφους και του χρήσιμου φορτίου πρέπει να είναι μικρότερα από 11,2% της συνολικής μάζας του πυραύλου κατά την εκτόξευση. Είναι εντυπωσιακό που με αυτές τις χονδροειδείς προσεγγίσεις πέφτουμε τόσο κοντά σε ρεαλιστικές τιμές. Π.χ. για τον πύραυλο Saturn V : σκάφος 11%, καύσιμα 85%, φορτίο 4%

### Λύση σε σταθερό πεδίο βαρύτητας για κατακόρυφη εκτόξευση

$$mdv = -udm - mgdt$$

$$\frac{dm}{dt} = -c = \frac{m - m_0}{t}, \quad dm = -cdt \Leftrightarrow dt = -\frac{dm}{c}$$

$$mdv = -udm - mgdt = -udm - g \frac{dm}{-c} \Rightarrow dv = \left( \frac{g}{c} - \frac{u}{m} \right) dm \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{m_0}^m \left( \frac{g}{c} - \frac{u}{m} \right) dm \Rightarrow v - v_0 = \frac{g}{c}(m - m_0) - u \ln \left( \frac{m}{m_0} \right)$$

$$v = v_0 + \frac{g}{-t/m - m_0}(m - m_0) + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \Rightarrow v = v_0 - gt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right)$$

Επειδή  $m = m_0 - ct \Rightarrow t = \frac{m_0 - m}{c}$ , ο χρόνος μπορεί να απαλειφθεί

$$v = v_0 - \frac{g}{c}(m_0 - m) + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right)$$

$$v \equiv \frac{dy}{dt} = v_0 - gt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \Rightarrow dy = v_0 dt - gtdt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) dt = v_0 dt - gtdt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \left( \frac{-dt}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_0 - gt) dt + \frac{u}{c} \int_{m_0}^m \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) dm \Rightarrow$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 + \frac{u}{c} m_0 \int_1^{m/m_0} \ln x dx \quad \mu\epsilon \quad x = \frac{m}{m_0}, \quad dm = m_0 dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{u}{c} m_0 (x \ln x - x)_1^{m/m_0} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{u}{c} m_0 \left[ \frac{m}{m_0} \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) - \frac{m}{m_0} + 1 \right] =$$

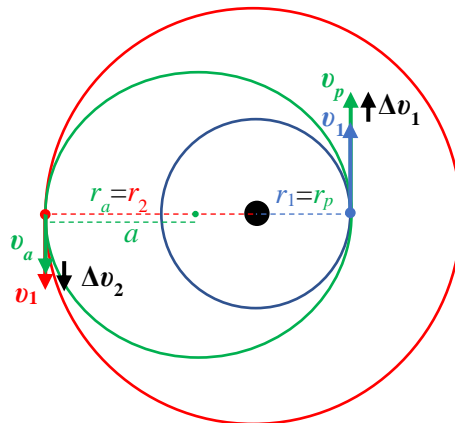
$$= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{u}{m_0 - m/t} \left[ m \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) - m + m_0 \right] \Rightarrow$$

$$y = (v_0 + u)t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{m u t}{m_0 - m} \ln \left( \frac{m}{m_0} \right)$$

### Μετάβαση Hohmann

Στο διάστημα δεν υπάρχουν βενζινάδικα. Αν σου τελειώσουν τα καύσιμα πέθανες. Για το λόγο αυτό δεν χρησιμοποιούμε την προώθηση των πυραύλων μας συνεχώς για να κάνουμε ελιγμούς αλλά προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τη βαρύτητα. Χρησιμοποιούμε προώθηση μόνο για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα που μας επιτρέπουν να πηδάμε από μια τροχιά σε άλλη. Όντας πάνω στην τροχιά μας κινεί το βάρος και δεν χρειάζεται να καίμε καύσιμα

Μια τέτοια μετάβαση είναι η μετάβαση Hohmann. Την χρησιμοποιούμε για να μεταβούμε από μια κυκλική τροχιά ακτίνας  $r_1$  σε κυκλική τροχιά μεγαλύτερης ακτίνας  $r_2 > r_1$  με δύο οστικές προωθήσεις ( $\Delta t \approx 0$ )  $\Delta v_1$  και  $\Delta v_2$  μέσω ενδιάμεσης ελλειπτικής τροχιάς.



$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

1<sup>η</sup> ώθηση

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}, \quad v_p = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \Rightarrow \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\left( 2 - \frac{r_1}{a} \right)} - 1 \right)$$

$$2 - \frac{r_1}{a} = 2 - \frac{2r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2(r_1 + r_2) - 2r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2r_2}{r_1 + r_2}$$



$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1 \right)$$

2<sup>η</sup> ώθηση

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}, \quad v_a = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \dots = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} \right)$$

Ο χρόνος μετάβασης θα είναι το μισό της περιόδου της ελλειπτικής τροχιάς που υπολογίζεται από τον 3<sup>ο</sup> νόμο του Kepler

$$t_H = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{2GM}}$$

Αριθμητική εφαρμογή

Από τον διεθνή διαστημικό σταθμό να πάμε σε γεωστατική τροχιά.

$$r_1 = 6.780 \text{ km}, \quad v_1 = 7,67 \text{ km/s}$$

$$r_2 = 42.164 \text{ km}, \quad v_2 = 3,07 \text{ km/s}$$

$$a = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{6.780+43.164}{2} = 24.472 \text{ km}$$

$$\mu = GM_E = 39,8603 \times 10^{13} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

Μέτρο ταχύτητας περιγείου ελλειπτικής τροχιάς

$$v_p = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{39,8603 \times 10^{13} \left( \frac{2}{6.780} - \frac{1}{24.472} \right)} 10^{-3} = 10,06 \text{ km/s}$$

Μέτρο ταχύτητας απόγειου ελλειπτικής τροχιάς

$$v_a = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{39,8603 \times 10^{13} \left( \frac{2}{42.164} - \frac{1}{24.472} \right)} 10^{-3} = 1,62 \text{ km/s}$$

1<sup>η</sup> πυροδότηση πυραύλου και είσοδος στην ελλειπτική τροχιά

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = 10,06 - 7,67 = 2,39 \text{ km/s}$$

Παραμονή στην ελλειπτική τροχιά για

$$t_H = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \pi \sqrt{\frac{(24,472 \times 10^6)^3}{3,98603 \times 10^{14}}} = 19.049,51 \text{ s} = 5 \text{ h } 17 \text{ min } 29,51 \text{ s}$$

μέχρι να φτάσουμε στο απόγειό της.

2<sup>η</sup> πυροδότηση πυραύλου και είσοδος στην γεωστατική τροχιά

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = 3,07 - 1,62 = 1,45 \text{ km/s}$$

Η συνολική μεταβολή των μέτρων της ταχύτητας είναι

$$\Delta v_{oz} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2,39 + 1,45 = 3,84 \text{ km/s}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά που θα χρειαζόμασταν για να πετύχουμε ταχύτητα διαφυγής στην απόσταση  $r_1$ . Αν οι δύο ωθήσεις πραγματοποιούνταν ταυτόχρονα θα εκτοξευόμασταν εκτός πεδίου βαρύτητας της Γης και δεν θα επιστρέφαμε.

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} = \sqrt{2}v_1, \quad \Delta v_{esc} = v_{esc} - v_1 = (\sqrt{2} - 1)v_1 = 0,414 \cdot 7,67 = 3,18 \text{ km/s}$$

Έστω ότι έχουμε τα καλύτερα διαθέσιμα καύσιμα με  $u = 4,50 \text{ km/s}$ . Αν η μάζα του σκάφους είναι 10 % της συνολικής μάζας του πυραύλου τι ποσοστό των καυσίμων μας καταναλώνουμε με αυτό τον ελιγμό? Έχουμε αρκετά καύσιμα για να επιστρέψουμε στην αρχική μας τροχιά αφού πάλι θα χρειαστούμε τις ίδιες μεταβολές ταχύτητας με την ανάστροφη σειρά και στην αντίθετη κατεύθυνση?

$$\begin{aligned} \text{Συνολική αρχική μάζα σκάφους και καυσίμων:} & \quad m_0 \\ \text{Μάζα σκάφους} & \quad : \quad m_S = 0,10m_0 \\ \text{Αρχική μάζα καυσίμων} & \quad : \quad m_{F0} = 0,90m_0 \end{aligned}$$

Εξίσωση πυραύλου:

$$\frac{\Delta v_1}{u} + \frac{\Delta v_2}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_1} \frac{m_1}{m_2}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$m_2 = m_0 e^{-(\Delta v_1 + \Delta v_2)/u} = m_0 e^{-(2,39 + 1,45)/4,50} = m_0 e^{-0,853} = 0,426m_0$$

Η διαφορά της μάζας είναι ίση με τη μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν

$$\Delta m_F = m_0 - m_2 = m_0 (1 - e^{-\Delta v_{oz}/u}) \Rightarrow \Delta m_F = m_0 (1 - 0,426) = 0,574m_0$$

Η ισοδύναμη, η μάζα καυσίμων που μας έμεινε είναι ίση με

$$m_{F2} = m_2 - m_S = 0,426m_0 - 0,10m_0 = 0,326m_0$$

και αυτή που καταναλώσαμε είναι

$$\Delta m_F = m_{F0} - m_{F2} = 0,90m_0 - 0,326m_0 = 0,574m_0 = \frac{0,574}{0,90} m_F = 0,538m_F$$

53,8% της αρχικής ποσότητας καυσίμων μας. Δηλαδή καταναλώσαμε πάνω από τα μισά καύσιμά μας.

Μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική μας τροχιά αφού πάλι θα χρειαστούμε τις ίδιες μεταβολές ταχύτητας με την ανάστροφη σειρά και στην αντίθετη κατεύθυνση?

Ναι στην συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή είμαστε ελαφρότεροι και άρα για την ίδια μεταβολή ταχύτητας χρειαζόμαστε λιγότερη ώθηση. Όμως αυτό πρέπει να υπολογίζεται κάθε φορά.

Τώρα η  $m_2$  είναι η αρχική μας μάζα και η τελική μας μάζα στην επιστροφή θα είναι :

$$m_f = m_2 e^{-(\Delta v_1 + \Delta v_2)/u} = 0,426m_0 e^{-0,853} = (0,426)^2 m_0 = 0,181m_0$$

δηλαδή 18,1% της αρχικής. Αφού αυτή είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του σκάφους που είναι 10% της αρχικής συνολικής μάζας, σημαίνει ότι θα μας έχουν απομείνει καύσιμα στη δεξαμενή και άρα θα έχουμε καταφέρει να γυρίσει.

Επειδή η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας ικανοποιεί την αθροιστική ιδιότητα και είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση που γίνεται η μεταβολή, η συνθήκη για την δυνατότητα ταξιδιού μετ' επιστροφής βρίσκεται εύκολα.

Έστω  $f$  το κλάσμα της μάζας του σκάφους ως προς την αρχική συνολική μάζα του πυραύλου και  $r = e^{-\Delta v_{ολ}/u}$  το κλάσμα της συνολικής μάζας που απομένει μετά την ολοκλήρωση κάθε σκέλους του ταξιδιού ως προς τη συνολική μάζα στην έναρξη του ταξιδιού. Η τελική μάζα που απομένει μετά το ταξίδι μετ' επιστροφής δηλαδή για δύο διαδρομές, βρίσκεται από:

$$\left( \frac{\Delta v_1}{u} + \frac{\Delta v_2}{u} \right) + \left( \frac{\Delta v_2}{u} + \frac{\Delta v_1}{u} \right) = \ln \left( \frac{m_0}{m_1} \right) + \ln \left( \frac{m_1}{m_2} \right) + \ln \left( \frac{m_2}{m_3} \right) + \ln \left( \frac{m_3}{m_f} \right) \Rightarrow$$

$$2 \frac{\Delta v_{ολ}}{u} = \ln \left( \frac{m_0}{m_1} \frac{m_1}{m_2} \frac{m_2}{m_3} \frac{m_3}{m_f} \right) \Rightarrow 2 \frac{\Delta v_{ολ}}{u} = \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \Rightarrow \frac{m_0}{m_f} = e^{2\Delta v_{ολ}/u} \Rightarrow$$

$$m_f = m_0 e^{-2\Delta v_{ολ}/u} \Rightarrow m_f = r^2 m_0$$

Για  $n$  διαδρομές θα παίρναμε  $m_f = r^n m_0$

Θέλουμε η τελική μας μάζα να είναι μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με τη μάζα του σκάφους ώστε να μας έχουν απομείνει καύσιμα.

$$m_f \geq m_s \Rightarrow r^2 m_0 \geq f m_0 \Rightarrow r^2 \geq f \Rightarrow e^{-2\Delta v_{ολ}/u} \geq f \Rightarrow$$

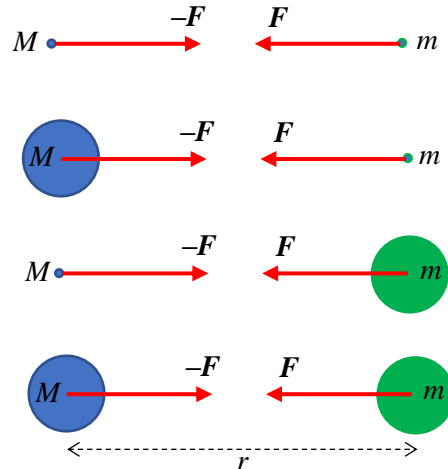
$$-2 \frac{\Delta v_{ολ}}{u} \geq \ln f \Rightarrow \frac{\Delta v_{ολ}}{u} \leq -\frac{\ln f}{2}$$

$$\text{Στη δική μας περίπτωση ισχύει } \frac{3,84}{4,50} < -\frac{\ln 0,1}{2} \Rightarrow 0,853 < 1,151.$$

Οι πιο ισχυροί πύραυλοι που υπάρχουν έχουν  $f = 0,15$ .

### Μηδέν βαρυτική δύναμη στο εσωτερικού κελύφους

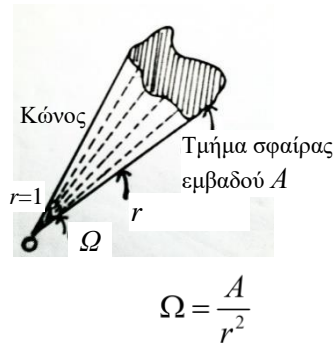
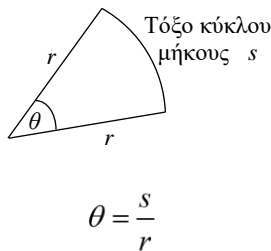
Το πρώτο πράγμα που έκανε ο Νεύτωνας όταν διατύπωσε το νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας ήταν να αποδείξει ότι ισχύει όχι μόνο για υλικά σημεία αλλά και για σφαιρικά σώματα (πλανήτες), με  $r$  την απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρών. Αυτό του πήρε κάποια χρόνια και είναι ένας από τους λόγους που καθυστέρησε η δημοσίευση των Principia. Στην πορεία ανακάλυψε ένα νέο κλάδο των μαθηματικών την ανάλυση (παράγωγοι και ολοκληρώματα). Δεν θα το δείξουμε επειδή είναι απλά μια άσκηση ολοκληρώσεων αλλά το θεωρούμε δεδομένο. Άρα όλες οι δυνάμεις στο παρακάτω σχήμα είναι ίσες.



**Ταυτόχρονα έδειξε ότι μια μάζα στο εσωτερικό ενός σφαιρικού φλοιού δεν θα δέχεται καθόλου δύναμη από τον σφαιρικό φλοιό!**

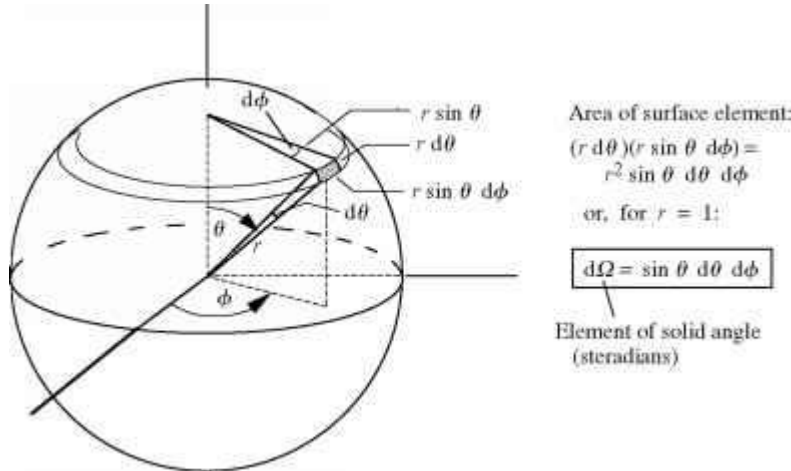
Και τα δυο παραπάνω αποτελέσματα είναι συνέπεια του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου  $F \propto 1/r^2$ . Το δεύτερο αποδεικνύεται πολύ εύκολα αρκεί να ξέρετε τι σημαίνει στερεά γωνία.

**Στερεά γωνία.** Ανάλογα με τον ορισμό της επίπεδης γωνίας που είναι ίση με το μήκος του τόξου δια την ακτίνα του κύκλου  $\theta = \frac{s}{r}$  ορίζεται η στερεά γωνία ως ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας τμήματος της σφαίρας προς την ακτίνα της σφαίρας στο τετράγωνο  $\Omega = \frac{A}{r^2}$



Η στοιχειώδης επιφάνεια τμήματος σφαίρας ακτίνας  $r$  που εκτείνεται σε εύρος πολικής γωνίας  $d\theta$  και εύρος αζιμουθιακής γωνίας  $d\varphi$  σε σφαιρικές συντεταγμένες δεν είναι παρά το γινόμενο των μηκών των δύο τόξων (βάση επί ύψος) τα οποία είναι ίσα με  $rd\theta$  και  $r\sin\theta d\varphi$  αντίστοιχα. Άρα

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \text{ και } d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$



Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε το γνωστό εμβαδόν της σφαίρας

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -\int_1^{-1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

$$A_s = \int_S dA = \int_S r^2 d\Omega = r^2 \int_S d\Omega = 4\pi r^2$$

Αν ολοκληρώσουμε και ως προς  $r$  βρίσκουμε το γνωστό τύπο του όγκου της σφαίρας

$$V_s = \int_S dV = \int_S r dr dA = \int_0^r r^2 dr \int d\Omega = \frac{r^2}{3} \cdot 4\pi = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Μια μάζα  $m$  στο εσωτερικό ομογενούς λεπτού σφαιρικού φλοιού συνολικής μάζας  $M$  δέχεται δυνάμεις από κάθε κατεύθυνση από κάθε τμήμα του φλοιού. Για κάθε στοιχειώδες τμήμα του φλοιού όμως, έστω 1, το αντιδιαμετρικό του τμήμα 2, που εκτείνεται σε ίση στερεά γωνία  $d\Omega$  ασκεί ακριβώς την αντίθετη δύναμη οπότε η συνολική δύναμη είναι μηδέν. Η μάζα του είναι μεγαλύτερη, όμως είναι πιο μακριά. Η αύξηση της μάζας του τμήματος 2 που είναι ανάλογη του αντίστοιχου εμβαδού του φλοιού που καλύπτει ( $dM \propto da \propto r^2 d\Omega$ ), αντισταθμίζεται ακριβώς από την αύξηση της απόστασης  $r$  στον παρονομαστή του τύπου της βαρυτικής δύναμης. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η βαρυτική δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης ( $F \propto 1/r^2$ ) και δεν θα συνέβαινε αν ήταν ανάλογη με κάποιο άλλο εκθέτη της απόστασης. Το ίδιο συμβαίνει και με την ηλεκτροστατική δύναμη. Για την ακρίβεια αυτή είναι η πειραματική επιβεβαίωση/απόδειξη, του γεγονότος ότι η δύναμη εξαρτάται από το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης. Ακόμα και σήμερα μετράμε με απίστευτα μεγάλη ακρίβεια για να επιβεβαιώσουμε αυτό το γεγονός ελπίζοντας να το διαψεύσουμε και να ανακαλύψουμε νέα φυσική. Προς το παρόν τίποτα, ο νόμος ισχύει ως έχει.

Η δύναμη από κάποιο στοιχειώδες τμήμα  $i$  του φλοιού στη μάζα  $m$  θα είναι :

$$dF_i = G \frac{m dM_i}{r_i^2} = G \frac{m \rho dV_i}{r_i^2} = G m \rho dh \frac{da_i}{r_i^2}$$

όπου  $r_i$  η απόστασή του από τη μάζα  $m$ ,  $\rho$  η πυκνότητα του φλοιού,  $dh$  το πάχος του και  $da_i$  το εμβαδόν του στοιχειώδους τμήματος  $i$  του φλοιού.

Μπορούμε να δείξουμε ότι για το σημείο  $j$  του φλοιού που είναι το «αντιδιαμετρικό» του σημείου  $i$  ως προς τη μάζα  $m$ , ισχύει

$$\frac{da_i}{r_i^2} = \frac{da_j}{r_j^2}$$

Άρα οι δύο δυνάμεις θα έχουν ίσα μέτρα και επειδή είναι αντίθετες θα αναιρούνται

$$dF_i = G \frac{mdM_i}{r_i^2} = Gm\rho dh \frac{da_i}{r_i^2} = Gm\rho dh \frac{da_j}{r_j^2} = G \frac{mdM_j}{r_j^2} = dF_j$$

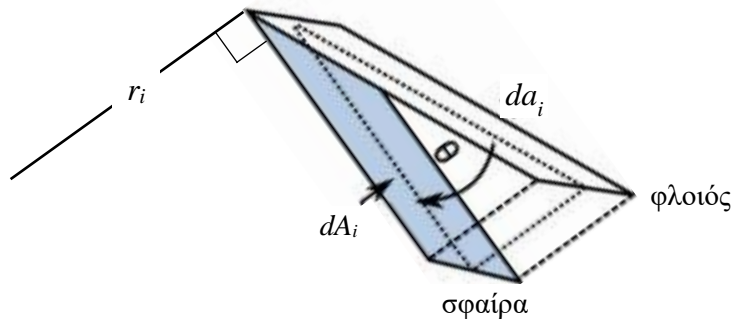
Η ισότητα  $da_i/r_i^2 = da_j/r_j^2$  μεταξύ δύο «αντιδιαμετρικών» σημείων του φλοιού φαίνεται εύκολα από τα παρακάτω σχήματα.

Τα δύο τμήματα εκτείνονται σε ίσες κατακορυφήν γωνίες (αυτό σημαίνει «αντιδιαμετρικά»):

$$d\Omega_i = d\Omega_j \Rightarrow \frac{dA_i}{r_i^2} = \frac{dA_j}{r_j^2}$$

όπου  $dA_i, dA_j$  τα στοιχειώδη εμβαδά των σφαιρών με ακτίνες  $r_i, r_j$  και κέντρο την  $m$  που ορίζουν τη στερεά γωνία. Το σφαιρικό εμβαδόν  $dA_i$  δεν είναι παρά η προβολή του εμβαδού του φλοιού  $da_i$  πάνω στην αντίστοιχη σφαίρα ακτίνας  $r_i$ :

$$dA_i = \cos \theta_i da_i$$



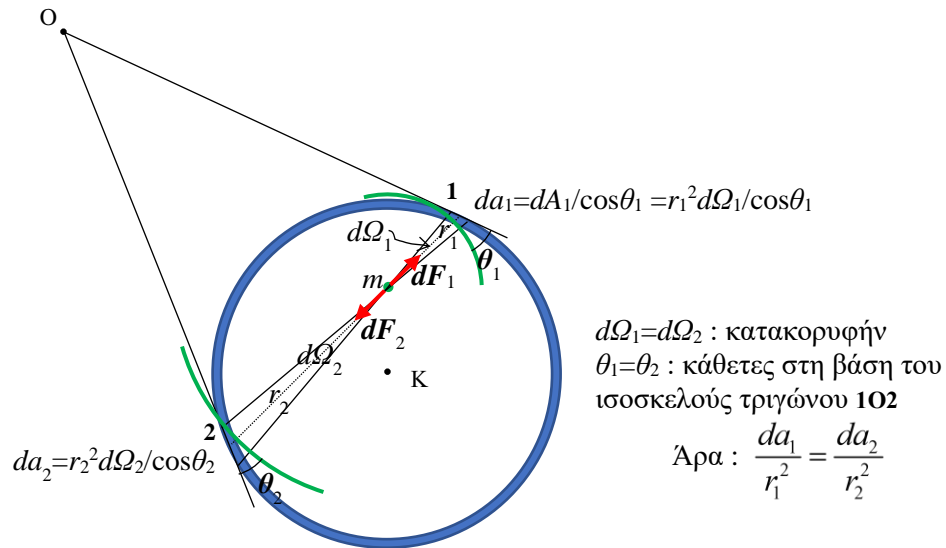
$$\text{Οπότε } da_i = \frac{dA_i}{\cos \theta_i} = \frac{r_i^2 d\Omega_i}{\cos \theta_i}$$

Όμως οι γωνίες  $\theta_i$  και  $\theta_j$  με τις οποίες τέμνουν το φλοιό οι αντίστοιχες σφαίρες είναι ίσες επειδή οι σφαίρες τέμνουν κάθετα τη χορδή  $ij$  που ενώνει τα δύο σημεία (έχουν τα κέντρα τους πάνω στη χορδή στη μάζα  $m$ ) και η χορδή αυτή είναι η βάση ισοσκελούς τριγώνου, του  $IO_2$  αφού οι ευθείες  $iO$  και  $jO$  που τέμνονται στο  $O$  είναι εφαπτόμενες στον φλοιό (να θυμηθείτε την Ευκλείδεια γεωμετρία από το λύκειο). Άρα :

$$\theta_i = \theta_j \Rightarrow \cos \theta_i = \cos \theta_j$$

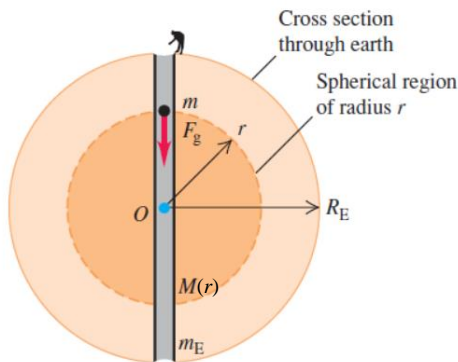
που μας δίνει :

$$\frac{da_i}{r_i^2} = \frac{d\Omega_i}{\cos \theta_i} = \frac{d\Omega_j}{\cos \theta_j} = \frac{da_j}{r_j^2}$$



### Ταλάντωση δια μέσου της Γης

Τι είναι πιο γρήγορο για να στείλουμε ένα πακέτο στην άλλη άκρη της Γης? Να το αφήσουμε να πέσει μέσω μιας σήραγγας που διαπερνά τη Γη ή να το θέσουμε σε κυκλική τροχιά στο ύψος της επιφάνειας της Γης?



Το πακέτο που θα περάσει μέσα από τη Γη θα δέχεται βαρυτική έλξη μόνο από το μέρος της Γης, τη σφαίρα, που βρίσκεται από κάτω του. Άρα η δύναμη που θα του ασκείται όταν θα βρίσκεται απόσταση  $r$  από το κέντρο της Γης θα είναι :

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M(r)m}{r^2} \hat{r} = -G \rho m \frac{V(r)}{r^2} \hat{r} = -G \frac{M_E}{4\pi R_E^3/3} m \frac{4\pi r^3/3}{r^2} \hat{r} = -m \frac{GM_E}{R_E^2} \frac{r}{R_E} \hat{r} = -mg \frac{r}{R_E} \hat{r}$$

Αυτή είναι δύναμη επαναφοράς με «σταθερά ελατηρίου»  $k = \frac{mg}{R_E}$ .

Άρα το πακέτο θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mR_E}} = \sqrt{\frac{g}{R_E}}$$

και περίοδο

$$T_{shm} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

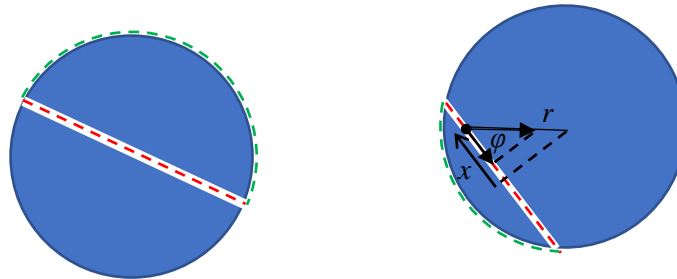
Όταν φτάσει στην άλλη άκρη της Γης, θα πρέπει κάποιος να το πιάσει αλλιώς θα ξαναγυρίσει πίσω. Για να φτάσει στην άλλη άκρη θα χρειαστεί χρόνο μισής περιόδου, δηλαδή :

$$t_{shm} = \frac{T_{shm}}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

Ο χρόνος αυτός προκύπτει ότι είναι ίσος με την ημιπερίοδο της κυκλικής τροχιάς (3<sup>ος</sup> νόμος του Kepler) :

$$t_c = \frac{T_c}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}} = \pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

οπότε δεν συμφέρει να σκάσουμε διαμέσου της Γης. Τα δύο πακέτα θα φτάσουν μαζί.



Μήπως θα κερδίσουμε κάτι σε χρόνο αν σκάσουμε μια κοντύτερη σήραγγα που να μην διαπερνά όλη τη Γη?

Αν φτιάξουμε τη σήραγγα εντελώς λεία και εξαλείψουμε τις τριβές τότε η μόνη δύναμη κατά μήκος της, στη διεύθυνση  $x$ , θα είναι η συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης στη διεύθυνση  $x$  :

$$F(x) = F(r)\cos\varphi = F(r)\frac{x}{r} = -mg\frac{r}{R_E}\frac{x}{r} = -\frac{mg}{R_E}x$$

Πάλι η δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς με το ίδιο  $k$  άρα θα προκαλέσει απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια κυκλική συχνότητα  $\omega$  και την ίδια περίοδο  $T$ . Το πακέτο θα κάνει πάλι τον ίδιο χρόνο να περάσει απέναντι, ίσο με το χρόνο που χρειάζεται να διαπεράσει όλη τη Γη, μισή περίοδο της κυκλικής τροχιάς. Οπότε πλέον όχι μόνο δεν κερδίζουμε αλλά χάνουμε σε διαφορά χρόνου επειδή το πακέτο δορυφόρος στην κυκλική τροχιά ακτίνας  $R_E$  εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο από τη μισή του περίοδο για να διαγράψει το μικρότερο τόξο