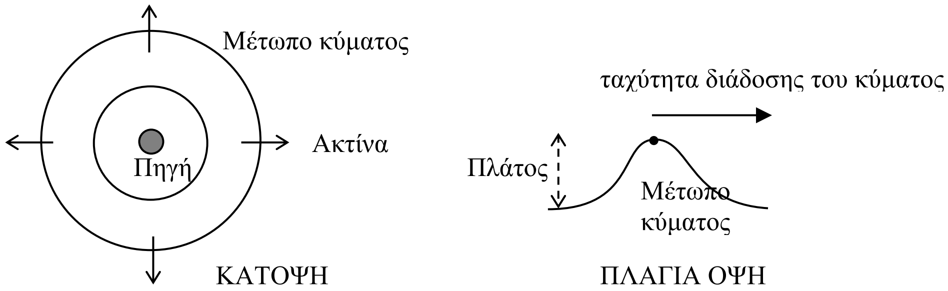
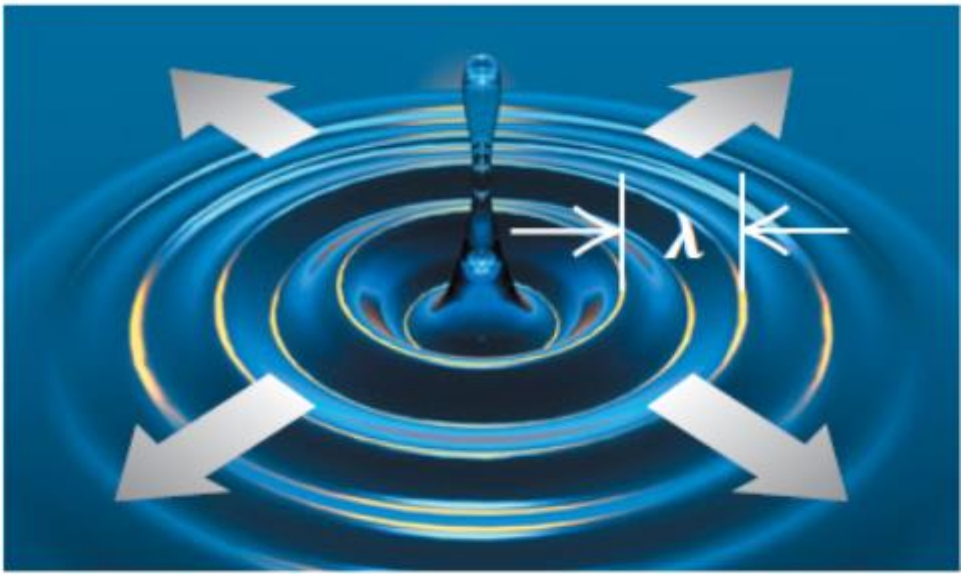
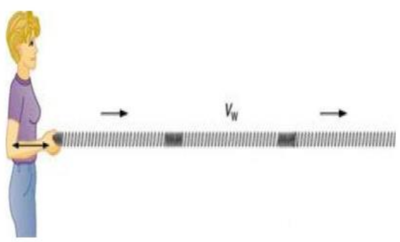
Γενικά

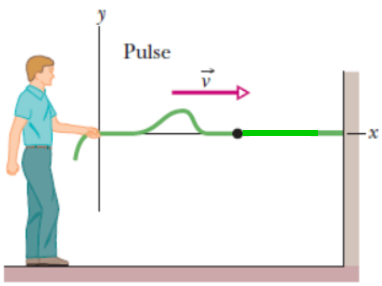
Μηχανικά κύματα είναι **διαταραχές** που δημιουργεί μια **πηγή** και οι οποίες στη συνέχεια διαδίδονται από το ένα υλικό σημείο στο επόμενο ενός **ελαστικού μέσου**.

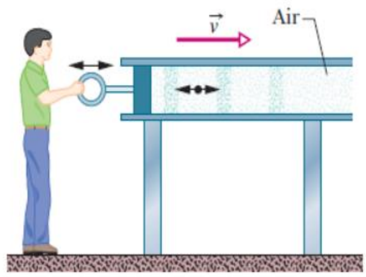


Π.χ. κύματα θάλασσας, σεισμικά κύματα, ήχος, κλπ.









Μέτωπο κύματος : ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μέσου όπου η κυματική κίνηση (διαταραχή) φτάνει την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή τα σημεία που η διαταραχή έχει σε αυτά την ίδια τιμή (ίδια φάση).

Ακτίνες : γραμμές κάθετες στα μέτωπα κύματος

Το μέγεθος που διαταράσσεται μπορεί να είναι μονόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος (π.χ. πίεση, πυκνότητα) ή διανυσματικό μέγεθος (π.χ. μετατόπιση).

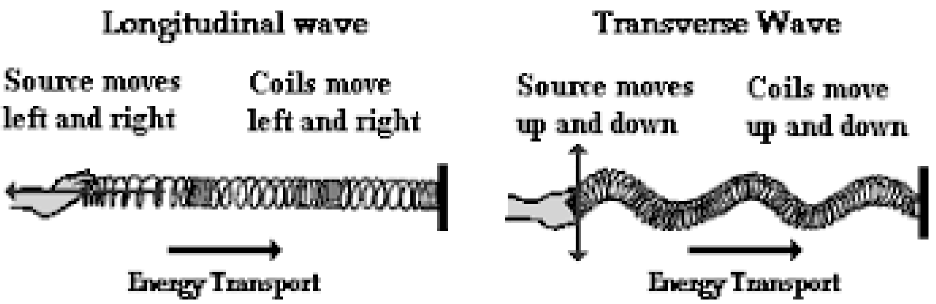
Πλάτος : Η μέγιστη τιμή της διαταραχής σχετικά με την τιμή ισορροπίας της

Ελαστικά μέσα είναι π.χ. :

- μια τεντωμένη οριζόντια χορδή με γραμμική πυκνότητα μ (kg/m) υπό τάση T (N) στα δύο άκρα της,
- μια τεντωμένη οριζόντια μεμβράνη με επιφανειακή πυκνότητα σ (kg/m^2) και επιφανειακή τάση T (N/m),
- μία μεταλλική ράβδος πυκνότητας ρ (kg/m^3), μέτρου ελαστικότητας Young Y (N/m^2) και μέτρου διάτμησης S (N/m^2),

- μία στήλη αερίου ή υγρού πυκνότητας ρ (kg/m^3) και μέτρου ελαστικότητας όγκου B(N/m^2),
- η επιφάνεια ενός υγρού βάθους h (m), επιφανειακής τάσης T (N/m), σε πεδίο βαρύτητας g (m/s^2)
- κ.α.

Το κάθε σημείο του ελαστικού μέσου εκτελεί περιοδική κίνηση επηρεάζοντας τα διπλανά του σημεία και επιστρέφει στην αρχική του θέση χωρίς να υπάρχει τελικά μεταφορά μάζας. Το κύμα μεταφέρει μόνο ορμή και ενέργεια κατά μήκος του ελαστικού μέσου και όχι μάζα.
Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που μια δεδομένη στιγμή βρίσκονται στην ίδια φάση αυτής της κίνησης ορίζουν μια ισοφασική «επιφάνεια» ή μέτωπο κύματος
Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων εξαρτάται από τις ελαστικές και αδρανειακές ιδιότητες του μέσου και ονομάζεται φασική ταχύτητα.
Η φασική ταχύτητα δεν είναι ίση με την ταχύτητα με την οποία κινούνται τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κατά την περιοδική κίνησή τους
Όταν η διαταραχή είναι διανυσματική τα κύματα διακρίνονται σε **διαμήκη** και **εγκάρσια**. Όταν η κίνηση των σημείων του ελαστικού μέσου γίνεται στην ίδια διεύθυνση που διαδίδεται η διαταραχή το κύμα ονομάζεται **διάμηκες**. Όταν η κίνηση των σημείων του ελαστικού μέσου γίνεται σε διεύθυνση κάθετη προς την διεύθυνση που διαδίδεται η διαταραχή το κύμα ονομάζεται **εγκάρσιο**. Η διεύθυνση πάνω στην οποία γίνεται η κίνηση των σημείων του ελαστικού μέσου καθορίζει την **πόλωση** του εγκάρσιου κύματος.



Εγκάρσια μηχανικά κύματα διαδίδονται μόνο σε στερεά μέσα (γιατί δέχονται διατμητικές τάσεις) ενώ σε υγρά και αέρια διαδίδονται μόνο διαμήκη.
Η ταχύτητα διάδοσης των διαμηκών κυμάτων σε ένα στερεό είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητας διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων.

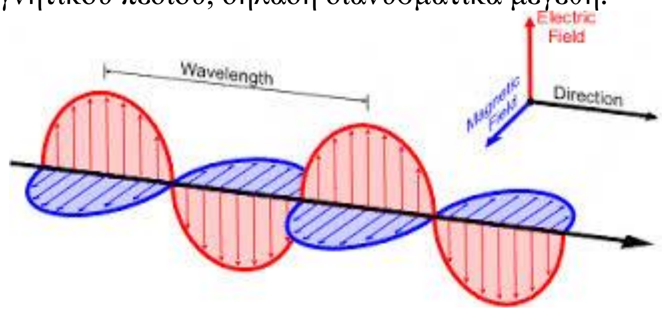
Ανάλογα με τις διαστάσεις του ελαστικού μέσου τα κύματα διακρίνονται σε μονοδιάστατα (γραμμικά), δυσδιάστατα, και τρισδιάστατα (χώρου).
Τα δυσδιάστατα κύματα διαχωρίζονται ανάλογα με το σχήμα των ισοφασικών επιφανειών τους σε επίπεδα, κυκλικά κλπ. ενώ τα τρισδιάστατα σε επίπεδα (μέτωπο κύματος=επίπεδο), σφαιρικά (μέτωπο κύματος=σφαίρα), κυλινδρικά, , κλπ.
Τα **επιφανειακά κύματα** είναι τα συνήθη κύματα που παρατηρούμε στην επιφάνεια ενός υγρού. Σε αυτά η κίνηση των σημείων του ελαστικού μέσου γίνεται «κυκλικά», δηλ. και κάθετα και παράλληλα με την διεύθυνση που διαδίδεται η διαταραχή.

Διαφορές μεταξύ κυμάτων – κλασσικών σωματιδίων

Κύματα	*Σωματίδια*
Είναι εκτεταμένα	*Είναι εντοπισμένα*
Δεν μεταφέρουν μάζα	*Μεταφέρουν τη μάζα τους*
Συναντώνται και περνάει το ένα μέσα από το άλλο (συμβολή)	*Συναντώνται, συγκρούονται (σκεδάζονται) και αλλάζουν διευθύνσεις ανταλλάσσοντας ορμή και ενέργεια*
Μεταφέρουν ορμή και ενέργεια	*Μεταφέρουν ορμή και ενέργεια*

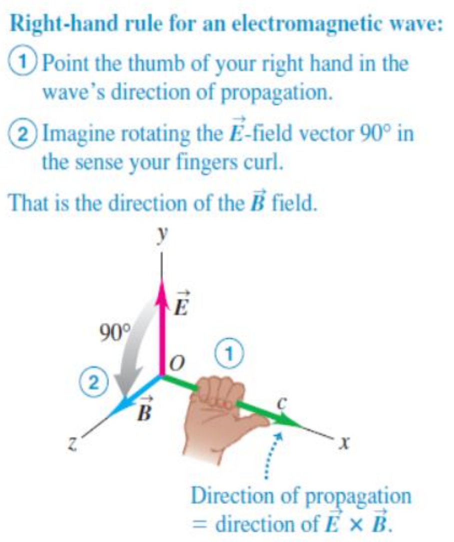
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

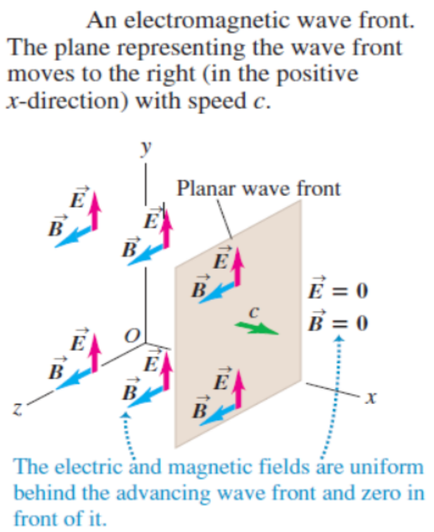
Ως **ηλεκτρομαγνητικά κύματα** (ΗΜ) εννοούμε την κυματική συμπεριφορά που εμφανίζουν τα χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Τα κύματα αυτά διαφέρουν από τα μηχανικά καθώς **δεν χρειάζονται ελαστικό μέσο** για να διαδοθούν αλλά **διαδίδονται στο κενό**. Το μέγεθος που διαδίδεται/διαταράσσεται σε κάθε σημείο του χώρου, είναι η τιμές της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή διανυσματικά μεγέθη.



Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύουν τα εξής :

1) Τα ΗΜ κύματα είναι εγκάρσια. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο και τα δύο κάθετα στη διεύθυνση διάδοσής τους. Η διάδοση του κύματος γίνεται στη διεύθυνση $\vec{E} \times \vec{B}$





2) Τα πλάτη ταλάντωσης των δύο πεδίων έχουν συγκεκριμένο λόγο : $B = \dfrac{E}{c}$

3) Το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης των ΗΜ κυμάτων στο κενό είναι μια παγκόσμια σταθερά ίση με το μέτρο της ταχύτητας του φωτός c, η οποία είναι ίδια για κάθε παρατηρητή είτε αυτός ακινητεί είτε κινείται σχετικά με την πηγή των κυμάτων (κεραία εκπομπής):

$$c = 299.792.458 \text{ m/s ακριβώς} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

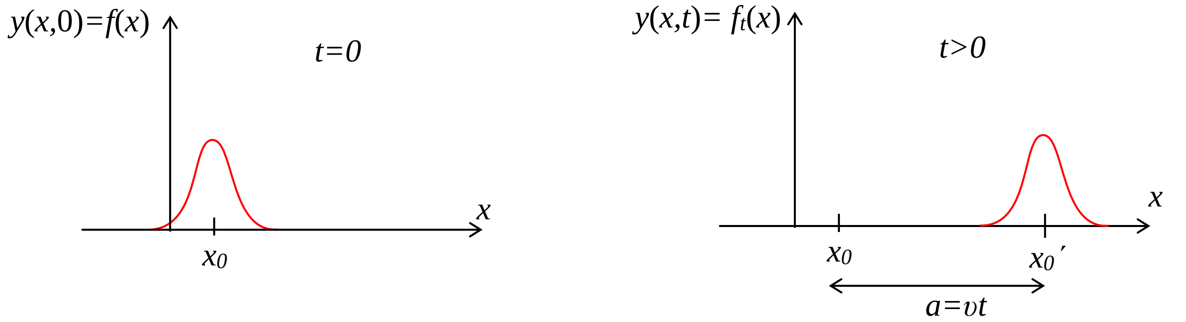
Υλικά κύματα

Τα στοιχειώδη σωματίδια (ηλεκτρόνια, κουάρκ) ή γενικά τα πολύ μικρά σωματίδια (πρωτόνια, άτομα, ακόμα και μόρια) εμφανίζουν κυματικές ιδιότητες (συμβολή). Η «μηχανική» τους ονομάζεται κβαντομηχανική και σε αυτήν η περιγραφή τους γίνεται από μια κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί μια «κυματική» εξίσωση που λέγεται εξίσωση Schrödinger. Το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο σε συγκεκριμένη θέση.

Κυματοσυνάρτηση και Κυματική εξίσωση

Το ελαστικό μέσο στο οποίο διαδίδονται τα μηχανικά κύματα, θα το ονομάζουμε και **πεδίο** καθώς καταλαμβάνει όλο το διαθέσιμο χώρο. Η θέση του δηλαδή είναι παντού. Έτσι η θέση που για υλικά σημεία ήταν το ζητούμενο, ως εξίσωση κίνησης $x(t)$, εδώ είναι μια παράμετρος ισοδύναμη με το χρόνο.

Γενικά θα συμβολίζουμε τη διαταραχή με μια συνάρτηση $y(x,t)$, την **κυματοσυνάρτηση**, η οποία εξαρτάται και από τη θέση x του σημείου του ελαστικού μέσου και από τη χρονική στιγμή t. Η διαταραχή y είτε είναι μια βαθμωτή διαταραχή (π.χ. πίεση, θερμοκρασία, κλπ.) είτε κάποια από τις συνιστώσες μιας διανυσματικής διαταραχής (π.χ. μετατόπιση)



Η διαταραχή $y(x,t)$ τη χρονική στιγμή μηδέν $y(x,0)$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε σχήμα το οποίο θα δίνεται από μια συνάρτηση f του x: $y(x,0)=f(x)$ την **κυματομορφή**. Κάποια επόμενη χρονική στιγμή θα δίνεται από μια άλλη συνάρτηση f_t του x: $y(x,t)=f_t(x)$.

Θέλουμε οι δύο συναρτήσεις να αποτελούν απλώς μια **μετατόπιση του ίδιου σχήματος** κατά μια απόσταση $a=\upsilon t$ προς τα δεξιά. Άρα θα πρέπει να είναι η ίδια συνάρτηση (σχήμα) f. Όμως για να παίρνει σε μεταγενέστερες στιγμές (t>0) δηλαδή σε κάποια πιο απομακρυσμένη θέση $x_0'=x_0+\upsilon t$, την ίδια τιμή που είχε πριν (t=0) στο x_0 θα πρέπει να αφαιρούμε από το όρισμα της f το ποσό $a=\upsilon t$. Δηλ. : $f_t(x)=f(x-\upsilon t)$ έτσι ώστε να έχουμε :

$$f_t(x_0')=f(x_0'-\upsilon t)=f(x_0).$$

Αντίστοιχα για μετακίνηση προς τα αριστερά παίρνουμε $f_t(x_0')=f(x_0'+\upsilon t)=f(x_0)$

Άρα η κυματοσυνάρτηση $y(x,t)$ θα εξαρτάται από το συνδυασμό $x\pm\upsilon t$ και όχι από το x και το t ανεξάρτητα. Επίσης επειδή τα ορίσματα όλων των συναρτήσεων πρέπει να είναι αδιάστατες ποσότητες, ενώ η $x\pm\upsilon t$ έχει διαστάσεις μήκους, η κυματοσυνάρτηση θα εξαρτάται από κάποια μεταβλητή που ονομάζουμε φάση $\varphi=k(x\pm\upsilon t)=kx\pm\omega t$, όπου το k έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους, $[k]=\text{m}^{-1}$ και $\omega=k\upsilon$. Έτσι, θα είναι της μορφής :

$$y(x,t)=f(x-\upsilon\cdot t)=y(k(x-\upsilon t)=y(\varphi_-)$$: διαταραχή που κινείται προς τα δεξιά

$$y(x,t)=f(x+\upsilon\cdot t)=y(k(x+\upsilon t)=y(\varphi_+)$$: διαταραχή που κινείται προς τα αριστερά

Παίρνοντας διαδοχικές μερικές παραγώγους της $y(x,t)$ βρίσκουμε εύκολα ότι μια κυματική συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση που ονομάζεται κυματική εξίσωση.

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0}$$

Σε τρεις διαστάσεις αυτή γράφεται

$$\nabla^2 f-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

Απόδειξη:

Παραγωγίζουμε δύο φορές την $y(x,t)=y(k(x\pm\upsilon t)=y(\varphi)$, αρχικά ως προς *x* και κατόπιν ως προς *t*, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας :

$$\frac{\partial y(\varphi)}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial (kx\pm\omega t)}{\partial x}=k\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 y(\varphi)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=k^2\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$\frac{\partial y(\varphi)}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial (kx\pm\omega t)}{\partial t}=\pm\omega\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 y(\varphi)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\pm\omega\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=\pm\omega\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=\omega^2\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Εξισώνοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\Rightarrow\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \text{ με } \upsilon^2=\omega^2/k^2$$

Η επιφάνειες όπου το όρισμα της κυματοσυνάρτησης είναι σταθερό ορίζουν τις ισοφασικές επιφάνειες (μέτωπα) του κύματος

Για Επίπεδο κύμα : $\hat{u}\cdot\vec{r}-\upsilon t=const$ για δεδομένο *t* $\Rightarrow\hat{u}\cdot\vec{r}=const$ δηλ. επίπεδο κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα διάδοσης ***u***

Για Σφαιρικό κύμα : $r-\upsilon t=const$ για δεδομένο *t* $\Rightarrow r=const$ σφαιρική επιφάνεια

Ταχύτητα διάδοσης

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος εξαρτάται από τις αδρανειακές (πυκνότητα) και ελαστικές ιδιότητες του μέσου (τάσεις επαναφοράς) και όχι από την πηγή που παράγει το κύμα:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{\text{ελαστικές ιδιότητες}}{\text{αδρανειακές ιδιότητες}}}$$

Την ταχύτητα διάδοσης των διαφόρων κυμάτων στα εκάστοτε ελαστικά μέσα, την «διαβάζουμε» από την αντίστοιχη κυματική εξίσωση.

Η κυματική εξίσωση σε κάθε ελαστικό μέσο προκύπτει εφαρμόζοντας σε μια στοιχειώδη μάζα του ελαστικού μέσου :

1. ***τους αντίστοιχους νόμους που ισχύουν στο φυσικό σύστημα*** (π.χ. τον αντίστοιχο τύπο της δύναμης, το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα, την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, την εξίσωση της συνέχειας, κλπ.)
2. καθώς και ***τις απαραίτητες και επιτρεπτές προσεγγίσεις*** που ισχύουν κατά περίπτωση.

Έτσι λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Εγκάρσια κύματα μετατόπισης σε τεντωμένη ελαστική χορδή με γραμμική πυκνότητα μ (kg/m) υπό τάση T (N) στο κάθε άκρο της:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Εγκάρσια κύματα μετατόπισης σε τεντωμένη ελαστική μεμβράνη με επιφανειακή πυκνότητα σ (kg/m^2) και επιφανειακή τάση $\mathcal{T}$ (N/m) στην περίμετρό της,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\sigma}}$$

Ηχητικά κύματα σε υγρά και αέρια : διαμήκη κύματα μετατόπισης ή πίεσης σε στήλη υγρού ή αερίου πυκνότητας ρ (kg/m^3) και μέτρου ελαστικότητας όγκου B (N/m^2),

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}},$$

Στα αέρια χρησιμοποιείται το αδιαβατικό μέτρο ελαστικότητας όγκου $B_S = \gamma p$. Γράφοντας την πυκνότητα ως $\rho = m/V = nM/V$ όπου M η μάζα του ενός γραμμομορίου (mol), δηλαδή το μοριακό βάρος του αερίου, και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $pV = nRT$ παίρνουμε για την ταχύτητα του ήχου σε αέριο : $\upsilon_{\text{ήχου}} = \sqrt{\frac{B_S}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma\, nRT/V}{nM/V}}$

Δηλαδή η ταχύτητα του ήχου σε ένα ιδανικό αέριο εξαρτάται μόνο από την απόλυτη θερμοκρασία του και όχι από την πίεσή του :

$$\upsilon_{\text{ήχου}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Μεταλλική ράβδος πυκνότητας ρ (kg/m^3), μέτρου ελαστικότητας Young Y (N/m^2) και μέτρου διάτμησης S (N/m^2),

Εγκάρσια κύματα : $\upsilon_t = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$

Διαμήκη κύματα : $\upsilon_\ell = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

$\upsilon_\ell > \upsilon_t$ επειδή γενικά $Y>S$.

Επιφανειακά κύματα μετατόπισης σε υγρό βάθους h (m), επιφανειακής τάσης $\mathcal{T}$ (N/m) και πυκνότητας ρ (kg/m^3) σε πεδίο βαρύτητας g (m/s^2). Ο γενικός τύπος είναι

$$\upsilon = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\mathcal{T}}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

Οι διαταραχές αυτές δεν ικανοποιούν την απλή κυματική εξίσωση αλλά μια πολυπλοκότερη και το σχήμα τους δεν παραμένει σταθερό καθώς διαδίδονται. Η ταχύτητα εξαρτάται από το μήκος κύματος. Το ενδιαφέρον πάντως είναι ότι ένα απλό αρμονικό κύμα ικανοποιεί και αυτήν την πολυπλοκότερη εξίσωση. Μας ενδιαφέρει το όριο όπου η ταχύτητα δεν εξαρτάται ή εξαρτάται ελάχιστα από το μήκος κύματος. Αυτή είναι η περίπτωση της δεξαμενής κυματισμών που χρησιμοποιείται για επίδειξη των κυματικών φαινομένων στο σχολικό εργαστήριο. Από διαστατική ανάλυση και μόνο η ταχύτητα θα είναι αναγκαστικά

$$\upsilon \propto \sqrt{gh}$$

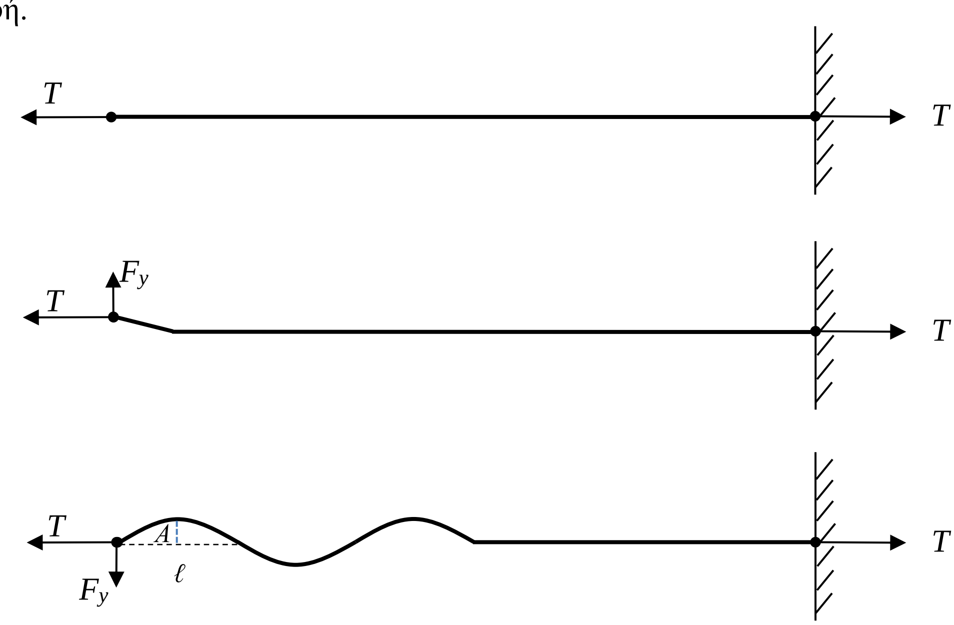
Μαθηματικώς αυτό προκύπτει όταν θεωρήσουμε την προσέγγιση $h << \lambda \Rightarrow \tanh x \approx x$ στον γενικό τύπο απ' όπου πράγματι προκύπτει :

$$\upsilon = \sqrt{gh}$$

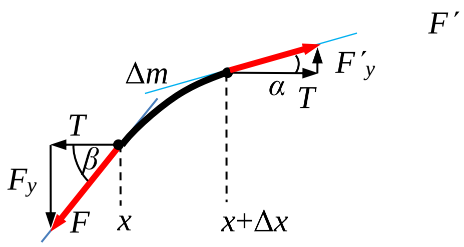
Στα ρηχά το κύμα κινείται πιο αργά. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και για το γενικό τύπο καθώς η υπερβολική εφαπτομένη είναι αύξουσα συνάρτηση του h. Θυμηθείτε ότι τα παλιρροϊκά κύματα (τσουνάμι) που έχουν τεράστια μήκη κύματος (km) διασχίζουν τους βαθείς ωκεανούς σε διαστήματα ωρών. Όλα τα κύματα όταν πλησιάζουν στην ακτή και ειδικά στην παραλία σπάνε γιατί το μπροστινό κομμάτι τους επιβραδύνει και σπρώχνεται από το πίσω που πάει πιο γρήγορα. Για τον ίδιο λόγο, αυξάνεται αρχικά το πλάτος του κύματος πριν αυτό σπάσει.

Εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης για τεντωμένη χορδή

Ασκούμε μια κάθετη δύναμη F_y που μετατοπίζει την άκρη της χορδής κάθετα σε αυτήν. Δεν υπάρχει συνισταμένη οριζόντια δύναμη ούτε οριζόντια μετατόπιση των στοιχείων της χορδής. Απλά η χορδή τεντώνεται λίγο στο σημείο που ασκείται η δύναμη. Θεωρούμε ότι το εύρος της διαταραχής είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος της $\ell >> A$ ώστε η κλίση του διαταραγμένου τμήματος να είναι γενικά πολύ μικρή.



Εφαρμόζουμε το 2º νόμο του Νεύτωνα σε ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής μάζας $\Delta m = \mu \Delta x$, που βρίσκεται στη θέση x. Στο άκρο του x δέχεται δύναμη τάσης F από τη χορδή αριστερά ενώ στο άκρο που βρίσκεται στη θέση $x + \Delta x$ δέχεται δύναμη τάσης F' από τη χορδή δεξιά του. Η συνισταμένη δύναμη σε όλη τη στοιχειώδη μάζα θα έχει μόνο κάθετη συνιστώσα. Επειδή τα νήματα και οι χορδές τραβάνε κυρίως κατά μήκος τους, χωρίς να ασκούν μεγάλες διατμητικές τάσεις, θεωρούμε ότι η δύναμη σε κάθε άκρο θα είναι εφαπτόμενη της χορδής. Δηλαδή η εφαπτομένη των γωνιών α και β θα είναι ίση με την κλίση (παράγωγο ως προς x) της καμπύλης που σχηματίζει η χορδή στο συγκεκριμένο σημείο. Οι κλίσεις αυτές αν και μικρές είναι όμως διαφορετικές στα δύο άκρα του στοιχειώδους τμήματος της χορδής. Επειδή θεωρήσαμε μικρές διαταραχές, δηλαδή μικρές κλίσεις α και β θεωρούμε : $F_y << F_x$ και $F_x \approx T$



$$F'_y\Big|_{x+\Delta x} = F'_x \tan\alpha \approx T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \qquad \text{και} \qquad F_y\Big|_x = F_x \tan\alpha \approx T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$$

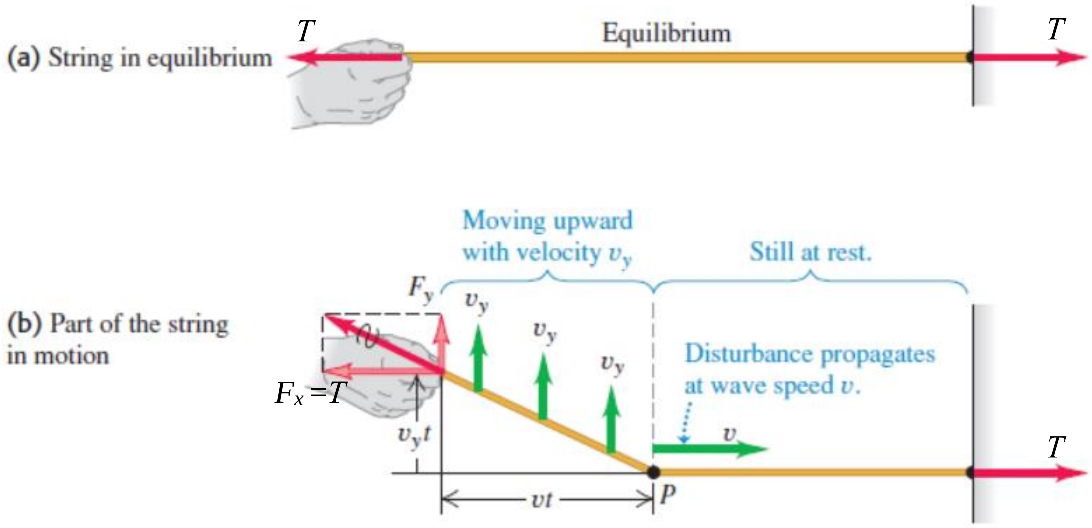
$$\sum F_y = ma \Rightarrow T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow T\left(\frac{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x}{\Delta x}\right) = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Παίρνοντας το όριο $\Delta x \to 0$, η έκφραση στην παρένθεση είναι απλά ο ορισμός της 2ης παραγώγου, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{T/\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

που δεν είναι παρά η κυματική εξίσωση. Άρα ο 2ο νόμος του Νεύτωνα σε τεντωμένη χορδή οδηγεί, για μικρές διαταραχές, σε κυματική εξίσωση με ταχύτητα διάδοσης $\upsilon = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

Απλός τρόπος εύρεσης της ταχύτητας



Αν η δύναμη ασκούνταν σε υλικό σημείο, αυτό θα κινούνταν με σταθερή επιτάχυνση. Όμως τώρα, που έχουμε συνεχές ελαστικό μέσο, η δύναμη θέτει σε κίνηση τα διπλανά υλικά σημεία της χορδής. Έτσι όλα τα σημεία της χορδής στα οποία έχει διαδοθεί η διαταραχή σε χρόνο t κινούνται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα. Η ώθηση της δύναμης δεν προκαλεί πιο γρήγορη κίνηση του υλικού σημείου της άκρης αλλά θέτει περισσότερη μάζα σε κίνηση. Επειδή δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση του τμήματος της χορδής οι οριζόντιες δυνάμεις στα άκρα του τμήματος πρέπει να είναι ίσες, άρα η οριζόντια συνιστώσα της συνολικής δύναμης στο άκρο παραμένει ίση με T : $F_x=T$

Κάθετη ώθηση : $F_y t$

Από όμοια τρίγωνα : $\dfrac{F_y}{T} = \dfrac{\upsilon_y t}{\upsilon t} \Rightarrow F_y = T\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon}$

Κάθετη μεταβολή της ορμής : $m\upsilon_y - 0 = (\mu\upsilon t)\upsilon_y$

Η κάθετη ορμή αλλάζει επειδή μεγαλώνει το m με το χρόνο και όχι επειδή αλλάζει το υ_y.

Θεώρημα ώθησης ορμής (2ος νόμος Νεύτωνα): $F_y t = m\upsilon_y \Rightarrow T\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon} = \mu\upsilon t \cdot \upsilon_y \Rightarrow \upsilon^2 = \dfrac{T}{\mu}$

Εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Η κυματική εξίσωση των ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) κυμάτων προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell

Σύνοψη των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική και διαφορική μορφή

$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	Νόμος Gauss για ηλεκ. πεδίο (Coulomb)

$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	Νόμος Gauss για μαγν. πεδίο

$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \Leftrightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	Νόμος Faraday

$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}\right) \Leftrightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$	Νόμος Ampere-Maxwell (Biot-Savatr)

Ο Νόμος του Gauss για το ηλεκτρ. πεδίο είναι άμεση συνέπεια του Νόμου του Coulomb. Οι δύο νόμοι είναι ισοδύναμοι. Η φυσική του σημασία είναι ότι οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου πηγάζουν από φορτία.

Ο Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα απ’ όπου να πηγάζουν οι δυναμικές γραμμές και έτσι αυτές είναι κλειστές καμπύλες.

Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ ορίζονται από τη μετρήσιμη δύναμη Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$
και γράφονται και : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ και $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, όπου V και $\vec{A}$ το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό.

Η 3η εξίσωση του Maxwell είναι αυτούσιος ο νόμος της επαγωγής του Faraday. Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο (μη διατηρητικό)

Η 4η εξίσωση του Maxwell είναι ο νόμος του Ampere (ισοδύναμος με το νόμο Biot-Savatr) συν την προσθήκη του ρεύματος μετατόπισης $i_D = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$ από τον Maxwell και αποτελεί το αντίστοιχο του νόμου του Faraday αλλά για το ηλεκτρικό πεδίο.

Κυματική εξίσωση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Σε κενό χώρο όπου δεν υπάρχουν φορτία και άρα έχουμε $\rho = 0$ και $\vec{j} = 0$ οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

και αναπαριστούν κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \text{ ακριβώς.}$$

<u>Απόδειξη</u>
Χρησιμοποιούμε απλώς την διανυσματική ταυτότητα $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{C}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - \nabla^2\vec{C}$
που ισχύει για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{C}$.
(Θυμηθείτε την διανυσματική ταυτότητα του τριπλού γινομένου διανυσμάτων που χρησιμοποιήσαμε για την στροφορμή συμπαγούς σώματος $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$, αντιμετωπίστε το ανάδελτα σαν διάνυσμα και αντικαταστήστε $\vec{A} = \vec{B} = \vec{\nabla}$)

Παίρνουμε το στροβιλισμό των Νόμων Faraday και Ampere:

Από Νόμο Faraday : $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t}\Leftrightarrow$ χρησιμοποιώντας μετά το νόμο Ampere

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

Από Νόμο Ampere : $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}\Leftrightarrow$ χρησιμοποιώντας μετά το νόμο Faraday

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0}$$

που είναι κυματικές εξισώσεις με ταχύτητα διάδοσης $\dfrac{1}{c^2}=\mu_0\varepsilon_0\Rightarrow c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

Επειδή αυτή η ταχύτητα βρέθηκε ότι ήταν ίση αριθμητικά με την γνωστή εκείνη την εποχή ταχύτητα του φωτός ανακαλύφθηκε η ηλεκτρομαγνητική φύση του φωτός. Αμέσως μετά παράχθηκαν και ανιχνεύθηκαν ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαφορετικών συχνοτήτων από το ορατό φως (Hertz, Helmholtz) και άρχισε η σύγχρονη εποχή των τηλεπικοινωνιών.

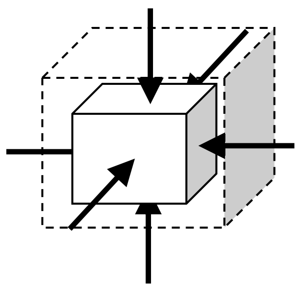
Υπολογισμός ταχύτητας ηχητικού κύματος

Από αναλογία με τη χορδή $\upsilon=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{\textit{ελαστική ιδιότητα}}{\textit{αδρανειακή ιδιότητα}}}$

Στο ιδανικό αέριο η ελαστική ιδιότητα που καθορίζει πως αντιδρά ένας στοιχειώδης όγκος αερίου σε μεταβολές της πίεσης στα όριά του είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου B ενώ η αδρανειακή του ιδιότητα είναι η πυκνότητά του ρ.

$$\upsilon_{\eta\chi}=\sqrt{\frac{\textit{ελαστική ιδιότητα}}{\textit{αδρανειακή ιδιότητα}}}=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Όταν η τάση είναι μια ομοιόμορφη πίεση σε όλες τις πλευρές του υλικού τότε η σχετική παραμόρφωση θα είναι μια παραμόρφωση του όγκου συνολικά. Τέτοιες τάσεις ασκούνται τόσο σε στερεά όσο και σε υγρά και αέρια.



Σε πρώτη προσέγγιση, για μεγάλο εύρος πιέσεων, όλα τα υλικά αντιδρούν γραμμικά (νόμος Hooke), δηλαδή η σχετική τους παραμόρφωση (ένταση, strain) είναι ανάλογη της τάσης (stress):

$$\Delta p=-B\frac{\Delta V}{V}\qquad\qquad (F=-k\Delta\ell)$$

<u>Μέτρο ελαστικότητας όγκου</u> : $B=-\dfrac{\Delta p}{\Delta V/V}$, $\qquad [B]=\mathrm{Pa}=\mathrm{N/m^2}$

Σε αυτή την περίπτωση η μεταβολή του όγκου ΔV έχει πάντα αντίθετο πρόσημο από τη μεταβολή της πίεσης Δp (π.χ. ΔV είναι αρνητικό όταν αυξάνεται η πίεση)

Μαθηματικώς : $B = -V\dfrac{\partial p}{\partial V}$

Το αντίστροφό του μέτρου ελαστικότητας όγκου ονομάζεται συμπιεστότητα και ορίζεται από τη σχέση: $\kappa \equiv \dfrac{1}{B} = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial p}$

Τα μέτρα ελαστικότητας όγκου των στερεών είναι της τάξης των $10^{10} - 10^{11}$ Pa ενώ των υγρών λίγο μικρότερα της τάξης των $10^{9} - 10^{10}$ Pa.

Για τα αέρια έχει σημασία αν η πρόσθετη πίεση προήλθε αδιαβατικά (χωρίς μεταφορά θερμότητας) άρα όλο το έργο της μεταβλήθηκε σε μηχανική ενέργεια ή υπό σταθερή θερμοκρασία (με ανταλλαγή θερμότητας). Σε κάθε περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας όγκου υπολογίζεται από την αντίστοιχη σχέση που συνδέει την πίεση με τον όγκο του αερίου.

Ισόθερμα: $pV = p_0V_0 \Rightarrow \left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\dfrac{p_0V_0}{V^2}$,

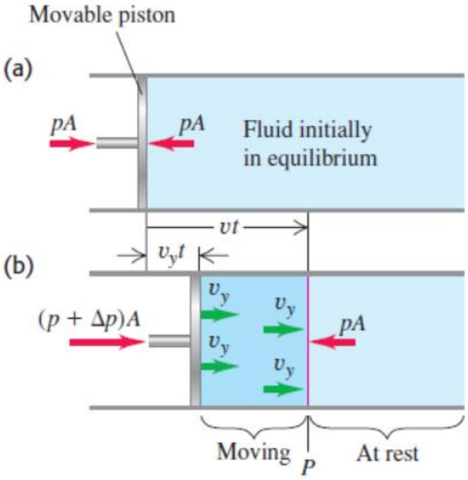
$$B_T = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = V\frac{p_0V_0}{V^2} = p\frac{p_0V_0}{pV} \Rightarrow \qquad B_T = p$$

Αδιαβατικά : $pV^{\gamma} = p_0V_0^{\gamma} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\gamma\dfrac{p_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma+1}}$,

$$B_S = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = V\gamma\frac{p_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma+1}} = p\gamma\frac{pV^{\gamma}}{pV^{\gamma}} \Rightarrow \qquad B_S = \gamma p$$

Το $\gamma>1$ είναι μια σταθερά (αδιάστατος αριθμός) που ισούται με το λόγο των δύο θερμοχωρητικοτήτων του αερίου $\gamma = C_p/C_V$.

A sound wave propagating in a fluid confined to a tube. (a) Fluid in equilibrium. (b) A time t after the piston begins moving to the right at speed v_y, the fluid between the piston and point P is in motion. The speed of sound waves is v.



Μάζα στοιχείου ρευστού στο οποίο διαδόθηκε η διαταραχή της πίεσης: $m = \rho V = \rho A\upsilon t$

Μεταβολή ορμής του στοιχείου: $m\upsilon_y = (\rho A\upsilon t)\upsilon_y$

Μεταβολή όγκου του στοιχείου: $\Delta V = -A\upsilon_y t$

Μέση δύναμη στο χρονικό διάστημα t : $F = (p+\Delta p)A - pA = A\Delta p$

Μεταβολή πίεσης από μέτρο ελαστικότητας όγκου: $\Delta p = -B\dfrac{\Delta V}{V} = -B\dfrac{-A\upsilon_y t}{A\upsilon t} = B\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon}$

Ώθηση δύναμης: $Ft = A\Delta p t = AB\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon}t$

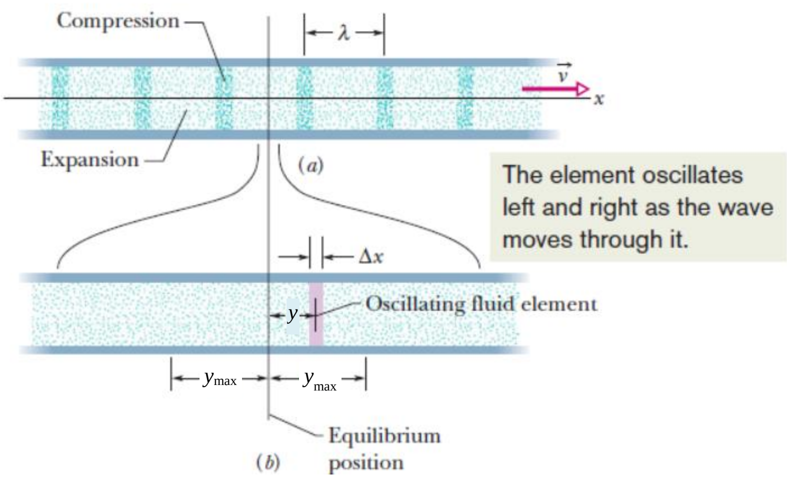
Εξισώνοντας τη μεταβολή της ορμής του στοιχείου με την ώθηση παίρνουμε πράγματι:

$$AB\frac{\upsilon_y}{\upsilon}t = \rho A\upsilon t\upsilon_y \Rightarrow B\frac{1}{\upsilon} = \rho\upsilon \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

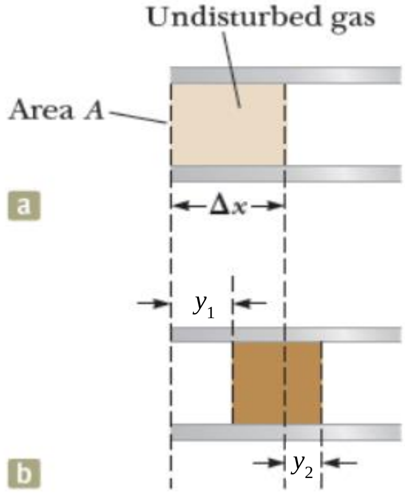
Πλάτη μετατόπισης και πίεσης

Αν το έμβολο ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα ω τότε και η μετατόπιση y κάθε σημείου του όγκου του ρευστού θα ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα, έστω

$$y(x,t) = y_{\max}\cos(kx - \omega t)$$



Εδώ τα y και x είναι στην ίδια διεύθυνση (δηλαδή όταν η μετατόπιση y είναι ίση με μηδέν το σημείο βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, την x).



(a) An undisturbed element of gas of length Δx in a tube of cross-sectional area A.
(b) When a sound wave propagates through the gas, the element is moved to a new position and has a different length. The parameters y_1 and y_2 describe the displacements of the ends of the element from their equilibrium positions.

Όταν τα όρια ενός όγκου μεταξύ x και $x+\Delta x$ έχουν μετατοπιστεί αντίστοιχα κατά $y_1 = y(x,t)$ και $y_2 = y(x+\Delta x,t)$ ο όγκος του θα αλλάξει κατά $\Delta V = A\Delta y$ με $\Delta y = y_2 - y_1 = y(x+\Delta x,t) - y(x,t)$. Η κλασματική μεταβολή του όγκου είναι

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A[y(x+\Delta x,t) - y(x,t)]}{A\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x}$$

Στο όριο $\Delta x \to 0$ όπου ο όγκος γίνεται στοιχειώδης, η κλασματική μεταβολή γίνεται

$$\frac{dV}{V}=\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

και άρα η μεταβολή της πίεσης στο σημείο *x* θα είναι

$$\Delta p=-B\frac{\partial y}{\partial x}=-B\frac{\partial}{\partial x}\left(y_{\max}\cos(kx-\omega t)\right)\Rightarrow\Delta p(x,t)=By_{\max}k\sin(kx-\omega t)$$

$$\Delta p_{\max}=Bky_{\max}$$

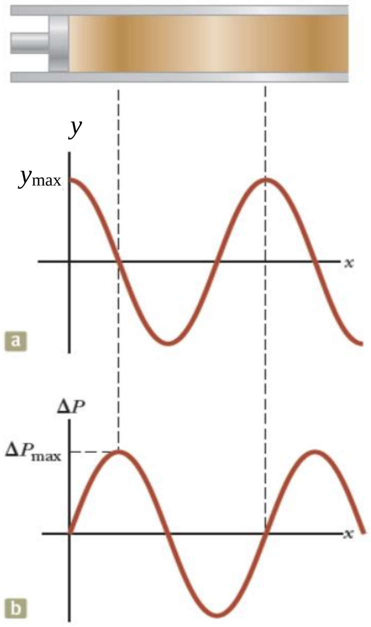
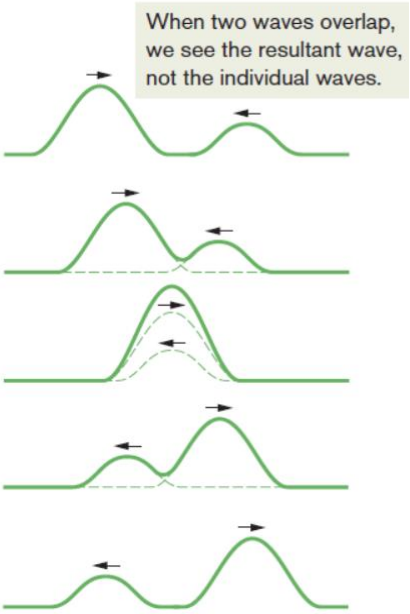


Figure 17.4 (a) Displacement amplitude and (b) pressure amplitude versus position for a sinusoidal longitudinal wave.

Άρα όταν η μεταβολή της πίεσης Δp παίρνει τη μέγιστη τιμή της η μετατόπιση *y* γίνεται μηδέν και το αντίστροφο.

Υπέρθεση ή Επαλληλία κυμάτων (Συμβολή δύο κυμάτων)

Επειδή η κυματική εξίσωση είναι γραμμική (δεν έχει συναρτήσεις και παραγώγους τους στο τετράγωνο ή σε ανώτερες δυνάμεις) αν δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, δηλαδή κύματα, τότε και το άθροισμά τους $f=f_1+f_2$ είναι κύμα. Δηλαδή δύο κύματα μπορούν να συνυπάρχουν στο ίδιο σημείο του χώρου και ουσιαστικά περνούν το ένα μέσα από το άλλο (εφόσον συνεχίζουν να ισχύουν οι προσεγγίσεις που οδήγησαν στην κυματική εξίσωση). Η ολική διαταραχή σε ένα σημείο θα είναι το άθροισμα των επιμέρους διαταραχών των δύο κυμάτων. Όταν τα δύο κύματα ενισχύουν το ένα το άλλο τότε μιλάμε για **ενισχυτική συμβολή** ενώ όταν συμβάλουν με αντίθετα πλάτη μιλάμε για **αναιρετική συμβολή** (αλλιώς και αποσβεστική ή καταστροφική).

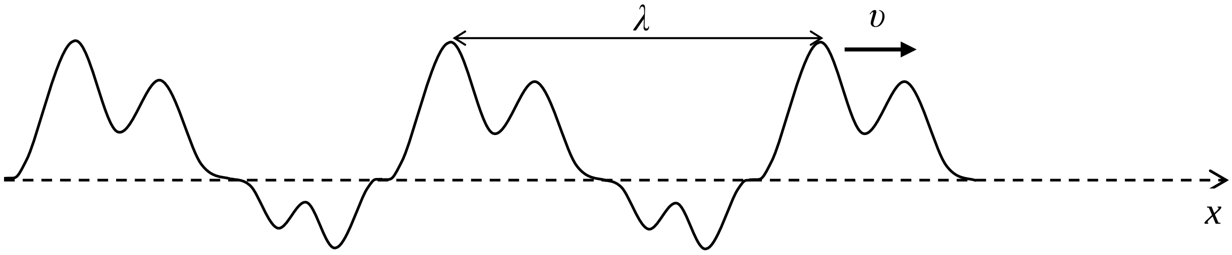


Περιοδικά κύματα

Περιοδική είναι μια συνάρτηση που επαναλαμβάνεται όταν το όρισμά της μεταβληθεί κατά P (περίοδος) :

$$f(x \pm P) = f(x)$$

Μια περιοδική συνάρτηση δεν είναι εντοπισμένη αλλά εκτείνεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$
Όταν η πηγή που παράγει το κύμα εκτελεί περιοδική κίνηση τότε και το κύμα που θα διαδοθεί θα είναι περιοδικό. Δηλαδή το σχήμα του θα επαναλαμβάνεται κατά τακτά χρονικά διαστήματα (περίοδος T) και κατά συγκεκριμένα χωρικά διαστήματα (μήκος κύματος λ). Το μήκος κύματος είναι η απόσταση που έχει διαδοθεί το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου T.



Προφανώς η περίοδος και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση : $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T}$

όπου υ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$\upsilon = \lambda f$$

και ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής, με f τη συχνότητα του κύματος :

$$f = \frac{1}{T}$$

Η περίοδος όπως και η συχνότητα του κύματος θα είναι ίσες με την περίοδο και τη συχνότητα της πηγής που το παράγει. Το μήκος κύματος θα εξαρτάται από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.
Για τα περιοδικά κύματα σε αντιστοιχία με το μήκος κύματος λ (m) και την περίοδο T (s) ορίζονται επίσης ο κυματαριθμός k (m^{-1}) και η κυκλική συχνότητα ω (rad/s)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Αυτά συνδέονται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος με τη σχέση

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}$$

Έτσι το όρισμα της κυματικής συνάρτησης, το οποίο πρέπει να είναι αδιάστατο μέγεθος και ονομάζεται φάση θα δίνεται από τους ισοδύναμους τύπους :

$$\varphi = k(x \pm \upsilon t) = kx \pm \omega t = 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$$

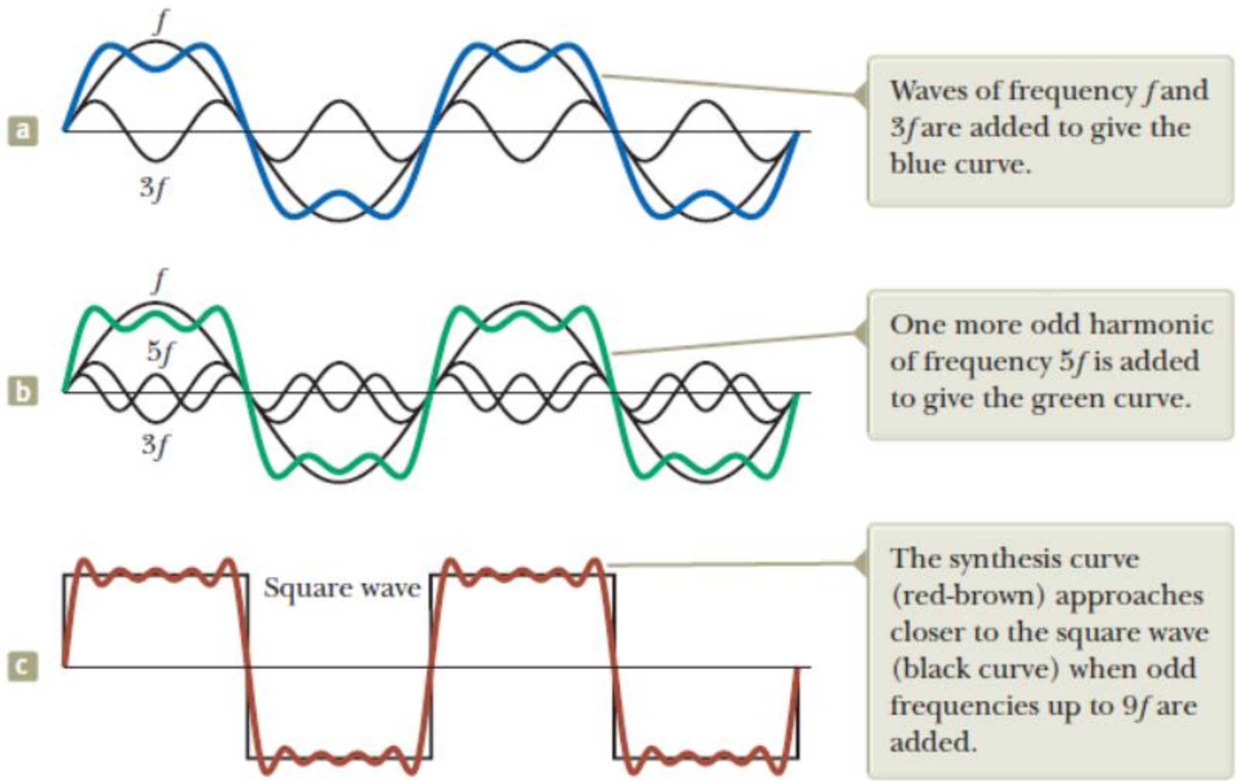
Ανάλυση Fourier

Αποδεικνύεται (ανάλυση Fourier) ότι κάθε περιοδική συνάρτηση γράφεται σαν μια άπειρη διακριτή σειρά ημίτονων και συνημίτονων με κυματαριθμούς που είναι ακέραια πολλαπλάσια ενός θεμελιώδους $k_n = nk_1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\cdot x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\cdot x\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι **κάθε περιοδικό κύμα** που έχει κυματαριθμό k, **ανεξαρτήτως σχήματος** $\boldsymbol{f(x)}$, **μπορεί να κατασκευαστεί** από την υπέρθεση **όλων των αρμονικών κυμάτων που έχουν κυματαριθμούς :** $\boldsymbol{k, 2k, 3k, 4k}$, **……** . Η συνεισφορά του καθενός από αυτά, που προσδιορίζεται από το αντίστοιχο πλάτος A_n, καθορίζει και το σχήμα του κύματος. Συνήθως αρκούν λίγα από αυτά τα αρμονικά κύματα, τα πρώτα, για να φτιαχτεί κάθε σχήμα $f(x)$ σε ικανοποιητική προσέγγιση. Για τα κύματα αυτά οι συχνότητες $2f$, $3f$, $4f$, … που αντιστοιχούν στους κυματαριθμούς $2k$, $3k$, $4k$,… ονομάζονται ανώτερες αρμονικές ενώ αυτή του κυματαριθμού k θεμελιώδης f.

Π.χ. δείτε στο παρακάτω σχήμα πως φτιάχνεται τελικά ένας τετραγωνικός παλμός προσθέτοντας διαδοχικά αρμονικές Στον τετραγωνικό παλμό συνεισφέρουν μόνο ημίτονα και μόνο οι περιττές αρμονικές της θεμελιώδους f : f, $3f$, $5f$, $7f$, $9f$, $11f$, …
Ήδη με την $9f$ έχει φτιαχτεί ικανοποιητικός τετραγωνικός παλμός



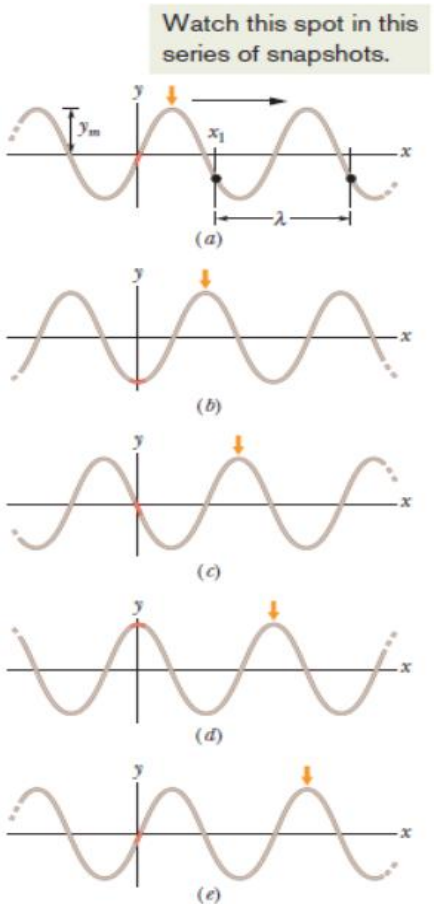
Έτσι **για να μελετήσουμε τα περιοδικά κύματα αρκεί να μελετήσουμε μόνο τα αρμονικά κύματα** (ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή αφού ένα ημιτονοειδές και ένα συνημιτονοειδές κύμα έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα και απλά διαφέρουν κατά μία σταθερή φάση).

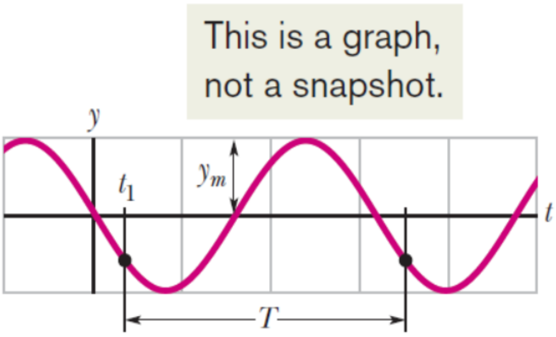
Ημιτονοειδή κύματα

Κύμα του οποίου το σχήμα δίνεται από τη συνάρτηση του ημιτόνου.

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Ισχύουν οι σχέσεις : $\omega = \upsilon k$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$, $\upsilon = \lambda f$





Συμβολή δύο ημιτονοειδών κυμάτων που διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση

Κύματα με ίσα πλάτη και συχνότητες (και τυχαία διαφορά φάσης φ).

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Η διαφορά φάσης μπορεί να προέρχεται από το γεγονός ότι τα κύματα ξεκίνησαν μαζί αλλά από διαφορετικά σημεία (που απέχουν d). Ή ισοδύναμα ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο αλλά διαφορετικές στιγμές ($\Delta t = d/\upsilon$) και άρα το πρώτο είχε ήδη διαδοθεί σε απόσταση ($d = \upsilon\Delta t$) ή και τα δύο. Σε κάθε περίπτωση η διαφορά φάσης μπορεί να εκφραστεί ως απόσταση μεταξύ των πηγών των κυμάτων σε μήκη κύματος : $\varphi = 2\pi\dfrac{d}{\lambda} \Rightarrow d = \dfrac{\varphi}{2\pi}\lambda$. Τότε, αυτή είναι και η διαφορά των διαστημάτων (δρόμων) που θα έχουν διανύσει τα δύο κύματα όταν συναντώνται σε κάποιο σημείο

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα : $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

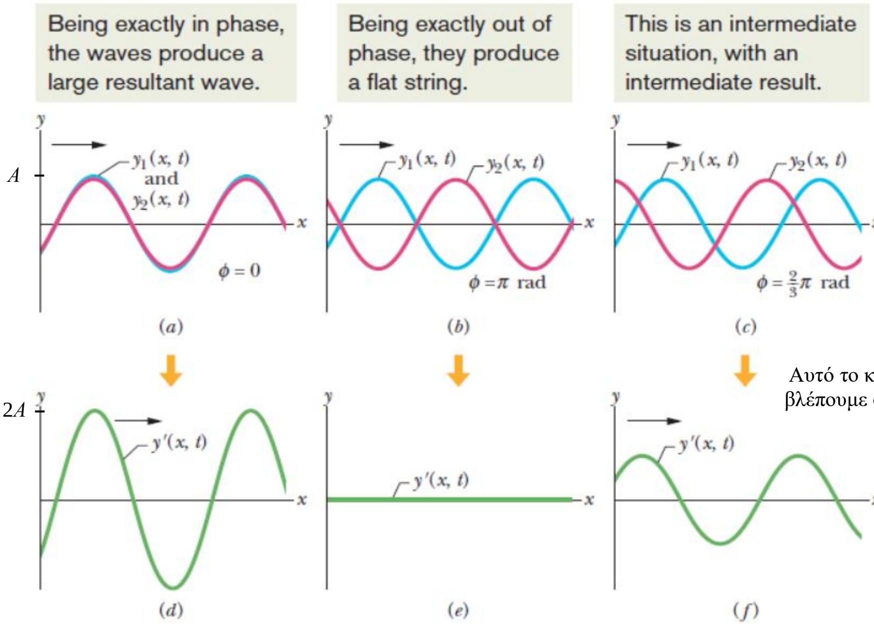
παίρνουμε:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \varphi) =$$
$$= A\left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)\right] =$$
$$= 2A\sin\left(\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \varphi)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kx - \omega t) - (kx - \omega t + \varphi)}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow$$
$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = A'\sin\left(kx - \omega t + \varphi'\right)$$

Ημιτονοειδές κύμα με ίδια ταχύτητα, συχνότητα και μήκος κύματος με τα αρχικά.

Διαφορές : Τροποποιημένο πλάτος $A' = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Μισή διαφορά φάσης από το y_1 $\varphi' = \frac{\varphi}{2}$



Αυτό το κύμα μόνο βλέπουμε στη χορδή

Ενισχυτική συμβολή (constructive interference). Όταν κατά την έλευσή τους σε ένα σημείο η διαφορά φάσης φ είναι τέτοια ώστε $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$ το πλάτος A' γίνεται μέγιστο. Αυτό συμβαίνει όταν η διαφορά των δρόμων που διένυσαν τα δύο κύματα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος επειδή τότε φτάνουν όντας στην ίδια φάση της ταλάντωσής τους:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = n\pi \Rightarrow \frac{1}{2}2\pi\frac{d}{\lambda} = n\pi \Rightarrow d = n\lambda$$

Αναιρετική συμβολή (destructive interference). Όταν κατά την έλευσή τους σε ένα σημείο η διαφορά φάσης φ είναι τέτοια ώστε $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ το πλάτος A' μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει όταν η διαφορά των δρόμων που διένυσαν τα δύο κύματα είναι ημιακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος επειδή τότε φτάνουν όντας σε αντίθετες φάσεις της ταλάντωσής τους:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}2\pi\frac{d}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow d = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Κύματα με διαφορετικά πλάτη και ίσες συχνότητες

Η τριγωνομετρία αν και βατή γίνεται πιο περίπλοκη επειδή το A πλέον δεν βγαίνει κοινός παράγοντας. Χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση του κύματος με μιγαδικούς αριθμούς που ισοδυναμούν με δυσδιάστατα περιστρεφόμενα διανύσματα τους φάσορες (phasors).
Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις είτε με μιγαδικούς αριθμούς είτε με διανύσματα για μεν τους μιγαδικούς αριθμούς κρατάμε το φανταστικό μέρος (ημιτονοειδή κύματα) για δε τα διανύσματα την y συνιστώσα τους.

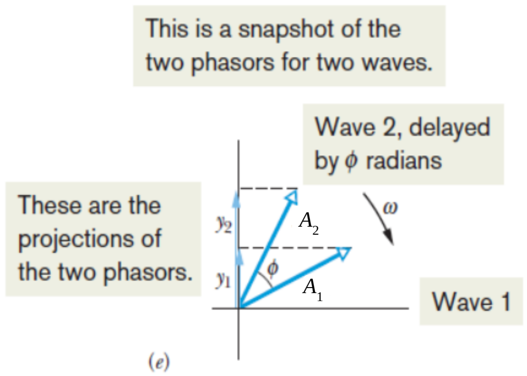
Το αποτέλεσμα είναι πάλι ημιτονοειδές κύμα ίδιας συχνότητας και με πλάτος τώρα μεταξύ των τιμών $A_1 - A_2$ και $A_1 + A_2$ ανάλογα με την διαφορά φάσης των δύο κυμάτων από π ως 0.

$$P_1(x,t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)} \Rightarrow y_1(x,t) = \operatorname{Im} P_1(x,t) = A_1 \sin(kx - \omega t)$$
$$P_2(x,t) = A_2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} \Rightarrow y_2(x,t) = \operatorname{Im} P_2(x,t) = A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

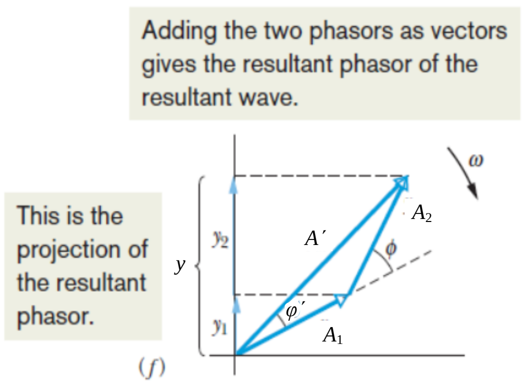
Συμβολή
$$P(x,t) = P_1(x,t) + P_2(x,t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} = \ldots = A' e^{i(kx-\omega t+\varphi')}$$
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A' \sin(kx - \omega t + \varphi')$$

Με $A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\varphi}$ και $\tan\varphi' = \dfrac{A_2 \sin\varphi}{A_1 + A_2 \cos\varphi}$

Επιβεβαιώστε ότι για A_1=A_2 παίρνω τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου (θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε και τους τύπους της διπλάσιας γωνίας)



(e)



(f)

Κύματα με διαφορετικά και πλάτη και συχνότητες

Περίπλοκο αποτέλεσμα, σύνθετο μη ημιτονοειδές κύμα χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον

Π.χ. ακόμα και για ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi) =$$
$$= 2A\sin\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t + \varphi)}{2}\right)\cos\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t + \varphi)}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $\omega_1 \approx \omega_2$

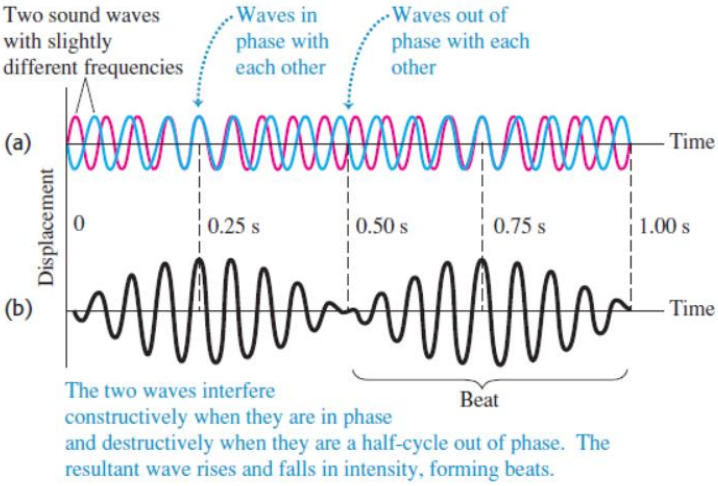
Διακροτήματα (beats)

Αν τα δύο κύματα που συμβάλουν έχουν ίσα πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο $\omega_1 \approx \omega_2$ τότε κάθε σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο συμβάλουν (έστω x=0) θα κάνει μια ταλάντωση που λέγεται διακρότημα (αυξομείωση). Έστω για απλότητα φ=0. Στο σημείο x=0 όπου βρίσκεται ο παρατηρητής θα βλέπει από τον παραπάνω τύπο την εξής κίνηση

$$y(0,t) = -2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = A'(t)\sin\bar{\omega}t$$

Απλή αρμονική ταλάντωση με τη μέση τιμή των συχνοτήτων $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ και με πλάτος

$A'(t) = -2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ που μεταβάλλεται πολύ αργά σε σχέση με την ταλάντωση



Beats are fluctuations in amplitude produced by two sound waves of slightly different frequency, here 16 Hz and 18 Hz. (a) Individual waves. (b) Resultant wave formed by superposition of the two waves. The beat frequency is 18 Hz − 16 Hz = 2 Hz.

Δηλαδή απλή αρμονική ταλάντωση με διαμορφωμένο πλάτος που αλλάζει αργά από 0 ως 2A. Η μεταβολή του πλάτους οδηγεί σε παρατηρήσιμη αυξομείωση της έντασης. Επειδή το συνημίτονο μηδενίζεται δύο φορές μέσα σε μία περίοδο η συχνότητα του διακροτήματος θα είναι

$$\omega_{beat} = 2\cdot\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_1 - \omega_2 \Rightarrow f_{beat} = f_1 - f_2$$

Έτσι κουρδίζεται τις χορδές της κιθάρας σας με μια συσκευή που εκπέμπει την μεσαία λα των 440 Hz. Αλλάζεται την τάση της χορδής μέχρι να εξαφανιστεί το διακρότημα που ακούτε δηλαδή η περιοδική αυξομείωση της έντασης.

Απλά Παραδείγματα

1. Οι ακόλουθες σχέσεις περιγράφουν διαταραχή κατά μήκος μίας ευθείας. Ποια από αυτές περιγράφει κύμα

Α) $y = 5\sin(3t^2 - 4x)$ Β) $y = 8\sin[7(2x-3t)^2 + 6t - 4x)]$

Γ) $y = 7\sin x\cos(x-2t)$ Δ) $y = 3\cos(x^2 - 2t)$

Ε) καμία

Β) $y = f(2x-3t)$

2. Ποια από τις ακόλουθες διαταραχές ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

Α) όλες Β) καμία Γ) $y = 4xt$ Δ) $y = x^2 + 4t^2$ Ε) $y = 3\sin 2x\cos 5t$

Α) Όλες. Είναι επαλληλία δύο κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις

$y = 4xt = \left(x+t\right)^2 - \left(x-t\right)^2$

$y = x^2 + 4t^2 = \dfrac{(x+2t)^2 + (x-2t)^2}{2}$

$y = 3\sin 2x \cos 5t = \dfrac{3}{2}\left[\sin(2x+5t) + \sin(2x-5t)\right]$

από $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

3. Οι εξισώσεις που ακολουθούν περιγράφουν τρία εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται σε διαφορετικά μέσα (SI)

I) $y = 0,01\text{ημ}2\pi\left(2t-4x\right)$

II) $y = 0,005\text{ημ}2\pi\left(4t-2x\right)$

III) $y = 0,02\text{ημ}2\pi\left(2t-3x\right)$

Α) Ποιο κύμα διαδίδεται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα ;
Β) Σε ποια περίπτωση τα μόρια του μέσου ταλαντώνονται με τη μεγαλύτερη μέγιστη ταχύτητα ;
Γ) Ποια από τα κύματα διαδίδονται κατά την κατεύθυνση –x;
Δ) Ποιο είναι το μήκος κύματος του κύματος II

Α) Η ταχύτητα του κύματος βρίσκεται από τη σταθερότητα της φάσης

$$kx \pm \omega t = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow k\frac{dx}{dt} \pm \omega = 0 \Rightarrow \upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \mp\frac{\omega}{k} = \mp\frac{\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \tau o\upsilon\ t}{\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \tau o\upsilon\ x}$$

$\upsilon_{\text{II}} = \dfrac{4}{2} = 2$ m/s $>$ $\upsilon_{\text{III}} = \dfrac{2}{3} = 0,67$ m/s $>$ $\upsilon_{\text{I}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ m/s

Β) $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(A\sin(kx\pm\omega t)\right) = \pm A\omega\cos(kx\pm\omega t) \Rightarrow \upsilon_{y\max} = A\omega$

$\upsilon_{\text{III}y\max} = 0,02\cdot\ 2\pi 2 = 0,08\pi$ m/s $> \upsilon_{\text{I}y\max} = 0,01\cdot\ 2\pi 2 = 0,04\pi$ m/s $=$

$\upsilon_{\text{II}y\max} = 0,005\cdot\ 2\pi 4 = 0,04\pi$ m/s

Γ) Σχετικό πρόσημο x και t είναι $-$, άρα όλα διαδίδονται στην $+x$

Δ) $kx \pm \omega t = 2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right) \Rightarrow \lambda_{\text{II}} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ m/s

4. Είναι το παρακάτω ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτρομαγνητικό κύμα?
Πόσο είναι το μήκος κύματος ;

$$E_y(z,t) = 750\sin\left\lfloor\ 2\pi\left(0,2z\cdot\ 10^7 - 6t\cdot\ 10^{14}\right)\right\rfloor \text{ (SI).}$$

Η διαταραχή (y) είναι κάθετη στην διάδοση (z) άρα είναι εγκάρσιο κύμα.

Από τη φάση που είναι $k(z-\upsilon t) = \dfrac{2\pi}{\lambda}(z-\upsilon t) = 2\pi\cdot\ 0,2\cdot\ 10^7(z-30t\cdot\ 10^7)$, διαβάζουμε την ταχύτητα και το μήκος κύματος

$\upsilon = 3\times10^8$ m/s $= c$ OK είναι ΗΜ κύμα

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = (0,2\cdot\ 10^7)^{-1} = 5\cdot\ 10^{-7} = 500$ nm,

5. Αρμονικό εγκάρσιο κύμα ξεκινά να διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο από το σημείο x=0 τη χρονική στιγμή t=0. Η μορφή του κύματος περιγράφεται από την εξίσωση $y(x,t) = 0{,}5\sin(5\pi x - 5\pi t)$ (SI). Η απομάκρυνση του σημείου x=2m τη χρονική στιγμή t=1,5 s είναι :

Α) 0,5 Β) –0,5 Γ) 2 Δ) 0 (2)

Δ) Η ταχύτητα του κύματος είναι 1 m/s και άρα τη χρονική στιγμή t=1,5 s η διαταραχή δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο x=2m, βρίσκεται στο x=1,5m.

6. Αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ελαστικό μέσο στη διεύθυνση $\hat{x}$. Δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου με x_A=7,6 m και x_B=8,1 m έχουν την ίδια χρονική στιγμή φάσεις $\varphi_A=4\pi$ και $\varphi_B=8\pi/3$ αντίστοιχα. Το μήκος κύματος είναι :

Α) 0,25 m Β) 0,50 m Γ) 0,75 m Β) 1 m (2)

Γ) Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και επειδή το σημείο Α με $x_A<x_B$ το Α θα έχει μεγαλύτερη φάση από το Β η φάση είναι $\phi = \omega t - kx$ οπότε :

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = (\omega t - kx_A) - (\omega t - kx_B) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \lambda = 2\pi\frac{\Delta x}{\Delta\phi} = 2\pi\frac{0,5}{4\pi/3} = 0,75\,\text{m}$$

7. Η παρακάτω έκφραση, με $c=\omega/k$, παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$.

$$\vec{E}(x,t) = \left(\hat{y}E_{0y} + \hat{z}E_{0z}\right)\cos(\omega t - kx)$$

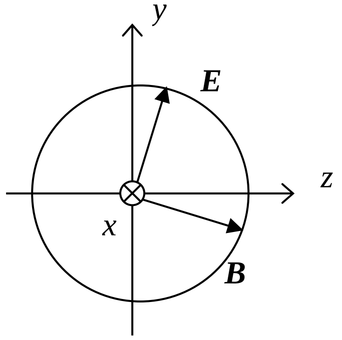
Το μαγνητικό πεδίο του κύματος είναι :

Α) $\left(\hat{y}\frac{E_{0y}}{c} + \hat{z}\frac{E_{0z}}{c}\right)\cos(\omega t - kx)$ Β) $-\left(\hat{y}\frac{E_{0y}}{c} + \hat{z}\frac{E_{0z}}{c}\right)\cos(\omega t - kx)$

Γ) $\left(-\hat{y}\frac{E_{0z}}{c} + \hat{z}\frac{E_{0y}}{c}\right)\cos(\omega t - kx)$ Δ) $\left(\hat{y}\frac{E_{0z}}{c} - \hat{z}\frac{E_{0y}}{c}\right)\cos(\omega t - kx)$

Γ) Η γωνία μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι 90° και τα μέτρα τους συνδέονται με τη σχέση $B=E/c$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι πρέπει να είναι $B_y = -E_z/c$ και $B_z = E_y/c$ ώστε η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος που καθορίζεται από το διάνυσμα Poynting $\vec{E}\times\vec{B}$ να είναι στην κατεύθυνση $+\hat{x}$



8. Αρμονικό κύμα με μήκος κύματος 8 cm και πλάτος 5√2 cm διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x. Κάποια χρονική στιγμή η μετατόπιση στη θέση x=0 είναι 5√2 cm. Την ίδια χρονική στιγμή η μετατόπιση στη θέση x=17 cm θα είναι:

Α) –2,5 cm Β) 5 cm γ) –5 cm Δ) 5/√2 cm

Β) Έστω $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = 0,05\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{0,08}x - \omega t\right)$ (SI)

Αν η φάση στην θέση x είναι $\frac{2\pi}{0,08}x - \omega t = \frac{\pi}{2}$ αφού $y(x,t) = A = 0,05\sqrt{2}$ m $= 5\sqrt{2}$ cm

Τότε η φάση στη θέση x+0,17 θα είναι

$$\frac{2\pi}{0,08}(x+0,17)-\omega t=\frac{\pi}{2}+\frac{17\pi}{4}=2\cdot\ 2\pi+\frac{3\pi}{4}$$

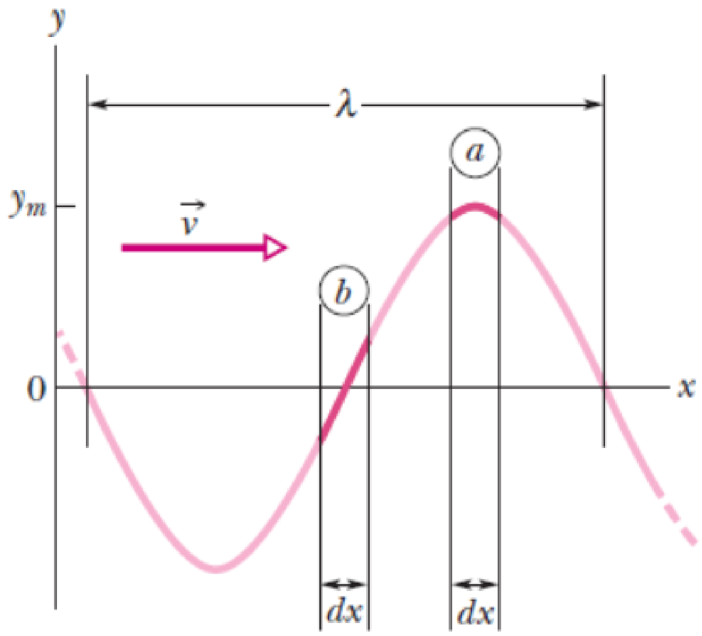
Οπότε $y(x+0,17,t)=A\sin\left(2\cdot\ 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=(5\sqrt{2}\ \text{cm})\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=5\sqrt{2}\cdot\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}=5\ \text{cm}$

9. Περιοδικό κύμα πλάτους 5 cm διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x. Κάποια χρονική στιγμή οι μετατοπίσεις στις θέσεις x= 50 cm και x=90 cm είναι αντίστοιχα 2 cm και –3 cm. Το μήκος κύματος μπορεί να είναι:

Α) 2 cm Β) 3 cm Γ) 4 cm Δ) 5 cm

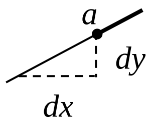
Β) Τα δύο σημεία δεν έχουν την ίδια μετατόπιση άρα δεν μπορεί να απέχουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος. Άρα το μήκος κύματος δεν θα είναι διαιρέτης της μεταξύ τους απόστασης Δx= 90 – 50 = 40 cm. Ο μόνος αριθμός που δεν διαιρεί το 40 από αυτούς που μας δίνονται είναι το 3.

Ισχύς και ένταση κύματος

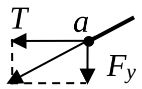


A snapshot of a traveling wave on a string at time $t = 0$. String element a is at displacement $y = y_m$, and string element b is at displacement $y = 0$. The kinetic energy of the string element at each position depends on the transverse velocity of the element. The potential energy depends on the amount by which the string element is stretched as the wave passes through it.

Σε μια ελαστική χορδή όπως το κύμα οδεύει από αριστερά προς τα δεξιά, η χορδή αριστερά από το σημείο a ασκεί δύναμη στο τμήμα της χορδής δεξιά του a. Όταν το σημείο a κινείται, η δύναμη F_y κάνει έργο σε αυτό το σημείο και έτσι μεταφέρει ενέργεια στο τμήμα δεξιά του σημείου a.



$$\text{κλίση}=\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_y}{T}$$



Όταν η κλίση είναι θετική
η F_y είναι αρνητική

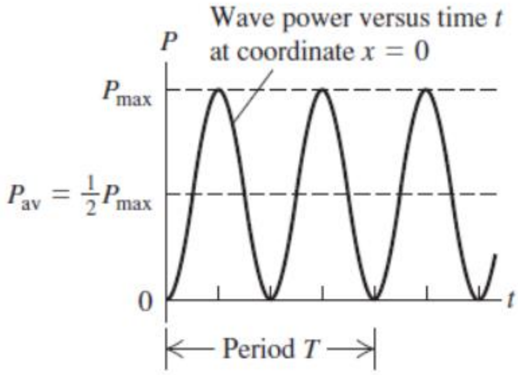
Η ***ενέργεια ανά μονάδα χρόνου (ισχύς)*** είναι : $P=F_y\upsilon_y=-T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$

Για ένα ημιτονοειδές κύμα $f(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$ παίρνουμε :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

και άρα ο στιγμιαίος ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (ισχύς) κατά μήκος της χορδής είναι:

$$P(x,t) = Tk\omega A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \sqrt{\mu T} \cdot \ \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$



Η ***μέγιστη τιμή της ισχύος*** είναι : $P_{\max} = \sqrt{\mu T} \cdot \omega^2 A^2$

ενώ η ***μέση τιμή της ισχύος*** σε μια περίοδο σε κάθε σημείο της χορδής είναι : $P = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T} \cdot \ \omega^2 A^2$

(από $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}$)

Η μέση ισχύς γράφεται και ως : $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cdot \ \upsilon = \left(\frac{1}{2}\mu\upsilon_{y,\max}^2\right) \cdot \ \upsilon$

Ο όρος $u = \frac{1}{2}\mu\upsilon_{y,\max}^2$, βλέπουμε ότι είναι η γραμμική πυκνότητα ενέργειας του κύματος, δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα μήκους της χορδής, αφού $\upsilon_{y,\max} = A\omega$ είναι η μέγιστη ενέργεια της ταλάντωσης ενός στοιχείου μάζας $dm = \mu dx$ της χορδής.

$$P = u \cdot \ \upsilon$$

Στη γενικότερη περίπτωση κυμάτων σε τρεις διαστάσεις μας ενδιαφέρει η ενέργεια ανά μονάδα όγκου (J/m^3). Αυτή εμφανίζεται στο μέγεθος της έντασης του κύματος. ***Ένταση*** (intensity) είναι η μέση ενέργεια που μεταφέρεται ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας σε μια επιφάνεια κάθετη στη διάδοση του κύματος:

$$I \equiv \frac{P}{S} \ , \qquad [I] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Αν λάβουμε υπόψη και τη διατομή της χορδής *S*, στο απλό μας παράδειγμα, τότε η πυκνότητα της χορδής είναι $\rho = \mu / S$ και η ένταση του κύματος γράφεται

$$I \equiv \frac{P}{S} = \frac{1}{2S}\sqrt{\mu T} \cdot \ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2S}\mu\upsilon\omega^2 A^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot \ \upsilon = u \cdot \ \upsilon \ ,$$

όπου $u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$ (J/m^3) είναι η ***πυκνότητα ενέργειας του κύματος***.

Η **ισχύς και η ένταση** ενός κύματος εξαρτώνται από **το τετράγωνο του πλάτους** του και από το **τετράγωνο της συχνότητας** του.

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για ηχητικά κύματα απλά αντικαθιστούμε για το εγκάρσιο πλάτος *A* το διάμηκες πλάτος μετατόπισης των στοιχειωδών όγκων $y_{\max}$ ή στη συνέχεια το πλάτος της μεταβολής της πίεσης $\Delta p_{\max} = Bky_{\max}$

$$I=\frac{1}{2}\rho\omega^2 y_{\max}^2\cdot\ \upsilon_{\eta\chi}=\frac{1}{2}\sqrt{B\rho}\,\omega^2 y_{\max}^2=\frac{\Delta p_{\max}^2}{2\sqrt{B\rho}}$$

(Η στιγμιαία ένταση για ηχητικό κύμα υπολογίζεται από $\Delta p(x,t)\upsilon_y(x,t)$)

Παρατηρούμε ότι ηχητικά κύματα ίδιας έντασης και διαφορετικών συχνοτήτων έχουν το ίδιο πλάτος πίεσης αλλά διαφορετικά πλάτη για την μετατόπιση. Άρα για ίσες εντάσεις θα πρέπει να ισχύει για τις συχνότητες και τα πλάτη :

$$I_1=I_2\Rightarrow\frac{1}{2}\rho\omega_1^2 y_{\max 1}^2=\frac{1}{2}\rho\omega_2^2 y_{\max 2}^2\Rightarrow\omega_1 y_{\max 1}=\omega_2 y_{\max 2}$$

Όταν δύο πηγές εκπέμπουν σε διαφορετικές συχνότητες (αλλιώς έχουμε φαινόμενα συμβολής) τότε οι εντάσεις τους αθροίζονται

$$I=I_1+I_2$$

Νόμος αντίστροφου τετραγώνου

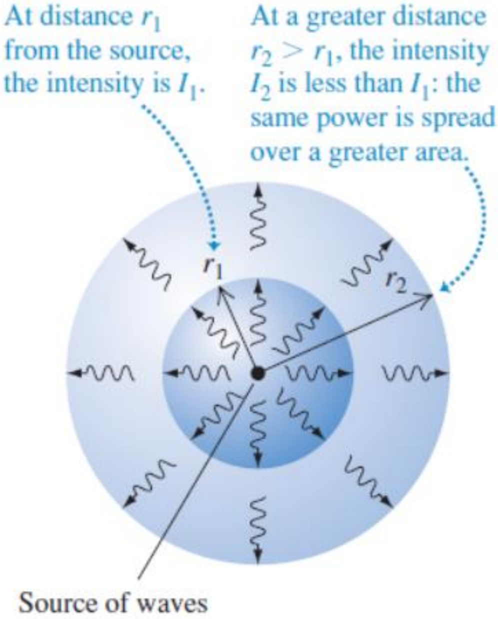
Αν ένα κύμα διαδίδεται ισότροπα σε όλο το χώρο, δηλαδή μοιράζει την ενέργειά του ομοιόμορφα σε μια σφαιρική επιφάνεια εμβαδού $S=4\pi r^2$ τότε η ένταση σε ένα σημείο της επιφάνειας είναι:

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}$$

Αν στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ δύο επιφανειών σε ακτίνες r_1 και r_2 δεν χάνεται ενέργεια από το κύμα τότε η ισχύς που φτάνει σε αυτές θα είναι ίση άρα $I_1 4\pi r_1^2=I_2 4\pi r_2^2$ και

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Οι εντάσεις είναι αντιστρόφως ανάλογες με τα τετράγωνα της απόστασης



Ακουστότητα

Το ανθρώπινο αυτί είναι ένα αξιοθαύμαστο όργανο μεγάλης ευαισθησίας. Μπορεί να αντιληφθεί εντάσεις που διαφέρουν κατά 12 τάξεις μεγέθους! Επίσης μπορεί να αντιληφθεί συχνότητες από 20 Hz ως 20.000 Hz, που διαφέρουν δηλαδή 3 τάξεις μεγέθους. Συγκρίνεται με το μάτι που αντιλαμβάνεται μήκη κύματος από 400 nm ως 700 nm μόνο. Δηλαδή εύρος μικρότερο από μια τάξη μεγέθους. Μάλιστα ούτε καν μια τάξη του 2 (μια οκτάβα) αφού το μέγιστο δεν είναι καν διπλάσιο του ελάχιστου. Γι' αυτό το αυτί ανταποκρίνεται στα ερεθίσματα λογαριθμικά. Ο λογάριθμος της έντασης ονομάζεται ακουστότητα (sound level).

Όταν η ένταση αλλάζει ×10 η ακουστότητα αλλάζει κατά +10

όταν η ένταση αλλάζει ×100 η ακουστότητα αλλάζει κατά +20 όταν η ένταση αλλάζει ×1000 η ακουστότητα αλλάζει κατά +30 κ.ο.κ.

Ένταση αναφοράς : I_0=10^{-12} W/m^2 (Είναι το κατώφλι ακουστότητας για τα 1000 Hz)

Ακουστότητα : $\beta = (10\text{dB})\cdot \log\dfrac{I}{I_0}$

$$\beta_2 - \beta_1 = (10\text{dB})\cdot\ \log\frac{I_2}{I_0} - (10\text{dB})\cdot\ \log\frac{I_1}{I_0} = (10\text{dB})\cdot\ \log\frac{I_2}{I_1} = (20\text{dB})\cdot\ \log\frac{r_1}{r_2}$$

Παράδειγμα Το κατώφλι πόνου για το ανθρώπινο αυτί είναι η ένταση των I =1 W/m^2 . Σε πόσα ντεσιμπέλ ακουστότητας αντιστοιχεί ;

$$\beta = (10\text{dB})\cdot\ \log\frac{I}{I_0} = (10\text{dB})\cdot\ \log\frac{1}{10^{-12}} = (10\text{dB})\cdot\ \log 10^{12} = (10\text{dB})12 = 120\text{ dB}$$

Example 15.5 The inverse-square law

A siren on a tall pole radiates sound waves uniformly in all directions. At a distance of 15.0 m from the siren, the sound intensity is 0.250 W/m^2. At what distance is the intensity 0.010 W/m^2?

SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: Because sound is radiated uniformly in all directions, we can use the inverse-square law, Eq. (15.26). At $r_1 = 15.0$ m the intensity is $I_1 = 0.250$ W/m^2, and the target variable is the distance r_2 at which the intensity is $I_2 = 0.010$ W/m^2.

EXECUTE: We solve Eq. (15.26) for r_2:

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15.0\text{ m})\sqrt{\frac{0.250\text{ W/m}^2}{0.010\text{ W/m}^2}} = 75.0\text{ m}$$

EVALUATE: As a check on our answer, note that r_2 is five times greater than r_1. By the inverse-square law, the intensity I_2 should be $1/5^2 = 1/25$ as great as I_1, and indeed it is.

By using the inverse-square law, we've assumed that the sound waves travel in straight lines away from the siren. A more realistic solution, which is beyond our scope, would account for the reflection of sound waves from the ground.

Συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις – Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε ότι τα κύματα συναντιούνται εκτός φάσης στο σημείο x=0 τη χρονική στιγμή t=0.

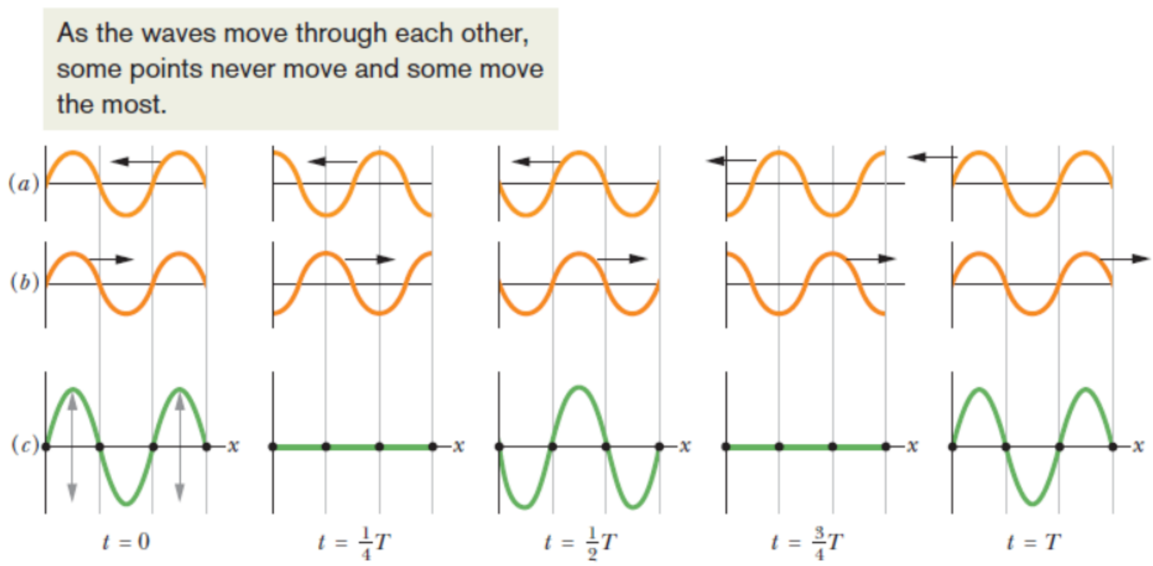
$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) =$$

$$= 2A\sin\left(\frac{(kx-\omega t)+(kx+\omega t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kx-\omega t)-(kx+\omega t)}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$



Τελικά τίποτα δεν διαδίδεται. Τα σημεία του ελαστικού μέσου εκτελούν αρμονική ταλάντωση το καθένα με το δικό του πλάτος. Το σημείο συνάντησης x=0 δεν ταλαντώνεται καθόλου.

$$A(x) = 2A\sin\left(kx\right) = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Οι ταλαντώσεις αυτές δεν είναι παρά οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ιδιομορφές) που είχαμε δει για ένα σύστημα πολλών σωματιδίων.

Τα σημεία όπου το πλάτος μηδενίζεται $A(x)$=0 ονομάζονται δεσμοί και τα σημεία όπου το πλάτος είναι μέγιστο $A(x)$=2A ονομάζονται κοιλίες. Από το σχήμα (η από απλή τριγωνομετρία) φαίνεται ότι οι κοιλίες απέχουν μεταξύ τους $\lambda/2$, όπως και οι δεσμοί, ενώ μια κοιλία από τον επόμενο δεσμό απέχει $\lambda/4$.

Θέσεις κοιλιών (antinodes) :

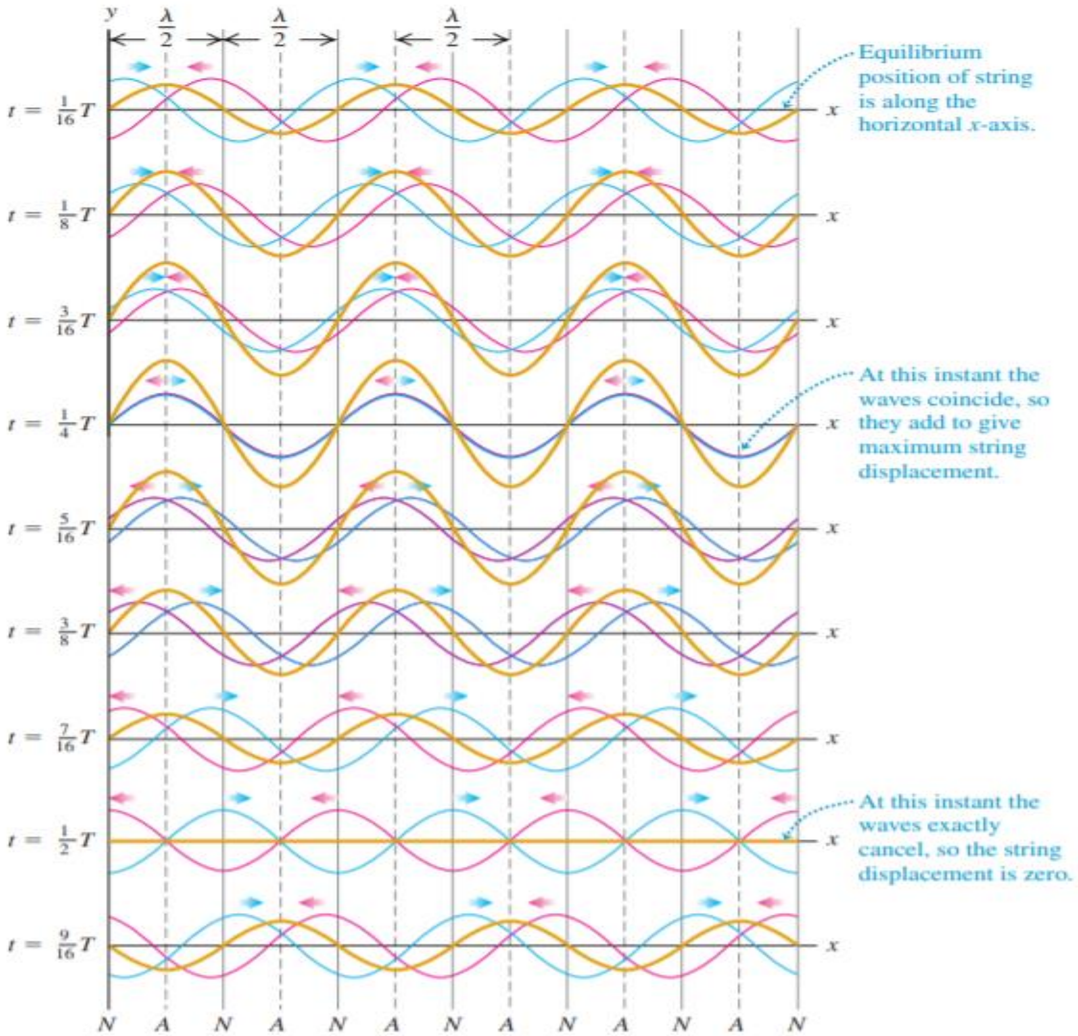
$$\left|\sin kx\right| = 1 \Rightarrow kx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,3...$$

Απόσταση μεταξύ κοιλιών: $d_{AA} = x_{n+1} - x_n = \left((n+1)+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$

Θέσεις δεσμών (nodes) : $\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,3...$

Απόσταση μεταξύ δεσμών: $d_{NN} = x_{n+1} - x_n = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$

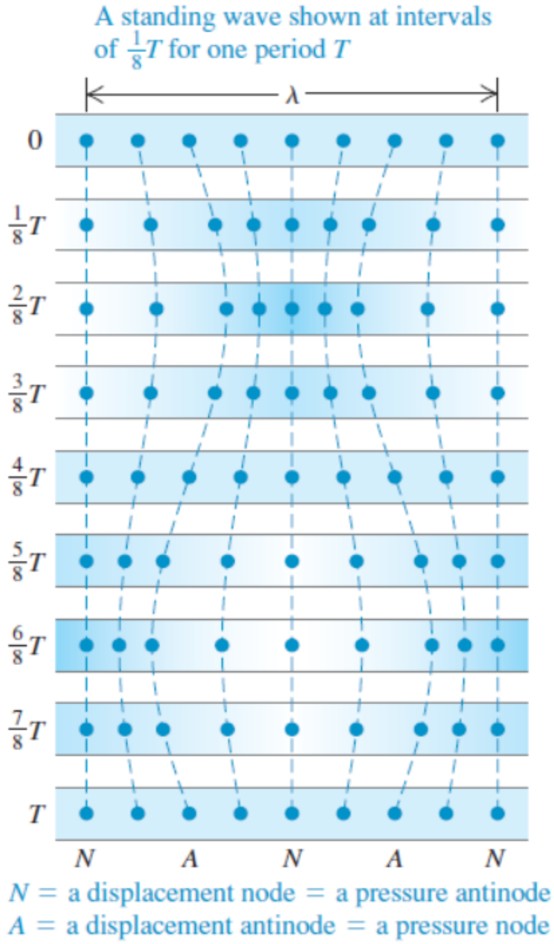
Απόσταση μεταξύ δεσμών-κοιλιών: $d_{AN} = x_{An} - x_{Nn} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$



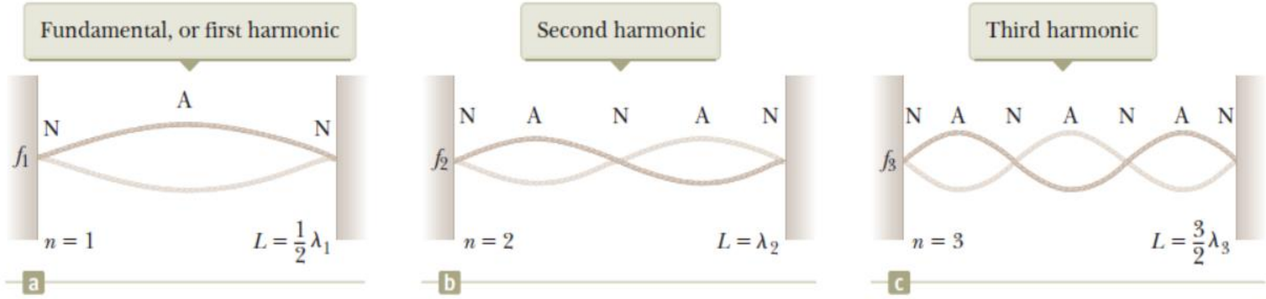
Στα ηχητικά κύματα επειδή όταν η μετατόπιση y περιγράφεται με συνάρτηση συνημιτόνου τότε η μεταβολή της πίεσης περιγράφεται με συνάρτηση ημιτόνου (διαφορά φάσης $\pi/2$), αυτό σημαίνει ότι

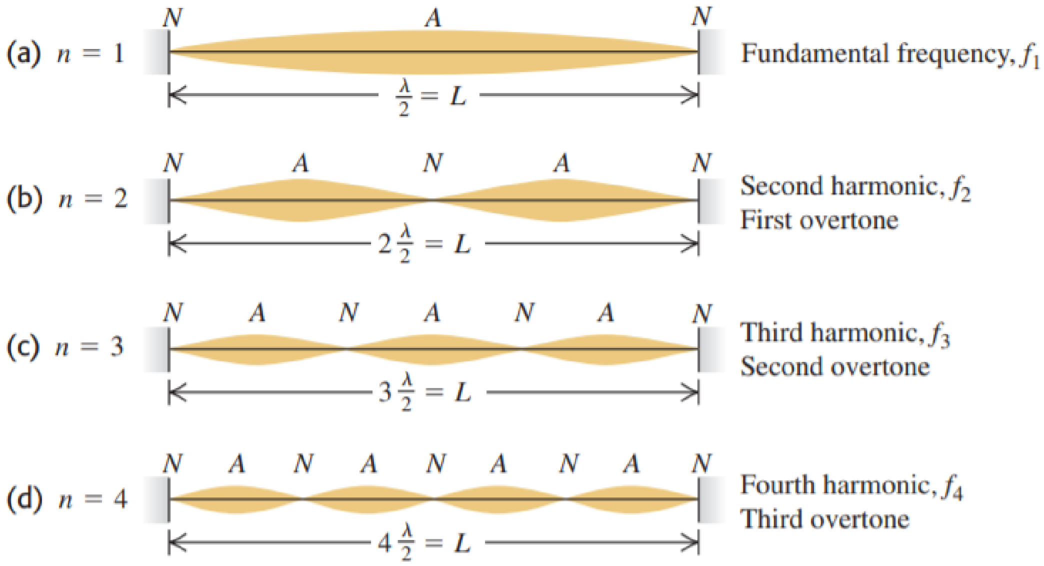
στα σημεία που έχω δεσμό μετατόπισης έχω κοιλία πίεσης και το αντίστροφο.

In a standing sound wave, a displacement node N is a pressure antinode (a point where the pressure fluctuates the most) and a displacement antinode A is a pressure node (a point where the pressure does not fluctuate at all).



Κλειστά ή ανοικτά άκρα





Για να χωρέσει το στάσιμο κύμα μέσα στη χορδή (ή τον ηχητικό σωλήνα) βλέπουμε από το σχήμα ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2} \text{ με } n = 1,2,3,\ldots} \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2L \qquad f_1 = \frac{\upsilon}{2L} \qquad 1^{\eta} \text{ αρμονική}$$

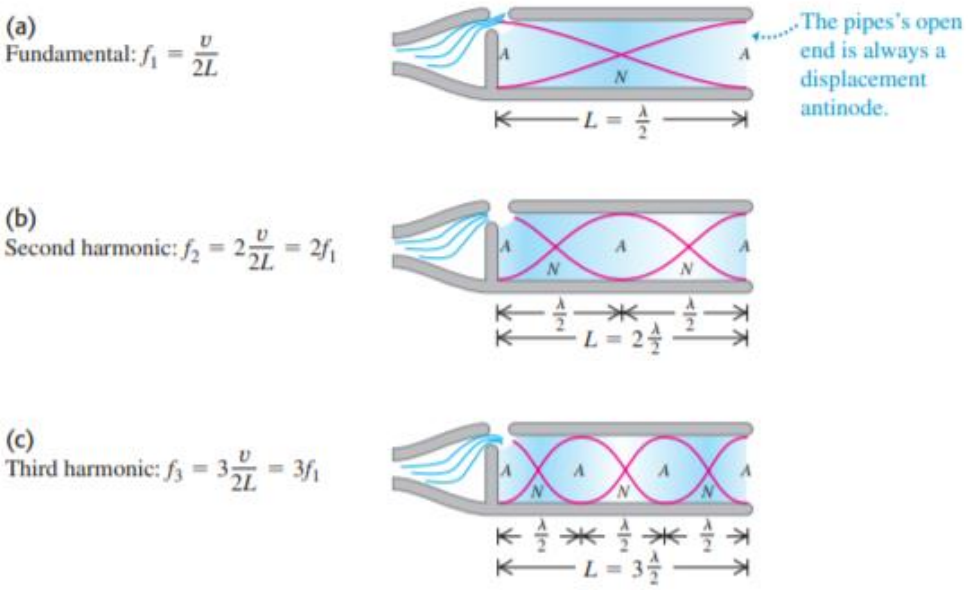
$$\lambda_2 = L = \frac{\lambda_1}{2}, \qquad f_2 = \frac{\upsilon}{L} = 2f_1 \qquad 2^{\eta} \text{ αρμονική}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}, \qquad f_3 = 3\frac{\upsilon}{2L} = 3f_1 \qquad 3^{\eta} \text{ αρμονική}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}, \qquad f_n = n\frac{\upsilon}{2L} = nf_1 \qquad \text{νιοστή αρμονική}$$

Το **μήκος** της χορδής ή του ηχητικού σωλήνα θα πρέπει να είναι **ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος.** Μόνο αυτά τα στάσιμα κύματα μπορούν να δημιουργηθούν στη χορδή.

Για ηχητικό σωλήνα με τα δύο άκρα ανοιχτά συμβαίνει ακριβώς το ίδιο, μόνο που τα άκρα του είναι κοιλίες μετατόπισης.



Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται κβάντωση: οι επιτρεπτές συχνότητες του συστήματος είναι διακριτές, ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, χωρίς να επιτρέπονται οι ενδιάμεσες τιμές. Έτσι εξηγείται και το διακριτό φάσμα συχνοτήτων που εκπέμπουν τα άτομα, από τις κυματικές ιδιότητες του ηλεκτρονίου η κυκλική τροχιά του οποίου πρέπει να έχει τέτοιο μήκος ώστε να χωράει ακέραιο πολλαπλάσιο μηκών κύματος. Γι' αυτό και η κβαντομηχανική ονομαζόταν αρχικά και κυματομηχανική.
Οι συχνότητες αυτές της χορδής (θεμελιώδης και πολλαπλάσιά της) είναι οι μουσικές νότες που μπορεί να παράγει η χορδή. Όταν πάρουμε το μισό μήκος χορδής η συχνότητα διπλασιάζεται. Λέμε ότι ανεβήκαμε μια οκτάβα. Δηλαδή οι διάφορες νότες λα έχουν συχνότητες διπλάσιες η μια από την προηγούμενη. Τη σχέση μεταξύ μήκους της χορδής και συχνοτήτων ανακάλυψε ο Πυθαγόρας.

Παράδειγμα
Χορδή μήκους L= 1 m είναι υπό τάση T=100 N και έχει γραμμική πυκνότητα μ=0,01 kg/m. Ποια είναι η θεμελιώδης συχνότητά της και οι επόμενες δύο αρμονικές. Αν η τάση γίνει T'=400 N πόση είναι τότε η θεμελιώδης συχνότητά της;

Η θεμελιώδης και οι δύο πρώτες αρμονικές αντιστοιχούν στα σχήματα a, b, c των προηγούμενων εικόνων.

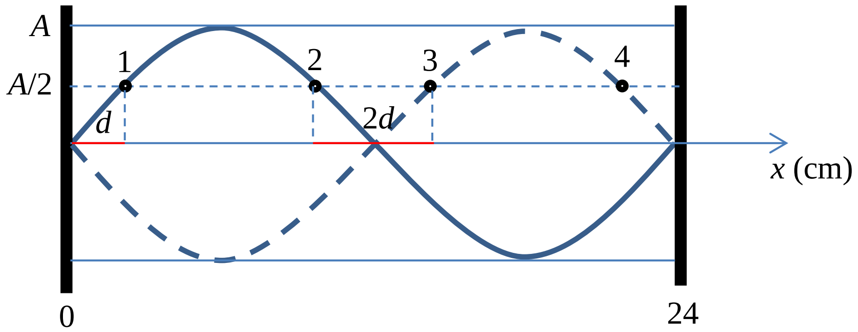
$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{100}{0,01}} = 100 \text{ m/s}$$

$$\lambda_1 = 2L \Rightarrow \ f_1 = \frac{\upsilon}{2L} = \frac{100}{2\cdot 1} = 50 \text{ Hz}, \ \ f_2 = 2f_1 = 100 \text{ Hz}, \ \ f_3 = 3f_1 = 150 \text{ Hz}$$

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{\upsilon'/2L}{\upsilon/2L} = \sqrt{\frac{T'/\mu}{T/\mu}} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{400}{100}} = 2 \Rightarrow f_1' = 2f_1 = 100 \text{ Hz}$$

Παράδειγμα
Τεταμένη χορδή μήκους 24 cm πάλλεται με συχνότητα διπλάσια της θεμελιώδους. Υπάρχουν τέσσερα κατά σειρά σημεία με πλάτος ταλάντωσης το μισό του μέγιστου. Πόσο απέχουν μεταξύ τους το δεύτερο και το τρίτο.

Κάνουμε σχήμα



Δεύτερη αρμονική (σχήμα): $\lambda = L = 24$ cm

$$A\sin(kd) = \frac{A}{2} \Rightarrow \sin(kd) = \frac{1}{2} \Rightarrow kd = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{\pi}{6} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{12} = \frac{L}{12} = \frac{24}{12} = 2 \text{ cm}$$

$$2d = 4 \text{ cm}$$

Ένα κλειστό και ένα ανοικτό άκρο

Το ανοικτό άκρο αναγκαστικά θα είναι κοιλία. Αρά το πρώτο στάσιμο κύμα που μπορεί να χωρέσει είναι το a της παρακάτω εικόνας. Το μήκος του σωλήνα πρέπει να είναι η απόσταση δεσμού-κοιλίας, δηλαδή λ/4. Το επόμενο που μπορεί να χωρέσει, το b, θα περιλαμβάνει και την απόσταση κοιλίας-κοιλίας $\lambda/2$. Άρα τα στάσιμα κύματα που μπορούν να χωρέσουν στο μήκος L του σωλήνα θα πρέπει να ικανοποιούν

$$L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } n = 0,1,2,3,\ldots \Rightarrow \boxed{L = m\frac{\lambda}{4} \text{ με } m = 1,3,5,\ldots} \Rightarrow$$

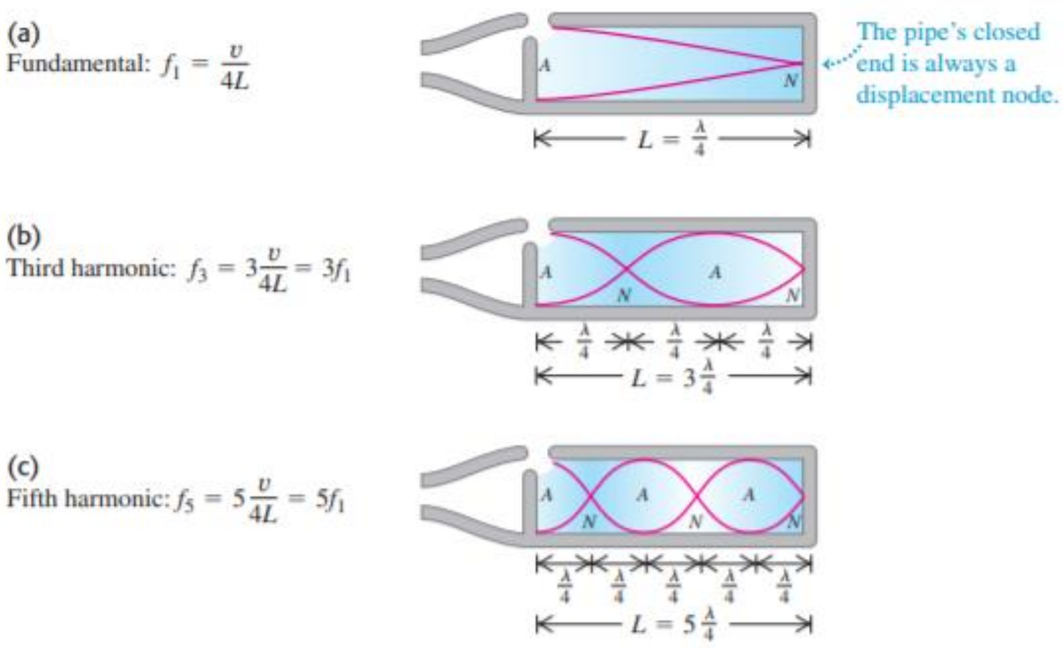
$$\lambda_1 = 4L \qquad f_1 = \frac{\upsilon}{4L}$$

$$\lambda_3 = \frac{4L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}, \qquad f_3 = 3\frac{\upsilon}{4L} = 3f_1$$

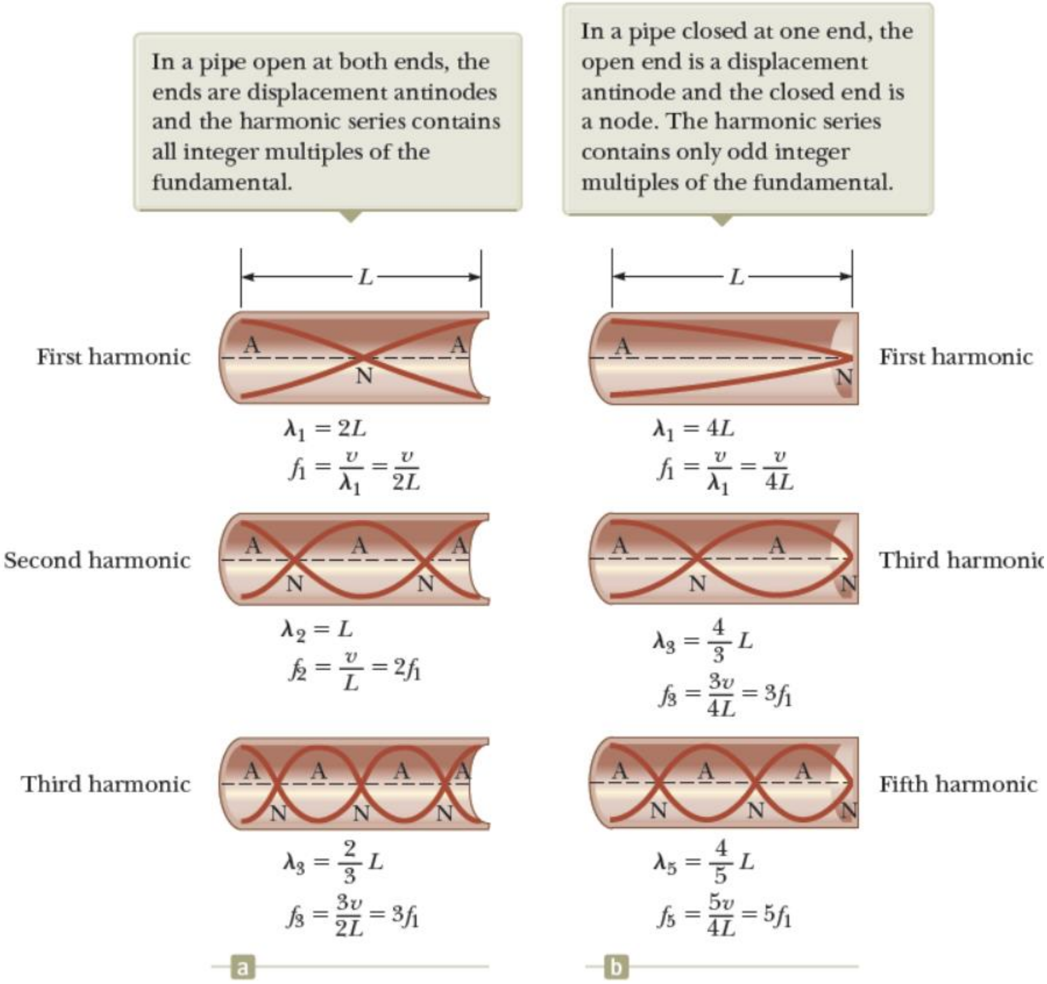
$$\lambda_5 = \frac{4L}{5} = \frac{\lambda_1}{5}, \qquad f_5 = 5\frac{\upsilon}{2L} = 5f_1$$

$$\lambda_m = \frac{4L}{m} = \frac{\lambda_1}{m}, \qquad f_m = m\frac{\upsilon}{4L} = mf_1$$

Το **μήκος** θα πρέπει να είναι **περιττό πολλαπλάσιο** του ενός **τετάρτου** του μήκους κύματος



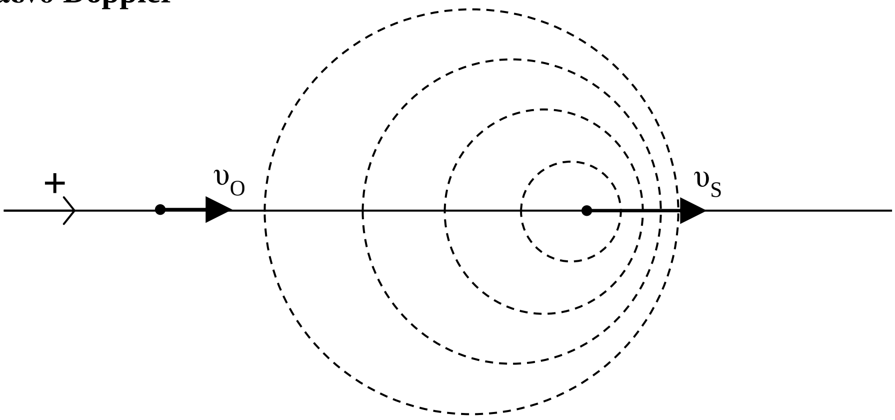
Σύγκριση μεταξύ κλειστού-ανοικτού άκρου και δύο ανοικτών άκρων



Παράδειγμα: Οι θεμελιώδεις συχνότητες δύο ηχητικών σωλήνων είναι ίσες. Ό ένας σωλήνας (μήκους L_{AA}) έχει και τα δύο άκρα του ανοιχτά ενώ ο δεύτερος (μήκους L_{AK}) έχει το ένα κλειστό. Τι σχέση έχουν τα μήκη των σωλήνων;

$$f_{1AA} = f_{1AK} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\lambda_{1AA}} = \frac{\upsilon}{\lambda_{1AK}} \Rightarrow \lambda_{1AA} = \lambda_{1AK} \Rightarrow \frac{L_{AA}}{2} = \frac{L_{AK}}{4} \Rightarrow L_{AK} = 2L_{AA}$$

Φαινόμενο Doppler



υ : η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα (το μέσο διάδοσης του κύματος)
υ_S : η ταχύτητα της πηγής (source) ως προς τον αέρα
υ_O : η ταχύτητα του παρατηρητή (observer or detector) ως προς τον αέρα
+ : ως θετική θεωρείται η κατεύθυνση από τον παρατηρητή προς την πηγή (O→S)
$\upsilon_{S/O} = \upsilon_S - \upsilon_O$: η σχετική ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή
Εύκολα βλέπετε ότι: για $\upsilon_{S/O} = \upsilon_S - \upsilon_O > 0$ έχουμε απομάκρυνση πηγής-παρατηρητή
για $\upsilon_{S/O} = \upsilon_S - \upsilon_O < 0$ έχουμε προσέγγιση πηγής-παρατηρητή

Η ταχύτητα του κύματος υ συνδέεται με το μήκος κύματος λ και τη συχνότητα της πηγής f_s, με τη σχέση:

$$\upsilon = \lambda f_s = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f_s} = \upsilon T$$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από:

$$f_O = \frac{\upsilon'}{\lambda'}$$

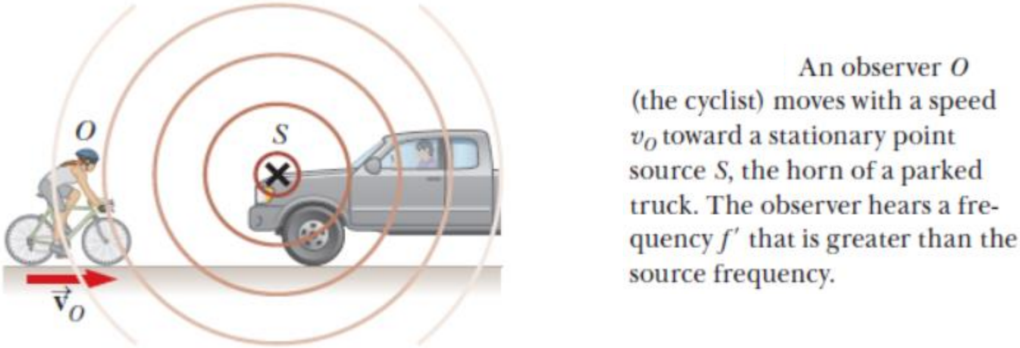
όπου

1) $\upsilon' = \upsilon \pm \upsilon_O$ είναι η σχετική ταχύτητα του παρατηρητή ως προς τα μέτωπα του κύματος (με **συν** όταν ο παρατηρητής **πλησιάζει** και πλην όταν απομακρύνεται από την πηγή) και
2) $\lambda' = \lambda \mp \upsilon_s T$ η απόσταση μεταξύ των μετώπων κύματος δηλαδή η απόσταση ενός μετώπου από την πηγή όταν αυτή εκπέμπει το επόμενο μέτωπο (με **πλην** όταν η πηγή **πλησιάζει** και συν όταν απομακρύνεται από αυτόν)

Αριθμός N, μετώπων κύματος που συναντά ο παρατηρητής σε χρόνο t = όσα θα έρχονταν από μόνα τους προς αυτόν με ταχύτητα υ, αν ο παρατηρητής ήταν ακίνητος (που είναι όσα χωράνε στην απόσταση υt) ± όσα θα διέσχιζε αυτός πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενος από αυτά με ταχύτητα υ_O αν τα μέτωπα κύματος ήταν ακίνητα (που είναι όσα χωράνε στην απόσταση $\upsilon_O t$)

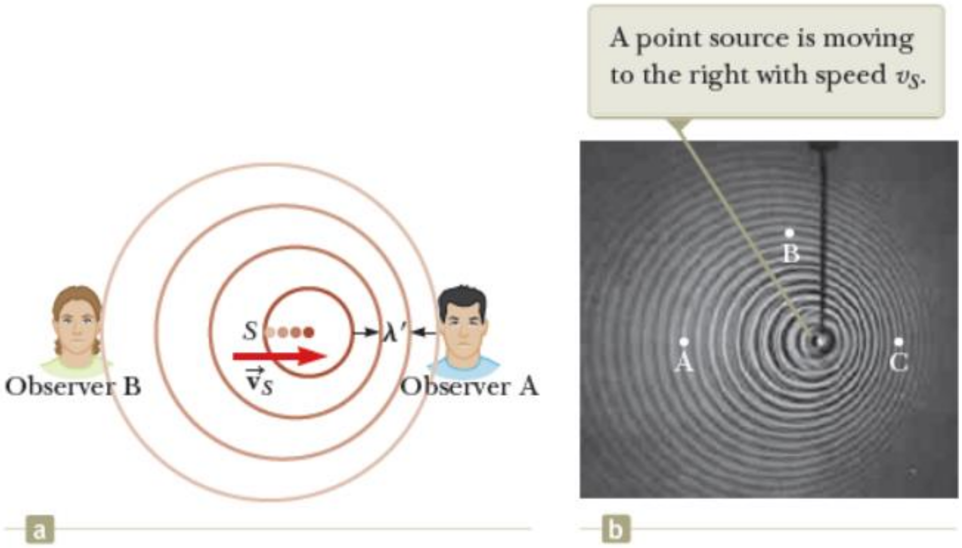
Οπότε $N = \frac{\upsilon t}{\lambda'} \pm \frac{\upsilon_O t}{\lambda'}$ και άρα η συχνότητα είναι ίση με $f_O = \frac{N}{t} = \frac{\upsilon'}{\lambda'}$

Όταν κινείται ο παρατηρητής (Observer) τότε το μήκος κύματος δεν αλλάζει ($\lambda'=\lambda$) όμως συναντά τα κύματα πιο συχνά, σαν να ταξίδευαν με μεγαλύτερη ταχύτητα, την σχετική ταχύτητα υ'. Άρα αλλάζει μόνο ο αριθμητής



$$f_O=\frac{\upsilon'}{\lambda'}=\frac{\upsilon\pm\upsilon_0}{\lambda}=\frac{\upsilon\pm\upsilon_0}{\upsilon/f_s}\Rightarrow f_O=\frac{\upsilon\pm\upsilon_0}{\upsilon}f_s$$

Όταν η πηγή κινείται προς τον ακίνητο παρατηρητή Α η ταχύτητα των μετώπων κύματος προς τον παρατηρητή δεν αλλάζει. Τον πλησιάζουν με ταχύτητα υ. Όμως η πηγή διανύει απόσταση $\upsilon_s T$ μεταξύ της εκπομπής δύο μετώπων κύματος (κυνηγάει το κύμα της). Έτσι τα μέτωπα δεν απέχουν μεταξύ τους λ αλλά $\lambda'=\lambda-\upsilon_s T$, πυκνώνουν. Το αντίθετο συμβαίνει από την άλλη πλευρά όπου η η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή Β. Τότε τα μέτωπα κύματος απέχουν $\lambda'=\lambda+\upsilon_s T$, δηλαδή αραιώνουν. Άρα όταν κινείται η πηγή αλλάζει ο παρονομαστής της σχέσης



$$f_O=\frac{\upsilon'}{\lambda'}=\frac{\upsilon}{\lambda\mp\upsilon_s T}=\frac{\upsilon}{\upsilon/f_s\mp\upsilon_s/f_s}\Rightarrow f_O=\frac{\upsilon}{\upsilon\mp\upsilon_s}f_s$$

Ο γενικός τύπος είναι:

$$\boxed{f_O=\frac{\upsilon\pm\upsilon_O}{\upsilon\mp\upsilon_s}f_s}$$

Και ο μνημονικός κανόνας για τα πρόσημα είναι ότι μπαίνουν έτσι ώστε:

για **προσέγγιση** πηγής-παρατηρητή η **συχνότητα** να **αυξάνεται**

για **απομάκρυνση** πηγής-παρατηρητή η **συχνότητα** να **μειώνεται**

Η΄

Αν η ταχύτητα είναι στην κατεύθυνση παρατηρητή-πηγής (O→S) παίρνει θετικό πρόσημο, αλλιώς αρνητικό

Η συχνότητα που λαμβάνει ο παρατηρητής εξαρτάται και από την ταχύτητα της πηγής και από την ταχύτητα του παρατηρητή και όχι μόνο από την σχετική τους ταχύτητα. Αν η πηγή κινείται προς ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα v ο παρατηρητής θα μετρήσει διαφορετική συχνότητα από την περίπτωση που αυτός κινούνταν προς ακίνητη πηγή με την ίδια ταχύτητα v.
Όμως για μέτρα ταχυτήτων μικρά σε σχέση με την ταχύτητα του κύματος $\upsilon_S, \upsilon_O << \upsilon$, η κλασματική μεταβολή της συχνότητας εξαρτάται μόνο από την σχετική ταχύτητα των δύο.
Π.χ. για ταχύτητες θετικές και με $\upsilon_{S/O} = \upsilon_S - \upsilon_O > 0$ επίσης θετική, δηλαδή απομάκρυνση, έχουμε:

$$f' = f\,\frac{\upsilon+\upsilon_O}{\upsilon+\upsilon_S} = f\left(1+\frac{\upsilon_O}{\upsilon}\right)\left(1+\frac{\upsilon_S}{\upsilon}\right)^{-1} \approx f\left(1+\frac{\upsilon_O}{\upsilon}\right)\left(1-\frac{\upsilon_S}{\upsilon}\right) \approx f\left(1+\frac{\upsilon_O}{\upsilon}-\frac{\upsilon_S}{\upsilon}\right) \Rightarrow$$

$$f' = f\left(1-\frac{\upsilon_S-\upsilon_O}{\upsilon}\right) \Rightarrow f' = f\left(1-\frac{\upsilon_{S/O}}{\upsilon}\right) \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = -\frac{\upsilon_{S/O}}{\upsilon}$$

Εξετάζοντας και τις υπόλοιπες περιπτώσεις καταλήγουμε στον γενικό τύπο για $\upsilon_S, \upsilon_O << \upsilon$

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm\frac{|\upsilon_{S/O}|}{\upsilon}$$ με: + για προσέγγιση, – απομάκρυνση

Το φαινόμενο Doppler παρατηρείται και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με το ίδιο ποιοτικό αποτέλεσμα :

Προσέγγιση → αύξηση συχνότητας
Απομάκρυνση → ελλάτωση συχνότητας

Όμως ο ποσοτικός τύπος διαφέρει επειδή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σχετικιστική κινηματική. Στον τύπο υπεισέρχεται μόνο η σχετική ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή $\upsilon \equiv \upsilon_{S/O}$ και όχι οι απόλυτες ταχύτητές τους.

$$f_O = f_s\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$$ απομάκρυνση της πηγής (υ), η συχνότητα μικραίνει (red shift)

$$f_O = f_s\sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}}$$ προσέγγιση της πηγής ($-\upsilon$), η συχνότητα μεγαλώνει (blue shift)

Πάντως για μικρές ταχύτητες σχετικά με την ταχύτητα του φωτός $\upsilon << c$, η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας δίνεται από τον ίδιο τύπο όπως και για τα μηχανικά κύματα :
Π.χ. για απομάκρυνση (υ):

$$f' = f\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}} = f\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx f\left(1-\frac{\upsilon}{2c}\right)\left(1-\frac{\upsilon}{2c}\right) \approx f\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\upsilon}{c}$$

Για προσέγγιση ($-\upsilon$) θα είναι: $\dfrac{\Delta f}{f} = \dfrac{\upsilon}{c}$

Παράδειγμα: Διακρότημα από Doppler
Ένα ασθενοφόρο απομακρύνεται από εσάς με ταχύτητα 36 km/h =10 m/s και ένα άλλο σας πλησιάζει με την ίδια ταχύτητα ενώ και τα δύο έχουν τις σειρήνες τους ανοιχτές και εκπέμπουν ηχητικά κύματα με συχνότητα 300 Hz. Τι συχνότητα έχει το διακρότημα που αντιλαμβάνεστε;
[Ο ήχος έχει ταχύτητα 343 m/s]

Συχνότητα που λαμβάνεται από το εισερχόμενο $f_1 = \dfrac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_s} f_s = \dfrac{343}{343-10}300 = 309$ Hz

Συχνότητα που λαμβάνεται από το απομακρυνόμενο $f_1 = \dfrac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s = \dfrac{343}{343+10} 300 = 291,5 \text{ Hz}$

Συχνότητα διακροτήματος : $f_{beat} = f_1 - f_2 = 309 - 291,5 = 17,5 \text{ Hz}$

Example 16.14 Doppler effect I: Wavelengths

A police car's siren emits a sinusoidal wave with frequency $f_S = 300$ Hz. The speed of sound is 340 m/s and the air is still. (a) Find the wavelength of the waves if the siren is at rest. (b) Find the wavelengths of the waves in front of and behind the siren if it is moving at 30 m/s.

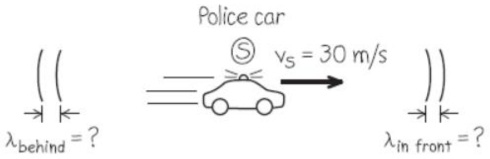
SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: In part (a) there is no Doppler effect because neither source nor listener is moving with respect to the air; $v = \lambda f$ gives the wavelength. Figure 16.29 shows the situation in part (b): The source is in motion, so we find the wavelengths using Eqs. (16.27) and (16.28) for the Doppler effect.

EXECUTE: (a) When the source is at rest,

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340 \text{ m/s}}{300 \text{ Hz}} = 1.13 \text{ m}$$

16.29 Our sketch for this problem.



(b) From Eq. (16.27), in front of the siren

$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{300 \text{ Hz}} = 1.03 \text{ m}$$

From Eq. (16.28), behind the siren

$$\lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}}{300 \text{ Hz}} = 1.23 \text{ m}$$

EVALUATE: The wavelength is shorter in front of the siren and longer behind it, as we expect.

Example 16.15 Doppler effect II: Frequencies

If a listener L is at rest and the siren in Example 16.14 is moving away from L at 30 m/s, what frequency does the listener hear?

SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: Our target variable is the frequency f_L heard by a listener behind the moving source. Figure 16.30 shows the situation. We have $v_L = 0$ and $v_S = +30$ m/s (positive, since the velocity of the source is in the direction from listener to source).

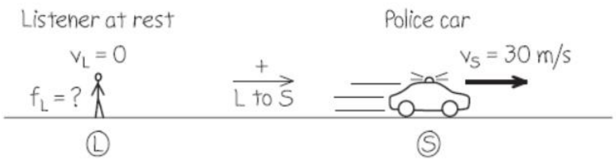
EXECUTE: From Eq. (16.29),

$$f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 276 \text{ Hz}$$

EVALUATE: The source and listener are moving apart, so $f_L < f_S$. Here's a check on our numerical result. From Example 16.14, the wavelength behind the source (where the listener in Fig. 16.30 is located) is 1.23 m. The wave speed relative to the stationary listener is $v = 340$ m/s even though the source is moving, so

$$f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1.23 \text{ m}} = 276 \text{ Hz}$$

16.30 Our sketch for this problem.



Example 16.16 Doppler effect III: A moving listener

If the siren is at rest and the listener is moving away from it at 30 m/s, what frequency does the listener hear?

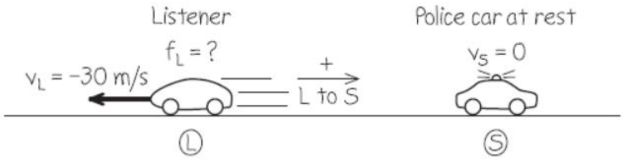
SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: Again our target variable is f_L, but now L is in motion and S is at rest. Figure 16.31 shows the situation. The velocity of the listener is $v_L = -30$ m/s (negative, since the motion is in the direction from source to listener).

EXECUTE: From Eq. (16.29),

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + (-30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 274 \text{ Hz}$$

16.31 Our sketch for this problem.



EVALUATE: Again the source and listener are moving apart, so $f_L < f_S$. Note that the *relative velocity* of source and listener is the same as in Example 16.15, but the Doppler shift is different because v_S and v_L are different.

Example 16.17 Doppler effect IV: Moving source, moving listener

The siren is moving away from the listener with a speed of 45 m/s relative to the air, and the listener is moving toward the siren with a speed of 15 m/s relative to the air. What frequency does the listener hear?

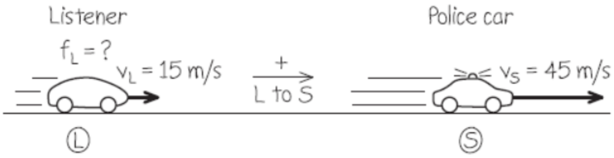
SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: Now *both* L and S are in motion. Again our target variable is f_L. Both the source velocity $v_S = +45$ m/s and the listener's velocity $v_L = +15$ m/s are positive because both velocities are in the direction from listener to source.

EXECUTE: From Eq. (16.29),

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s} + 15\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + 45\ \text{m/s}} (300\ \text{Hz}) = 277\ \text{Hz}$$

16.32 Our sketch for this problem.

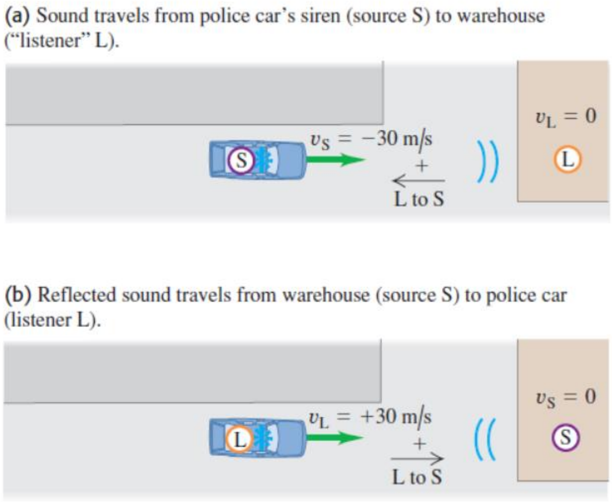


EVALUATE: As in Examples 16.15 and 16.16, the source and listener again move away from each other at 30 m/s, so again $f_L < f_S$. But f_L is different in all three cases because the Doppler effect for sound depends on how the source and listener are moving relative to the *air*, not simply on how they move relative to each other.

Example 16.18 Doppler effect V: A double Doppler shift

The police car is moving toward a warehouse at 30 m/s. What frequency does the driver hear reflected from the warehouse?

16.33 Two stages of the sound wave's motion from the police car to the warehouse and back to the police car.



SOLUTION

IDENTIFY: In this situation there are *two* Doppler shifts (Fig. 16.33). In the first shift, the warehouse is the stationary "listener."

The frequency of sound reaching the warehouse, which we call f_W, is greater than 300 Hz because the source is approaching. In the second shift, the warehouse acts as a source of sound with frequency f_W, and the listener is the driver of the police car; she hears a frequency greater than f_W because she is approaching the source.

SET UP: To determine f_W, we use Eq. (16.29) with f_L replaced by f_W. For this part of the problem, $v_L = v_W = 0$ (the warehouse is at rest) and $v_S = -30$ m/s (the siren is moving in the negative direction from source to listener).

To determine the frequency heard by the driver (our target variable), we again use Eq. (16.29) but now with f_S replaced by f_W. For this second part of the problem, $v_S = 0$ because the stationary warehouse is the source and the velocity of the listener (the driver) is $v_L = +30$ m/s. (The listener's velocity is positive because it is in the direction from listener to source.)

EXECUTE: The frequency reaching the warehouse is

$$f_W = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + (-30\ \text{m/s})} (300\ \text{Hz}) = 329\ \text{Hz}$$

Then the frequency heard by the driver is

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_W = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s}} (329\ \text{Hz}) = 358\ \text{Hz}$$

EVALUATE: Because there are two Doppler shifts, the reflected sound heard by the driver has an even higher frequency than the sound heard by a stationary listener in the warehouse.

Παράδειγμα RADAR εκπέμπει ραδιοκύματα με συχνότητα 500 MHz. Η συχνότητα των ραδιοκυμάτων που λαμβάνονται μετά από ανάκλαση σε αεροσκάφος που κινείται προς τη θέση του RADAR είναι μεγαλύτερη κατά 5 kHz. Η ταχύτητα του αεροσκάφους είναι:

Α) 1,2 km/s Β) 1,3 km/s Γ) 1,4 km/s Δ) 1,5 km/s

Δ) Σημείο προσοχής: διπλό Doppler άρα $\Delta f = 2\frac{\upsilon}{c} f$.

Το αεροσκάφος λαμβάνει και ανακλά f_1 (προσέγγισης) και το RADAR λαμβάνει πίσω f_2 (πάλι έχω προσέγγιση).

Από το 1ο Doppler παίρνουμε $\frac{\Delta f_1}{f} = \frac{\upsilon}{c} \Rightarrow \Delta f_1 = \frac{\upsilon}{c} f$, Από το 2ο Doppler παίρνουμε:

$$\frac{\Delta f_2}{f_1} = \frac{\upsilon}{c} \Rightarrow \Delta f_2 = \frac{\upsilon}{c} f_1 = \frac{\upsilon}{c}(f + \Delta f_1) = \frac{\upsilon}{c} f \left(1 + \frac{\Delta f_1}{f}\right) = \frac{\upsilon}{c} f \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) \approx \frac{\upsilon}{c} f = \Delta f_1$$

επειδή το κλάσμα υ/c είναι πολύ μικρό.

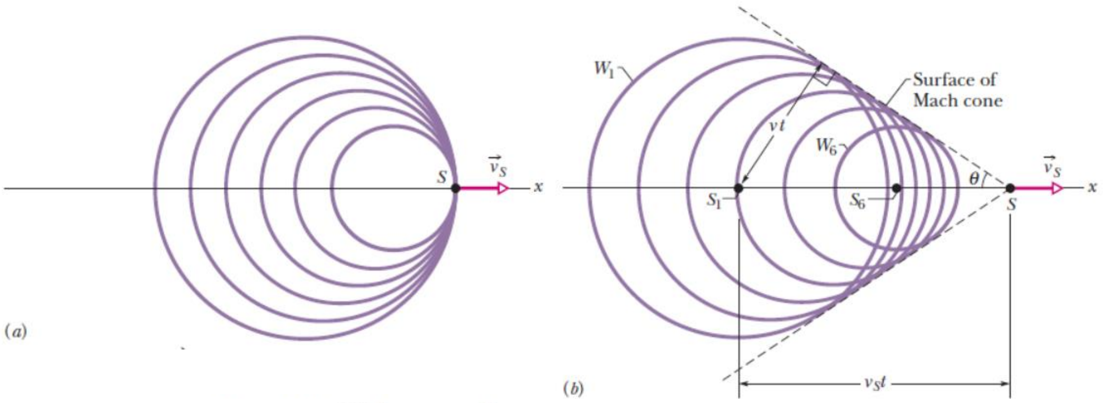
$$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 = 2\Delta f_1 = \frac{2\upsilon}{c} f \Rightarrow \upsilon = c\frac{\Delta f}{2f} = 3\times 10^8 \frac{5\times 10^3}{2\cdot\ 500\times 10^6} = 1,5\times 10^3 = 1,5 \text{ km/s}$$

Κρουστικά κύματα

Μπροστά από την κινούμενη πηγή το μήκος κύματος μικραίνει και τα μέτωπα κύματος πυκνώνουν

$$\lambda' = \lambda - \upsilon_s T = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{f}$$

Για $\upsilon = \upsilon_s$ το μήκος κύματος γίνεται μηδέν $\lambda' = 0$. Τα μέτωπα κύματος συσσωρεύονται και φτιάχνουν ένα φράγμα μεγάλης πίεσης, το φράγμα του ήχου. Για ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτές του ήχου η παραπάνω εξίσωση δεν περιγράφει σωστά την εικόνα μπροστά από την πηγή επειδή η πηγή πηγαίνει πιο γρήγορα από τα μέτωπα κύματος και τα προσπερνά.



(*a*) A source of sound *S* moves at speed v_S equal to the speed of sound and thus as fast as the wavefronts it generates. (*b*) A source *S* moves at speed v_S faster than the speed of sound and thus faster than the wavefronts. When the source was at position S_1 it generated wavefront W_1, and at position S_6 it generated W_6. All the spherical wavefronts expand at the speed of sound *v* and bunch along the surface of a cone called the Mach cone, forming a shock wave. The surface of the cone has half-angle *θ* and is tangent to all the wavefronts.

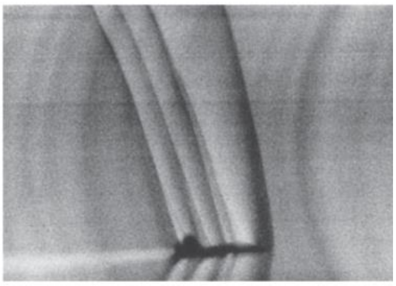
Από το σχήμα παίρνουμε:

$$\sin\theta = \frac{\upsilon t}{\upsilon_s t} = \frac{\upsilon}{\upsilon_s}$$

Αριθμός Mach, ο λόγος της ταχύτητας της πηγής προς την ταχύτητα του ήχου : $\frac{\upsilon_s}{\upsilon}$

16.36 The first supersonic airplane, the Bell X-1, was shaped much like a 50-caliber bullet—which was known to be able to travel faster than sound.

(c) Shock waves around a supersonic airplane



U.S. Navy photo by Ensign John Gay

Figure 17-24 Shock waves produced by the wings of a Navy FA 18 jet. The shock waves are visible because the sudden decrease in air pressure in them caused water molecules in the air to condense, forming a fog.

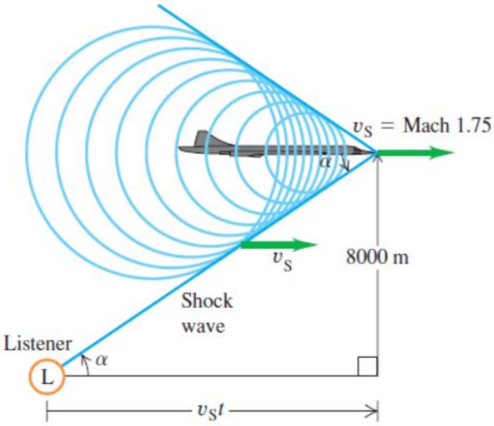
Example 16.19 Sonic boom from a supersonic airplane

An airplane is flying at Mach 1.75 at an altitude of 8000 m, where the speed of sound is 320 m/s. How long after the plane passes directly overhead will you hear the sonic boom?

SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: The shock wave forms a cone trailing backward from the airplane, so the problem is really asking for how much time elapses from when the airplane flies overhead to when the shock wave reaches you at point L (Fig. 16.37). During the time t (our target variable) since the airplane traveling at speed v_S passed overhead, it has traveled a distance $v_S t$. Equation (16.31) gives the shock cone angle α; we use trigonometry to solve for t.

16.37 You hear a sonic boom when the shock wave reaches you at L (*not* just when the plane breaks the sound barrier). A listener to the right of L has not yet heard the sonic boom but will shortly; a listener to the left of L has already heard the sonic boom.



EXECUTE: From Eq. (16.31) the angle α of the shock cone is

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{1.75} = 34.8^\circ$$

The speed of the plane is the speed of sound multiplied by the Mach number:

$$v_S = (1.75)(320\ \text{m/s}) = 560\ \text{m/s}$$

From Fig. 16.37 we have

$$\tan\alpha = \frac{8000\ \text{m}}{v_S t}$$

$$t = \frac{8000\ \text{m}}{(560\ \text{m/s})(\tan 34.8^\circ)} = 20.5\ \text{s}$$

EVALUATE: You hear the boom 20.5 s after the airplane passes overhead, at which time it has traveled (560 m/s)(20.5 s) = 11.5 km since it passed overhead. We have assumed that the speed of sound is the same at all altitudes, so that $\alpha = \arcsin v/v_S$ is constant and the shock wave forms a perfect cone. In fact, the speed of sound decreases with increasing altitude. How would this affect the value of t?

Μερικά ακόμα παραδείγματα

1. Για την ταχύτητα του ήχου σε ένα αέριο ισχύει ότι
Α) είναι ίση με τη μέση ταχύτητα των μορίων του
Β) είναι ίση με τη μέση ταχύτητα των μορίων του για μονατομικά αέρια
Γ) είναι μεγαλύτερη από τη μέση ταχύτητα των μορίων του
Δ) είναι μικρότερη από τη μέση ταχύτητα των μορίων του

1. Δ) Η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τον τύπο $\upsilon_{ήχου} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$. Ο λόγος γ των γραμμομοριακών ειδικών θερμοτήτων παίρνει τη μέγιστη τιμή του για μονατομικά αέρια $\gamma = C_p/C_V = 5/3 < 2$ και είναι ακόμα μικρότερος για διατομικά και πολυατομικά αέρια. Άρα η ταχύτητα του ήχου θα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους άλλα πάντα μικρότερη από τις διάφορες μέσες τιμές των ταχυτήτων του αερίου που δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

$\upsilon_{\eta\chi o\upsilon} < \upsilon_{mp} < \bar{\upsilon} < \upsilon_{\mathrm{rms}}$ αφού $\sqrt{\gamma\frac{RT}{M}} < \sqrt{2\frac{RT}{M}} < \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}} < \sqrt{3\frac{RT}{M}}$

2. Η ταχύτητα του ήχου στους -3 ^{o}C είναι 330 m/s. Η θεμελιώδης συχνότητα μιας χορδής μήκους 1 m δημιουργεί στον αέρα ένα ηχητικό κύμα με μήκος κύματος 4 m. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιων κυμάτων στη χορδή ;
Α) 330 m/s Β) 660 m/s Γ) 165 m/s Δ) δεν μπορεί να προσδιοριστεί

2. Γ) Η χορδή είναι η πηγή του ηχητικού κύματος. Άρα οι συχνότητες των δύο κυμάτων θα είναι ίδιες
$$\frac{\upsilon}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\lambda_{\eta\chi}} \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\eta\chi}}\upsilon_{\eta\chi} = \frac{2L}{\lambda_{\eta\chi}}\upsilon_{\eta\chi} = \frac{2}{4}330 = 165\,\mathrm{m/s}$$

3. Η τάση στη χορδή μιας κιθάρας είναι 21% μεγαλύτερη από την κανονική. Η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι :
Α) 21% υψηλότερη Β) 10% υψηλότερη Γ) 10% χαμηλότερη Δ) η ίδια

3. Β) $f_1' = \frac{\upsilon'}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{T'/\mu}}{2L} = \frac{\sqrt{1,21\cdot T/\mu}}{2L} = 1,1\frac{\sqrt{T/\mu}}{2L} = 1,1\frac{\upsilon}{\lambda_1} = 1,1 f_1$

4. Σωλήνας εκκλησιαστικού οργάνου έχει μήκος 3m και το ένα άκρο του κλειστό. Τα δύο μακρύτερα μήκη κύματος για στάσιμα ηχητικά κύματα μέσα στο σωλήνα είναι

Α) 6 m, 3 m Β) 12 m, 6 m Γ) 12 m, 4 m. Δ) 9 m, 6 m

4. Γ) Ο σωλήνας πρέπει να χωράει περιττά πολλαπλάσια ενός τετάρτου του μήκους κύματος (απόσταση δεσμού-κοιλίας) καθώς το ένα άκρο του θα είναι δεσμός και το άλλο κοιλία : $L = n\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{n},\ \ n = 1,3,5,... \Rightarrow \lambda_1 = 4L = 12\mathrm{m}$ και $\lambda_3 = \frac{4L}{3} = 4\mathrm{m}$

5. Για εγκάρσιο αρμονικό κύμα μετατόπισης της μορφής $y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος όταν
Α) $\lambda/A = 2\pi$ Β) $A/k = 1$ Γ) $kA = \upsilon$ Δ) $\upsilon = \omega/k$

5. Α) Το κύμα περιγράφεται από την $y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$ όπου $\upsilon = \omega/k$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η εγκάρσια ταχύτητα των σημείων της χορδής δίνεται από $\upsilon_y \equiv dy/dt = A\omega\sin(kx-\omega t)$. Οπότε η μέγιστη ταχύτητα των σημείων της χορδής $\upsilon_{y,\max} = A\omega = kA\upsilon$ θα ισούται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος υ όταν $kA = 1 \Rightarrow A2\pi/\lambda = 1 \Rightarrow 2\pi = \lambda/A$. Η Γ) είναι λάθος διαστατικά ενώ η Δ) ισχύει πάντα.

6. Πόσα dB περίπου πέφτει η ακουστότητα μιας πηγής αν απομακρυνθείτε σε διπλάσια απόσταση από αυτή ; (log2≈0,3)
Α) 10dB Β) 6 dB Γ) 5 dB Δ) 3 dB

6. Β) Η ένταση είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή, η οποία εκπέμπει με σταθερή ισχύ P : $I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

Άρα $\beta_2-\beta_1=10\log\left(\dfrac{I_2}{I_1}\right)=10\log\left(\dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right)=10\cdot 2\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)=10\cdot 2\log\dfrac{1}{2}=-20\cdot 0,3=-6\text{dB}$

7. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα σε χορδή δίνεται από τον τύπο $y(x,t)=2\cos(6x-3t)$ (SI). Η μέγιστη ταχύτητα των σημείων της χορδής είναι

Α) 0,5 m/s Β) 2 m/s Γ) 3 m/s Δ) 6 m/s

7. Δ) $y(x,t)=2\cos(6x-3t)\Rightarrow \upsilon_y\equiv\dfrac{dy}{dt}=6\sin(6x-3t)$. Το κύμα περιγράφεται από την $y(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$. Η μέγιστη ταχύτητα των σημείων της χορδής $\upsilon_{y,\max}\equiv\left(dy/dt\right)_{\max}=A\omega=kA\upsilon$ δεν έχει σχέση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος $\upsilon=\omega/k=3/6=0,5$ m/s

8. Ηχείο εκπέμπει ένα μουσικό τόνο με συγκεκριμένη ισχύ. Αν ένα δεύτερο ηχείο παραδίπλα αρχίσει να παίζει τον ίδιο μουσικό τόνο με τη μισή ισχύ τότε η ένταση του ήχου

Α) θα αυξηθεί παντού

Β) θα αυξηθεί σε κάποια σημεία και θα μείνει ίδια στα υπόλοιπα

Γ) θα αυξηθεί σε κάποια σημεία και θα ελαττωθεί σε κάποια άλλα

Δ) θα παραμείνει η ίδια

8. Γ) Στα σημεία ενισχυτικής συμβολής το πλάτος ταλάντωσης και άρα η ένταση θα αυξηθεί και στα σημεία αναιρετικής συμβολής θα μειωθεί (θα μηδενιζόταν κιόλας αν τα πλάτη και άρα οι ισχύες των δύο ηχείων ήταν ίσα).

9. Ένα κατευθυντικό ηχείο δημιουργεί στάσιμο κύμα απέναντι από ένα τοίχο. Το μήκος κύματος είναι 1 m. Σε ποιες αποστάσεις από τον τοίχο δεν θα ακούμε καθόλου ήχο.

Α) 0,25 m 0,5 m Β) 0,5 m 0,75 m Γ) 0,5 m 1 m Δ) 0,25 m 0,75 m

9. Δ) Το αυτί μας ανιχνεύει μεταβολές στην πίεση άρα δεν θα ακούμε ήχο όταν είμαστε σε δεσμό πίεσης. Οι δεσμοί πίεσης είναι κοιλίες για τη μετατόπιση των μορίων. Ο τοίχος είναι δεσμός μετατόπισης και άρα κοιλία πίεσης. Οπότε σε αποστάσεις από τον τοίχο που είναι περιττά πολλαπλάσια του ενός τέταρτου του μήκους κύματος *λ/4*=0,25 m.

10. RADAR τροχαίας για τον έλεγχο της ταχύτητας των οχημάτων εκπέμπει σε συχνότητα 300 MHz. Η συχνότητα που επιστρέφει στο RADAR μετά από ανάκλαση, σε όχημα που προσεγγίζει, διαφέρει από την αρχική κατά 80 Hz. Η ταχύτητα του οχήματος είναι :

Α) 104 km/h Β) 124 km/h Γ) 144 km/h Δ) 164 km/h

10. Γ) $\dfrac{\Delta f}{f}=2\dfrac{\upsilon}{c}\Rightarrow\ \upsilon=\dfrac{\Delta f}{2f}c=\dfrac{80}{2\cdot\ 300\times10^6}3\times10^8=40\text{ m/s}=144\text{ km/h}$

11. Ήχος συχνότητας 220 Hz έχει την ίδια ένταση με ήχο συχνότητας 440 Hz και πλάτος 1,6 $\times10^{-8}$ m. Το πλάτος του είναι

Α) 0,4 10^{-8} m Β) 0,8 10^{-8} m Γ) 1,6 10^{-8} m Δ) 3,2 10^{-8} m

11. Δ) Επειδή $I=\dfrac{1}{2}\sqrt{B\rho}\cdot\omega^2A^2\Rightarrow I\propto\omega^2A^2$ θα πρέπει $f_1A_1=f_2A_2$ άρα

$$A_2 = \frac{f_1}{f_2} A_1 = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

12. Η ένταση της μεσαίας νότας *λα* με συχνότητα 440 Hz αν παιχτεί με πλάτος $0{,}8 \times 10^{-8}$ m μέσα σε ένα αεροπλάνο και ταυτόχρονα στον αέρα κάπου έξω από το αεροπλάνο σε ένα φανταστικό εναέριο θέατρο στο ίδιο ύψος με το αεροπλάνο, τότε θα ακουστεί

Α) πιο δυνατά από τους ακροατές του αεροπλάνου
Β) πιο δυνατά από τους ακροατές στον αέρα
Γ) το ίδιο
Δ) πρέπει να γνωρίζουμε την ταχύτητα του αεροπλάνου

12. Α) $I = \frac{1}{2}\sqrt{B\rho} \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow I \propto \sqrt{B\rho} = \sqrt{\gamma p \rho}$. Μέσα στο αεροπλάνο η πίεση και η πυκνότητα του αέρα διατηρούνται στις ίδιες τιμές περίπου με το έδαφος. Έξω στον αέρα, στα ύψη που πετάνε τα αεροπλάνα τόσο η πίεση όσο και η πυκνότητα είναι πολύ μικρότερες. Ο αέρας είναι πολύ αραιότερος και οι ήχοι έχουν πολύ μικρότερη ένταση η οποία μηδενίζεται όπως πλησιάζουμε στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας και στο διάστημα (όπου δεν υπάρχει αέρας να διαδώσει τον ήχο).

13. Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις περιγράφει κύμα που διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση +*x*

Α) $28e^{-\left(4x^2+9t^2-12xt-6\right)}$ Β) $64t\cos(3x-t)$

Γ) $(x+2t)\sin(x-2t)$ Δ) $\ln(1+4x+5t)-12x-15t$

13. Α) $4x^2+9t^2-12xt-6=(2x-3t)^2-6=4(x-1{,}5t)^2-6$ άρα

$y(x,t)=28e^{-\left(4x^2+9t^2-12xt-6\right)}=28e^6e^{-4(x-1{,}5t)^2}=Af(x-\upsilon t)$ με υ=1,5 m/s, $A=28e^6$ και $f(u)=e^{-4u^2}$. Τα Β) και Γ) δεν είναι κύματα ενώ το Δ) είναι κύμα $f(x+1{,}25t)$ αλλά διαδίδεται στην –*x* κατεύθυνση γιατί το σχετικό πρόσημο μεταξύ *x* και *υt* είναι +.