ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

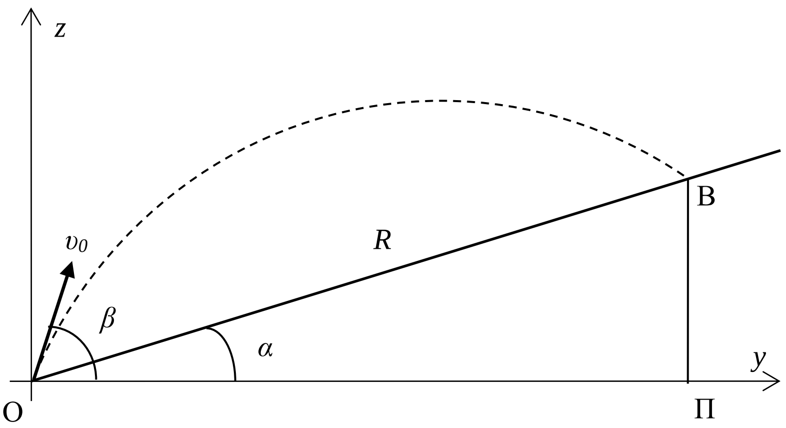
1) Πλάγια βολή σε κεκλιμένο επίπεδο

Βλήμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία α με την οριζόντιο. Το βλήμα βάλλεται με ταχύτητα υ_0 που σχηματίζει γωνία β με το οριζόντιο επίπεδο.

1.1 Βρείτε το βεληνεκές R της βολής

1.2 Δείξτε ότι το βεληνεκές γίνεται μέγιστο όταν $\beta = \pi/4 + \alpha/2$

1.3 Βρείτε το μέγιστο βεληνεκές



Λύση

1.1 Εξίσωση κίνησης βλήματος

$$\vec{r} = (\upsilon_0 \cos\beta)t\hat{y} + [(\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2]\hat{z} \Rightarrow \begin{cases} y = (\upsilon_0 \cos\beta)t \\ z = (\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Εξίσωση ευθείας κεκλιμένου επιπέδου

$z = y\tan\alpha$

Κοινά σημεία ευθείας κεκλιμένου επιπέδου και τροχιάς βλήματος τις χρονικές στιγμές t=0 (O) και

$$(\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 = \tan\alpha(\upsilon_0 \cos\beta)t \Rightarrow \frac{1}{2}gt = \upsilon_0 \sin\beta - \upsilon_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\upsilon_0}{g\cos\alpha}(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \Rightarrow \quad t = \frac{2\upsilon_0 \sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha} \text{ στο B}$$

Από τριγωνομετρία στο τρίγωνο ΟΒΠ

$$\cos\alpha = \frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{y}{R} \Rightarrow R = \frac{y}{\cos\alpha} = \upsilon_0 \cos\beta \frac{2\upsilon_0 \sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{2\upsilon_0^2 \sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

Από τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

$$\boxed{R = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\beta-\alpha) - \sin\alpha\right]}$$

1.2

$R = R_{\max}$ όταν $\sin(2\beta-\alpha) = 1 \Rightarrow 2\beta - \alpha = \pi/2 \Rightarrow \beta = \alpha/2 + \pi/4$

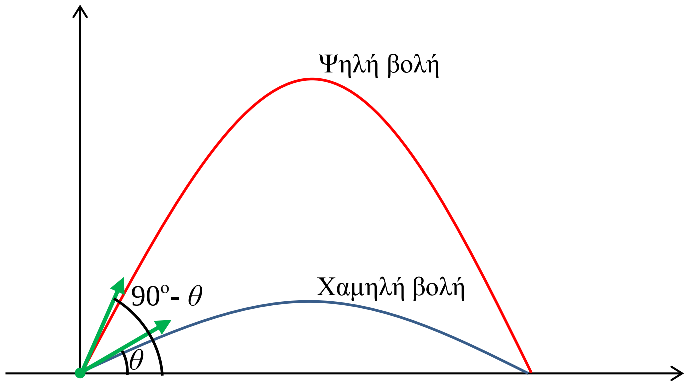
1.3

$$R_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[1-\sin\alpha\right] = \frac{\upsilon_0^2}{g(1-\sin^2\alpha)}\left[1-\sin\alpha\right] \Rightarrow R_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g(1+\sin\alpha)}$$

2) Δείξτε ότι συμπληρωματικές γωνίες βολής $\theta_1=\theta$ και $\theta_2=\pi/2-\theta$, π.χ. 30° και 60° έχουν το ίδιο βεληνεκές

Δείξτε ότι για τους χρόνους πτήσης τους ισχύουν : $T_1=\tan\theta\cdot T_2$ και $\sqrt{T_1^2+T_2^2}=T_{90^\circ}$

όπου $\theta=\theta_1$ η μικρότερη από τις δύο γωνίες και $T_{90^\circ}=2\upsilon_0/g$ ο χρόνος πτήσης της κατακόρυφης βολής



Λύση

Για συμπληρωματικές γωνίες $\theta_1+\theta_2=90^\circ$, ισχύει ότι το ημίτονο της μίας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης : $\sin\theta_1=\cos\theta_2,\quad \cos\theta_1=\sin\theta_2$, οπότε : $R_1=\dfrac{2\upsilon_0^2\sin\theta_1\cos\theta_1}{g}=\dfrac{2\upsilon_0^2\cos\theta_2\sin\theta_2}{g}=R_2$

Η΄ επειδή παραπληρωματικές γωνίες $2\theta_1+2\theta_2=180^\circ$ έχουν το ίδιο ημίτονο , έχουμε :

$$R_1=\frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta_1}{g}=\frac{2\upsilon_0^2\sin(180^\circ-2\theta_2)}{g}=\frac{2\upsilon_0^2\sin(2\theta_2)}{g}=R_2$$

Οι χρόνοι πτήσης είναι $T_1=\dfrac{2\upsilon_0\sin\theta}{g}$ και $T_2=\dfrac{2\upsilon_0\sin(90^\circ-\theta)}{g}=\dfrac{2\upsilon_0\cos\theta}{g}$

Διαιρώντας παίρνουμε : $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow T_1=T_2\tan\theta$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας παίρνουμε :

$$T_1^2+T_2^2=\frac{4\upsilon_0^2\sin^2\theta}{g^2}+\frac{4\upsilon_0^2\cos^2\theta}{g^2}=\frac{4\upsilon_0^2}{g^2}=T_{90^\circ}^2$$

3) Δείξτε ότι το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος συνδέονται με τη σχέση $h=R\dfrac{\tan\beta}{4}$

Λύση

Το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος δίνονται από τους τύπους $R=\dfrac{2\upsilon_0^2\sin\beta\cos\beta}{g}$ και $h=\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\beta}{2g}$.

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{h}{R}=\frac{\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\beta}{2g}}{\dfrac{2\upsilon_0^2\sin\beta\cos\beta}{g}}=\frac{\sin\beta}{4\cos\beta}\Rightarrow h=R\frac{\tan\beta}{4}$$

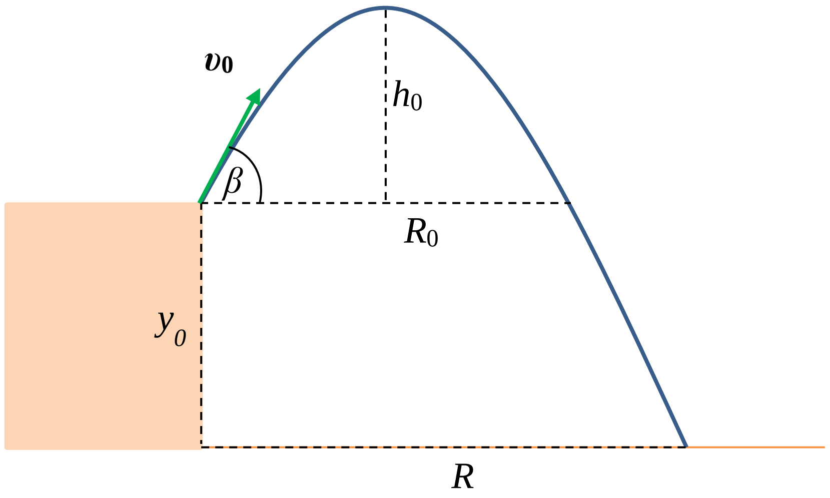
4) Βεληνεκές σε βολή από ύψος

Δείξτε ότι για βολή από αρχικό ύψος y_0 το βεληνεκές δίνεται από τον τύπο

$$R = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}\right)$$

Φέρτε τον παραπάνω τύπο στη μορφή $R = \frac{R_0}{2}\left(1+\sqrt{1+y_0/h_0}\right)$

όπου $R_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$ και $h_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g}$ το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος για βολή από το έδαφος (y_0=0)



Απάντηση

Αρχικά ελέγχουμε ότι η παραπάνω έκφραση δίνει το γνωστό μας βεληνεκές $\frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$ για βολή από το έδαφος (δηλ. με αρχικό ύψος y_0 ίσο με μηδέν). Πράγματι ισχύει :

$$R(y_0=0) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2g\cdot\ 0}\right) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \upsilon_0 \sin\beta\right)$$
$$= \frac{\upsilon_0^2\, 2\cos\beta \sin\beta}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$$

Η εξίσωση του ύψους είναι

$$y = y_0 + \upsilon_0 \sin\beta\cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Βρίσκουμε το χρόνο πτήσης T>0 , θέτοντας y=0 και λύνοντας τη δευτεροβάθμια

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \upsilon_0 \sin\beta\cdot\ t + y_0 = 0 \Rightarrow t^2 - \left(\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right)t - \frac{2y_0}{g} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right)^2 - 4\cdot\ 1\cdot \left(-\frac{2y_0}{g}\right)}}{2\cdot\ 1}$$
$$= \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} \pm \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}}{g}$$

Επιλέγουμε τη θετική λύση : $T = \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} + \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}}{g}$

Το βεληνεκές είναι

$$R=\upsilon_{0x}T=\upsilon_0\cos\beta\left(\frac{\upsilon_0\sin\beta}{g}+\frac{\sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\beta+2gy_0}}{g}\right)=\frac{\upsilon_0\cos\beta}{g}\left(\upsilon_0\sin\beta+\sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\beta+2gy_0}\right)$$

Το οποίο γράφεται και

$$R=\frac{\upsilon_0\cos\beta}{g}\left(\upsilon_0\sin\beta+\upsilon_0\sin\beta\sqrt{1+\frac{2gy_0}{\upsilon_0^2\sin^2\beta}}\right)=\frac{\upsilon_0\cos\beta}{g}\upsilon_0\sin\beta\left(1+\sqrt{1+\frac{y_0}{\upsilon_0^2\sin^2\beta/2g}}\right)\Rightarrow$$

$$R=\frac{R_0}{2}\left(1+\sqrt{1+y_0/h_0}\right)$$

5) Κεντρομόλος επιτάχυνση και ακτίνα καμπυλότητας στην πλάγια βολή

Τη χρονική στιγμή t =0, εκτελούμε από το έδαφος πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα υ_0=100 m/s σε γωνία βολής β=53,13° πάνω από οριζόντιο έδαφος. Δίνονται cosβ=0,6 και sinβ=0,8.

Υπολογίστε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς :

Α) τις χρονικές στιγμές t = 3,5 s και t = 12,5 s

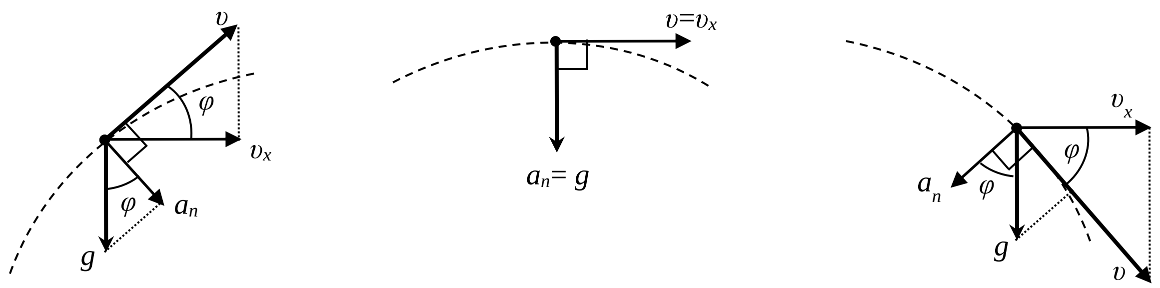
Β) όταν το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος του $y=h$

Γ) όταν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι ίσες κατά μέτρο $\upsilon_y=\pm\upsilon_x$

Δ) τη χρονική στιγμή t = 0 s

Λύση

Η ολική επιτάχυνση έχει μέτρο g και κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω ($-\hat{z}$): $\vec{a}=-g\hat{z}$.



Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην τροχιά (δηλ. στην ταχύτητα) και άρα υπολογίζεται από τον τύπο $a_n=g\cos\varphi$ όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα. Η γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τον οριζόντιο άξονα x : $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right)$. Άρα στο μέγιστο ύψος που η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, όλη η επιτάχυνση g είναι κεντρομόλος.

Η στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας ρ συνδέεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση με τον τύπο : $a_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}$

Ο χρόνος ανόδου της βολής είναι $t_{\alpha\nu}=\frac{\upsilon_{0y}}{g}=\frac{\upsilon_0\sin\beta}{g}=\frac{100\cdot\ 0,8}{10}=8$ s

Άρα στα 3,5 s το βλήμα ανεβαίνει ακόμα ενώ στα 12,5 s κατεβαίνει.

Α) $\upsilon_x=\upsilon_{0x}=\sigma\tau\alpha\theta=\upsilon_0\cos\beta=100\cdot\ 0,6=60$ m/s

$\upsilon_y=\upsilon_{0y}-gt=\upsilon_0\sin\beta-gt=80-10t$ (SI)

Για t=3,5 s

$$\upsilon_y = 80 - 10 \cdot 3,5 = 45 \text{ m/s}$$

$$\tan\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 36,87^{\text{o}}$$

$$a_n = g\cos\varphi = 10\cos 36,87^{\text{o}} = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ m/s}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 60^2 + 45^2 = 5.625 \Rightarrow 75 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{5.625}{8} = 703,125 \text{ m}$$

Για t=12,5 s

$$\upsilon_y = 80 - 10 \cdot 12,5 = -45 \text{ m/s}$$

$$\tan\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{-45}{60} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = -36,87^{\text{o}}$$

$$a_n = g\cos\varphi = 10\cos(-36,87^{\text{o}}) = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ m/s}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 60^2 + 45^2 = 5.625 \Rightarrow 75 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{5.625}{8} = 703,125 \text{ m}$$

Β) Στο μέγιστο ύψος η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ίση με g και το μέτρο της ταχύτητας ίσο με $\upsilon=\upsilon_x$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_{0x}^2}{g} = \frac{60^2}{10} = 360 \text{ m}$$

Το μέγιστο ύψος είναι ίσο με $h = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \frac{80^2}{20} = 320 \text{ m}$ άρα το στιγμιαίο κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται 40 m κάτω από την επιφάνεια του εδάφους.

Γ) Όταν $\upsilon_y = \pm\upsilon_x \Rightarrow \tan\varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \pm 45^{\text{o}}$

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο $a_n = g\cos\varphi = g\cos(\pm 45^{\text{o}}) = \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ m/s^2

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι ίση με

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{2\upsilon_{0x}^2}{g/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\frac{60^2}{10} = 1.018,2 \text{ m}$$

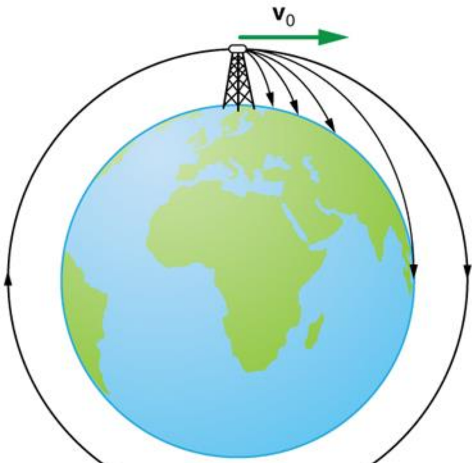
Δ) Τη χρονική στιγμή t = 0 s $\upsilon = \upsilon_0$ και $\varphi = \beta$

$$a_n = g\cos\beta = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{\upsilon_0^2}{a_n} = \frac{100^2}{6} = 1.666,7 \text{ m}$$

Για βολές σε πολύ μεγάλο βεληνεκές η καμπυλότητα της Γης πρέπει να ληφθεί υπόψη καθώς και η μεταβολή του g με το ύψος. Το βλήμα μπορεί να επιστρέψει στη Γη ή να μπει σε τροχιά γύρω της (κυκλική ή ελλειπτική) ή να ξεφύγει εντελώς από τη Γη (σε τροχιά παραβολική ή υπερβολική).

Για τις περιπτώσεις που το βλήμα δεν επιστρέφει στη Γη το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης της τροχιάς των πλανητών



ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Η βαρυτική δύναμη, σε έναν πλανήτη μάζας m από το αστέρι μάζας $M>>m$ γύρω από το οποίο περιστρέφεται, δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -\frac{km}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

Άρα η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε για να βρούμε την τροχιά του πλανήτη είναι :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad (2)$$

Η δύναμη είναι κεντρική, δηλαδή εξαρτάται μόνο από την απόσταση r και είναι στην ακτινική διεύθυνση $\hat{r}$, οπότε βολεύουν οι σφαιρικές συντεταγμένες. Το σημείο αναφοράς και αρχή των αξόνων είναι το κέντρο του αστεριού Ο.

6) Δείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη και άρα αρκούν μόνο δύο συντεταγμένες για να την περιγράψουν.
Λύση

Δείχνουμε ότι το διάνυσμα $\vec{h} = \vec{r}\times\vec{\upsilon}$ είναι σταθερό $\frac{d\vec{h}}{dt} = 0$ (3) . Όμως το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$: $\vec{r}\cdot\vec{h} = \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{\upsilon}) = (\vec{r}\times\vec{r})\cdot\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{h}$. Οπότε το διάνυσμα θέσης θα κείται πάντα στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{h}$ και άρα η τροχιά θα είναι επίπεδη.

Πράγματι : $\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\upsilon} + \vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon} + \vec{r}\times\vec{a} = 0$

Και οι δύο όροι είναι μηδέν. Ο πρώτος ταυτοτικά. Ο δεύτερος επίσης, επειδή η επιτάχυνση είναι κεντρική από τη (2): $\vec{r}\times\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\vec{r}\times\hat{r} = 0$

Οπότε επιλέγουμε την διεύθυνση του $\vec{h} = h\hat{z}$ να είναι ο άξονας $\hat{z}$ και έτσι η τροχιά βρίσκεται στο επίπεδο *x-y*. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες r και θ.
Οπότε θα έχουμε :
Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης : $r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$, με παράμετρο το χρόνο t

Εξίσωση τροχιάς : $r = r(\theta)$

7) Δείξτε ότι $h = r^2\dot{\theta}$ (4)

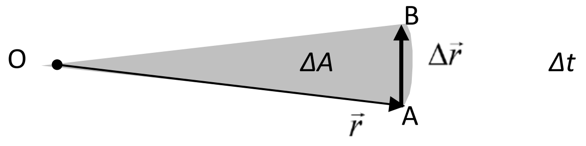
Λύση

Η έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι $\vec{\upsilon} = \upsilon_r\hat{r} + \upsilon_\theta\hat{\theta} = \dfrac{dr}{dt}\hat{r} + r\dfrac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Οπότε : $\vec{h} = \vec{r}\times\vec{\upsilon} = r\hat{r}\times\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) = r\dot{r}\hat{r}\times\hat{r} + r^2\dot{\theta}\hat{r}\times\hat{\theta} = r^2\dot{\theta}\hat{z}$

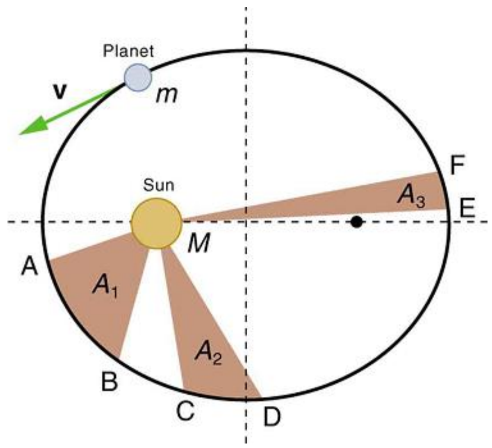
8) Δείξτε ότι $r\dot{\theta}^2 = 2\dot{A}$ (4΄) όπου $\dot{A}$ είναι η εμβαδική ταχύτητα δηλαδή το εμβαδόν της επιφάνειας που σαρώνει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ στη μονάδα του χρόνου. Άρα η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή. Δηλαδή η ακτίνα από το κέντρο της δύναμης Ο προς το σωματίδιο σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους. Αυτός είναι ο 2ος νόμος της κίνησης των πλανητών του Kepler που λέγεται και νόμος των εμβαδών.

Λύση



Έστω ότι σε χρονικό διάστημα *Δt* το σώμα μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β. Το εμβαδόν που έχει σαρώσει είναι περίπου το μισό του παραλληλογράμου με πλευρές $\vec{r}$ και $\Delta\vec{r}$ το οποίο δίνεται από το διανυσματικό γινόμενο : $\Delta A = \dfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|$. Διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο $\Delta t\to 0$ έχουμε :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$



Οι επιφάνειες A_1, A_2, A_3 σαρώνονται στο ίσα χρονικά διαστήματα $\Delta t = t_B - t_A = t_D - t_C = t_F - t_E$

9) Γράψτε το νόμο κίνησης του Νεύτωνα, εξίσωση (2), σε πολικές συντεταγμένες και δείξτε ότι με την αλλαγή μεταβλητής $r = 1/u$, μπορεί τελικά να έρθει στη μορφή : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{k}{h^2}$

Λύση

Η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες είναι : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}\right)\hat{\theta}$

Άρα η εξίσωση (2) γίνεται : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}\right)\hat{\theta} = -\dfrac{k}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = -\dfrac{k}{r^2} & (5) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} = 0 & (6) \end{array}}$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6) είναι ισοδύναμη με την (3) και δεν μας δίνει κάποια νέα πληροφορία:

$$r\ddot{\theta}+2\dot{\theta}\dot{r}=\frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}=0$$

Λύνουμε την (5) κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r=1/u$ και χρησιμοποιούμε την (4) για να αντικαθιστούμε πάντα τη γωνιακή ταχύτητα με μια συνάρτηση του *r*:

$$h=r^2\dot{\theta}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}=hu^2\Rightarrow\dot{\theta}^2=\frac{h^2}{r^4}=h^2u^4$$

Αρχικά η (5) γίνεται : $\ddot{r}-\frac{h^2}{r^4}r=-\frac{k}{r^2}\Rightarrow\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{k}{r^2}$ (7)

Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο

$$r=\frac{1}{u}\Rightarrow dr=-\frac{du}{u^2}$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=hu^2\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}hu^2\Rightarrow\ddot{r}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (7)

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-h^2u^3=-ku^2\Rightarrow\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{h^2}}\quad(8)$$

10) Λύστε την εξίσωση (8) και βρείτε τη μορφή των τροχιών των πλανητών

Λύση

Την εξίσωση (8): $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{h^2}$ μπορούμε να την λύσουμε εύκολα. Είναι η γνωστή εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή αλλά μη ομογενής (επειδή το δεύτερο μέλος δεν είναι μηδέν αλλά ίσο με τη σταθερά k/h^2). Επίσης η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι εδώ ο χρόνος αλλά η γωνία *θ*.

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι κατά τα γνωστά η : $u_{ομογ}=A\cos(\theta+\theta_0)$

Τη μερική λύση τη βρίσκουμε εύκολα βλέποντας ότι είναι απλά η σταθερά του δεύτερου μέλους αφού τότε η *u* είναι σταθερή και η δεύτερη παράγωγος γίνεται μηδέν : $u_{μερ}=k/h^2$

Οπότε η γενική λύση είναι : $u=u_{ομογ}+u_{μερ}\Rightarrow u=A\cos(\theta+\theta_0)+\frac{k}{h^2}$

Όπου η σταθερά *A* καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Και άρα η εξίσωση της τροχιάς είναι : $r=\frac{1}{k/h^2+A\cos(\theta+\theta_0)}$

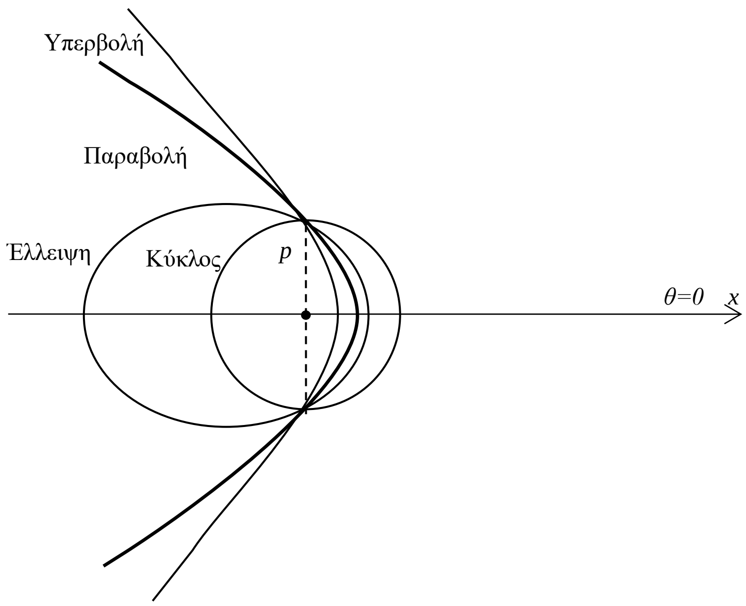
Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε τους άξονες έτσι ώστε θ_0=0. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε *θ*=0 όταν το *r* γίνεται ελάχιστο (περιήλιο). Οπότε τελικά

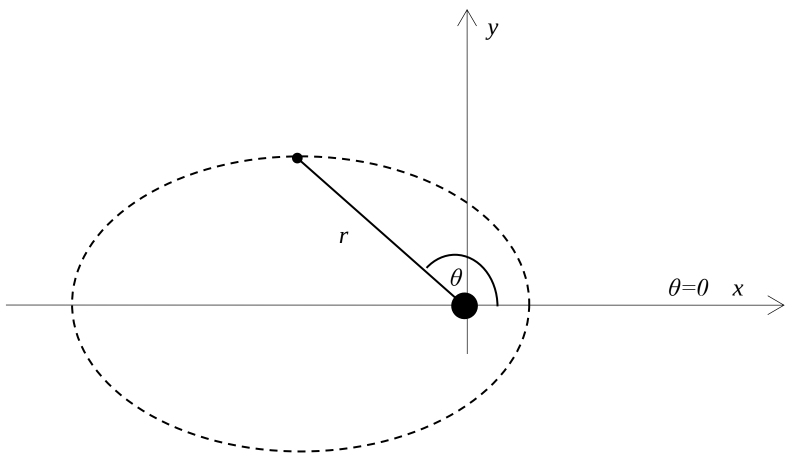
$$r=\frac{1}{k/h^2+A\cos\theta}\Rightarrow r=\frac{\left(h^2/k\right)}{1+\left(Ah^2/k\right)\cos\theta}\Rightarrow\qquad\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

με $p=h^2/k$ και $e=Ah^2/k$

Αυτή είναι η εξίσωση των κωνικών τομών :

e=0 κύκλος
0<*e*<1 έλλειψη
e=1 παραβολή
1<*e* υπερβολή


Υπερβολή
Παραβολή
Έλλειψη
Κύκλος
p
θ=0
x


y
r
θ
θ=0
x