1) Η εξίσωση κίνησης σώματος είναι : $\vec{r}(t) = \left(t^3 + 2t\right)\hat{x} - 3e^{-2t}\hat{y} + 2\sin 5t\ \hat{z}$

Υπολογίστε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και τα μέτρα τους τη χρονική στιγμή t=0.

Λύση

Απευθείας παραγωγίσεις

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{x}\frac{d}{dt}\left(t^3 + 2t\right) + \hat{y}\frac{d}{dt}\left(-3e^{-2t}\right) + \hat{z}\frac{d}{dt}\left(2\sin 5t\right) =$$

$$= \left(3t^2 + 2\right)\hat{x} + \left(6e^{-2t}\right)\hat{y} + \left(10\cos 5t\right)\hat{z}$$

$$\vec{\upsilon}(0) = \frac{d\vec{r}(0)}{dt} = \left(0+2\right)\hat{x} + \left(6e^{0}\right)\hat{y} + \left(10\cos 0\right)\hat{z} = 2\hat{x} + 6\hat{y} + 10\hat{z}$$

$$\left|\vec{\upsilon}(0)\right| = \left|\frac{d\vec{r}(0)}{dt}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 10^2} = \sqrt{140} = \sqrt{4\cdot 35} = 2\sqrt{35} = 2\cdot 5,916 = 11,832$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \hat{x}\frac{d}{dt}\left(3t^2 + 2\right) + \hat{y}\frac{d}{dt}\left(6e^{-2t}\right) + \hat{z}\frac{d}{dt}\left(10\cos 5t\right) =$$

$$= \left(6t\right)\hat{x} + \left(6(-2)e^{-2t}\right)\hat{y} + \left(-10\cdot 5\sin 5t\right)\hat{z}$$

$$= 6t\hat{x} - 12e^{-2t}\hat{y} - 50\sin 5t\ \hat{z}$$

$$\vec{a}(0) = 6\cdot 0\hat{x} - 12e^{0}\hat{y} - 50\sin 0\ \hat{z} = -12\hat{y}$$

$$\left|\vec{a}(0)\right| = 12$$

2. Σωματίδιο κινείται κατά μήκος καμπύλης της οποίας οι παραμετρικές εξισώσεις είναι :

$$x(t) = 3e^{-2t}, \qquad y(t) = 4\sin 3t, \qquad z(t) = 5\cos 3t$$

Α) Βρείτε τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για οποιαδήποτε χρονική στιγμή

Β) Υπολογίστε τη θέση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση και τις τιμές των μέτρων τους για t=0 και t=10π/4

Λύση

Α)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} = 3e^{-2t}\hat{x} + 4\sin 3t\ \hat{y} + 5\cos 3t\ \hat{z}$$

Απευθείας παραγωγίσεις

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -6e^{-2t}\hat{x} + 12\cos 3t\ \hat{y} - 15\sin 3t\ \hat{z}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = 12e^{-2t}\hat{x} - 36\sin 3t\ \hat{y} - 45\cos 3t\ \hat{z}$$

Β) t=0

$$\vec{r}(0) = 3\hat{x} + 5\hat{z} \qquad \left|\vec{r}(0)\right| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$\vec{\upsilon}(0) = -6\hat{x} + 12\hat{y}, \quad \left|\vec{\upsilon}(t)\right| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2} = 6\sqrt{1+4} = 6\sqrt{5}$$

$$\vec{a}(0) = 12\hat{x} - 45\hat{z}, \quad \left|\vec{a}(0)\right| = \sqrt{12^2 + (-45)^2} = \sqrt{3^2 4^2 + 3^2 15^2} = 3\sqrt{241}$$

t=10π/4

$$\vec{r}(10\pi/4) = 3e^{-5\pi}\hat{x} + 4\sin\left(\frac{30}{4}\pi\right)\hat{y} + 5\cos\left(\frac{30}{4}\pi\right)\hat{z} = 3(0,00000015)\hat{x} + 4\sin\left(7,5\pi\right)\hat{y} + 5\cos\left(7,5\pi\right)\hat{z}$$

$$= 0\ \hat{x} + 4\sin(1,5\pi)\hat{y} + 5\cos\left(1,5\pi\right)\hat{z} = -4\hat{y}$$

$$\left|\vec{r}(10\pi/4)\right| = 4$$

Για μεγάλα t η κίνηση στον άξονα x σβήνει και το σωματίδιο κινείται στο επίπεδο y-z όπου διαγράφει έλλειψη αφού $\frac{x^2}{4^2} = \sin^2 3t$, $\frac{z^2}{5^2} = \cos^2 3t$ και άρα $\frac{x^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$

$$\vec{\upsilon}(10\pi/4) = -6e^{-5\pi}\,\hat{x} + 12\cos(1,5\pi)\,\hat{y} - 15\sin(1,5\pi)\,\hat{z} = 15\,\hat{z} \qquad \left|\vec{\upsilon}(10\pi/4)\right| = 15$$

$$\vec{a}(10\pi/4) = 12e^{-5\pi}\,\hat{x} - 36\sin(1,5\pi)\,\hat{y} - 45\cos(1,5\pi)\,\hat{z} = 36\,\hat{y} \qquad \left|\vec{a}(10\pi/4)\right| = 36$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλα *t*

$$\vec{a} = -3^2\vec{r} = -\omega^2\vec{r}$$

3. Σωματίδιο κινείται με επιτάχυνση $\vec{a} = \hat{x} - 2t\,\hat{y}$ και την χρονική στιγμή βρισκόταν στη θέση $\vec{r}_0 = 0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = 0$ (αρχικές συνθήκες). Βρείτε την εξίσωση κίνησης του. Ποια είναι η μετατόπιση του σωματιδίου μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1=2 s και t_2=4 s. Πόσο είναι το διάστημα που διένυσε στο ίδιο χρονικό διάστημα. Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, η επιτρόχιος επιτάχυνσή και η ακτίνα καμπυλότητας τη χρονική στιγμή t=2 s.

Λύση

Απευθείας ολοκληρώσεις.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt \Rightarrow \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt \Rightarrow \vec{\upsilon} = \left(\int_0^t dt\right)\hat{x} - \left(\int_0^t 2tdt\right)\hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = t\hat{x} - t^2\hat{y}}$$

$$\upsilon = \sqrt{t^2 + t^4} = t\sqrt{1 + t^2}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \vec{r} = \left(\int_0^t tdt\right)\hat{x} - \left(\int_0^t t^2dt\right)\hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \frac{t^2}{2}\hat{x} - \frac{t^3}{3}\hat{y}}$$

$$r = \sqrt{\frac{t^4}{2^2} + \frac{t^6}{3^2}} = t^2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{t^2}{9}}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) = \vec{r}(4) - \vec{r}(2) = \left(\frac{4^2}{2}\hat{x} - \frac{4^3}{3}\hat{y}\right) - \left(\frac{2^2}{2}\hat{x} - \frac{2^3}{3}\hat{y}\right) = \left(\frac{4^2 - 2^2}{2}\right)\hat{x} - \left(\frac{4^3 - 2^3}{3}\right)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = 6\hat{x} - \frac{56}{3}\hat{y}}$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{6^2 + \frac{56^2}{3^2}} \Rightarrow \boxed{\left|\Delta\vec{r}\right| = 19,61}$$

$$\cos\theta = \frac{\Delta\vec{r}\cdot\hat{x}}{\left|\Delta\vec{r}\right|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{19,61} = 0,306 \Rightarrow \boxed{\theta = 72,18^{\circ}}$$

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \upsilon dt \Rightarrow \Delta s = \int_2^4 t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με την αλλαγή μεταβλητής :

$$u = 1 + t^2,\ \ du = 2tdt \Rightarrow tdt = \frac{du}{2},\ \ t = 2 \Rightarrow u = 5,\ \ t = 4 \Rightarrow u = 17$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}\int_5^{17} u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_5^{17} = \frac{1}{3}\left(17^{3/2} - 2^{3/2}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta s = 19,63}$$

Παρατηρούμε ότι το διάστημα είναι σχεδόν ίσο με το μέτρο της μετατόπισης. Αυτό σημαίνει ότι στο δοσμένο χρονικό διάστημα η καμπυλότητα της τροχιάς είναι ελάχιστη.

Αν το ολοκλήρωμα δεν είναι εύκολο και θέλει πολύ δουλειά, δεν σκάμε. Η άσκηση δεν είναι άσκηση μεθόδων ολοκλήρωσης. Σίγουρα κάποιος θα το έχει υπολογίσει ως τώρα. Το πρώτο που κάνουμε λοιπόν είναι να το ψάξουμε σε πίνακες ολοκληρωμάτων. Πολύ εύκολα βρίσκουμε στη Wikipedia το ολοκλήρωμα :

$$\int x\sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3$$

που για a=1 είναι το δικό μας ολοκλήρωμα.

Επιτρόχια (εφαπτομενική) και κεντρομόλος (κάθετη) επιτάχυνση

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι η προβολή του διανύσματος της επιτάχυνσης πάνω στην τροχιά, δηλαδή πάνω στην ταχύτητα (που είναι πάντα εφαπτόμενη στην τροχιά). Άρα

$$\vec{a}\cdot\vec{\upsilon} = \vec{a}_t\cdot\vec{\upsilon} + \vec{a}_n\cdot\vec{\upsilon} = \vec{a}_t\cdot\vec{\upsilon} = a_t\upsilon \Rightarrow \boxed{a_t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon}}$$

$$\vec{a}_t = a_t\hat{t} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon}\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\right)\vec{\upsilon}$$

$$\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\right)\vec{\upsilon} = \frac{\left(\hat{x}-2t\,\hat{y}\right)\cdot\left(t\hat{x}-t^2\hat{y}\right)}{t^2(1+t^2)}\left(t\hat{x}-t^2\hat{y}\right) = \frac{t+2t^3}{t^2(1+t^2)}\left(t\hat{x}-t^2\hat{y}\right) = \left(\frac{1+2t^2}{1+t^2}\right)\hat{x} - t\left(\frac{1+2t^2}{1+t^2}\right)\hat{y}$$

$$\vec{a}_t(2) = \left(\frac{1+2\cdot 2^2}{1+2^2}\right)\hat{x} - 2\left(\frac{1+2\cdot 2^2}{1+2^2}\right)\hat{y} = \frac{9}{5}\hat{x} - \frac{18}{5}\hat{y}$$

Στη συνέχεια δεν υπολογίζουμε την πρώτη κάθετο αλλά βρίσκουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση από τη διαφορά

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \Rightarrow \vec{a}_n(2) = \vec{a}(2) - \vec{a}_t(2) = \left(\hat{x} - 2\cdot 2\,\hat{y}\right) - \left(\frac{9}{5}\hat{x} - \frac{18}{5}\hat{y}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_n(2) = -\frac{4}{5}\hat{x} - \frac{2}{5}\hat{y}$$

$$\left|\vec{a}_n(2)\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\left|\vec{\upsilon}(2)\right| = \sqrt{2^2 + (-2^2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{20}{2\sqrt{5}/5} = \frac{50}{\sqrt{5}} = 23{,}25$$

4. Σωματίδιο κινείται με επιτάχυνση $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{x} + 5\cos t\,\hat{y} - 3\sin t\,\hat{z}$ και είχε αρχικές συνθήκες $\vec{r}_0 = \hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$ και $\vec{\upsilon}_0 = (4,-3,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης.

Λύση

Απευθείας ολοκληρώσεις.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt \Rightarrow \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \left(\int_0^t 2e^{-t}dt\right)\hat{x} + \left(\int_0^t 5\cos t dt\right)\hat{y} - \left(\int_0^t 3\sin t dt\right)\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \left[-2e^{-t}\right]_0^t\hat{x} + \left[5\sin t\right]_0^t\hat{y} + \left[3\cos t\right]_0^t\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} - (4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}) = 2(1-e^{-t})\hat{x} + 5\sin t\,\hat{y} + 3(\cos t - 1)\hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = 2(3-e^{-t})\hat{x} + (5\sin t - 3)\,\hat{y} + (3\cos t - 1)\hat{z}}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{\upsilon}dt = \left(\int_0^t 2(3-e^{-t})dt\right)\hat{x} + \left(\int_0^t (5\sin t - 3)dt\right)\hat{y} + \left(\int_0^t (3\cos t - 1)dt\right)\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = 2\left[3t + e^{-t}\right]_0^t\hat{x} + \left[-5\cos t - 3t\right]_0^t\hat{y} + \left[3\sin t - t\right]_0^t\hat{z} \Rightarrow$$

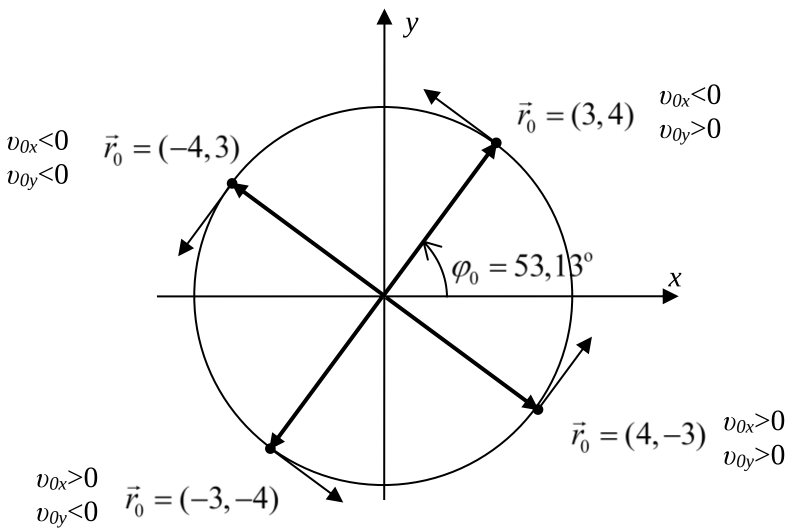
$$\vec{r} - (\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}) = 2\left[3t + e^{-t} - 1\right]\hat{x} + \left[-5\cos t - 3t + 5\right]\hat{y} + \left[3\sin t - t\right]\hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r} = \left[6t + 2e^{-t} - 1\right]\hat{x} + \left[2 - 5\cos t - 3t\right]\hat{y} + \left[3\sin t - t + 2\right]\hat{z}}$$

5. Βρείτε την εξίσωση κίνησης σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας *R*= 5 m, γύρω από την αρχή των αξόνων, δεξιόστροφα, με περίοδο *T*=2 s για αρχικές θέσεις :

α) (3,4) β) (-4,3) γ) (-3,-4) δ) (3,-4)

Λύση



Αφού η τροχιά είναι επίπεδη, θεωρούμε ως επίπεδο *x-y* το επίπεδο της κυκλικής τροχιάς. Η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi$ rad/s και το μέτρο της ταχύτητας $\upsilon = \omega R = 5\pi$ m/s . Ομαλή κυκλική κίνηση σημαίνει $\varphi = \varphi_0 + \omega t,\quad$ και $\quad r = R = \sigma\tau\alpha\theta.$

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x και y δίνονται από : $x = R\cos\omega t = R\sin(\omega t + \pi/2), \quad y = R\sin\omega t$ και προφανώς ισχύει $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t} = \sqrt{R^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)} = R$

Οπότε η κυκλική κίνηση είναι το αποτέλεσμα της συμμετοχής του σωματιδίου σε δυο ανεξάρτητες κινήσεις: μια αρμονική ταλάντωση στην διεύθυνση *x* με πλάτος *R* και κυκλική συχνότητα *ω* και μια αρμονική ταλάντωση στην διεύθυνση *y* με το ίδιο πλάτος και κυκλική συχνότητα *R* και *ω* αλλά διαφορά φάσης $-\pi/2$ με την *x*. Οι δύο ταλαντώσεις φτιάχνουν την κυκλική κίνηση.

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t + \varphi_0),\ \sin(\omega t + \varphi_0)\right) = R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\hat{x} + R\sin(\omega t + \varphi_0)\,\hat{y} = R\hat{r}(t) \equiv \vec{R}(t)$$

Η αρχική αζιμουθιακή γωνία $0 \le \theta_0 < 2\pi$ προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες

α)

$$\vec{r}\,(0) = \vec{r}_0 = (3,4) \Rightarrow 5\left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (3,4) \Rightarrow \left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (0,6\ ,\ 0,8) \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = 53,13^{o} = 0,2952\pi \text{ rad} = 0,9273 \text{ rad} \Rightarrow \vec{r}(t) = 5\left(\cos(\pi t + 0,93),\ \sin(\pi t + 0,93)\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{και} \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

οι παραπάνω εκφράσεις μπορούν να γραφτούν ως γνωστόν και ως :

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0 \quad , \qquad \sin(\omega t + \theta_0) = \sin\omega t\cos\varphi_0 + \cos\omega t\sin\varphi_0$$

και αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες θ_0 παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 5\left(\cos(\pi t + 0,93),\ \sin(\pi t + 0,93)\right)\\ &= 5\left(\cos\pi t\cos(0,93) - \sin\pi t\sin(0,93),\ \sin\pi t\cos(0,93) + \cos\pi t\sin(0,93)\right)\\ &= \left(3\cos\pi t - 4\sin\pi t,\ 3\sin\pi t + 4\cos\pi t\right)\end{aligned}$$

Οπότε

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 5\left(\cos(\pi t + 0,93),\ \sin(\pi t + 0,93)\right)\\ &= \left(3\cos\pi t - 4\sin\pi t,\ 3\sin\pi t + 4\cos\pi t\right)\end{aligned}} \qquad \text{α)}$$

β)

$\vec{r}_0 = (-4,3) \Rightarrow 5\left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (-4,3) \Rightarrow \left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (-0{,}8\ ,\ 0{,}6) \Rightarrow$

$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{0{,}6}{-0{,}8}\right)$ στο 2ο τεταρτημόριο

$\varphi_0 = 143{,}13^{\circ} = 0{,}7952\pi \text{ rad} = 2{,}498 \text{ rad}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 5\left(\cos(\pi t + 2{,}5),\ \sin(\pi t + 2{,}5)\right)\\ &= \left(-4\cos\pi t - 3\sin\pi t,\ 3\cos\pi t - 4\sin\pi t\right)\end{aligned}} \qquad \beta)$$

γ)

$\vec{r}_0(t) = (-3,-4) \Rightarrow 5\left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (-3,-4) \Rightarrow \left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (-0{,}6\ ,\ -0{,}8) \Rightarrow$

$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{-0{,}6}{-0{,}8}\right)$ στο 3ο τεταρτημόριο

$\varphi_0 = 233{,}13^{\circ} = 1{,}2952\pi \text{ rad} = 4{,}069 \text{ rad}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 5\left(\cos(\pi t + 4{,}069),\ \sin(\pi t + 4{,}069)\right)\\ &= \left(-3\cos\pi t + 4\sin\pi t,\ -3\sin\pi t - 4\cos\pi t\right)\end{aligned}} \qquad \gamma)$$

δ)

$\vec{r}_0(t) = (4,-3) \Rightarrow 5\left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (4,-3) \Rightarrow \left(\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0\right) = (0{,}8\ ,\ -0{,}6) \Rightarrow$

$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{-0{,}6}{0{,}8}\right)$ στο 3ο τεταρτημόριο

$\varphi_0 = 323{,}13^{\circ} = 1{,}7952\pi \text{ rad} = 5{,}640 \text{ rad}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 5\left(\cos(\pi t + 5{,}640),\ \sin(\pi t + 5{,}640)\right)\\ &= \left(4\cos\pi t + 3\sin\pi t,\ -3\cos\pi t + 4\sin\pi t\right)\end{aligned}} \qquad \delta)$$

6. Το ίδιο πρόβλημα με πριν αλλά το κέντρο του κύκλου να μην είναι στην αρχή των αξόνων. Σωματίδιο κινείται ομαλά σε κυκλική τροχιά ακτίνας R= 5 με κέντρο (3,4), περίοδο T=2 και αρχική θέση την αρχή των αξόνων (0, 0). Η κίνησή του είναι δεξιόστροφη όπως στο σχήμα.
α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου καθώς και την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες
β) Επιβεβαιώστε ότι η ταχύτητα είναι κάθετη και η επιτάχυνση είναι αντίθετη στο διάνυσμα της ακτίνας $\vec{R}$

Λύση
Ουσιαστικά, απλά προσθέτουμε στα προηγούμενα διανύσματα θέσης και το διάνυσμα της θέσης του κέντρου $\vec{r}_C = (3,4) = 5(\cos 53{,}13^{\circ}, \sin 53{,}13^{\circ}) = 3\hat{x} + 4\hat{y}$
Το σωματίδιο συμμετέχει σε δυο κινήσεις :
Α. Ακινησία στο κέντρο του κύκλου :

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_C = (3,4) = 5(\cos 53{,}13^{\circ}, \sin 53{,}13^{\circ}) = 3\hat{x} + 4\hat{y}$$

Β. Κυκλική κίνηση ακτίνας R και γωνιακής ταχύτητας ω :

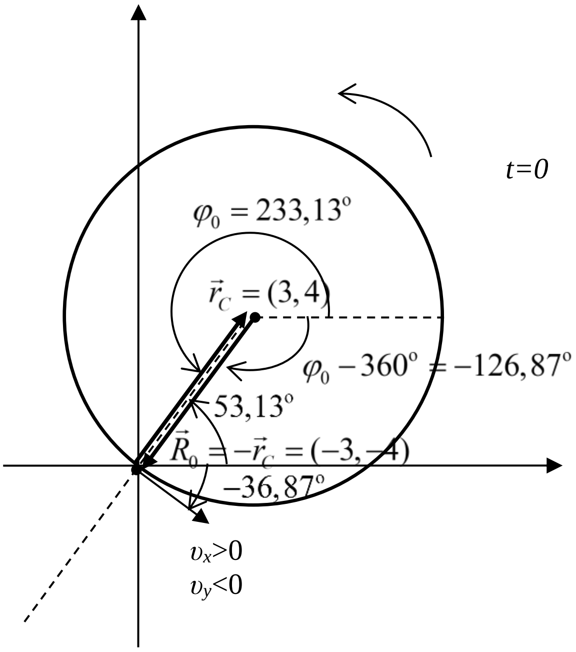
$$\vec{r}_B(t) = R\left(\cos(\omega t + \varphi_0),\ \sin\omega t(\omega t + \varphi_0)\right) = R\cos(\omega t + \varphi_0)\ \hat{x} + R\sin(\omega t + \varphi_0)\ \hat{y}$$

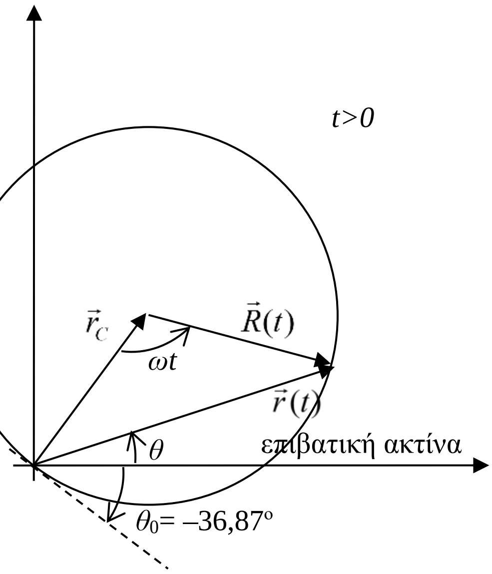
Το διάνυσμα θέσης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω κινήσεων :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_B(t) = \vec{r}_C + \vec{R}(t)$$

Για να είναι: $\vec{r}_0 = 0 \Rightarrow \vec{r}_C + \vec{R}(0) = 0 \Rightarrow \vec{R}(0) = -\vec{r}_C = (-3,-4)$

Δηλαδή είμαστε στην περίπτωση αρχικών συνθηκών γ) της προηγούμενης άσκησης





Συνεπώς η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου δίνεται από την σχέση

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_C + \vec{R}(t) = (3,4) + \left(-3\cos\pi t + 4\sin\pi t,\ -3\sin\pi t - 4\cos\pi t\right)$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(3(1-\cos\pi t) + 4\sin\pi t,\ -3\sin\pi t + 4(1-\cos\pi t)\right)}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της διπλάσιας γωνίας : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$1-\cos\pi t = 2\sin^2\frac{\pi t}{2}, \quad \sin\pi t = 2\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}$$

Έχουμε για την x συντεταγμένη :

$$3(1-\cos\pi t) + 4\sin\pi t = 3\cdot 2\sin^2\frac{\pi t}{2} + 4\cdot 2\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} = 2\sin\frac{\pi t}{2}\left(3\sin\frac{\pi t}{2} + 4\cos\frac{\pi t}{2}\right)$$

και αντίστοιχα για την y :

$$-3\sin\pi t + 4(1-\cos\pi t) = -3\cdot 2\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + 4\cdot 2\sin^2\frac{\pi t}{2} = 2\sin\frac{\pi t}{2}\left(-3\cos\frac{\pi t}{2} + 4\sin\frac{\pi t}{2}\right)$$

Το διάνυσμα θέσης γράφεται τελικά $\boxed{\vec{r}(t) = 2\sin\frac{\pi t}{2}\left(3\sin\frac{\pi t}{2} + 4\cos\frac{\pi t}{2},\ -3\cos\frac{\pi t}{2} + 4\sin\frac{\pi t}{2}\right)}$

Από την παραπάνω έκφραση υπολογίζουμε εύκολα, το μέτρο του και την πολική γωνία του (τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x)

$$r^2 = x^2 + y^2 = 4\sin^2\frac{\pi t}{2}\left[\left(3\sin\frac{\pi t}{2} + 4\cos\frac{\pi t}{2}\right)^2 + \left(-3\cos\frac{\pi t}{2} + 4\sin\frac{\pi t}{2}\right)^2\right]$$

$$= 4\sin^2\frac{\pi t}{2}\left[9\sin^2\frac{\pi t}{2} + 16\cos^2\frac{\pi t}{2} + 24\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + 9\cos^2\frac{\pi t}{2} + 16\sin^2\frac{\pi t}{2} - 24\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\right]$$

$$= 4\sin^2\frac{\pi t}{2}\left[9\left(\sin^2\frac{\pi t}{2} + \cos^2\frac{\pi t}{2}\right) + 16\left(\sin^2\frac{\pi t}{2} + \cos^2\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin^2\frac{\pi t}{2}\left[9+16\right] = 100\sin^2\frac{\pi t}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{r = 10\sin\frac{\pi t}{2}}$$

Την αζιμουθιακή γωνία δεν την υπολογίζουμε από την $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, για να μην μπλέξουμε με τριγωνομετρικές ταυτότητες αλλά από την $\cos\theta = \dfrac{\vec{r}\cdot\hat{x}}{r}$ που εξ ορισμού δίνει την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\hat{x}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\hat{x}}{r} = \frac{2\sin\frac{\pi t}{2}\left(3\sin\frac{\pi t}{2}+4\cos\frac{\pi t}{2}\right)}{10\sin\frac{\pi t}{2}} = 0,6\sin\frac{\pi t}{2}+0,8\cos\frac{\pi t}{2} = \sin\left(\frac{\pi t}{2}+53,13^{o}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi t}{2}+53,13^{o}-90^{o}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}-36,87^{o}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi t}{2}-36,87^{o}}$$

Η παραπάνω σχέση βγαίνει και από απλή Ευκλείδεια γεωμετρία : «μια εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο». Από το σχήμα

$$\theta + |\theta_0| = \frac{\omega t}{2}$$

Από αυτές τις εκφράσεις για το διάνυσμα θέσης σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες μπορούμε πλέον να απαντήσουμε οποιαδήποτε ερώτηση για την τροχιά.

Εφόσον πρόκειται για ομαλή κυκλική κίνηση θα πρέπει :

α) η ταχύτητα να είναι κάθετη στο διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου : $\vec{\upsilon}(t)\cdot\vec{R}(t) = 0$

β) η επιτάχυνση να είναι κεντρομόλος : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = -\omega^2\vec{R}(t)$

όπου $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) = \left(-3\cos\pi t + 4\sin\pi t\right)\hat{x} + \left(-3\sin\pi t - 4\cos\pi t\right)\hat{y} = R_x\hat{x} + R_y\hat{y}$

και $\omega^2 = \pi^2$

Υπολογίζουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση και επιβεβαιώνουμε τα παραπάνω.

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{x}\frac{d}{dt}\left(3(1-\cos\pi t)+4\sin\pi t\right) + \hat{y}\frac{d}{dt}\left(-3\sin\pi t + 4(1-\cos\pi t)\right)$$

$$= \left(3\pi\sin\pi t + 4\pi\cos\pi t\right)\hat{x} + \left(-3\pi\cos\pi t + 4\pi\sin\pi t\right)\hat{y}$$

Παρατηρούμε ότι $\vec{\upsilon}(t) = -R_y\hat{x} + R_x\hat{y}$

Άρα προφανώς $\vec{\upsilon}(t)\cdot\vec{R}(t) = \left(-R_y\hat{x}+R_x\hat{y}\right)\cdot\left(R_x\hat{x}+R_y\hat{y}\right) = -R_yR_x + R_xR_y = 0$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \hat{x}\frac{d}{dt}\left(3\pi\sin\pi t + 4\pi\cos\pi t\right) + \hat{y}\frac{d}{dt}\left(-3\pi\cos\pi t + 4\pi\sin\pi t\right)$$

$$= \pi^2\left(3\cos\pi t - 4\sin\pi t\right)\hat{x} + \pi^2\left(3\sin\pi t + 4\cos\pi t\right)\hat{y}$$

$$= -\pi^2\left(-3\cos\pi t + 4\sin\pi t\right)\hat{x} - \pi^2\left(-3\sin\pi t - 4\cos\pi t\right)\hat{y}$$

$$= -\omega^2\vec{R}(t)$$

7. Η τροχιά σωματιδίου είναι μια καμπύλη C με διάνυσμα θέσης : $\vec{r}(t) = 3\cos 2t\;\hat{x} + 3\sin 2t\;\hat{y} + (8t-4)\hat{z}$

α) Από τη μορφή της καμπύλης περιγράψτε την κίνηση.

β) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\hat{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ έχει μέτρο μονάδα και είναι εφαπτόμενο στην τροχιά, όπου s είναι το μήκος του δρόμου (τόξου) πάνω στην τροχιά $ds = \upsilon dt$. Υπολογίστε το $\hat{t}$ και άρα επαληθεύστε ότι $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t}$

γ) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\frac{d\hat{t}}{ds}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\hat{t}$. Υπολογίστε το μέτρο του το οποίο ονομάζεται καμπυλότητα *κ*, και υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας η οποία ορίζεται ως $R = 1/\kappa$.

Κατασκευάστε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ (πρώτη κάθετος) στην κατεύθυνση του $\frac{d\hat{t}}{ds}$.

δ) Κατασκευάστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{b}$ (δικάθετος) που να είναι κάθετο και στο $\hat{t}$ και στο $\hat{n}$ ώστε να ορίσετε ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο τρισδιάστατο σύστημα αξόνων *t*-*n*-*b*.

ε) Δείξτε ότι η επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο : $\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n}$

Λύση

α) Η κίνηση του σώματος είναι η επαλληλία δύο ανεξάρτητων κινήσεων μιας στο επίπεδο *x*-*y* και μιας στον άξονα *z*.

Στο επίπεδο *x*-*y* η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας ρ=3 αφού $x^2 + y^2 = 3^2\cos^2 2t + 3^2\sin^2 2t = 3^2$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 2 και η περίοδος $T = 2\pi/\omega = \pi$. Άρα το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Η γραμμική ταχύτητα στο επίπεδο *x*-*y* έχει σταθερό μέτρο $\upsilon_{xy} = \omega\rho = 2\cdot 3 = 6$.

Στον άξονα *z* το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αφού $z = 8t - 4 \Rightarrow \upsilon_z = 8 = \sigma\tau\alpha\theta.$

Άρα η τροχιά είναι μια σπειροειδής καμπύλη με σταθερή ακτίνα ρ =3 και βήμα στον άξονα *z* ίσο με $\beta = \upsilon_z T = 8\pi$

Το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{xy}^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Η επιτάχυνση θα είναι μόνο η κεντρομόλος, στο επίπεδο *x*-*y*, που είναι ίση με $a_c = \omega^2\rho = 2^2\cdot 3 = 12$

β) Επειδή ισχύει $|d\vec{r}| = ds > 0$, έχουμε : $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \Rightarrow |\hat{t}| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{ds} = 1$

Κάθε διάνυσμα παράλληλο στο $d\vec{r}$ είναι εξ ορισμού εφαπτόμενο στην καμπύλη επειδή το $d\vec{r}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη, ενώνει ένα σημείο της με το «επόμενο».

Για να υπολογίσουμε το $\hat{t}$ χρησιμοποιούμε την ταχύτητα η οποία επίσης είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη $\vec{\upsilon}(t) = d\vec{r}(t)/dt = -6\sin 2t\ \hat{x} + 6\cos 2t\ \hat{y} + 8\hat{z}$

Από αυτήν φτιάχνουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα διαιρώντας την με το μέτρο της

$$\upsilon(t) = |d\vec{r}(t)/dt| = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + (6\cos 2t) + 8^2} = \sqrt{6^2(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 8^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα έχουμε : $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} \Rightarrow \boxed{\hat{t} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}}$

Θυμίζουμε : $\upsilon = \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

Οπότε $\hat{t} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{-6\sin 2t\ \hat{x} + 6\cos 2t\ \hat{y} + 8\hat{z}}{10} \Rightarrow \boxed{\hat{t} = -\frac{3}{5}\sin 2t\ \hat{x} + \frac{3}{5}\cos 2t\ \hat{y} + \frac{4}{5}\hat{z}}$

Πράγματι $|\hat{t}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\sin 2t\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\cos 2t\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3^2}{5^2}\left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right) + \frac{4^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1$

Από τον ορισμό του $\hat{t} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t}}$

γ) Κάθε παράγωγος (ρυθμός μεταβολής) κάθε μοναδιαίου διανύσματος είναι κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα αφού το μέτρο του δεν αλλάζει.

$$\hat{t}\cdot\hat{t} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\hat{t}\cdot\hat{t}) = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t} + \hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \Rightarrow 2\hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \Rightarrow \hat{t} \perp \frac{d\hat{t}}{ds}$$

Προσοχή στους συμβολισμούς! $\hat{t}$ tangent (εφαπτόμενο) διάνυσμα , *t* time παράμετρος χρόνου

$$\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{d\hat{t}}{dt}=\frac{1}{\upsilon}\frac{d\hat{t}}{dt}=\frac{1}{10}\frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{5}\sin 2t\ \hat{x}+\frac{3}{5}\cos 2t\ \hat{y}+\frac{4}{5}\hat{z}\right)=-\frac{3}{25}\cos 2t\ \hat{x}-\frac{3}{25}\sin 2t\ \hat{y}$$

Πράγματι

$$\hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds}=\left(-\frac{3}{5}\sin 2t\ \hat{x}+\frac{3}{5}\cos 2t\ \hat{y}+\frac{4}{5}\hat{z}\right)\cdot\left(-\frac{3}{25}\right)\left(\cos 2t\ \hat{x}+\sin 2t\ \hat{y}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{125}\right)\left[-3\sin 2t\cos 2t\ \hat{x}\cdot\hat{x}-3\sin^2 2t\ \hat{x}\cdot\hat{y}+3\cos^2 2t\ \hat{y}\cdot\hat{x}+3\cos 2t\sin 2t\ \hat{y}\cdot\hat{y}+4\cos 3t\ \hat{z}\cdot\hat{x}+4\sin 3t\hat{z}\cdot\hat{y}\right]$$

$$=\left(-\frac{3}{125}\right)\left[-3\sin 2t\cos 2t\cdot 1-3\sin^2 2t\cdot 0+3\cos^2 2t\cdot 0+3\cos 2t\sin 2t\cdot 1+4\cos 3t\cdot 0+4\sin 3t\cdot 0\right]$$

$$=\left(-\frac{3}{125}\right)3\left[-\sin 2t\cos 2t+\cos 2t\sin 2t\right]=0\Rightarrow \hat{t}\perp\frac{d\hat{t}}{ds}$$

Το μέτρο του $\dfrac{d\hat{t}}{ds}$ δεν είναι υποχρεωτικά μονάδα και ονομάζεται καμπυλότητα κ ενώ το αντίστροφό του ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας $R=1/\kappa$

$$\kappa=\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2\cos^2 2t+\left(\frac{3}{25}\right)^2\sin^2 2t}\Rightarrow\kappa=\frac{3}{25},\qquad R=\frac{1}{\kappa}=\frac{25}{3}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του $\dfrac{d\hat{t}}{ds}$, που είναι κάθετη στη διεύθυνση του $\hat{t}$, και άρα κάθετο στην καμπύλη, ονομάζεται πρώτο κάθετο (normal) της καμπύλης και θα δίνεται από τον τύπο

$$\hat{n}=\frac{d\hat{t}/ds}{\left|d\hat{t}/ds\right|}\Rightarrow\boxed{\hat{n}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{t}}{ds}=R\frac{d\hat{t}}{ds}}\Rightarrow\frac{d\hat{t}}{ds}=\kappa\hat{n}=\frac{\hat{n}}{R}$$

Επειδή $\dfrac{d}{ds}=\dfrac{dt}{ds}\dfrac{d}{dt}=\dfrac{1}{\upsilon}\dfrac{d}{dt}$, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να μετατραπούν σε παραγωγίσεις ως προς το χρόνο *t*:

$$\frac{d\hat{t}}{ds}=\kappa\hat{n}\Rightarrow\frac{dt}{ds}\frac{d\hat{t}}{dt}=\kappa\hat{n}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}\frac{d\hat{t}}{dt}=\kappa\hat{n}\Rightarrow\frac{d\hat{t}}{dt}=\kappa\upsilon\hat{n}=\frac{\upsilon}{R}\hat{n}$$

Το $\hat{n}$ για την καμπύλη *C* είναι

$$\hat{n}=R\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{25}{3}\left(-\frac{3}{25}\cos 2t\ \hat{x}-\frac{3}{25}\sin 2t\ \hat{y}\right)\Rightarrow\boxed{\hat{n}=-\cos 2t\ \hat{x}-\sin 2t\ \hat{y}}$$

Προφανώς $|\hat{n}|=1$

δ) Ένα κάθετο διάνυσμα και στα δύο διανύσματα $\hat{t},\hat{n}$ είναι το εξωτερικό τους γινόμενο : $\boxed{\hat{b}=\hat{t}\times\hat{n}}$ που ονομάζεται δικάθετος (binormal). Αυτό έχει μέτρο μονάδα επειδή τα $\hat{t},\hat{n}$ είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους : $|\hat{b}|=|\hat{t}||\hat{n}|\sin 90^{\circ}=1\cdot 1\cdot 1=1$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση του τριπλού εξωτερικού γινομένου $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$ βλέπουμε ότι το σύστημα *t-n-b* είναι δεξιόστροφο : $\hat{t}=\hat{n}\times\hat{b},\ \ \hat{n}=\hat{b}\times\hat{t},\ \ \hat{b}=\hat{t}\times\hat{n}$.

$$\hat{n}\times\hat{b}=\hat{n}\times\left(\hat{t}\times\hat{n}\right)=\left(\hat{n}\cdot\hat{n}\right)\hat{t}-(\hat{n}\cdot\hat{t})\hat{n}=\hat{t}$$

$$\hat{b}\times\hat{t}=\left(\hat{t}\times\hat{n}\right)\times\hat{t}=-\hat{t}\times\left(\hat{t}\times\hat{n}\right)=-(\hat{t}\cdot\hat{n})\hat{t}+(\hat{t}\cdot\hat{t})\hat{n}=\hat{n}$$

Το $\hat{b}$ της καμπύλης *C* είναι

$$\hat{b} = \hat{t}\times\hat{n} = \left(-\frac{3}{5}\sin 2t\ \hat{x} + \frac{3}{5}\cos 2t\ \hat{y} + \frac{4}{5}\hat{z}\right)\times\left(-\cos 2t\ \hat{x} - \sin 2t\ \hat{y}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\sin^2 2t\ \hat{x}\times\hat{y} - \frac{3}{5}\cos^2 2t\ \hat{y}\times\hat{x} - \frac{4}{5}\cos 2t\ \hat{z}\times\hat{x} - \frac{4}{5}\sin 2t\ \hat{z}\times\hat{y}$$

$$= \frac{3}{5}\sin^2 2t\ \hat{z} - \frac{3}{5}\cos^2 2t(-\hat{z}) - \frac{4}{5}\cos 2t\ \hat{y} - \frac{4}{5}\sin 2t\left(-\hat{x}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\sin 2t\ \hat{x} - \frac{4}{5}\cos 2t\ \hat{y} + \frac{3}{5}\left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right)\ \hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{b} = \frac{4}{5}\sin 2t\ \hat{x} - \frac{4}{5}\cos 2t\ \hat{y} + \frac{3}{5}\ \hat{z}}$$

Θυμίζουμε ότι $\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$ και $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z},\ \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x},\ \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$ ενώ $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$

Προφανώς $\left|\hat{b}\right| = 1$

ε) Η επιτάχυνση υπολογίζεται απευθείας με παραγώγιση. Έχουμε ήδη υπολογίσει όλες τις παραγώγους που θα χρειαστούμε

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon\hat{t}\right) = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{\upsilon}{R}\hat{n} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n}} \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Ο πρώτος όρος ονομάζεται επιτρόχιος επιτάχυνση και ο δεύτερος κεντρομόλος επιτάχυνση

Επαλήθευση για τη συγκεκριμένη καμπύλη *C*

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-6\sin 2t\ \hat{x} + 6\cos 2t\ \hat{y} + 8\hat{z}) = -12\cos 2t\ \hat{x} - 12\sin 2t\ \hat{y}$$

Η επιτάχυνση είναι στο επίπεδο *x-y* και το μέτρο της είναι 12 όπως περιμέναμε.

Από τον τύπο $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n} = 0\cdot\hat{t} + \frac{10^2}{25/3}\left(-\cos 2t\ \hat{x} - \sin 2t\ \hat{y}\right) = -12\cos 2t\ \hat{x} - 12\sin 2t\ \hat{y}$$