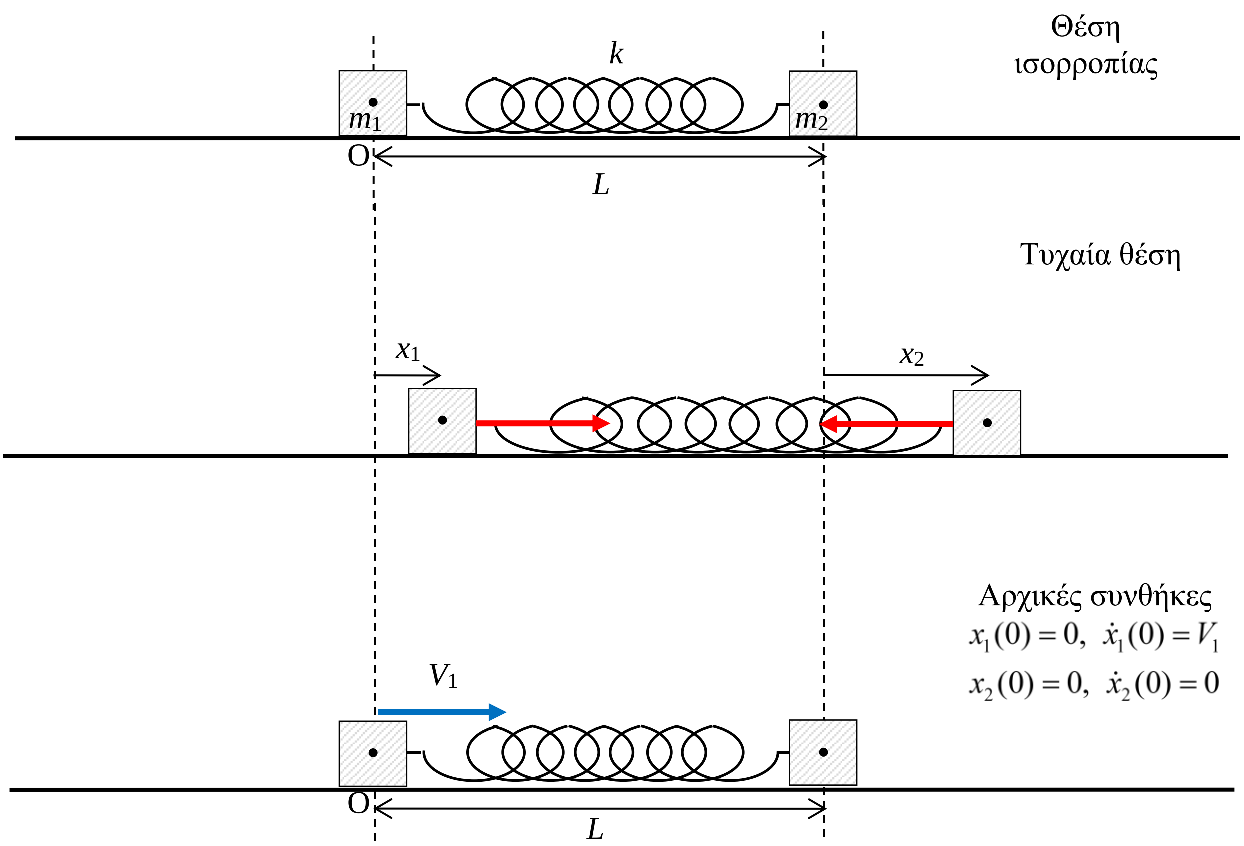
1D πρόβλημα δύο σωμάτων με δύναμη ελατηρίου



Γράφουμε την αρχή της ορμής (2^ος^ νόμος Νεύτωνα) για κάθε σώμα:

$$-k(x_1-x_2)=m_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$k(x_1-x_2)=m_2\ddot{x}_2 \qquad (2)$$

Έχουμε πάλι συζευγμένες (coupled) διαφορικές εξισώσεις

Λύση με απλούς συλλογισμούς

Στο προηγούμενο παράδειγμα των δύο ίσων μαζών και τριών ελατηρίων (*k*, *m*, *k*΄, *m*, *k*) που εξετάσαμε στις σημειώσεις της θεωρίας, οι συνδυασμοί εξισώσεων (1) + (2) και (1) – (2), έδιναν νέες εξισώσεις που ήταν αποσυνδεδεμένες. Η μία ήταν ταλάντωση για το συνδυασμό $X_1=x_1+x_2$ και η δεύτερη επίσης ταλάντωση για το συνδυασμό $X_2=x_1-x_2$. Άρα βρίσκαμε τα $X_1,\ X_2$ και από αυτά τα $x_1=(X_1+X_2)/2$ και $x_2=(X_1-X_2)/2$

Εδώ που οι μάζες είναι διαφορετικές, η εύρεση των κατάλληλων συνδυασμών είναι πιο περίπλοκη. Παρόλα αυτά με λίγη φαντασία μπορεί να γίνει. Προσθέτοντας τις εξισώσεις παίρνουμε

$$(1)+(2): \qquad 0=m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2 \Rightarrow \frac{m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2}=0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)=0$$

Δηλαδή ο συνδυασμός

$$X(t)=\frac{m_1x_1(t)+m_2x_2(t)}{M}$$

όπου $M=m_1+m_2$, έχει μηδέν επιτάχυνση. Άρα μπορούμε να πούμε ότι ικανοποιεί μια εξίσωση «απλού αρμονικού ταλαντωτή» με μηδενική κυκλική συχνότητα:

$$\ddot{X} + \omega_1^2 X = 0 \qquad \text{με} \quad \omega_1^2 = 0$$

Μηδέν επιτάχυνση $\ddot{X} = 0$, σημαίνει σταθερή ταχύτητα $\dot{X} = \sigma\tau\alpha\theta$ και άρα το X θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η αρχική του τιμή και η ταχύτητα με την οποία κινείται βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$X(0) = \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{M} = 0$$

$$V = \sigma\tau\alpha\theta = V(0) = \frac{m_1 \dot{x}_1(0) + m_2 \dot{x}_2(0)}{M} = \frac{m_1}{M} V_1$$

$$X(t) = \frac{m_1}{M} V_1 \cdot\ t$$

Χρειαζόμαστε να βρούμε άλλον έναν γραμμικό συνδυασμό των $x_1,\ x_2$. Στο αριστερό μέλος των (1) και (2) έχουμε έτοιμο το συνδυασμό $x_1 - x_2$, όμως αν απλώς αφαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) – (2) δεν παίρνουμε στο δεξί μέλος την αντίστοιχη διαφορά των επιταχύνσεων $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ αλλά παίρνουμε $m_1\dot{x}_1 - m_2\dot{x}_2$. Παρατηρούμε όμως ότι, αν πριν αφαιρέσουμε τις εξισώσεις πολλαπλασιάσουμε την καθεμία με τη μάζα της άλλης εξίσωσης θα εμφανιστεί ο κοινός παράγοντας $m_1 m_2$ και το δεξί μέλος θα παραγοντοποιηθεί στη μορφή που θέλουμε:

$$m_2(1) - m_1(2):\ -m_2 k(x_1 - x_2) - m_1 k(x_1 - x_2) = m_2 m_1 \ddot{x}_1 - m_1 m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow -k(m_1 + m_2)(x_1 - x_2) = m_2 m_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \Rightarrow$$

$$-k(x_1 - x_2) = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \Rightarrow -kx = \mu\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{\mu}x = 0$$

Όπου ορίσαμε το συνδυασμό

$$x = x_1 - x_2$$

και την ανηγμένη μάζα :

$$\mu = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}$$

Αυτή είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με $\omega_2^2 = \dfrac{k}{\mu}$.

Άρα το x θα είναι ίσο με

$$x(t) = A\sin(\omega_2 t + \varphi)$$

και η ταχύτητά του

$$\upsilon(t) = A\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

Τα A και φ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = A\sin(\varphi) \Rightarrow\ x_1(0) - x_2(0) = A\sin(\varphi) \Rightarrow\ A\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow\ \varphi = 0 \ \text{ ή }\ \pi$$

$$\upsilon(0) = A\omega_2\cos(\varphi) \Rightarrow\ \upsilon_1(0) - \upsilon_2(0) = A\omega_2\cos(\varphi) \Rightarrow A\omega_2\cos(\varphi) = V_1 > 0 \Rightarrow\ \varphi = 0$$

$$V_1 = A\omega_2\cos(0) \Rightarrow\ A = \frac{V_1}{\omega_2}$$

$$x(t) = \frac{V_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)$$

Από τα $X(t)$ και $x(t)$ μπορούμε να βρούμε τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τα οποία θα μας δίνουν τις χρονικές εξαρτήσεις των απομακρύνσεων των μαζών από την αντίστοιχη αρχική θέση ισορροπίας τους.

Επιβεβαιώστε ότι είναι :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= X(t) + \frac{m_2}{M}x(t) \Rightarrow\quad x_1(t) = \frac{m_1}{M}V_1 \cdot\ t + \frac{m_2}{M}\frac{V_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) &= X(t) - \frac{m_1}{M}x(t) \Rightarrow\quad x_2(t) = \frac{m_1}{M}V_1 \cdot\ t - \frac{m_1}{M}\frac{V_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Λύση με χρήση πινάκων

Τους παραπάνω αλγεβρικούς χειρισμούς, για να βρούμε κατάλληλους συνδυασμούς των $x_1(t)$ και $x_2(t)$ που να αποσυνδέουν τις διαφορικές εξισώσεις, δεν θα μπορούμε να τους κάνουμε εύκολα όσο το σύστημα γίνεται όλο και πιο περίπλοκο με περισσότερες και διαφορετικές μάζες και περισσότερα και διαφορετικά ελατήρια.
Επίσης την παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να την κάνει ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, δηλαδή να μαντέψει, να δοκιμάσει, να συνδυάσει, να φανταστεί.
Θέλουμε μια ψυχρή ακολουθία διαδοχικών βημάτων που να μπορούμε να την ακολουθούμε πάντα τυφλά και να μας οδηγεί στη λύση είτε είναι απλό το σύστημα είτε περίπλοκο. Μια τέτοια αυτόματη ακολουθία βημάτων (συνταγή, αλγόριθμο) μπορούμε να την προγραμματίσουμε σε ένα υπολογιστή που ξέρει γραμμική άλγεβρα. Στόχος είναι να αποσυνδεθούν οι διαφορικές εξισώσεις και μετά να λυθούν.

<u>Η συνταγή είναι η ακόλουθη:</u>

Γράψε τις εξισώσεις σε μορφή πίνακα

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & -k(x_1-x_2)=m_1\ddot{x}_1 \\ (2) & k(x_1-x_2)=m_2\ddot{x}_2\end{array}\right\} \Rightarrow -\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow -KX(t)=M\ddot{X}(t) \quad (3)$$

Δοκίμασε εκθετική λύση της μορφής

$$X(t)=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$-\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{bmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Πρέπει η ορίζουσα του ομογενούς γραμμικού συστήματος (4) να είναι μηδέν για να υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις και έτσι βρίσκεις τις ιδιοσυχνότητες

$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k-\omega^2 m_1)(k-\omega^2 m_2)-k^2=0 \Rightarrow \cancel{k^2}-\omega^2(m_1+m_2)k+\omega^4 m_1 m_2-\cancel{k^2}=0$$

$$\omega^2\left\{\omega^2 m_1 m_2-(m_1+m_2)k\right\}=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1=0 \\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)k}{m_1 m_2}}=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}} \end{array} \quad \text{ιδιοσυχνότητες}$$

Αντικατέστησε τις ιδιοσυχνότητες στην (4) για να βρεις τα ιδιοανύσματα, δηλαδή τη σχέση μεταξύ των A_1 και A_2 :

$$\omega_1 : k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\omega_2 : \begin{bmatrix} k-\dfrac{(m_1+m_2)k}{m_1m_2}m_1 & -k \\ -k & k-\dfrac{(m_1+m_2)k}{m_1m_2}m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1-\dfrac{m_1+m_2}{m_2} & -1 \\ -1 & 1-\dfrac{m_1+m_2}{m_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -r & -1 \\ -1 & -1/r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} rA_1+A_2 \\ A_1+A_2/r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2=-rA_1 \qquad \text{όπου } r=\frac{m_1}{m_2}$$

Ιδιοανύσματα : $u_1 = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = a_2\begin{bmatrix} 1 \\ -r \end{bmatrix}$ όπου τα a_1 και a_2 θα προσδιοριστούν ώστε τα ιδιοανύσματα να είναι κανονικοποιημένα, δηλαδή να έχουν μέτρο 1.

Όρισε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως :

$$(u,v) \equiv u^T M v$$

Όπου M είναι ο διαγώνιος 2×2 πίνακας των μαζών. Το ανάστροφο (transpose) ενός διανύσματος στήλη το οποίο είναι και ισοδύναμο με ένα πίνακα 2×1 είναι ένα διάνυσμα γραμμή ή ένας πίνακας 1×2. Γενικά ανάστροφος ενός πίνακα είναι ο πίνακας που έχει ως στήλες τις γραμμές του πρώτου (αναστρέφουμε γραμμές με στήλες).

Π.χ. $u_1^T = a_1[1 \ \ 1]$, $u_2^T = a_2[1 \ \ -r]$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας αριθμός αφού είναι γινόμενο πινάκων της εξής μορφής :

(1×2)(2×2)(2×1) = (1×2)(2×1) = (1×1) = αριθμός

Έλεγξε την Ορθογωνικότητα.

Τα ιδιοανύσματα πρέπει να είναι κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή να έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν :

$$(u_1,u_2)=a_1a_2[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -r \end{bmatrix}=a_1a_2[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} m_1 \\ -\dfrac{m_1}{m_2}m_2 \end{bmatrix}=a_1a_2[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} m_1 \\ -m_1 \end{bmatrix}=a_1a_2(m_1-m_1)=0$$

είναι πράγματι κάθετα μεταξύ τους.

Κανονικοποίηση ιδιοανυσμάτων (για απλότητα).

Σταθερές κανονικοποίησης a_1 και a_2.

Ρύθμισε τις σταθερές a_1 και a_2 ώστε τα ιδιοανύσματα να έχουν μέτρο 1.

$$(u_1,u_1)=1 \Rightarrow a_1^2[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=a_1^2[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}=a_1^2(m_1+m_2)=1 \Rightarrow a_1=\frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}},$$

$$(u_2,u_2)=1 \Rightarrow a_2^2[1 \ \ -r]\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -r \end{bmatrix}=a_2^2[1 \ \ -r]\begin{bmatrix} m_1 \\ -m_1 \end{bmatrix}=a_2^2\left(m_1+m_1\frac{m_1}{m_2}\right)=1 \Rightarrow$$

$$a_2^2\frac{m_1}{m_2}(m_2+m_1) \Rightarrow a_2=\frac{1}{\sqrt{r(m_1+m_2)}}$$

Τα ορθοκανονικά ιδιοανύσματα είναι

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{rM}}\begin{bmatrix} 1 \\ -r \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{r} \\ -\sqrt{r} \end{bmatrix} \qquad \text{με } M = m_1 + m_2$$

και αποτελούν πλήρη ορθοκανονική βάση στο διανυσματικό χώρο των λύσεων της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.
Από αυτά φτιάχνουμε τον πίνακα

$$D = [\hat{u}_1, \hat{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{r} \\ 1 & -\sqrt{r} \end{bmatrix}$$

που έχει ως στήλες τις συνιστώσες των ιδιοανυσμάτων.
Ο ανάστροφός του είναι ο πίνακας που έχει τις συνιστώσες των ιδιοανυσμάτων ως γραμμές:

$$D^T = \left[\hat{u}_1^T, \hat{u}_2^T\right] = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{bmatrix}$$

Η λύση θα είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοανυσμάτων

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \hat{u}_1\tau_1(t) + \hat{u}_2\tau_2(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\tau_1(t) + \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{r} \\ -\sqrt{r} \end{bmatrix}\tau_2(t) \qquad (5)$$

με συντελεστές τις άγνωστες χρονικές εξαρτήσεις $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$. Στην παραπάνω σχέση τα u_1 και u_2 είναι διανύσματα και οι συναρτήσεις $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ βαθμωτές συναρτήσεις. Φτιάχνουμε από αυτές ένα διάνυσμα

$$T(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}$$

και γράφουμε την (5) σε μορφή πινάκων, οπότε εμφανίζεται ο πίνακας D

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} \tau_1(t) + \frac{1}{\sqrt{r}}\tau_2(t) \\ \tau_1(t) - \sqrt{r}\,\tau_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = DT(t) \quad (6)$$

***Αντικατάσταση της* (6) *στην αρχική διαφορική εξίσωση* (3*) αποσυνδέει* (decouples) *τις διαφορικές εξισώσεις για τα* $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$**

Αντικατάσταση

$$-KX(t) = M\ddot{X}(t) \Rightarrow -KDT(t) = MD\ddot{T}(t)$$

Πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον ανάστροφο D^T

$$-D^T KDT(t) = D^T MD\ddot{T}(t)$$

Χρήσιμη σχέση : $$\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{r+1}{\sqrt{r}} = \frac{\frac{m_1}{m_2}+1}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = \frac{\frac{m_1+m_2}{m_2}}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = \frac{M}{\sqrt{m_1 m_2}} = \frac{M}{\sqrt{\mu M}} = \sqrt{\frac{M}{\mu}}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Υπολογισμός γινομένων πινάκων

$$D^T MD = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{r} \\ 1 & -\sqrt{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_1/\sqrt{r} \\ m_2 & -m_2\sqrt{r} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{M}\begin{pmatrix} M & m_1/\sqrt{r} - m_2\sqrt{r} \\ m_1/\sqrt{r} - m_2\sqrt{r} & M \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} M & \sqrt{m_1 m_2} - \sqrt{m_1 m_2} \\ \sqrt{m_1 m_2} - \sqrt{m_1 m_2} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-D^T KD = \frac{-1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{r} \\ 1 & -\sqrt{r} \end{pmatrix} = \frac{-1}{M}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \\ 0 & -k\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-k}{M}\sqrt{\frac{M}{\mu}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\sqrt{r} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{-k}{\sqrt{\mu M}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix} = \frac{-k}{\sqrt{\mu M}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{M}{\mu}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k/\mu \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix}$$

Γενικά σε κάθε πρόβλημα θα ισχύει πάντα (αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη κατασκευή του D και την κανονικοποίηση των ιδιοανυσμάτων)

$$D^T MD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^T KD = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \omega_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Αποσύνδεση διαφορικών εξισώσεων

$$-D^T KDT(t) = D^T MD\ddot{T}(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\tau}_1(t) \\ \ddot{\tau}_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_2^2\tau_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\tau}_1(t) \\ \ddot{\tau}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\tau}_1(t) \\ \ddot{\tau}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_2^2\tau_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\tau}_1(t) \\ \ddot{\tau}_2(t) + \omega_2^2\tau_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις

$$\ddot{\tau}_1(t) = 0$$

$$\ddot{\tau}_2(t) + \omega_2^2\tau_2(t) = 0$$

Λύση διαφορικών εξισώσεων

$\ddot{\tau}_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{\tau}_1(t) = a = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \quad \tau_1(t) = a\cdot t + b$ ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$\ddot{\tau}_2(t) + \omega_2^2\tau_2(t) = 0 \Rightarrow \quad \tau_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \varphi)$ απλή αρμονική ταλάντωση

Εύρεση $x_1(t)$ και $x_2(t)$ από την (6) και τις αρχικές συνθήκες

$$x_1(t) = \frac{\tau_1(t)}{\sqrt{M}} + \frac{\tau_2(t)}{\sqrt{rM}} = \frac{a\cdot t + b}{\sqrt{M}} + \frac{A\sin(\omega_2 t + \varphi)}{\sqrt{rM}} \qquad \upsilon_1(t) = \frac{a}{\sqrt{M}} + \frac{A\omega_2\cos(\omega_2 t + \varphi)}{\sqrt{rM}}$$

$$x_2(t)=\frac{\tau_1(t)}{\sqrt{M}}-\frac{\sqrt{r}\,\tau_2(t)}{\sqrt{M}}=\frac{a\cdot t+b}{\sqrt{M}}-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{M}}A\sin(\omega_2 t+\varphi) \qquad \upsilon_2(t)=\frac{a}{\sqrt{M}}-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{M}}A\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$x_1(0)=\frac{b}{\sqrt{M}}+\frac{A\sin(\varphi)}{\sqrt{rM}}=0 \quad \text{(a)} \qquad \upsilon_1(0)=\frac{a}{\sqrt{M}}+\frac{A\omega_2\cos(\varphi)}{\sqrt{rM}}=V_1 \quad \text{(b)}$$

$$x_2(0)=\frac{b}{\sqrt{M}}-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{M}}A\sin(\varphi) \quad \text{(c)} \qquad \upsilon_2(0)=\frac{a}{\sqrt{M}}-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{M}}A\omega_2\cos(\varphi)=0 \quad \text{(d)}$$

$$\text{(a), (c)}: \; b=-\frac{A\sin(\varphi)}{\sqrt{r}}<0 \;\text{ και }\; b=\sqrt{r}A\sin(\varphi)>0 \;\Rightarrow \qquad b=0 \;\text{ (e)}$$

$$\text{(e), (a)}: \; \frac{A\sin(\varphi)}{\sqrt{r}}=0\Rightarrow\varphi=0 \;\text{ ή }\; \pi$$

$$\text{(b) - (d)}: \; \frac{A\omega_2\cos(\varphi)}{\sqrt{M}}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\sqrt{r}\right)=V_1\Rightarrow$$

$$\frac{A\omega_2\cos(\varphi)}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{M}{\mu}}=V_1\Rightarrow\frac{A\omega_2\cos(\varphi)}{\sqrt{\mu}}=V_1>0\Rightarrow \qquad \varphi=0 \quad \text{(f)}$$

$$\text{(f)} \; \frac{A\omega_2}{\sqrt{\mu}}=V_1\Rightarrow \qquad A=V_1\frac{\sqrt{\mu}}{\omega_2}$$

$$\text{(d)} \; a=\sqrt{r}A\omega_2=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}V_1\frac{\sqrt{\mu}}{\omega_2}\omega_2=V_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}\mu}=V_1\sqrt{\frac{m_1}{\cancel{m_2}}\frac{m_1\cancel{m_2}}{m_1+m_2}}\Rightarrow \qquad a=\frac{m_1}{\sqrt{M}}V_1$$

$$x_1(t)=\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{m_1}{\sqrt{M}}V_1\cdot t+V_1\frac{\sqrt{\mu}}{\omega_2}\frac{1}{\sqrt{rM}}\sin(\omega_2 t)=\frac{m_1}{M}V_1\cdot t+\frac{V_1}{\omega_2}\sqrt{\frac{\cancel{m_1}m_2}{M}}\sqrt{\frac{m_2}{\cancel{m_1}M}}\sin(\omega_2 t)\Rightarrow$$

$$\boxed{x_1(t)=\frac{m_1}{M}V_1\cdot t+\frac{m_2}{M}\frac{V_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \qquad \text{ίδιο με πριν}}$$

$$x_2(t)=\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{m_1}{\sqrt{M}}V_1\cdot t-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{M}}V_1\frac{\sqrt{\mu}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t+\varphi)=\frac{m_1}{M}V_1\cdot t-\frac{V}{\omega_2}\sqrt{\frac{m_1}{\cancel{m_2}M}\frac{m_1\cancel{m_2}}{M}}\sin(\omega_2 t+\varphi)$$

$$\boxed{x_2(t)=\frac{m_1}{M}V_1\cdot t-\frac{m_1}{M}\frac{V}{\omega_2}\sin(\omega_2 t+\varphi) \qquad \text{ίδιο με πριν}}$$