Εξισώσεις πλάγιας βολής

$\vec{a} = \sigma\tau\alpha\theta$, $\quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$, $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = (a_x,\ a_y)$ $\quad \vec{\upsilon} = \upsilon_x\hat{x} + \upsilon_y\hat{y} = (\upsilon_x,\ \upsilon_y)$ $\quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = (x,\ y)$

$\vec{a} = -g\hat{y} = (0,\ -g)$ $\quad a_x = 0$, $\quad a_y = -g$

$\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{0x}\hat{x} + \upsilon_{0y}\hat{y} = (\upsilon_{0x},\ \upsilon_{0y})$, $\quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta$, $\quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\theta$

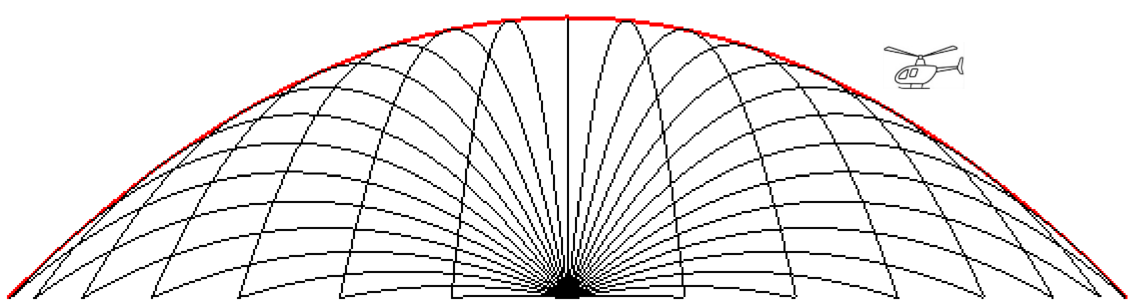
$\vec{r}_0 = \vec{0} = 0\hat{x} + 0\hat{y} = (0,\ 0)$ $\quad x_0 = 0$, $\quad y_0 = 0$

$\upsilon_x = \upsilon_0\cos\theta \quad (1)$, $\quad \upsilon_y = \upsilon_0\sin\theta - gt \quad (3)$

$x = \upsilon_0\cos\theta\cdot\ t \quad (2)$, $\quad y = \upsilon_0\sin\theta\cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$: παραμετρικές εξισώσεις τροχιάς

Παραβολή ασφαλείας (Evangelista Torricelli στο De motu gravium 1644)

Πυροβόλο σε πεδίο βολής εκτοξεύει κατά ριπάς σε όλες τις γωνίες *θ*, βλήματα με αρχική ταχύτητα υ_0. Μέχρι ποιο όριο (κόκκινη καμπύλη) μπορεί να πλησιάσει ένα ελικόπτερο χωρίς να κινδυνεύει να φάει κανένα αδέσποτο βλήμα ;



Εξίσωση καμπύλης της τροχιάς κάθε βλήματος

Με απαλοιφή του χρόνου (από (2) λύνω ως προς *t* και αντικαθιστώ στην (4))

$$y = \tan\theta\cdot\ x - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\theta}\cdot\ x^2 \qquad (5) : \text{εξίσωση τροχιάς}$$

Εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα υ_0 (εδώ σταθερή), την επιτάχυνση της βαρύτητας *g* (σταθερή) και τη γωνία εκτόξευσης *θ*.

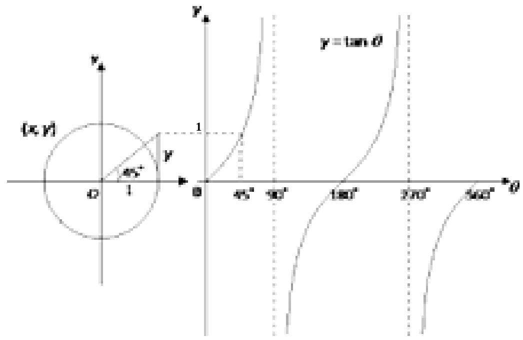
Μετατρέπω την εξίσωση τροχιάς σε δευτεροβάθμια ως προς $u = \tan\theta$.

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$$

$$y = \tan\theta\cdot\ x - \frac{g}{2\upsilon_0^2}(\tan^2\theta + 1)\cdot\ x^2 \Rightarrow gx^2\cdot\ \tan^2\theta - 2\upsilon_0^2 x\cdot\ \tan\theta + \left(2\upsilon_0^2 y + gx^2\right) = 0 \Rightarrow \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

με $\alpha = gx^2$, $\beta = -2\upsilon_0^2 x$, $\gamma = 2\upsilon_0^2 y + gx^2$

Όταν η θ παίρνει τιμές από 0^o έως 90^o η εφαπτομένη παίρνει τιμές από 0 ως ∞.



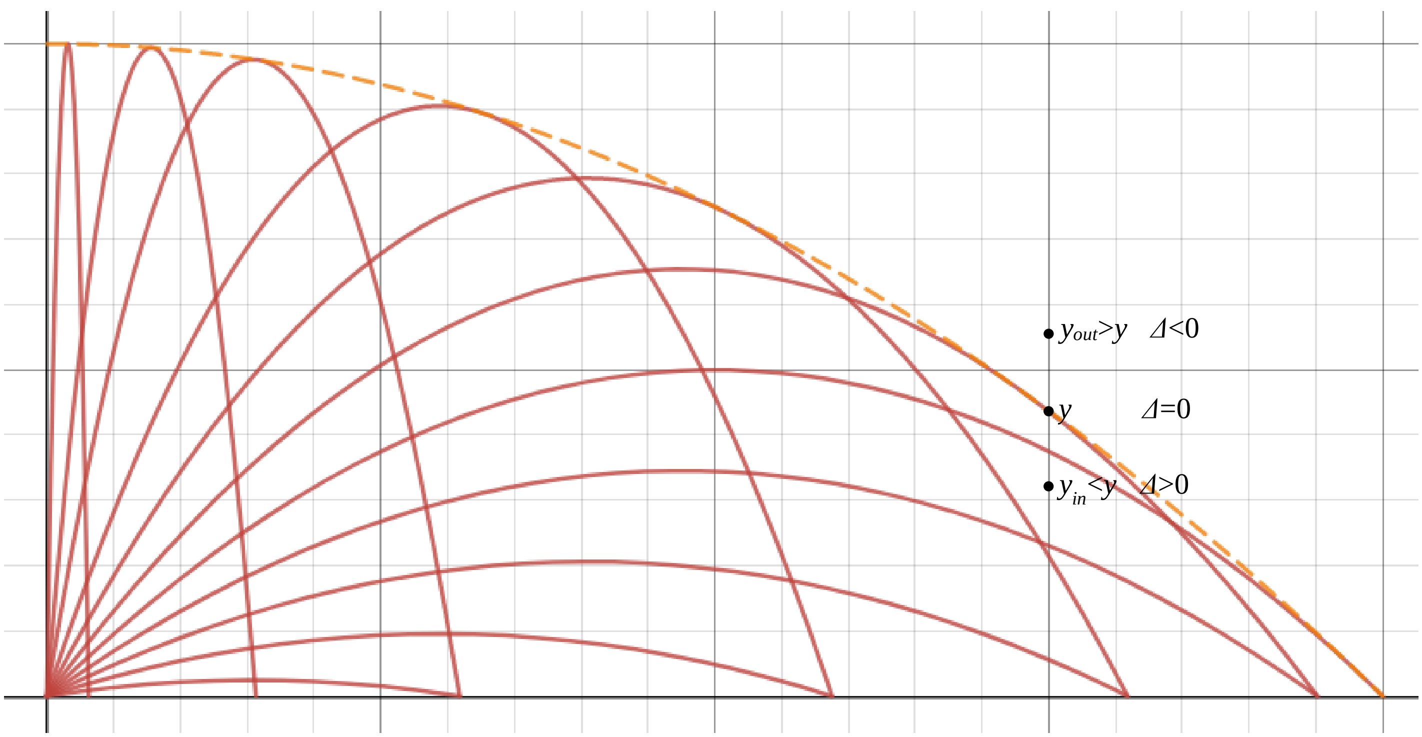
Θέλουμε να βρούμε για ποια *x*, *y* η δευτεροβάθμια έχει πάντα λύση. Για να έχει η δευτεροβάθμια λύση για κάθε *u*>0 θα πρέπει η διακρίνουσα της να είναι θετική ή μεγαλύτερη από το μηδέν

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\upsilon_0^2 x)^2 - 4\cdot\ gx^2 \cdot\ (2\upsilon_0^2 y + gx^2) = 4x^2(\upsilon_0^4 - 2\upsilon_0^2 gy - g^2x^2)$$

Η ανίσωση $\Delta \geq 0 \Rightarrow \upsilon_0^4 - 2g\upsilon_0^2 y - g^2x^2 \geq 0$ είναι η περιοχή κάτω από την παραβολή $\upsilon_0^4 - 2g\upsilon_0^2 y - g^2x^2 = 0$

Αυτή είναι η παραβολή ασφαλείας : $y - \dfrac{\upsilon_0^2}{2g} = -\dfrac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$ (κίτρινη καμπύλη στο σχήμα)

Πάνω στην παραβολή η έκφραση $\Delta = \upsilon_0^4 - 2g\upsilon_0^2 y - g^2x^2 = 0$ είναι ίση με μηδέν ενώ αν κρατήσουμε το *x* σταθερό και κινηθούμε κατακόρυφα προς τα κάτω σε ένα σημείο $y_{\text{in}} < y = y_{\text{in}} + \Delta y$ στο εσωτερικό της παραβολής η Δ γίνεται θετική : $\Delta_{in} = \upsilon_0^4 - 2g\upsilon_0^2 y_{in} - g^2x^2 = \upsilon_0^4 - 2g\upsilon_0^2(y - \Delta y) - g^2x^2 = 2g\upsilon_0^2\Delta y > 0$



Η κορυφή της παραβολής είναι εκεί που η κλίση γίνεται μηδέν $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\dfrac{g}{\upsilon_0^2}x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Τότε το y είναι ίσο με $y=\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}\equiv h_{\max}$. Αυτό είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να επιτευχθεί με τη δεδομένη αρχική ταχύτητα υ_0 και επιτυγχάνεται με κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, δηλαδή για $\theta = 90^o$:

$$h=\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2g}\Rightarrow h_{\max}=\frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

Τα σημεία που η παραβολή τέμνει τον οριζόντιο άξονα x είναι αυτά όπου y=0, άρα :

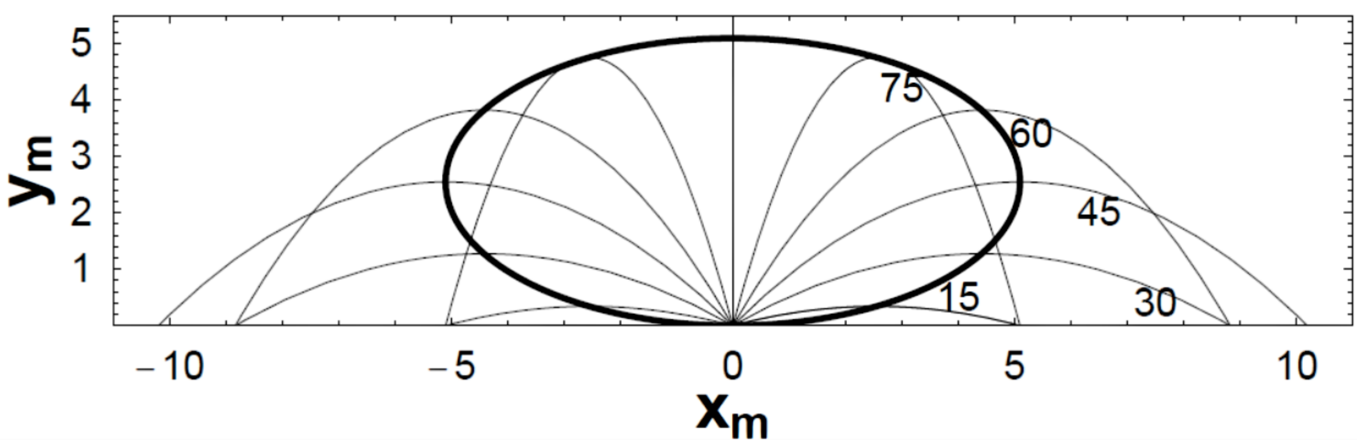
$$0-\frac{\upsilon_0^2}{2g}=-\frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2\Rightarrow x=\pm\frac{\upsilon_0^2}{g}\equiv\pm R_{\max}$$

Αυτά βρίσκονται στο μέγιστο βεληνεκές της βολής (αριστερά ή δεξιά) που επιτυγχάνεται όταν η γωνία βολής είναι θ=45^o: $R=\dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{g}\Rightarrow R_{\max}=\dfrac{\upsilon_0^2}{g}$

Η γωνία με την οποία τέμνει η παραβολή ασφαλείας τον άξονα x είναι 45^o αφού η κλίση της $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{g}{\upsilon_0^2}x$ για $x=\pm\dfrac{\upsilon_0^2}{g}$ είναι ίση με $\dfrac{dy}{dx}=\mp1$

Έλλειψη μεγίστων υψών

Δείξτε ότι τα σημεία του μέγιστου ύψους για όλες τις τροχιές των βλημάτων του πυροβόλου που βάλλει κατά ριπάς σε όλες τις γωνίες σχηματίζουν έλλειψη.



Το βλήμα φτάνει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του $y_{\max}=h$ την χρονική στιγμή t_m που η κατακόρυφη ταχύτητα υ_y γίνεται ίση με μηδέν (αλλιώς θα ανέβαινε και παραπάνω):

$$\upsilon_y=\upsilon_0\sin\theta-gt\Rightarrow\ 0=\upsilon_0\sin\theta-gt_m\Rightarrow t_m=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}$$

Οι συντεταγμένες του τότε είναι ίσες με :

$$x_m=\upsilon_0\cos\theta\cdot\ t_m\Rightarrow x_m=\frac{\upsilon_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}=\frac{\upsilon_0^2}{2g}\sin 2\theta=\frac{R}{2}=a\sin 2\theta\quad(2)\ ,$$

$$y_m=\upsilon_0\sin\theta\cdot\ t_m-\frac{1}{2}gt_m^2=\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}\right)^2=\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{\upsilon_0^2}{4g}(1-\cos 2\theta)=b(1-\cos 2\theta)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες της διπλάσιας γωνίας :

$\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$, $\qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

και ορίσαμε τα : $a = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g} = h_{\max}$, $\qquad b = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\upsilon_0^2}{4g}$

Από αυτές παίρνουμε : $\sin 2\theta = \dfrac{x_m}{a}$ και $\cos 2\theta = \dfrac{b - y_m}{b}$

Η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα μας δείχνει ότι τα x_m και y_m ικανοποιούν την εξίσωση της έλλειψης:

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1 \Rightarrow \frac{x_m^2}{a^2} + \frac{(y_m - b)^2}{b^2} = 1$$

Η έλλειψη έχει το κέντρο της στο σημείο $x = 0$, $y = b = \dfrac{\upsilon_0^2}{4g} = \dfrac{h_{\max}}{2}$, κύριο άξονα με μήκος $2a = \dfrac{\upsilon_0^2}{g} = 2h_{\max}$, δευτερεύοντα άξονα με μήκος $2b = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g} = h_{\max}$ ίσο με το μισό του κύριου και άρα εκκεντρότητα ίση με $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ανεξάρτητη από οποιοδήποτε χαρακτηριστικό της κίνησης.