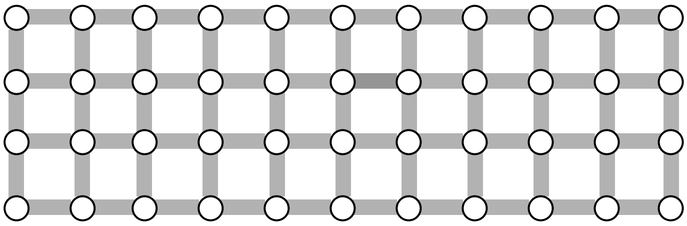
ΑΚΑΜΠΤΟ ΣΩΜΑ (Rigid Body)

Γενικά για το άκαμπτο σώμα

***Ορισμός άκαμπτου σώματος ή ιδανικού στερεού*:** Ένα σύστημα σωματιδίων των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις διατηρούνται σταθερές. Δηλαδή ένα ιδεατό σώμα που δεν παραμορφώνεται αλλά κρατάει σταθερό το σχήμα του ασχέτως των δυνάμεων που του ασκούνται.



Οι δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων (μορίων) του ιδανικού στερεού αναπαρίστανται με αβαρείς άκαμπτες ράβδους που δεν επιτρέπουν στα μόρια να μετακινηθούν από τις σχετικές θέσεις τους

Το άκαμπτο σώμα αποτελεί ειδική περίπτωση συστήματος σωματιδίων και άρα όσα έχουμε αναφέρει για τα συστήματα σωματιδίων στο προηγούμενο κεφάλαιο ισχύουν και για το άκαμπτο σώμα.

Ειδικότερα, ισχύουν οι δυναμικές εξισώσεις του Νεύτωνα οι οποίες εδώ ονομάζονται εξισώσεις Euler

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi} \qquad 1^{\eta} \text{ εξίσωση Euler}$$

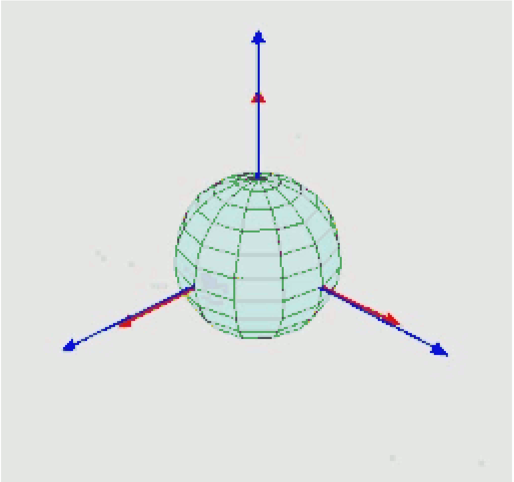
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} \qquad 2^{\eta} \text{ εξίσωση Euler}$$

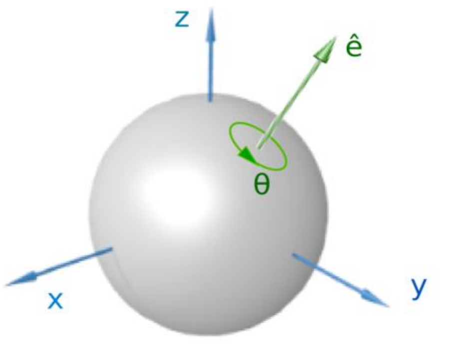
Γωνίες Euler

Για την περιγραφή του συμπαγούς σώματος όμως χρειάζονται μόνο 6 μεταβλητές:

τρεις αριθμοί για τον προσδιορισμό της θέσης του κέντρου μάζας του $\vec{R}_{CM} = \left(R_x, \quad R_y, \quad R_z\right)$ και

τρεις γωνίες για τον προσδιορισμό του προσανατολισμού του.



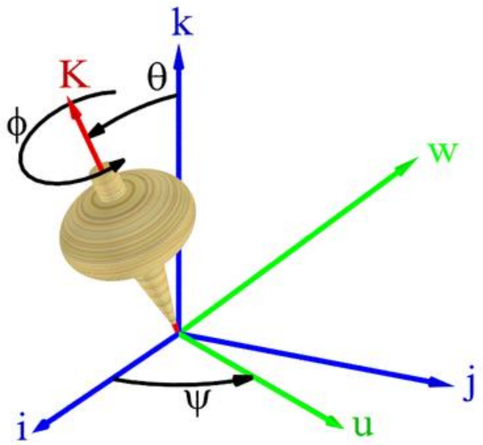


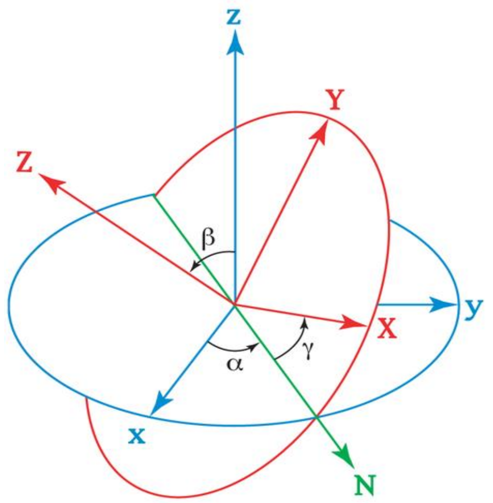
Αλλαγή μόνο του προσανατολισμού ενός συμπαγούς σώματος σημαίνει ότι ένα σημείο του παραμένει ακίνητο. Ένας τυχαίος προσανατολισμός του συμπαγούς μπορεί να επιτευχθεί με τρεις στροφές.

Ένας τρόπος διαδοχής των στροφών είναι οι γωνίες Euler που αντιστοιχούν σε ακολουθία στροφών z-x-z : στροφή κατά α γύρω από τον άξονα z, στροφή κατά β γύρω από τον άξονα x, στροφή κατά γ γύρω από τον άξονα z: $\vec{r}\,' = \mathrm{R}_z(\gamma)\mathrm{R}_x(\beta)\mathrm{R}_z(\alpha)\vec{r}$

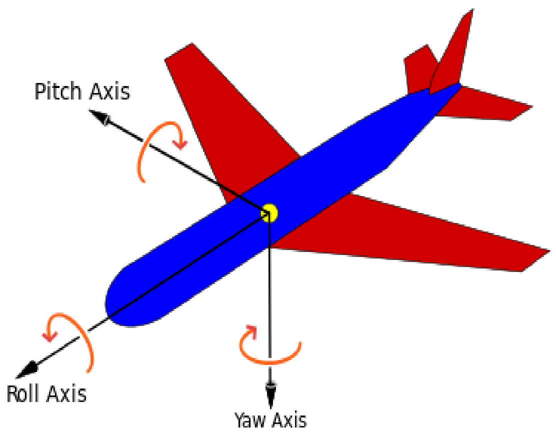
Οι δύο πρώτες στροφές τοποθετούν τον άξονα z στη νέα του θέση και η 3η στροφή περιστρέφει το στερεό γύρω από τον άξονα z και φέρνει τους άξονες x, y στην τελική τους θέση.

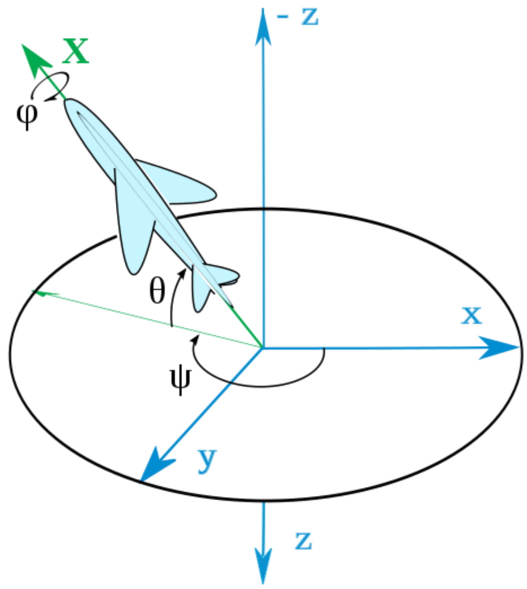
Κανονικές γωνίες Euler : α, ψ: μετάπτωση (precession)
β, θ: κλόνηση (nutation)
γ, φ: συστροφή (intrinsic rotation)





Ένας άλλος τρόπος διαδοχής των στροφών, που χρησιμοποιείται στην αεροπλοΐα και την ναυσιπλοΐα, είναι ακολουθία στροφών γύρω από τρεις ξεχωριστούς άξονες x-y-z :





Γωνίες Tait-Bryan ή γωνίες Euler (σκέτο) : ψ: εκτροπή ή πλάγια στροφή (yaw, heading, bearing)
θ: πρόνευση ή κλίση (pitch, elevation)
φ: περιστροφή ή διατοιχισμός (roll, bank)

Ένας πιλότος μπορεί να εκτελέσει και τις τρεις στροφές ενώ ένας καπετάνιος έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει μόνο εκτροπή καθώς το πλοίο πρέπει να έχει σταθερό προσανατολισμό ως προς την επιφάνεια του νερού. Κλίση ή διατοιχισμός για πλοίο είναι ανεπιθύμητα καθώς μπορεί να οδηγήσουν σε ανατροπή του πλοίου.

Θεώρημα Euler

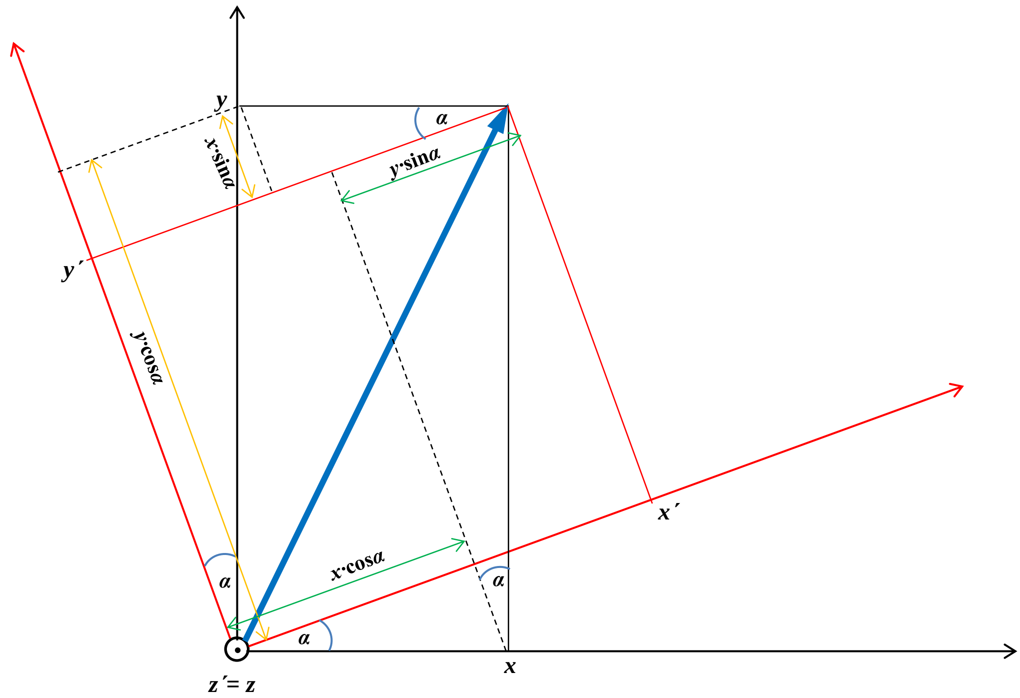
Κάθε προσανατολισμός ενός άκαμπτου σώματος (στροφή με ένα σημείο του σώματος σταθερό) μπορεί να επιτευχθεί με μία στροφή γύρω από κατάλληλο άξονα $\hat{e}$ που περνάει από το ακίνητο σημείο.

$$\mathrm{R}_z(\gamma)\mathrm{R}_x(\beta)\mathrm{R}_z(\alpha)=\mathrm{R}_e(\theta)$$

Πίνακες στροφών

Παθητική στροφή (αλλάζουν οι άξονες αναφοράς, όλα τα διανύσματα μένουν στη θέση τους), **δεξιόστροφου** συστήματος συντεταγμένων, ανθωρολογιακά, γύρω από τον άξονα z.

Από το παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι :



$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad , \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad , \qquad z' = z$$

Σε μορφή πίνακα : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Άρα ο πίνακας στροφής είναι γύρω από τον άξονα z είναι : $\mathrm{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

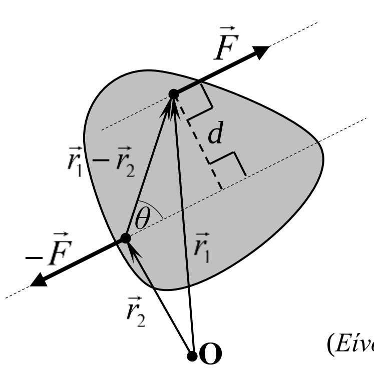
Αντίστοιχα, από τα ανάλογα σχήματα, για στροφές γύρω από τους άξονες x και y παίρνουμε:

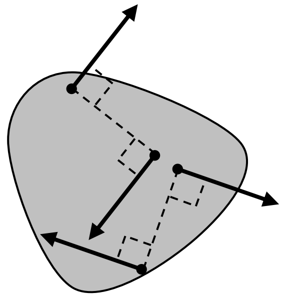
$$\mathrm{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες στροφής είναι ορθογώνιοι πίνακες : $\det \mathrm{R} = 1$, $\mathrm{R}\mathrm{R}^T = 1 \Rightarrow \mathrm{R}^{-1} = \mathrm{R}^T$

Δυνάμεις πάνω σε άκαμπτο σώμα.

Ζεύγος δυνάμεων είναι δύο αντίθετες δυνάμεις πάνω σε διαφορετικούς φορείς. Η ροπή του ζεύγους είναι $\tau = Fd$ όπου d η απόσταση μεταξύ των φορέων των δυνάμεων. Η ροπή αυτή είναι ίδια γύρω από κάθε σημείο. Αφού η συνισταμένη δύναμη ενός ζεύγους είναι προφανώς μηδέν, ένα ζεύγος δεν μπορεί να μετακινήσει ένα άκαμπτο σώμα παρά μόνο να το περιστρέψει. Παραμένοντας στο ίδιο επίπεδο μπορούμε να κυλίσουμε τις δυνάμεις πάνω στους φορείς τους ή/και να περιστρέψουμε μαζί τους φορείς τους χωρίς να μεταβληθεί το αποτέλεσμα του ζεύγους.





Ισοδύναμα ζεύγη.
(*Είναι ισοδύναμα και με αυτό του προηγούμενου σχήματος*)

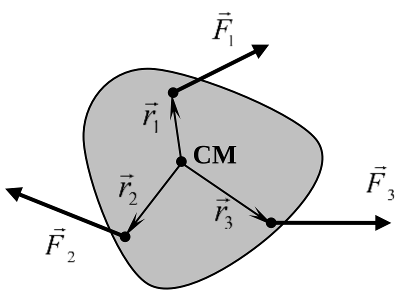
Πράγματι η ολική ροπή του ζεύγους γύρω από τυχαίο σημείο Ο είναι : $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F} \Rightarrow \tau = F\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| \sin\theta = Fd$.

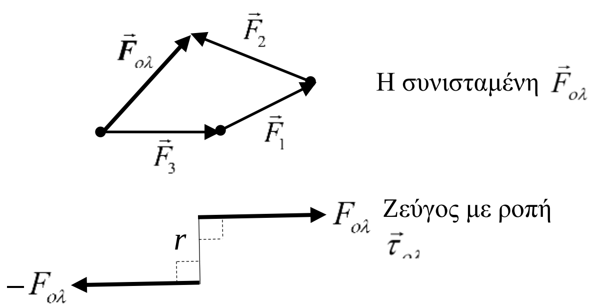
Ζεύγος δυνάμεων ασκούμε με το σταυρό για να ξεβιδώσουμε τα μπουλόνια του τροχού που θέλουμε να αλλάξουμε όταν πάθουμε λάστιχο.

Εύκολα αποδεικνύεται το εξής ***θεώρημα*** : Το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ που ασκούνται σε ένα άκαμπτο σώμα μπορεί πάντα να αντικατασταθεί από

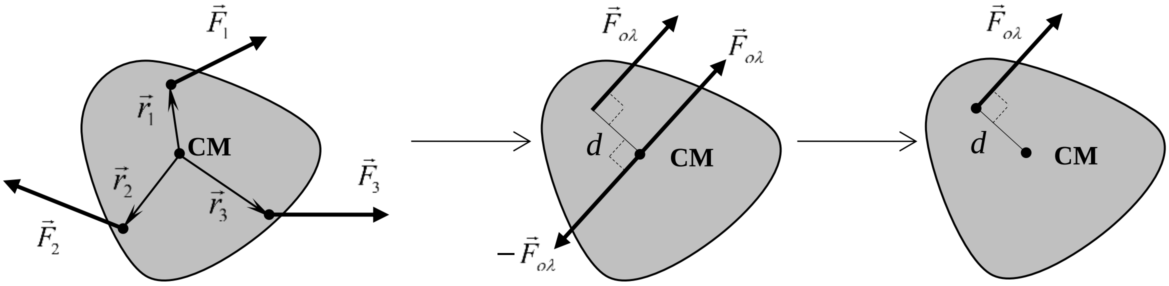
1) μία δύναμη, τη συνισταμένη $\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$, η οποία θα ασκείται σε ένα οποιοδήποτε σημείο P του σώματος καθορίσουμε εμείς
2) συν ένα ζεύγος δυνάμεων που έχει ροπή $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + ... + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$ όπου τα $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ είναι τα διανύσματα που συνδέουν το σημείο P με τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων.

Με βάση το παραπάνω μπορούμε πάντα να αντικαταστήσουμε όλες τις δυνάμεις με μία μόνο, τη συνισταμένη τους, που ασκείται σε συγκεκριμένο σημείο το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε. Π.χ. έστω οι τρεις δυνάμεις του σχήματος που ασκούνται στις συγκεκριμένες θέσεις σε σχέση με το κέντρο μάζας (CM).





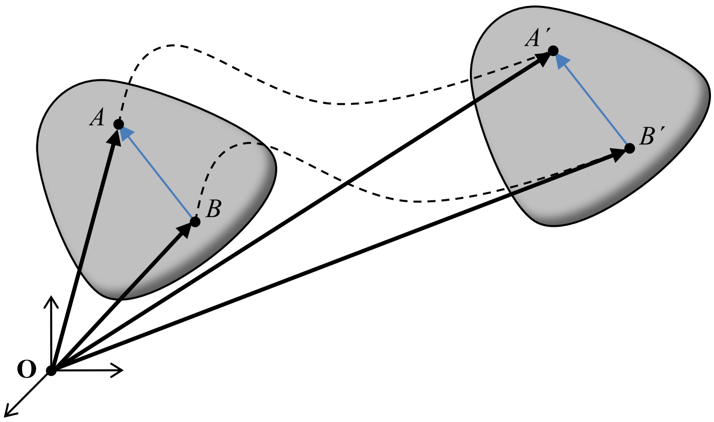
Γράφουμε την ολική ροπή $\vec{\tau}_{ολ} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = F_{ολ} d\ \hat{n}$, σαν να προέρχεται από ένα ζεύγος του οποίου τα μέλη είναι ίσα με την $F_{ολ}$ και άρα με μοχλοβραχίονα $d = \tau_{ολ} / F_{ολ}$. Το διάνυσμα $\hat{n}$ δείχνει κάθετα στη σελίδα προς τα μέσα (δεξιόστροφη ροπή). Βάζουμε τη συνισταμένη να ασκείται στο κέντρο μάζας (αφού κινείται σύμφωνα με αυτήν). Το ζεύγος όμως μπορούμε να το βάλουμε πάνω στο άκαμπτο σώμα όπως θέλουμε. Το τοποθετούμε ώστε η $-F_{o\lambda}$ να είναι στο CM και να εξουδετερώνει τη συνισταμένη. Έτσι τελικά :



Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων δεν είναι υποχρεωτικά μηδέν. Το CM αναγκαστικά δεν θα επιταχύνεται όμως το σώμα μπορεί να έχει γωνιακή επιτάχυνση γύρω από το CM λόγω των ροπών. Όλες οι δυνάμεις αντικαθίστανται με μία ροπή τη συνολική ροπή $\vec{\tau}_{o\lambda}$ ή αν θέλουμε ισοδύναμα με ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{\tau}_{o\lambda} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = Fd\ \hat{n}$, με τα F και d αυθαίρετα με το μόνο περιορισμό το γινόμενό τους να είναι ίσο με $Fd = |\vec{\tau}_{o\lambda}|$

Κινήσεις άκαμπτου σώματος

<u>Μεταφορική κίνηση</u> : Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος κινούνται σε παράλληλες τροχιές δηλαδή έχουν την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση έτσι ώστε κάθε ευθεία που ενώνει δύο σημεία του σώματος να μένει παράλληλη στην αρχική της θέση. Ο προσανατολισμός του σώματος δεν αλλάζει. Προκύπτει από μια δύναμη που ασκείται στο κέντρο μάζας



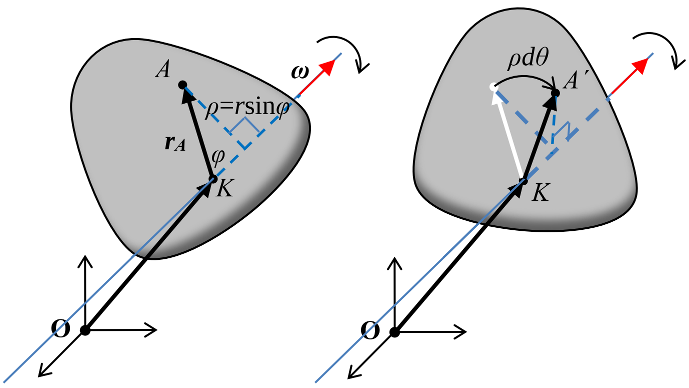
$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$, $\vec{r}_{B'} = \vec{r}_{A'} + \vec{r}_{A'B'}$

$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{A'B'}$: σταθερό κατά μέτρο (άκαμπτο σώμα) και προσανατολισμό (απαίτηση)

$\Delta\vec{r}_A = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \vec{d}$

Άρα $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_{CM} \Rightarrow \vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_{CM}$

<u>Στροφική κίνηση</u> : Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος εκτελούν κυκλικές τροχιές γύρω από άξονα που περνάει από ένα ακίνητο σημείο του σώματος. Στην στροφική κίνηση όλα τα σημεία του στερεού έχουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω και γωνιακή επιτάχυνση α οι οποίες βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής που περνάει από το σταθερό σημείο (αν ο άξονας παραμένει σταθερός έχουμε επίπεδη κίνηση για όλα τα σημεία του σώματος). Στην περιστροφή ο προσανατολισμός του σώματος αλλάζει. Προκύπτει από ένα ζεύγος δυνάμεων.



$\vec{r} \equiv \vec{r}_A$, $\vec{r}_{A'} = \vec{r} + d\vec{r}$

Τα μέτρο του $\vec{r}$ παραμένει σταθερό στις στροφές : $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_{A'}| = r$.

Η μεταβολή $d\vec{r}$ του $\vec{r}$ είναι κάθετη και στο $\vec{r}$ και στην $\vec{\omega}$ με τη φορά του τόξου $\rho d\theta$ του σχήματος και το μέτρο της είναι $|d\vec{r}| = \rho d\theta = r\sin\varphi \cdot d\theta = r\sin\varphi \cdot \omega dt$. Συμβολίζοντας την γωνία στροφής ως $d\vec{\theta} = \vec{\omega}dt$ παίρνουμε :

$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}dt \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε σταθερού μέτρου διάνυσμα $\vec{A}$ προσαρτημένο πάνω στο άκαμπτο σώμα που περιστρέφεται μαζί του. Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής του ως προς το αδρανειακό (ακίνητο) σύστημα Oxyz θα είναι λόγω της περιστροφής : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = \vec{\omega} \times \vec{A}$.

Σε ένα σύστημα Kx΄y΄z΄ προσαρτημένο πάνω στο στρεφόμενο σώμα η μεταβολή του $\vec{A}$ θα είναι μηδέν. Το μέτρο του δεν αλλάζει αφού είναι σταθερού μέτρου και ούτε ο προσανατολισμός του ως προς το Kx΄y΄z΄ επειδή το σύστημα συντεταγμένων περιστρέφεται μαζί του.

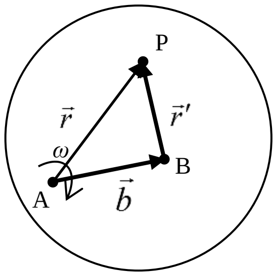
Άρα για $\vec{A}$ σταθερού μέτρου : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathrm{K}} = 0$

Αν το διάνυσμα $\vec{A}$ δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται στο περιστρεφόμενο σύστημα Kx΄y΄z΄ με κάποιο ρυθμό $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathrm{K}} \neq 0$, τότε η χρονική μεταβολή του ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Oxyz θα είναι το άθροισμα των δύο μεταβολών :

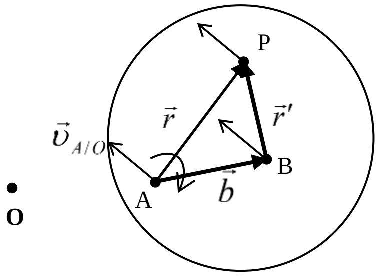
$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathrm{K}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \qquad (1)$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη γιατί όπως θα δούμε παρακάτω, συχνά μας βολεύει να βλέπουμε την κίνηση από ένα σύστημα αξόνων σταθερά προσαρτημένο πάνω στο σώμα, που έχει ως αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος και αποτελείται από τρεις ορθογώνιους άξονες στις κατευθύνσεις των κυρίων αξόνων του σώματος, ως προς τους οποίους ο πίνακας αδράνειας είναι διαγώνιος (για πίνακα αδράνειας και κύριους άξονες θα πούμε παρακάτω).

Άλλο ένα χρήσιμο πόρισμα είναι ότι αν ένα σώμα στρέφεται γύρω από ακίνητο σημείο του A με γωνιακή ταχύτητα ω τότε στρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω και από οποιοδήποτε άλλο σημείο του B.



Στροφική μόνο



Στροφική συν μεταφορική

Έστω ότι το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από το σημείο Α.
Η ταχύτητα του σημείου P (και κάθε σημείου του σώματος) ως προς το Α, γύρω από το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση είναι :

$$\vec{\upsilon}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Όμως $\vec{r} = \vec{b} + \vec{r}'$ οπότε :

$$\vec{\upsilon}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{b} + \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{b} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad (1)$$

Όμως από τον ορισμό της σχετικής ταχύτητας, η ταχύτητα του P ως προς το Α είναι ίση με την ταχύτητα του P ως προς το B συν τη σχετική ταχύτητα του B ως προς το A

$$\vec{\upsilon}_{P/A} = \vec{\upsilon}_{P/B} + \vec{\upsilon}_{B/A} = \vec{\upsilon}_{P/B} + \vec{\omega} \times \vec{b} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε

$$\vec{\upsilon}_{P/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

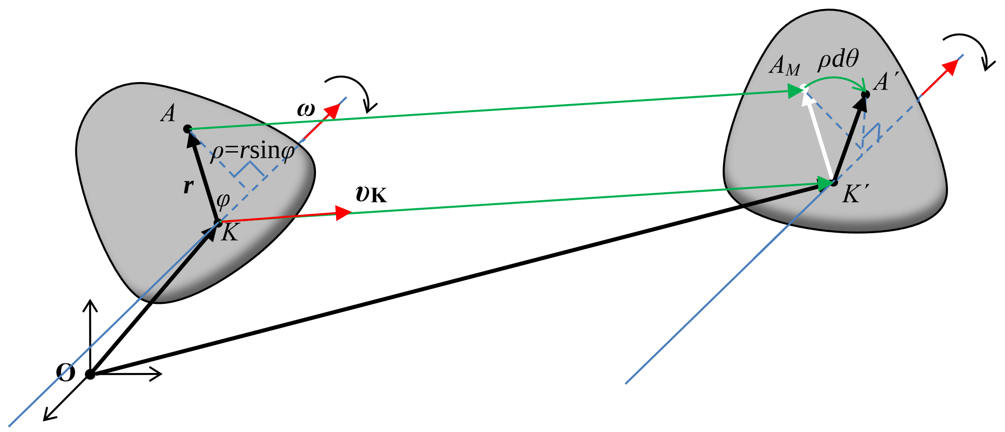
Δηλαδή το σημείο P εκτελεί περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα *ω* γύρω από το B.

Αν όλο το άκαμπτο σώμα έκανε και μεταφορική κίνηση, δηλαδή ο άξονας περιστροφής κινούνταν με ταχύτητα $\upsilon_{A/O}$ ως προς κάποιο σημείο αναφοράς δεν θα άλλαζε τίποτα στην παραπάνω απόδειξη :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\upsilon}_{P/O} &= \vec{\upsilon}_{P/A} + \vec{\upsilon}_{A/O} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\upsilon}_{A/O} = \vec{\omega} \times (\vec{b} + \vec{r}') + \vec{\upsilon}_{A/O} = \vec{\omega} \times \vec{b} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\upsilon}_{A/O} \\ \vec{\upsilon}_{P/O} &= \vec{\upsilon}_{P/B} + \vec{\upsilon}_{B/A} + \vec{\upsilon}_{A/O} = \vec{\upsilon}_{P/B} + \vec{\omega} \times \vec{b} + \vec{\upsilon}_{A/O} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{P/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες AP και BP στο ίδιο χρονικό διάστημα θα περιστραφούν κατά την ίδια γωνία.

<u>Σύνθετη κίνηση</u> : η γενική κίνηση ενός άκαμπτου σώματος μπορεί πάντα να αναλυθεί σε μια μεταφορά συν μια περιστροφή γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνάει από σημείο Κ του σώματος (ο οποίος άξονας μπορεί επίσης να αλλάζει προσανατολισμό). Προκύπτει από μια δύναμη συν ένα ζεύγος δυνάμεων. Αναφορικά με τις σύνθετες κινήσεις, θα αναφέρουμε μόνο τη σβούρα και θα ασχοληθούμε λεπτομερώς μόνο με επίπεδες κινήσεις (ο άξονας δεν αλλάζει προσανατολισμό) και ειδικότερα με την κύλιση



$\vec{r}_A \equiv \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KA}}$

$\vec{r}_{A'} \equiv \overrightarrow{\mathrm{OA}'} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KK}'} + \overrightarrow{\mathrm{K'A'}}$

Η μεταβολή του διανύσματος θέσης ενός τυχαίου σημείου του σώματος προκύπτει από τις επιμέρους μεταβολές της επαλληλίας των δύο κινήσεων:

$$d\vec{r} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KK}'} + \overrightarrow{\mathrm{K'A'}} - \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{KA}} = \overrightarrow{\mathrm{KK}'} + \left(\overrightarrow{\mathrm{K'A'}} - \overrightarrow{\mathrm{KA}}\right) = d\vec{r}_{\mathrm{KK}'} + \overrightarrow{\mathrm{A_M A}'} = d\vec{r}_{\mathrm{KK}'} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + d\vec{r}_{\sigma\tau\rho o\varphi}$$

$d\vec{r}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} = d\vec{r}_{\mathrm{KK}'}$ ίδια για όλα τα σημεία του στερεού

$$d\vec{r}_{\sigma\tau\rho o\varphi} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} dt$$

Έτσι για την ταχύτητα ενός σημείου του άκαμπτου σώματος θα ισχύει

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + d\vec{r}_{\sigma\tau\rho o\varphi} = d\vec{r}_{\mathrm{KK}'} + \vec{\omega} \times \vec{r} dt = \vec{\upsilon}_{\mathrm{K}} dt + \vec{\omega} \times \vec{r} dt \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{K}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{K}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Αν αλλάξουμε σημείο Κ, η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}_{\mathrm{K}}$ και το $\vec{r}$ θα αλλάξουν όμως η ω δεν θα αλλάξει όπως δείξαμε παραπάνω. Θα επιλέγουμε ως Κ το κέντρο μάζας του σώματος CM και άρα για την ταχύτητά του τυχαίου σημείου θα γράφουμε:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Όπου ως συνήθως $\vec{r}'$ είναι η σχετική θέση του σημείου ως προς το κέντρο μάζας.

Περιστροφική κίνηση

Κινηματική περιστροφικής κίνησης, σύνοψη

Ως περιστροφή εννοούμε την κυκλική περιφορά συμπαγούς σώματος γύρω από άξονα που μπορεί να περνάει ή να μην περνάει μέσα από το σώμα

Η κινηματική της περιστροφής είναι αυτή της κυκλικής κίνησης. Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από άξονα που περνάει από σταθερό σημείο του στερεού Ο, τότε για κάθε σημείο του στερεού που απέχει απόσταση ρ από τον άξονα περιστροφής θα ισχύει : $\upsilon \equiv \dfrac{ds}{dt}$, $\omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$, $\alpha \equiv \dfrac{d\omega}{dt}$

$$\theta = \frac{s}{\rho} \Rightarrow s = \theta\rho \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \qquad \boxed{\upsilon = \omega\rho}$$

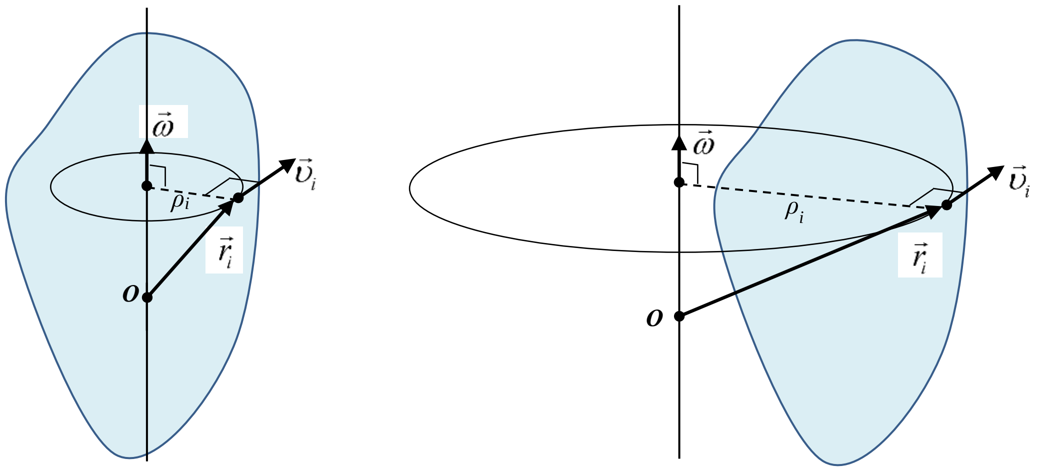
Διανυσματικά : $\boxed{\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$

Επιτρόχια επιτάχυνση: $a_t = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\rho \Rightarrow \boxed{a_t = \alpha\rho}$

Κεντρομόλος επιτάχυνση: $\boxed{a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = \omega^2 \rho}$

Μέτρο επιτάχυνσης : $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Συνήθως επιλέγουμε για άξονα z τον άξονα περιστροφής δηλ. $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$.



Κινητική ενέργεια περιστροφής **(rotational)**
Η κινητική ενέργεια περιστροφής άκαμπτου σώματος θα είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των σημείων του στερεού :

$$K_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \Rightarrow \boxed{K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για στερεό που περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνάει από σταθερό σημείο του αλλά και για άξονα έξω από το συμπαγές σώμα. Αυτό που αλλάζει μόνο είναι η τιμή του μεγέθους που εμφανίζεται στην παρένθεση $\left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right)$.

Ροπή αδρανείας
Το μέγεθος αυτό ονομάζεται ροπή αδρανείας $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$. Η ροπή αδρανείας I εξαρτάται από:

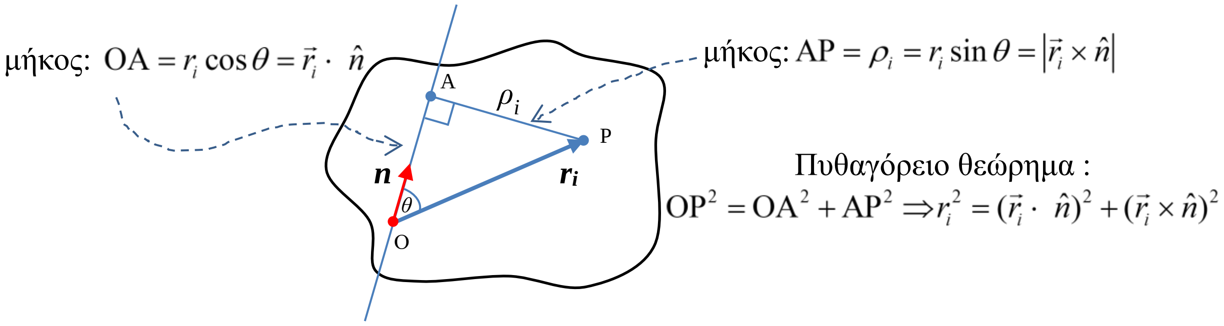
1) τη θέση του άξονα z
2) το σχήμα του σώματος και
3) από την ομοιογένεια κατανομής της μάζας του.

Για συνεχή κατανομή μάζας, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα $I_z = \int_M \rho^2 dm$ ενώ για ομοιόμορφη κατανομή μάζας είναι ίση με $I_z = d\int_V \rho^2 dV$, όπου με d συμβολίσαμε την πυκνότητα (density)

Από τον ορισμό της, η ροπή ενός συμπαγούς σώματος είναι το άθροισμα των ροπών $m_i \rho_i^2$ των υλικών σημείων του σώματος, βλέπουμε ότι η ροπή αδρανείας ικανοποιεί την αθροιστική ιδιότητα. Έτσι η ροπή αδράνειας ενός στερεού που αποτελείται από δύο στερεά Α και Β θα είναι το άθροισμα των δύο ροπών αδρανείας : $I = I_A + I_B$

Από το παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι η γενική μορφή της ροπής αδράνειας γύρω από άξονα που είναι στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$, είναι :

$$I_n = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \hat{n}) = \sum_i m_i (r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2)$$

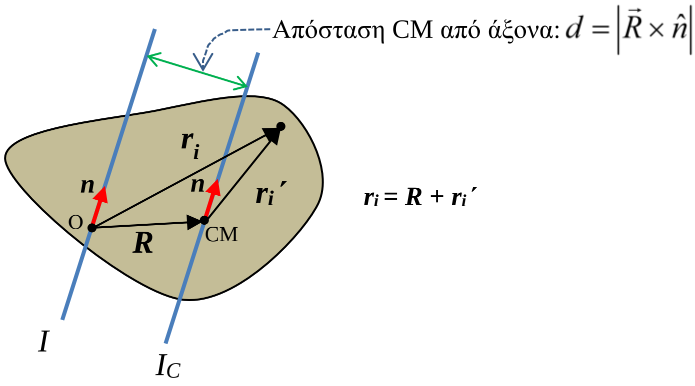


Επίσης για τον υπολογισμό ροπών αδρανείας ισχύουν τα παρακάτω χρήσιμα θεωρήματα :

<u>Θεώρημα παράλληλων αξόνων</u>

Αν I_C είναι η ροπή αδρανείας στερεού μάζας *M,* ως προς έναν άξονα που περνάει από το **κέντρο μάζας** του στερεού και *I* η ροπή αδρανείας ως προς έναν άλλο άξονα **παράλληλο** στον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας και σε απόσταση *d* (distance) από αυτόν τότε ισχύει (Steiner):

$$I = I_C + Md^2$$



$$I = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n})^2 = \sum_i m_i \left[\left(\vec{R} + \vec{r}_i' \right) \times \hat{n} \right]^2 = \sum_i m_i \left[\vec{R} \times \hat{n} + \vec{r}_i' \times \hat{n} \right]^2 =$$

$$= \sum_i m_i \left[\vec{R} \times \hat{n} \right]^2 + \sum_i m_i \left[\vec{r}_i' \times \hat{n} \right]^2 + 2 \sum_i m_i \left(\vec{R} \times \hat{n} \right) \cdot \left(\vec{r}_i' \times \hat{n} \right) =$$

$$= \left[\vec{R} \times \hat{n} \right]^2 \sum_i m_i + I_C - 2 \left(\vec{R} \times \hat{n} \right) \cdot \left(\hat{n} \times \sum_i m_i \vec{r}_i' \right) =$$

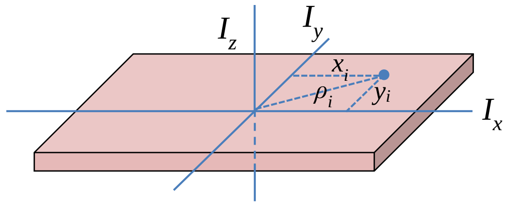
$$= I_C + Md^2 + 0$$

επειδή το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με μηδέν $\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$ από τον ορισμό του κέντρου μάζας.

Προσοχή! Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων ισχύει μόνο αν ο ένας από τους άξονες περνάει από το CM και όχι για τυχαίους παράλληλους άξονες.

<u>Θεώρημα κάθετων αξόνων (τύπος λεπτών πλακών)</u>

Για μια επίπεδη κατανομή μάζας π.χ. στο επίπεδο *x-y* και τις ροπές αδρανείας I_x, I_y και I_z γύρω από τους ορθογώνιους άξονες *x,y* και *z* αντίστοιχα ισχύει : $I_z = I_x + I_y$



Προφανώς: $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x$

<u>Διαστατική ανάλυση</u>. Οι μονάδες της ροπής αδράνειας είναι $[I] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$. Άρα η ροπή αδράνειας ενός συμπαγούς σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του θα μπορεί να γραφτεί πάντα ως $I = \kappa M L^2$, όπου M η συνολική του μάζα, L κάποιο χαρακτηριστικό μήκος του σώματος (ακτίνα, διαγώνιος, κλπ.) και κ αδιάστατος αριθμός που εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος, δηλαδή το σχήμα του και από τον τρόπο κατανομής της μάζας στον όγκο του (ομογενώς ή μη).

Συνολική κινητική ενέργεια μεταφοράς συν περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας

Στην περίπτωση σύνθετης κίνησης όπου η περιστροφή γίνεται γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας, το οποίο μετατοπίζεται με ταχύτητα $\vec{V}$, τότε από τους τύπους του προηγούμενου κεφαλαίου για την κινητική ενέργεια συστήματος σωματιδίων έχουμε :

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i'^2 = K_{CM} + K'$$

Η κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας είναι περιστροφική, οπότε έχουμε :

$$K' \equiv K_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i'^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i'^{\,2} \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i'^{\,2} = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Έτσι η κινητική ενέργεια γράφεται

$$K = K_T + K_R \Rightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Η μεταφορική (translational) κινητική ενέργεια K_T ταυτίζεται με την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας $K_T = K_{CM}$ αφού είναι η κινητική ενέργεια λόγω της κοινής ταχύτητας $\vec{V}$ όλων των σημείων του στερεού. Η κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας είναι η περιστροφική (rotational) κινητική ενέργεια $K' = K_R$. Μία από τις περιπτώσεις τέτοιου είδους κίνησης είναι η κύλιση

Αν επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο του σώματος διαφορετικό από το CM τότε όπως είδαμε το ω δεν αλλάζει αλλά αλλάζει η ταχύτητα του σημείου και η ροπή αδράνειας πρέπει να ληφθεί ως προς το νέο σημείο

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Στροφορμή

Η στροφορμή του στερεού υπολογίζεται κατά τα γνωστά ως άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i)$. Γενικά η στροφορμή του στερεού δεν είναι παράλληλη με τον άξονα περιστροφής του, δηλ. $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$. Εκτός αν αυτός ο άξονας είναι ειδικός οπότε λέγεται κύριος άξονας αδρανείας. Τέτοιοι π.χ. είναι οι άξονες συμμετρίας διαφόρων στερεών όπως ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων, σφαιρών, κυλίνδρων, κλπ.

Γενικά:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right]=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right]=$$

$$=\vec{\omega}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)(x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z})$$

$$L_x=\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)x_i=\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2+z_i^2)-\omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i-\omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$L_y=\omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)y_i=-\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i+\omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+z_i^2)-\omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$L_z=\omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)z_i=-\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i-\omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i+\omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)$$

Οι σχέσεις αυτές δηλώνουν πολλαπλασιασμό πινάκων: $\vec{L}=\mathrm{I}\vec{\omega}\Rightarrow\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$

Ο πίνακας : $$\mathrm{I}=\begin{vmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{vmatrix}$$

ονομάζεται πίνακας αδράνειας ή τανυστής αδράνειας και βλέπουμε ότι είναι συμμετρικός. Τα διαγώνια στοιχεία του ονομάζονται ροπές αδράνειας και τα μη διαγώνια γινόμενα αδράνειας

$$I_{xx}=\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2+z_i^2),\qquad I_{xy}=-\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i,\qquad I_{xz}=-\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$I_{yx}=I_{xy},\qquad I_{yy}=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+z_i^2),\qquad I_{yz}=-\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$I_{zx}=I_{xz},\qquad I_{zy}=I_{yz},\qquad I_{zz}=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)$$

Για συνεχείς κατανομές μάζας τα παραπάνω αθροίσματα μετατρέπονται σε ολοκληρώματα.
$I_{xx}=\int(y^2+z^2)dm=\int(y^2+z^2)\rho dV$, $I_{xy}=\int xydm=\int xy\rho dV$, κλπ.

Σε κάθε περίπτωση όμως, φαίνεται εύκολα ότι **η προβολή της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας** με συντελεστή αναλογίας τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα. Π.χ. εφόσον θεωρούμε ως άξονα περιστροφής τον άξονα z θα ισχύει :

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega I_{xz}\\\omega I_{yz}\\\omega I_{zz}\end{pmatrix}\Rightarrow\qquad\boxed{L_z=I_z\omega}$$

Οπότε και η περιστροφική κινητική ενέργεια θα γράφεται

$$\boxed{K_R=\frac{1}{2}I_z\omega^2=\frac{1}{2}L_z\omega=\frac{L_z^2}{2I_z}}$$

Επειδή ο πίνακας αδράνειας ή τανυστής αδράνειας είναι συμμετρικός μπορεί να διαγωνιοποιηθεί. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε άκαμπτο σώμα υπάρχει ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το CM ως προς τους άξονες του οποίου ο πίνακας αδράνειας είναι διαγώνιος. Οι τρεις αυτοί άξονες ονομάζονται κύριοι άξονες αδρανείας και τα μοναδιαία διανύσματά τους συμβολίζονται $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ κατά αύξουσα σειρά ροπών αδράνειας, δηλ. : $I_1 \le I_2 \le I_3$

Αν η περιστροφή γίνεται γύρω από κάποιον από αυτούς τους τρεις άξονες, έστω τον $\hat{e}_3$:

$$\vec{\omega} = 0\cdot\ \hat{e}_1 + 0\cdot\ \hat{e}_2 + \omega_3\cdot\ \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

τότε η στροφορμή είναι παράλληλη με τη γωνιακή ταχύτητα

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 I_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \omega_3 I_3 \hat{e}_3 \Rightarrow \vec{L} = I_3 \vec{\omega}$$

Γενική μορφή της στροφικής Κινητικής ενέργειας

Παραπάνω βρήκαμε τη μορφή της κινητικής ενέργειας στρεφόμενου στερεού γύρω από άξονα, επιλέγοντας ως άξονα *z* τη διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad K_R = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$ ο άξονας περνάει από το κέντρο μάζας

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(I_C + Md^2)\omega^2$$ ο άξονας απέχει απόσταση *d* από το κέντρο μάζας

Έχοντας τώρα στη διάθεσή μας τον τανυστή αδρανείας Ι, ας βρούμε τη γενική μορφή της στροφικής κινητικής ενέργειας γύρω από σταθερό σημείο του σώματος χωρίς να θεωρήσουμε τη γωνιακή ταχύτητα πάνω στον άξονα *z* αλλά σε τυχαία διεύθυνση $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$. Η ταχύτητα κάθε υλικού σημείου *i* του σώματος είναι ίση με $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Η στροφική κινητική ενέργεια όλου του συμπαγούς σώματος θα είναι

$$K_R = \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i\cdot\ \vec{\upsilon}_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i\cdot\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Στο βαθμωτό τριπλό διανυσματικό γινόμενο μπορούμε να μεταθέσουμε κυκλικά τα διανύσματα ή να αλλάξουμε τη σειρά των πολλαπλασιασμών χωρίς να αλλάξουμε τη θέση των διανυσμάτων. Η τιμή του γινομένου δεν αλλάζει :

$$\vec{a}\cdot\ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\cdot\ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\cdot\ (\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a}\cdot\ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\ \vec{c}$$

$$K_R = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i\cdot\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega}\cdot\ (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2}\cdot\ \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i$$

Όμως το άθροισμα $\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i$ δεν είναι παρά η ολική στροφορμή του σώματος γύρω από το σταθερό σημείο περιστροφής η οποία είδαμε ότι γράφεται $\vec{L} = \mathrm{I}\vec{\omega}$ με Ι τον πίνακα αδρανείας. Άρα

$$K_R = \frac{\vec{\omega}}{2}\cdot\ \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\ \vec{L} \Rightarrow K_R = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\ \mathrm{I}\vec{\omega}$$

Όταν η *ω* είναι στον άξονα *z* παίρνουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα

$$K_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\end{pmatrix}\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{xz}\omega\\I_{yz}\omega\\I_{zz}\omega\end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2$$

Αν επιλέξουμε ως σταθερό σημείο περιστροφής το CM και ως σύστημα αξόνων τους κύριους άξονες αδρανείας του συμπαγούς σώματος, τότε η στροφική κινητική ενέργεια απλοποιείται στην έκφραση:

$$K_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\omega_1\\I_2\omega_2\\I_3\omega_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης – Διατήρηση στροφορμής

Περιστροφή γύρω από άξονα z με σταθερό προσανατολισμό (αμιγής στροφική κίνηση, κύλιση)
Από τη γενική σχέση μεταβολής της στροφορμής του προηγούμενου κεφαλαίου παίρνουμε:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \tau_z = \frac{d(I_z\omega)}{dt} \Rightarrow \tau_z = I_z\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{\tau_z = I_z\alpha}$$

όπου $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{o\lambda}^{\,\varepsilon\xi\omega\tau}$ είναι η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων (εφόσον θεωρούμε τις εσωτερικές δυνάμεις είτε κεντρικές είτε συνολικής ροπής μηδέν) και η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει όταν η I_z παραμένει σταθερή δηλ. ο άξονας περιστροφής z είναι σταθερός όπως και το σχήμα και η κατανομή μάζας του σώματος.
Η σχέση αυτή είναι η βασική σχέση που περιγράφει τη δυναμική του άκαμπτου σώματος και είναι το ανάλογο της $F_{o\lambda} = ma$ για υλικό σημείο.

Διατήρηση στροφορμής
Βλέπουμε ότι αν το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν τότε η προβολή της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται:

$$\tau_z = 0 \Rightarrow I_z\omega = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Αυτό μπορεί να συμβαίνει :

- είτε επειδή οι ροπές σε ένα σύστημα σωμάτων αθροίζουν μηδέν π.χ. δράση-αντίδραση του ενός σώματος στο άλλο στο κοινό σημείο επαφής τους
- είτε οι ροπές είναι μηδέν γιατί η διεύθυνση των δυνάμεων περνάει από τον άξονα π.χ. δύναμη αντίδρασης του άξονα στο άκαμπτο σώμα

Όταν δυνάμεις με συνολική ροπή μηδέν δράσουν σε ένα τυχαίο μη άκαμπτο σώμα και αλλάξουν το σχήμα ή την κατανομή της μάζας του δηλ. τη ροπή αδρανείας του, για να παραμείνει η στροφορμή σταθερή θα πρέπει να αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα την οποία θα υπολογίσουμε από μια σχέση παρόμοια με τη διατήρηση της ορμής στις κρούσεις :

$$I_{\pi\rho\iota\nu}\omega_{\pi\rho\iota\nu} = I_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\omega_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \omega_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{I_{\pi\rho\iota\nu}}{I_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}\omega_{\pi\rho\iota\nu}$$

Περιστροφή γύρω από άξονα με μη σταθερό προσανατολισμό
Στη γενικότερη περίπτωση που ένα συμπαγές σώμα μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα στον τρισδιάστατο χώρο χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τους κύριους άξονες αδρανείας και οι νόμοι του Νεύτωνα ονομάζονται **εξισώσεις Euler**
Εδώ παρουσιάζονται κάποια πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα όπως η **μετάπτωση μιας σβούρας** ή το **θεώρημα του ενδιάμεσου άξονα**.

Θεώρημα Μεταβολής κινητικής ενέργειας – Έργο – Ισχύς

Όπως αποδείχθηκε το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας για ένα υλικό σημείο, εύκολα αποδεικνύεται και για ένα σύστημα σωματιδίων και άρα και για ένα συμπαγές σώμα (απλά προσθέτουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις για το κάθε υλικό σημείο του συστήματος). Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων πάνω σε ένα συμπαγές σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συμπαγούς σώματος :

$$W_{F_{o\lambda}}(1\to 2)=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_{i2}^2\right)-\sum\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_{i1}^2\right)$$

Όμως η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων γράφεται ως η κινητική ενέργεια του CM συν την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας η οποία για συμπαγές σώμα είναι στροφική

$$K=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2\right)=\frac{1}{2}MV^2+\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i'^2\right)=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Οπότε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για ένα συμπαγές σώμα γράφεται :

$$W_{F_{o\lambda}}(1\to 2)=\frac{1}{2}MV_2^2+\frac{1}{2}I_C\omega_2^2-\frac{1}{2}MV_1^2-\frac{1}{2}I_C\omega_1^2=\Delta K_{CM}+\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi}$$

όπου V η ταχύτητα του κέντρου μάζας, M η μάζα του συμπαγούς σώματος, I_C η ροπή αδράνειας γύρω από το CM και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής όλων των σημείων του συμπαγούς σώματος γύρω από τον στιγμιαίο άξονα που περνάει από το CM .

Η συνισταμένη δεν ασκείται υποχρεωτικά στο CM του σώματος και όπως έχουμε δει, ένα σύστημα δυνάμεων αντικαθίσταται από τη συνισταμένη να δρα στο CM συν ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή $\tau_{o\lambda}=F_{o\lambda}d$ σε κατάλληλη απόσταση d από το CM. Αντίστοιχα και το έργο της θα αναλύεται σε

$$W_{F_{o\lambda}}(1\to 2)=W_{F_{o\lambda}(CM)}(1\to 2)+W_{\tau_{o\lambda}}(1\to 2)$$

Έτσι ο πρώτος όρος ΔK_{CM} στο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το έργο της συνισταμένης δρώσας στο CM και ο δεύτερος $\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi}$ από το έργο της ροπής $\tau_{o\lambda}$ του ζεύγους δυνάμεων.

Έχουμε δείξει ότι το στοιχειώδες έργο μιας ροπής για στροφή $d\vec{\theta}=d\theta\hat{z}$ γύρω από άξονα z, είναι ίσο με $dW_\tau=\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}=\tau_z d\theta$ (σε αναλογία με το έργο δύναμης για στοιχειώδη μετατόπιση dx : $dW_F=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_x dx$). Πράγματι τότε, το έργο ροπής ζεύγους για περιστροφή του συμπαγούς σώματος από γωνία θ_1 έως θ_2 θα είναι:

$$W_{\tau_{o\lambda}}(1\to 2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\vec{\tau}_{o\lambda}\cdot d\vec{\theta}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau_z d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}I\frac{d\omega}{dt}d\theta=I\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{dt}d\omega=I\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega d\omega\Rightarrow$$

$$W_{\tau_{o\lambda}}(1\to 2)=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

όπου I η ροπή αδρανείας γύρω από τον άξονα z.

Μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι στο συμπαγές σώμα, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει ξεχωριστά για την μεταφορική του CM και για την στροφική κίνηση γύρω από το CM

$$W_{F_{o\lambda}(CM)}(1\to 2)=\frac{1}{2}MV_2^2-\frac{1}{2}MV_1^2$$

$$W_{\tau_{o\lambda}}(1\to 2)=\frac{1}{2}I_C\omega_2^2-\frac{1}{2}I_C\omega_1^2$$

Επειδή η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r}$ ενός υλικού σημείου του συμπαγούς σώματος που κάνει σύνθετη κίνηση είναι το άθροισμα της μεταφορικής και στροφικής του μετατόπισης $d\vec{r} = d\vec{r}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + d\vec{r}_{\sigma\tau\rho o\varphi}$, το έργο κάθε μεμονωμένης δύναμης που δρα σε ένα συμπαγές σώμα στο συγκεκριμένο σημείο θα είναι:

$$dW_F = \vec{F}\cdot\, d\vec{r} = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho} + \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{\sigma\tau\rho o\varphi} = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{CM} + \vec{F}\cdot\,(d\vec{\theta}\times\vec{r})$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα από το CM προς το σημείο εφαρμογής της F. Έτσι έχουμε :

$$dW_F = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{CM} + \vec{F}\cdot\,(d\vec{\theta}\times\vec{r}) = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{CM} + d\vec{\theta}\cdot\,\vec{r}\times\vec{F} = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{CM} + \vec{\tau}_F \cdot d\vec{\theta} \Rightarrow$$

$$dW_F = \vec{F}\cdot\, d\vec{r}_{CM} + \vec{\tau}_F \cdot d\vec{\theta} = F_{\|}ds_{CM} + \tau_z d\theta$$

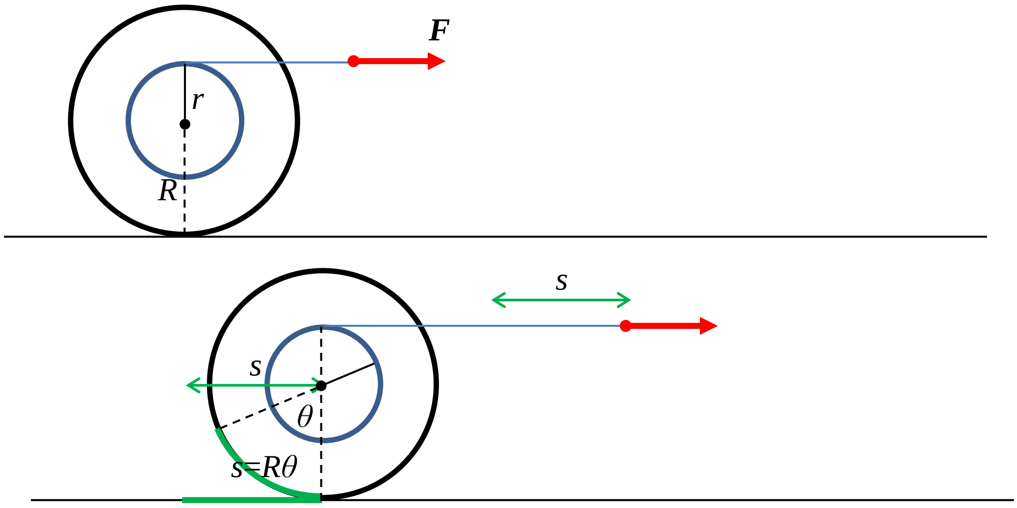
όπου $F_{\|}$ η συνιστώσα της F παράλληλα με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας ds_{CM} και τ_z η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα z που περνάει από το κέντρο μάζας. Το έργο της F θα είναι:

$$W_F = \int_0^s F_{\|}ds_{CM} + \int_0^\theta \tau_z d\theta$$

Η ισχύς της δύναμης F θα είναι:

$$P = \frac{dW_F}{dt} = \vec{F}\cdot\,\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} + \vec{\tau}\cdot\,\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{F}\cdot\,\vec{V}_{CM} + \vec{\tau}\cdot\,\vec{\omega} = F_{\|}V_{CM} + \tau_z\omega$$

Π.χ. Κύλινδρος ακτίνας R κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης που ασκείται από νήμα, που ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, σε απόσταση $r=R/2$ από το κέντρο μάζας του. Όταν ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση ισχύει $s = R\theta$.

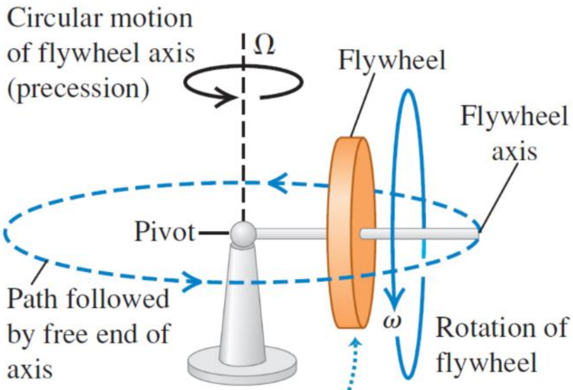


Το συνολικό έργο της F όταν το CM του κυλίνδρου μετατοπιστεί κατά s είναι:

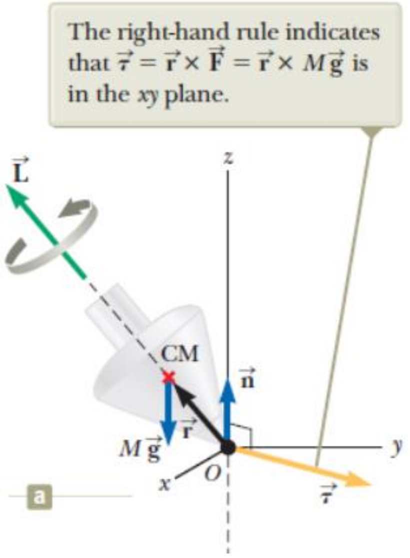
$$W_F = \int_0^s Fds + \int_0^\theta \tau d\theta = F\int_0^s ds + Fr\int_0^\theta d\theta = Fs + F\frac{R}{2}\theta = \frac{3}{2}Fs$$

Μετάπτωση γυροσκοπίου (σβούρα ή στρόβος)

Αν χάσετε την ισορροπία σας κάνοντας ποδήλατο στρίβετε λίγο το τιμόνι προς την αντίθετη πλευρά και την ξαναβρίσκετε. Τις στροφές τις παίρνεται πιο εύκολα αν πλαγιάσετε λίγο το ποδήλατο. Ειδικά για μηχανές που έχουν πολύ μεγαλύτερη μάζα και πάνε με πολύ μεγαλύτερες ταχύτητες για να στρίψετε πρέπει οπωσδήποτε να πλαγιάσετε τη μηχανή. Μια σβούρα που περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της μπορεί να περιφέρεται στο πάτωμα σε πλάγια θέση.

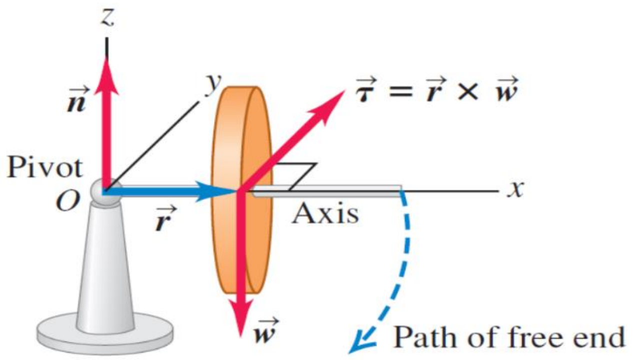


When the flywheel and its axis are stationary, they will fall to the table surface. When the flywheel spins, it and its axis "float" in the air



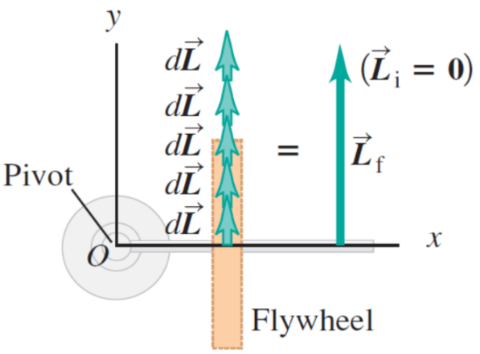
Η σβούρα γυρίζει σε πλάγια θέση και το γυροσκόπιο με τον άξονα του εντελώς οριζόντιος. Όμως και τα δύο δεν πέφτουν. Αν τα παραπάνω σώματα δεν περιστρέφονταν, τότε αν τα πλαγιάζατε και τα αφήνατε θα έπεφταν.

(a) Nonrotating flywheel falls



When the flywheel is not rotating, its weight creates a torque around the pivot, causing it to fall along a circular path until its axis rests on the table surface.

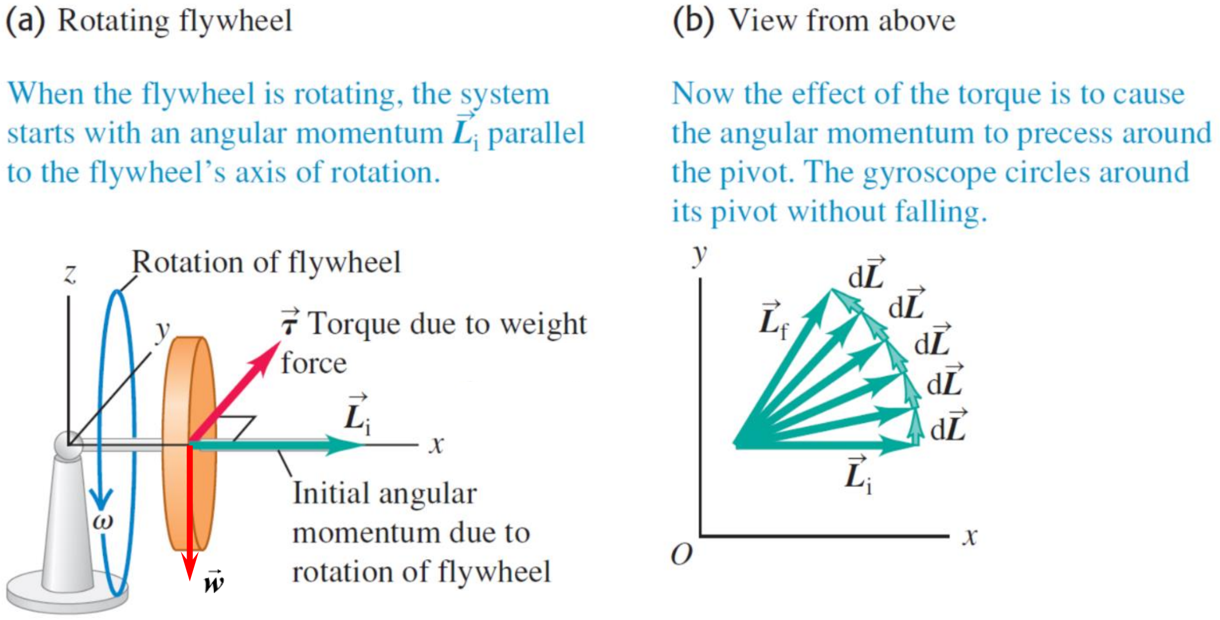
(b) View from above as flywheel falls

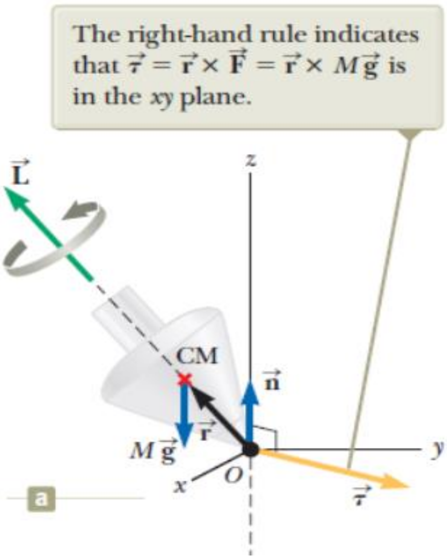


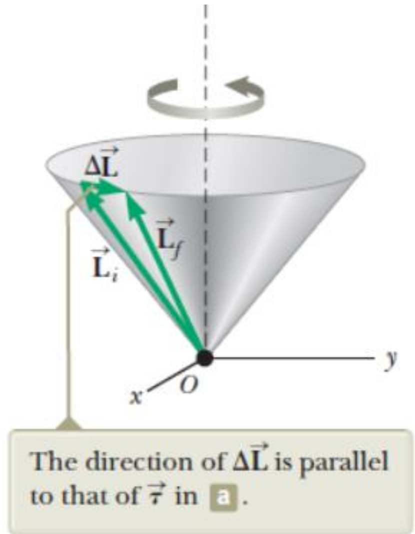
In falling, the flywheel rotates about the pivot and thus acquires an angular momentum $\vec{L}$. The *direction* of $\vec{L}$ stays constant.

Η εξήγηση είναι ή ίδια με την κυκλική κίνηση δορυφόρου ο οποίος δεν πέφτει στη Γη αλλά περιφέρεται γύρω της. Αν ο δορυφόρος δεν είχε αρχική ταχύτητα (ορμή) θα έπεφτε κατευθείαν στη Γη. Όταν όμως έχει ταχύτητα κάθετη στην ευθεία που τον ενώνει με τη Γη επειδή η δύναμη της βαρύτητας είναι κεντρική η επιτάχυνση που θα προκαλεί θα είναι κάθετη στην ταχύτητα. Δηλαδή η μεταβολή της ορμής $d\vec{p} = \vec{F}dt$ είναι κάθετη στο διάνυσμα της υπάρχουσας ορμής $d\vec{p} \perp \vec{p}$. Όταν η μεταβολή ενός διανύσματος είναι κάθετη σε αυτό, το μέτρο του διανύσματος δεν αλλάζει, απλά το διάνυσμα γυρίζει γύρω γύρω.

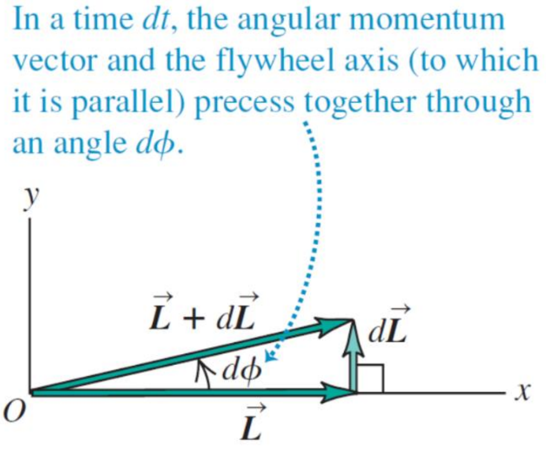
Το διάνυσμα που περιγράφει την κίνηση του γυροσκοπίου είναι η στροφορμή του. Όταν το γυροσκόπιο περιστρέφεται γύρω από τον κύριο άξονά του έχει στροφορμή $\vec{L} \parallel \vec{r}$. Η ροπή που προκαλεί το βάρος του $\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$ όταν βρίσκεται σε πλάγια ή οριζόντια θέση είναι κάθετη στη στροφορμή του $d\vec{L} = \vec{\tau}dt \perp \vec{L}$ άρα δεν μπορεί να αλλάξει το μέτρο της αλλά μόνο τη διεύθυνσή της. Το σώμα δεν πέφτει αλλά η ροπή του βάρους του γυρίζει γύρω-γύρω τον άξονα περιστροφής του (πάνω στον οποίο βρίσκεται η στροφορμή). Αυτή η πρόσθετη περιστροφή του άξονα λέγεται μετάπτωση (precession).







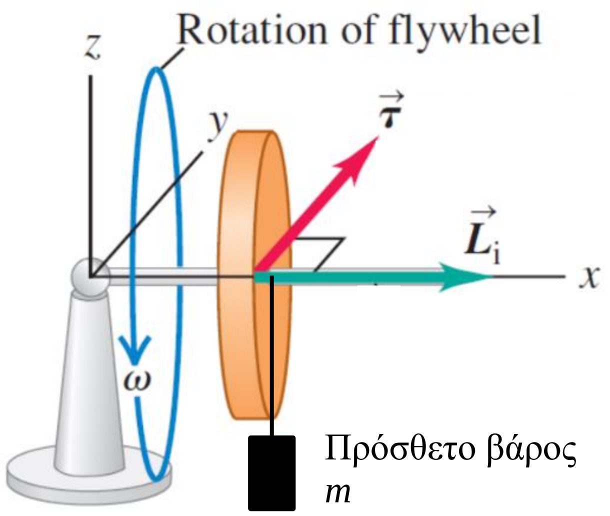
Η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης *Ω* μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Σε χρόνο *dt* ο άξονας του γυροσκοπίου περιστρέφεται κατά γωνία *dφ*. Τόση γωνία περιστρέφεται και το διάνυσμα της στροφορμής που είναι πάνω στον άξονα. Από το τρίγωνο βλέπουμε ότι : χορδή=τόξο=ακτίνα × γωνία $\Rightarrow \left|d\vec{L}\right| = \left|\vec{L}\right| d\varphi$. Όμως από το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης $\left|d\vec{L}\right| = \left|\vec{\tau}\right| dt$ ενώ η ροπή που προκαλεί το βάρος είναι $\left|\vec{\tau}\right| = Mg \sin\theta$



Άρα έχουμε : $\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left|d\vec{L}\right| / \left|\vec{L}\right|}{dt} = \frac{\tau}{L} \Rightarrow \quad \Omega = \frac{Mg\sin\theta}{I\omega}$

Όσο πιο γρήγορα περιστρέφεται το γυροσκόπιο (με ω) τόσο πιο αργά θα περιστρέφεται (μετάπτωση) ο άξονας του (με Ω).

Τι θα γίνει άμα κρεμάσουμε ένα πρόσθετο βάρος μάζας m στον άξονα του οριζοντίως περιστρεφόμενου γυροσκοπίου?



Η ροπή θα μεγαλώσει και το γυροσκόπιο όχι μόνο δεν θα πέσει αλλά θα γυρίζει πιο γρήγορα:

$$\Omega = \frac{(M+m)g\sin\theta}{I\omega}$$

Δείτε στο You Tube τα βίντεο: 8.01x - Lect 24 - Rolling Motion, Gyroscopes, VERY NON-INTUITIVE (Lectures by Walter Lewin) κοντά στα min 35, min 45, Anti-Gravity Wheel? (Veritasium), Gyroscopic Precession (Veritasium), Spinning Top, Epic MotoGP Last Lap | 2020 StyrianGP, 10 Things MotoGP Racers do to go FASTER, MotoGP™ Lean Angle Experience και άλλα πολλά παρόμοια.

Θεώρημα του ενδιάμεσου άξονα

Οι εξισώσεις Euler

Σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Αναλύουμε και τη γωνιακή ταχύτητα και τη στροφορμή του σώματος σε συνιστώσες ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας (CM:$\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$) με αρχή τοι κέντρο μάζας του:

$$\vec{\omega}=\omega_1\hat{e}_1+\omega_2\hat{e}_2+\omega_3\hat{e}_3=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}, \qquad \vec{L}=L_1\hat{e}_1+L_2\hat{e}_2+L_3\hat{e}_3=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{L}=\mathrm{I}\vec{\omega}\Rightarrow\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\ 0&I_2&0\\ 0&0&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1\omega_1\\ I_2\omega_2\\ I_3\omega_3\end{pmatrix}$$

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης στο αδρανειακό ακίνητο σύστημα του εργαστηρίου ($\mathrm{O}:\hat{x},\hat{y},\hat{z}$) είναι:

$$\frac{d\vec{L}_{(O)}}{dt}=\vec{\tau}_{(O)}\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}=\vec{\tau}_{(O)}\Rightarrow\mathrm{I}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\vec{\omega}\times\left(\mathrm{I}\vec{\omega}\right)=\vec{\tau}_{(O)}$$

όπου εκφράσαμε το 1ο μέλος της εξίσωσης στο σύστημα των κύριων αξόνων αδρανείας (δες σελ. 6 εξ. (1)). Το πλεονέκτημα είναι ότι σε αυτό το σύστημα οι άξονες και οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας παραμένουν σταθερές κατά την κίνηση του σώματος και άρα βγαίνουν έξω από την παράγωγο. **Η παραπάνω διανυσματική σχέση ονομάζεται εξισώσεις Euler.** Η σχέση αυτή δεν είναι και πολύ χρήσιμη επειδή το αριστερό σκέλος είναι εκφρασμένο με τα διανύσματα $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ και το δεξί σκέλος είναι εκφρασμένο με τα διανύσματα $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$. Για να εξισώσουμε συνιστώσες πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό (στροφή) των $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ στα $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$. Όταν όμως η συνολική ροπή είναι μηδέν (πετάμε ένα περιστρεφόμενο σώμα στον αέρα ή στο διάστημα) οι εξισώσεις απλοποιούνται και οδηγούν σε ενδιαφέροντα και μη τετριμμένα αποτελέσματα.

$$\vec{\tau}_{(O)}\Rightarrow\frac{d\vec{L}_{(O)}}{dt}=0\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}=0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(L_1\hat{e}_1+L_2\hat{e}_2+L_3\hat{e}_3\right)=\frac{d}{dt}\left(I_1\omega_1\hat{e}_1+I_2\omega_2\hat{e}_2+I_3\omega_3\hat{e}_3\right)=$$

$$=I_1\frac{d\omega_1}{dt}\hat{e}_1+I_2\frac{d\omega_2}{dt}\hat{e}_2+I_3\frac{d\omega_3}{dt}\hat{e}_3=I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1+I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2+I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega}\times\vec{L}=\begin{vmatrix}\hat{e}_1&\hat{e}_2&\hat{e}_3\\ \omega_1&\omega_2&\omega_3\\ L_1&L_2&L_3\end{vmatrix}=\hat{e}_1(\omega_2L_3-\omega_3L_2)+\hat{e}_2(\omega_3L_1-\omega_1L_3)+\hat{e}_3(\omega_1L_2-\omega_2L_1)=$$

$$=\hat{e}_1\omega_2\omega_3(I_3-I_2)+\hat{e}_2\omega_3\omega_1(I_1-I_3)+\hat{e}_3\omega_1\omega_2(I_2-I_1)$$

Εξισώσεις Euler:

$$\begin{aligned}&I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=0\\ &I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=0\\ &I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=0\end{aligned}$$

Περιστροφή γύρω από κύριο άξονα, έστω τον 1

$\omega_{01}\neq 0,\quad \omega_{02}=\omega_{03}=0$

Οι εξισώσεις Euler τη χρονική στιγμή t=0 θα μας δώσουν το ρυθμό μεταβολής των γωνιακών ταχυτήτων και άρα την εξέλιξη της κίνησης.

$I_1\dot{\omega}_1 = 0$
$I_2\dot{\omega}_2 = 0$
$I_3\dot{\omega}_3 = 0$

Καμιά γωνιακή ταχύτητα δεν μεταβάλλεται. Άρα : $\omega_1 = \omega_{01} = \sigma\tau\alpha\theta., \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 = \sigma\tau\alpha\theta.$

Το σώμα θα περιστρέφεται σταθερά γύρω από τον κύριο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του, γύρω από τον οποίον του δώσαμε την αρχική περιστροφή

Ευστάθεια περιστροφής γύρω από κύριο άξονα

Δίνουμε περιστροφή γύρω από κύριο άξονα και αφήνουμε το σώμα στο διάστημα. Όμως δεν το κάνουμε τέλεια. Το σώμα έχει και πάρα πολύ μικρές συνιστώσες γωνιακής ταχύτητας στους άλλους δύο κύριους άξονες. Θα διατηρήσει το σώμα την περιστροφή του γύρω από τον αρχικό άξονα με κάποιες πιθανώς μικρές ταλαντώσεις γύρω από αυτόν;

Ξεκινάμε από τον άξονα 1 που έχει τη μικρότερη ροπή αδράνειας $I_1 \le I_2 \le I_3$:

$\omega_{01} \ne 0, \quad \omega_{02}, \omega_{03} << \omega_{01}, \quad \omega_{02}\omega_{03} \approx 0$

Οι εξισώσεις Euler γίνονται τώρα :
$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή θέλουμε ευστάθεια, δηλαδή επαναφορά, δοκιμάζουμε εκθετικές λύσεις και ευχόμαστε ο εκθέτης να βγει φανταστικός και να έχουμε μικρές ταλαντώσεις: $\omega_2(t) = a_2 e^{pt}, \quad \omega_3(t) = a_3 e^{pt}, \quad a_1, a_2 << \omega_1$

$$\begin{array}{llll} I_1\dot{\omega}_1 = 0 & \omega_1 = \sigma\tau\alpha\theta & \omega_1 = \sigma\tau\alpha\theta & \omega_1 = \sigma\tau\alpha\theta \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0 \Rightarrow & I_2 a_2 p e^{pt} - (I_3 - I_1) a_3 e^{pt}\omega_1 = 0 \Rightarrow & I_2\lambda p - (I_3 - I_1)\omega_1 = 0 \Rightarrow & \lambda = \dfrac{(I_3 - I_1)\omega_1}{I_2 p} \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0 & I_3 a_3 p e^{pt} - (I_1 - I_2) a_2 e^{pt}\omega_1 = 0 & I_3 p - (I_1 - I_2)\lambda\omega_1 = 0 & \lambda = \dfrac{I_3 p}{(I_1 - I_2)\omega_1} \end{array}$$

όπου $\lambda = a_2/a_3$. Απαλείφοντας το λ παίρνουμε για τον εκθέτη p:

$$\frac{I_3 p}{(I_1 - I_2)\omega_1} = \frac{(I_3 - I_1)\omega_1}{I_2 p} \Rightarrow p^2 = (I_1 - I_2)(I_3 - I_1)\frac{\omega_1^2}{I_2 I_3} < 0 \quad \text{επειδή } I_1 \le I_2 \le I_3$$

Αφού το τετράγωνό του είναι αρνητικό ο εκθέτης είναι φανταστικός όπως επιθυμούσαμε.

Οπότε: $\omega_1 = \omega_{01} = \sigma\tau\alpha\theta., \quad \omega_2(t) = a_2 e^{ipt} = \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta = \omega_3(t) = a_3 e^{ipt}$ άρα ευστάθεια

Το ίδιο θα συμβεί και για τον άξονα 3 που έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας

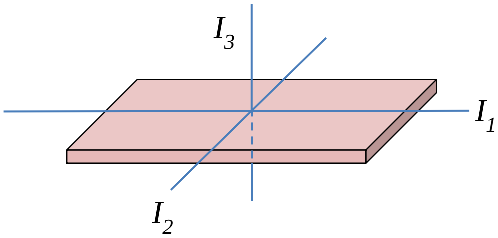
$$p^2 = (I_3 - I_1)(I_2 - I_3)\frac{\omega_2^2}{I_3 I_1} < 0 \quad \text{επειδή } I_1 \le I_2 \le I_3$$

Όμως για τον ενδιάμεσο άξονα προκύπτει ότι $p^2 > 0$ και έτσι δεν θα πάρουμε ταλαντωτικές λύσεις, αλλά λύσεις εκθετικά αυξανόμενες, άρα αστάθεια

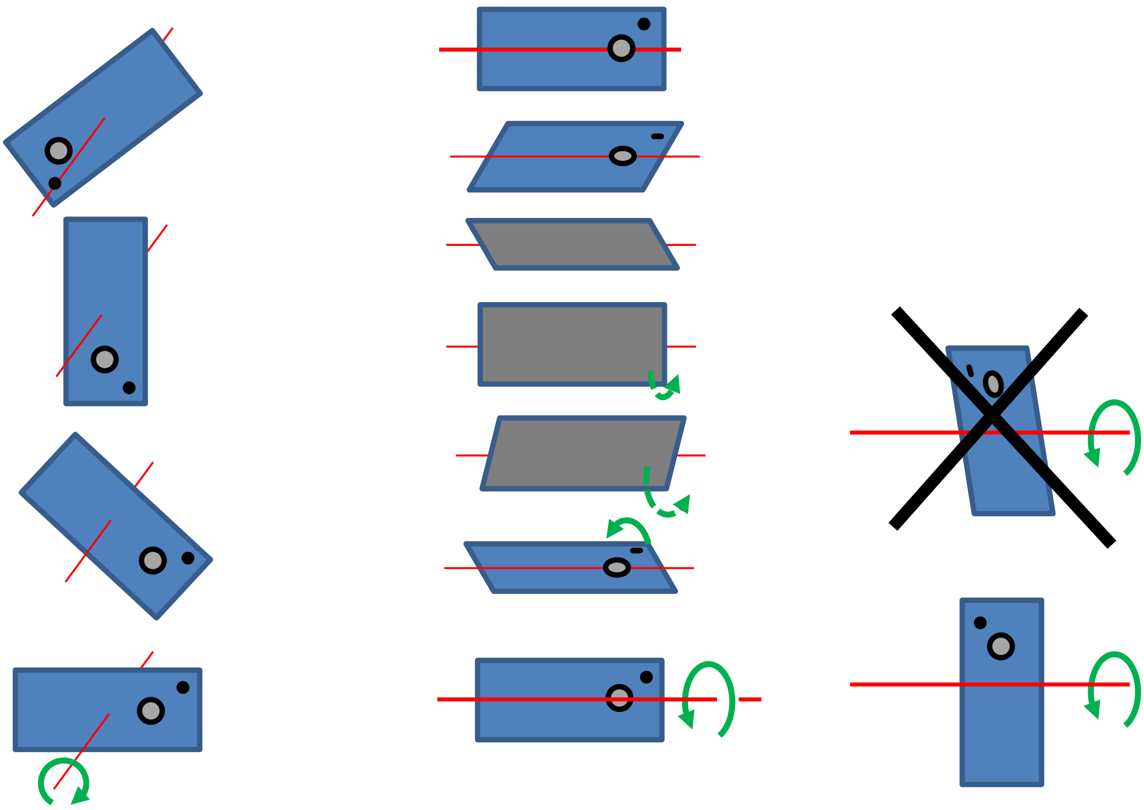
$$p^2 = (I_2 - I_3)(I_1 - I_2)\frac{\omega_2^2}{I_1 I_3} < 0 \quad \text{επειδή } I_1 \le I_2 \le I_3$$

$\omega_2 = \omega_{02} = \sigma\tau\alpha\theta., \quad \omega_1(t) = a_1 e^{pt} = \varepsilon\kappa\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \alpha\acute{\upsilon}\xi\eta\sigma\eta = \omega_3(t) = a_3 e^{pt}$ **άρα αστάθεια**

Το θεώρημα αυτό παρόλο που είναι γνωστό για αιώνες «ανακαλύφθηκε» πάλι σχετικά πρόσφατα επειδή οδηγεί σε πολύ «αφύσικη» συμπεριφορά η οποία δεν είναι προφανής από τις εξισώσεις. Με λίγα λόγια αν πετάξετε στον αέρα το κινητό σας έχοντας του δώσει περιστροφή γύρω από έναν από τους κύριους άξονες του σχήματος



τότε θα το δείτε να περιστρέφεται σταθερά γύρω από τους άξονες 1 και 3 αλλά όχι γύρω από τον 2. Δίνοντας του περιστροφή γύρω από τον 2 και αφήνοντας το στον αέρα θα κάνει μια περίπλοκη κίνηση κατά την οποία ο άξονας 2 θα αλλάζει φορά κατά 180° . Δείτε τα βίντεο The Bizarre Behavior of Rotating Bodies, Explained (Veritasium) και Ellipsoids and The Bizarre Behaviour of Rotating Bodies (Stand up Maths) στο You Tube και πολλά άλλα παρόμοια βίντεο



ΓΙΝΕΤΑΙ **ΓΙΝΕΤΑΙ** **ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ**

Απλή διαισθητική μηχανική εξήγηση με δυνάμεις γι' αυτό το φλιπάρισμα δεν είχε δοθεί ποτέ! Δόθηκε τελικά πρόσφατα από έναν διάσημο μαθηματικό (T. Tao) μέσω των φυγόκεντρων δυνάμεων και δυνάμεων Coriolis.

Κύλιση

Ορισμός

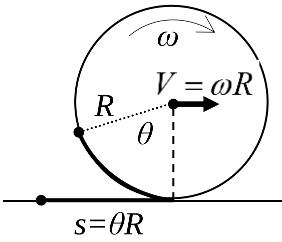
Η κύλιση είναι ειδική περίπτωση σύνθετης κίνησης σωμάτων με κυκλική περίμετρο (τροχοί, σφαίρες, κύλινδροι, στεφάνια, δίσκοι, καρούλια, κλπ.). Η κίνηση πραγματοποιείται πάνω σε επίπεδο δάπεδο και συνίσταται από μεταφορική κίνηση του σώματος με ταχύτητα $\vec{V}$, ***την ταχύτητα του κέντρου μάζας του***, συν ταυτόχρονη περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω ***γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας***. Το κέντρο μάζας του σώματος κινείται σε ένα επίπεδο παράλληλο στο δάπεδο. Σε μια γενική τέτοια κίνηση

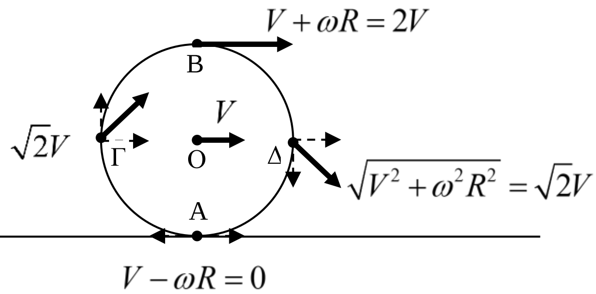
η ταχύτητα του κέντρου μάζας V και η γωνιακή ταχύτητα ω μπορούν να είναι ανεξάρτητες και δεν σχετίζονται απαραίτητα. Η ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος θα είναι το άθροισμα της ταχύτητας του κέντρου μάζας $\vec{V}$ συν την ταχύτητα περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας, η οποία έχει μέτρο ωd .
Όταν σε μια τέτοια επίπεδη κίνηση τυχαίνει διαρκώς ***το σημείο επαφής του σώματος με το δάπεδο να ακινητεί στιγμιαία,*** δηλαδή το σώμα να μην ολισθαίνει καθώς περιστρέφεται, τότε λέμε ότι έχουμε ***κύλιση***. Αυτό, καθώς το σημείο επαφής είναι περιμετρικό σημείο του σώματος με d=R, μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν ισχύει

$$s = \theta R \qquad \text{και άρα :} \qquad V = \omega R \qquad \text{και} \qquad a = \alpha R$$

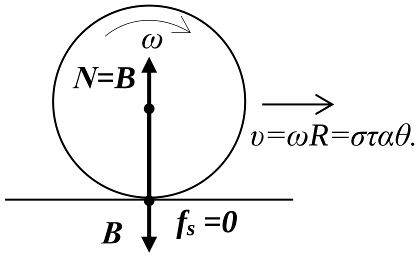
που ονομάζεται συνθήκη κύλισης, Στο σχήμα παρουσιάζονται οι ταχύτητες διαφόρων σημείων της περιφέρειας του σώματος:

$\upsilon_{CM} = V$, $\quad \upsilon_A = V - \omega R$, $\quad \upsilon_B = V + \omega R$, $\quad \upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta = \sqrt{V^2 + \omega^2 R^2}$





Η τροχιά που ακολουθεί κάθε σημείο του στερεού (εκτός του CM) είναι κυκλοειδής καμπύλη.
Όταν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη ή ροπή $\vec{\boldsymbol{F}} = \mathbf{0},\ \vec{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$, η τριβή κύλισης για ένα ιδανικό στερεό που κυλίεται με σταθερή ταχύτητα πρέπει να είναι μηδέν. Η μόνη δύναμη από το δάπεδο είναι η κάθετη αντίδραση και το σώμα συνεχίζει επ΄ αόριστον την κυλιόμενη κίνησή του. Για να σταματήσει η κύλιση πρέπει να εφαρμοστεί εξωτερική επιβραδύνουσα δύναμη ή ροπή (φρένο).



Δυνάμεις – Ροπές στην κύλιση
Για να πετύχουμε επιταχυνόμενη κίνηση, πέρα από τη δύναμη επαφής του δαπέδου (που αναλύουμε σε τριβή και κάθετη αντίδραση), χρειάζεται πρόσθετη εξωτερική δύναμη ή ροπή. Αυτό επειδή στην κύλιση η τριβή είναι στατική και δεν θα παράγει έργο καθώς δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Η φορά της τριβής θα είναι τέτοια ώστε να αντισταθεί στην ολίσθηση που θα προκαλούσε το εξωτερικό αίτιο στο σημείο επαφής του σώματος με το δάπεδο. Το μέτρο της είναι «αυτορυθμιζόμενο» και παίρνει τέτοια τιμή ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης (εφόσον αυτό είναι δυνατό). Η τριβή απλώς μετατρέπει μέρος της κινητικής ενέργειας από μεταφορική σε περιστροφική (αλλά και αντίστροφα). Οι περιπτώσεις όπου υπάρχει εξωτερικό αίτιο δηλ. $\vec{\boldsymbol{F}} \neq \mathbf{0}$ ή $\vec{\boldsymbol{\tau}} \neq \mathbf{0}$ θα αναλυθούν λεπτομερειακά παρακάτω Γενικά όμως ισχύουν τα παρακάτω

Δύναμη στο κέντρο μάζας $\quad \vec{\boldsymbol{F}} \neq \mathbf{0},\ \vec{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \Rightarrow\ f_s \uparrow\uparrow -F_{\parallel}$ και $a \uparrow\uparrow F_{\parallel}$

Καθαρή ροπή (ζεύγος) $\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \mathbf{0},\ \vec{\boldsymbol{\tau}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \tau_f \uparrow\uparrow -\tau$ και $a \uparrow\uparrow f_s$

Δύναμη σε τυχαίο σημείο $\quad \vec{\boldsymbol{F}} \neq \mathbf{0},\ \vec{\boldsymbol{\tau}}_F \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ γενικά $\tau_f \uparrow\uparrow -\tau$ και $a \uparrow\uparrow f_s$ εκτός μερικών περιπτώσεων όπου ή η τριβή ή η επιτάχυνση αλλάζουν φορά ή μηδενίζονται.

Κινητική ενέργεια στην κύλιση

Ένα άκαμπτο σώμα που εκτελεί σύνθετη κίνηση μοιράζει την κινητική του ενέργεια τόσο σε μεταφορική όσο και σε περιστροφική. Το ενδιαφέρον είναι ότι για κύλιση $\upsilon = \omega R$ η κατανομή μεταξύ μεταφορικής και περιστροφικής ενέργειας εξαρτάται μόνο από το σχήμα του σώματος και όχι από τη μάζα του (*M*) ή το μέγεθος του (*R*). Για κάθε ομογενές σώμα με κυκλική περιφέρεια (που να μπορεί δηλαδή να κυλιθεί) η ροπή αδρανείας του θα γράφεται ως $I = \kappa M R^2$ όπου το $\kappa \le 1$ είναι αδιάστατη σταθερά που εξαρτάται από το σχήμα. Π.χ για στεφάνι *κ*=1, για κύλινδρο *κ*=1/2, για σφαίρα *κ*=2/5, για σφαιρικό φλοιό *κ*=2/3, κλπ. Έτσι ο λόγος της περιστροφικής προς την μεταφορική ενέργεια είναι :

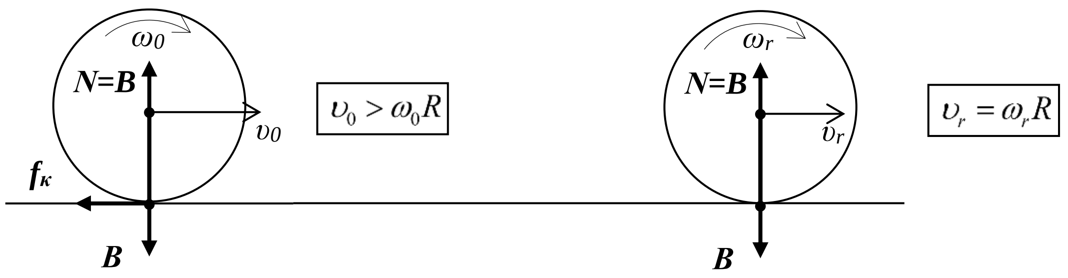
$$\frac{K_R}{K_T} = \frac{I\omega^2/2}{M\upsilon_{CM}^2/2} = \frac{\kappa M R^2\, \upsilon_{CM}^2/R^2}{M\upsilon_{CM}^2} = \kappa$$

Η περιστροφική ενέργεια θα είναι πάντα μικρότερη από την μεταφορική εκτός αν το σώμα είναι στεφάνη ή λεπτός κυλινδρικός φλοιός όπου η περιστροφική ενέργεια είναι ίση με τη μεταφορική.

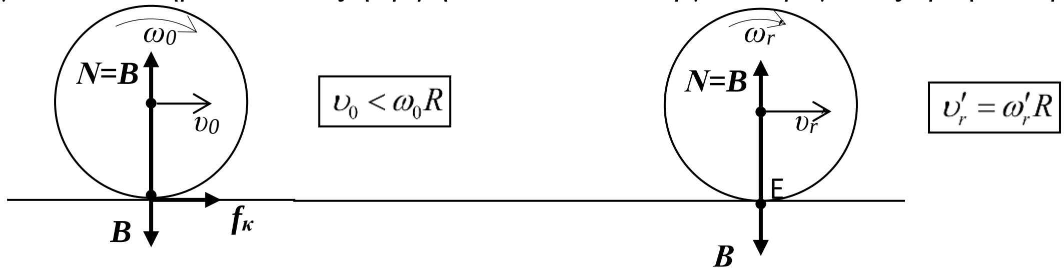
Όσο πιο μεγάλο είναι το *κ* τόσο περισσότερο θα αποκλίνει το σχήμα από το να είναι υλικό σημείο. Η περιστροφική θα αυξηθεί σε βάρος της μεταφορικής ενέργειας και άρα το σώμα θα μετακινείται πιο αργά.

Μετάβαση από ολίσθηση σε κύλιση

Ρίχνουμε ένα σώμα που περιστρέφεται πάνω στο δάπεδο (π.χ. μπάλα μπόουλινγκ). Το σώμα ξεκινά και με αρχική γραμμική ταχύτητα υ_0, και με γωνιακή ταχύτητα ω_0, οι οποίες είναι ανεξάρτητες.



Όταν $\upsilon_0 > \omega_0 R$ υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο επιφανειών. Το σώμα μετακινείται προς τα μπροστά πιο γρήγορα απ' ότι περιστρέφεται και άρα το σημείο επαφής ολισθαίνει προς τα εμπρός σε σχέση με το πάτωμα (η μπάλα φαίνεται να περιστρέφεται αντίθετα από την μεταφορική της κίνηση). Υπάρχει τριβή ολίσθησης και η οποία κατευθύνεται προς τα πίσω επιβραδύνοντας το σώμα και ταυτόχρονα αυξάνοντας την γωνιακή του ταχύτητα : $f_\kappa < 0$. Η τριβή μηδενίζεται όταν επιτευχθεί η ισότητα $\upsilon = \omega R$. Η ενέργεια δεν διατηρείται καθώς η τριβή καταναλώνει ενέργεια παράγοντας αρνητικό έργο.



Όταν $\upsilon_0 < \omega_0 R$ το σώμα μετακινείται προς τα μπροστά πιο αργά απ' ότι περιστρέφεται και άρα το σημείο επαφής ολισθαίνει προς τα πίσω (σπινιάρει). Υπάρχει τριβή η οποία είναι κινητική και η οποία κατευθύνεται προς τα εμπρός επιταχύνοντας το σώμα και ταυτόχρονα μειώνοντας την γωνιακή του ταχύτητα : $f_\kappa > 0$. Η τριβή μηδενίζεται όταν επιτευχθεί η ισότητα $\upsilon = \omega R$. Η ενέργεια δεν διατηρείται καθώς η τριβή παράγει έργο.

Όσο συμβαίνει η ολίσθηση η δύναμη τριβής είναι γνωστή και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε όλους τους τύπους της κινηματικής για κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη με επιτάχυνση μέτρου :

$$a = \sum F/m = f_k/m = \mu_k N/m = \mu_k mg/m = \mu_k g$$

Όταν επιτευχθεί η συνθήκη κύλισης το σώμα πλέον δεν ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο και η τριβή ολίσθησης μηδενίζεται. Καθώς δεν υπάρχει άλλη οριζόντια δύναμη που να τείνει να κινήσει το σημείο επαφής δεν εμφανίζεται ούτε στατική τριβή. Το σώμα εκτελεί ομαλή μεταφορική κίνηση και ομαλή στροφική κίνηση.

Πως βρίσκουμε την τελική ταχύτητα κύλισης χωρίς να κάνουμε κινηματική

Η τελική ταχύτητα εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες υ_0 και ω_0. Βρίσκουμε την τελική ταχύτητα κύλισης υ_r παρατηρώντας ότι **η δύναμη της τριβής που εφαρμόζεται στο σημείο επαφής δεν προκαλεί ροπή γύρω από αυτό το σημείο. Έτσι η στροφορμή γύρω από το σημείο επαφής Ε θα παραμείνει σταθερή.** Η στροφορμή για ένα σύστημα σωματιδίων είναι ίση με τη στροφορμή του κέντρου μάζας συν τη στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε :

$$L_E = L_E' \Rightarrow m\upsilon_0 R + I_C\omega_0 = m\upsilon_r R + I_C\omega_r \Rightarrow m\upsilon_0 R + \kappa mR^2\omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa mR^2\,\upsilon_r/R \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 + \kappa R\omega_0 = \upsilon_r(1+\kappa) \Rightarrow \upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}$$

Η στροφορμή γύρω από το Ε όταν έχει επέλθει κύλιση (όλα τα σημεία του στερεού περιστρέφονται γύρω από το Ε με γωνιακή ταχύτητα $\omega_r = \upsilon_r/R$) υπολογίζεται και από (Steiner):

$$L_E' = I_E\omega_r = (I_C + mR^2)\omega_r = (\kappa mR^2 + mR^2)\frac{\upsilon_r}{R} = (1+\kappa)m\upsilon_r R$$

Κινηματική ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης και κυκλικής ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης

Επειδή όσο συμβαίνει ολίσθηση η επιβράδυνση είναι σταθερή μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή t_r καθώς και τη θέση x_r όπου θα επέλθει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Για την πρώτη περίπτωση ($\upsilon_0 > \omega R$) έχουμε

$$mg - N = 0\,, \quad f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,, \quad f_k = ma \Rightarrow \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \mu_k g$$

$$\upsilon_r = \upsilon_0 - at_r \Rightarrow t_r = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_r}{\mu_k g} = \frac{1}{\mu_k g}\left(\upsilon_0 - \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}\right) \Rightarrow t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\,\frac{\upsilon_0 - R\omega_0}{\mu_k g}$$

$$f_k R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k mgR}{\kappa mR^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k g}{\kappa R}\,, \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

Τη χρονική στιγμή t_r ελέγχουμε ότι:

$$\omega_r = \omega_0 + \alpha t_r = \omega_0 + \frac{\mu_k g}{\kappa R}\,\frac{\kappa}{1+\kappa}\,\frac{\upsilon_0 - R\omega_0}{\mu_k g} = \frac{R(1+\kappa)\omega_0 + \upsilon_0 - R\omega_0}{R(1+\kappa)} = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{R(1+\kappa)} = \frac{\upsilon_r}{R}$$

ισχύει πράγματι η συνθήκη κύλισης $\upsilon_r = \omega_r R \Rightarrow \upsilon_0 - at_r = (\omega_0 - \alpha t_r)R$.

Πριν αρχίσει να κυλάει το σώμα θα διανύσει απόσταση : $x_r = \dfrac{\upsilon_0^2 - \upsilon_r^2}{2a}$

Στη συνέχεια ($t > t_r$) η κινητική τριβή μηδενίζεται, αφού σταμάτησε η ολίσθηση, και το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση καθώς το σώμα κυλιέται.

Στατική τριβή δεν εμφανίζεται γιατί δεν υπάρχει οριζόντια δύναμη που να τραβάει ή να σπρώχνει τον κύλινδρο ώστε να τείνει το σημείο επαφής να ολισθήσει.

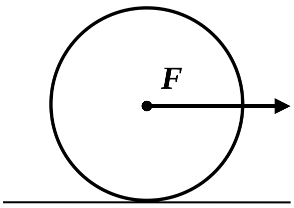
Δυνάμεις και επιτάχυνση στην κύλιση χωρίς ολίσθηση

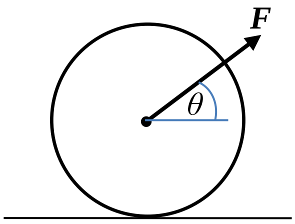
Ξεκινώντας από την ηρεμία θέλουμε να πετύχουμε επιτάχυνση ενός σώματος με κύλιση, δηλαδή, ενώ ικανοποιούνται διαρκώς οι: $\upsilon = \omega R$ και $a = \alpha R$

Η ροπή αδρανείας του σώματος είναι : $I = \kappa m R^2$ και θα αναφερόμαστε σε αυτό και ως τροχός. Για να εφαρμόσουμε δύναμη ή/και ροπή σε τυχαία σημεία του το σώμα είτε θα είναι καρούλι με τυλιγμένο νήμα είτε θα συνδέεται με άξονα.

1. δύναμη στο κέντρο μάζας (τ=0)
2. αμιγής ροπή (F=0)
3. δύναμη + ροπή = δύναμη εκτός κέντρου μάζας

1. Δύναμη που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας.





Η δύναμη τείνει να προκαλέσει ολίσθηση του σώματος πάνω στο δάπεδο προς τη φορά της. Εμφανίζεται τριβή προς την αντίθετη φορά. Αυτή δρα διπλά 1) μειώνει την ολική δύναμη και άρα τη γραμμική επιτάχυνση ενώ ταυτόχρονα 2) προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση και περιστροφή του σώματος. Εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης δεν θα υπάρχει ολίσθηση και η τριβή θα είναι στατική. Η τιμή της θα αυτορυθμιστεί ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη κύλισης (εφόσον αυτό είναι δυνατό).

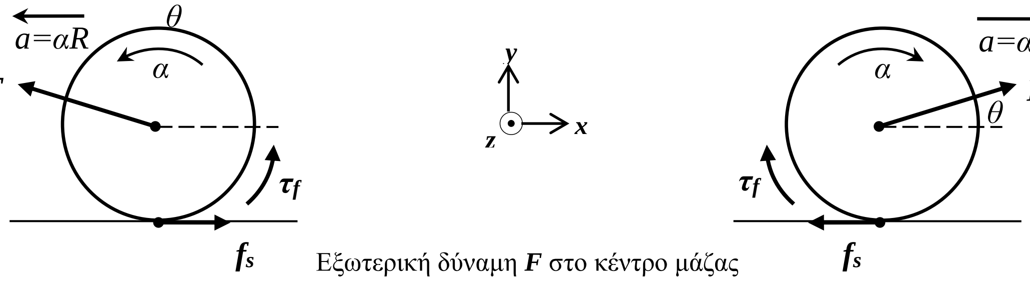
Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

$$y\text{-ισορροπία:}\quad N + F\sin\theta - B = 0 \Rightarrow \boxed{N = B - F\sin\theta}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-μετακίνηση:} & F\cos\theta - f_s = ma \\ z\text{-περιστροφή:} & -f_s R = -I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} F_{\parallel} - f_s = ma \\ f_s = \kappa m a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_s = -\dfrac{\kappa}{1+\kappa} F_{\parallel} \\ a = \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{F_{\parallel}}{m} \end{array}}$$

Η γραμμική επιτάχυνση είναι σταθερή και το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Για να πραγματοποιείται κύλιση, δηλαδή η τριβή να είναι στατική, το μέτρο της τριβής που απαιτείται δεν πρέπει να υπερβαίνει τη μέγιστη δυνατή τιμή $|f_s| \le \mu_s N$. Αυτή είναι μια σχέση που συνδέει όλες τις παραμέτρους του προβλήματος: $\dfrac{\kappa}{1+\kappa} F\cos\theta \le \mu_s (B - F\sin\theta)$ και μπορεί να γραφτεί με διάφορους τρόπους όπως : $\kappa F_{\parallel} + \mu_s (1+\kappa) F_{\perp} \le \mu_s g (1+\kappa) m$ ή $\left[\dfrac{\kappa}{\mu_s (1+\kappa)} + \tan\theta\right] F_{\parallel} \le B$. Από την τελευταία εξάγουμε ότι το σώμα μπορεί να επιταχυνθεί απεριόριστα αν η δύναμη εφαρμοστεί προς τα κάτω σε γωνία θ^*: $\tan\theta^* = -\dfrac{\kappa}{\mu_s (1+\kappa)}$ καθώς σε αυτή τη γωνία η τριβή παραμένει στατική για δύναμη απεριόριστου μέτρου. Για κάθε άλλη γωνία υπάρχει μια μέγιστη εξωτερική δύναμη που επιτρέπεται να ασκήσουμε για να έχουμε κύλιση. Π.χ. για θ=0, tanθ=0, $F_{\parallel} = F$, $F_{\perp} = 0$ παίρνουμε $F_{\max} = \mu_s g \dfrac{1+\kappa}{\kappa} m$ και άρα η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση είναι $a_{\max} = \mu_s g / \kappa$

Εφόσον ικανοποιείται ο παραπάνω περιορισμός παρατηρούμε 1) ότι η τριβή είναι πάντοτε αντίθετη με την παράλληλη συνιστώσα της δύναμης $F_{\parallel}$, ενώ 2) η επιτάχυνση είναι πάντα προς τη φορά της $F_{\parallel}$. Η επιτάχυνση είναι μικρότερη από την $F_{\parallel}/m$ που θα προκαλούσε μόνη της η F σε λείο δάπεδο. Παρόλο που δεν υπάρχει σχετική κίνηση στην επαφή των δύο σωμάτων το μέτρο της στατικής τριβής δεν είναι ίσο με την εξωτερική δύναμη αλλά μικρότερο : $f_s < F_{\parallel}$



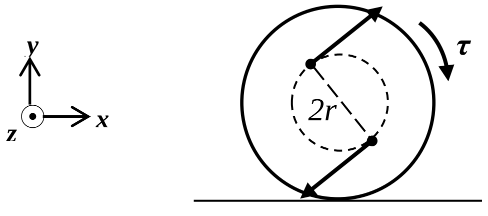
Εξωτερική δύναμη ***F*** στο κέντρο μάζας
Η **τριβή** είναι πάντα **αντίθετη** της $\boldsymbol{F}_{\parallel}$
ενώ η επιτάχυνση πάντα προς τη φορά της $\boldsymbol{F}_{\parallel}$

Η στατική τριβή παρέχει απλά το μηχανισμό με τον οποίο η γραμμική επιτάχυνση που προκαλεί η δύναμη F μετατρέπεται μερικώς και σε γωνιακή επιτάχυνση. Με άλλα λόγια ο ρόλος της τριβής είναι να μετατρέψει μέρος της μεταφορικής ενέργειας που παράγεται από την F σε περιστροφική ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη κύλισης. Η ίδια η τριβή δεν παράγει έργο.
Έτσι επιταχύνονται οι άμαξες. Τα άλογα που τις τραβάνε ασκούν τη δύναμη στον άξονα που συνδέει τους τροχούς. Το ίδιο συμβαίνει και για τους τροχούς του αυτοκινήτου στους οποίους ο κινητήρας δεν μεταδίδει κίνηση. Τραβιούνται (μπροστινή κίνηση) ή σπρώχνονται (πισινή κίνηση) από τον άξονά τους τον οποίον επιταχύνουν οι άλλοι δύο τροχοί στους οποίους ο κινητήρας μεταδίδει ροπή.

2. Ροπή (ζεύγος δυνάμεων)

Το ζεύγος δυνάμεων (καθαρή ροπή) $\tau = (F/2)2r = Fr$, θα προκαλέσει μόνο περιστροφή του σώματος.

Στο αριστερόστροφο ζεύγος (προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού) του σχήματος το σημείο επαφής με το δάπεδο θα τείνει να ολισθήσει προς τα πίσω. Έτσι θα εμφανιστεί τριβή προς τα μπροστά το μέτρο της οποίας θα αυτορυθμιστεί ώστε να ισχύει η συνθήκη κύλισης και η τριβή να είναι στατική (εφόσον αυτό είναι δυνατό). Εδώ συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο από την περίπτωση της δύναμης που ασκείται στο κέντρο μάζας. Η τριβή τώρα μετατρέπει περιστροφική ενέργεια σε μεταφορική προκαλώντας γραμμική επιτάχυνση. Το σώμα θα μετακινηθεί προς τη φορά της τριβής. Η ίδια η τριβή δεν παράγει έργο απλά μετατρέπει την κινητική ενέργεια από τη μια μορφή (περιστροφική) σε άλλη (μεταφορική).
Έτσι επιταχύνονται τα αυτοκίνητα. Η χημική ενέργεια του καυσίμου μετατρέπεται με εκρηκτική καύση σε μεταφορική ενέργεια του εμβόλου η οποία με τη σειρά της μετατρέπεται σε περιστροφική ενέργεια του στροφαλοφόρου άξονα και του σφόνδυλου (του δίσκου με τον οποίο είναι συνδεδεμένος). Αυτή η περιστροφική ενέργεια μέσω του δίσκου του συμπλέκτη (σύγκρουση δίσκων) και ένα σύστημα αξόνων και γραναζιών μεταφέρεται τελικά στους δύο (ή τέσσερις) τροχούς κίνησης όπου μέσω της τριβής με το οδόστρωμα μετατρέπεται σε μεταφορική κινητική ενέργεια όλου του αυτοκινήτου. Οι δύο άλλοι τροχοί θα ακολουθήσουν με ίδια επιτάχυνση μέσω δύναμης στο κέντρο μάζας τους.



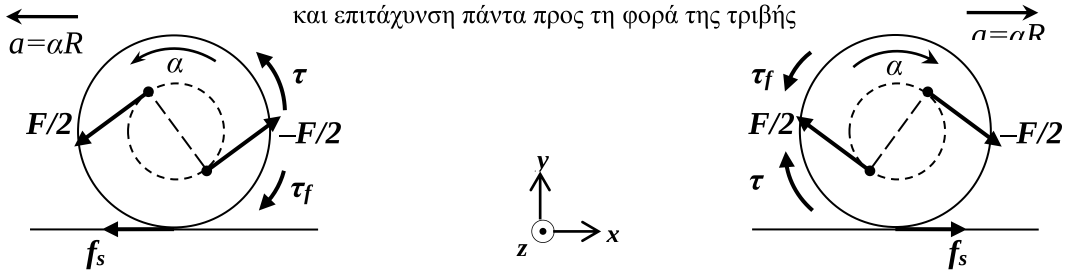
Ζεύγος δυνάμεων

Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν
y-ισορροπία: $N - B = 0 \Rightarrow \boxed{N = B}$

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-μετακίνηση}: & f_s = ma \\ z\text{-περιστροφή}: & -\tau + f_s R = -I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_s = ma \\ \tau/R - f_s = \kappa m a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_s = \dfrac{\tau/R}{1+\kappa} = \left(\dfrac{r/R}{1+\kappa}\right) F \\ a = \dfrac{f_s}{m} = \dfrac{\tau/mR}{1+\kappa} = \left(\dfrac{r/R}{1+\kappa}\right)\dfrac{F}{m} \end{array}}$$

Η γραμμική επιτάχυνση είναι σταθερή και το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ροπή τριβής τ_f πάντα **αντίρροπη** της εξωτερικής τ
και επιτάχυνση πάντα προς τη φορά της τριβής



Δεξιόστροφο ζεύγος
Τριβή και επιτάχυνση
προς τα **αριστερά** (όπισθεν)

Αριστερόστροφο ζεύγος
Τριβή και επιτάχυνση
προς τα **δεξιά** (έμπροσθεν)

Η τριβή εμφανίζεται πάντα με τέτοια φορά ώστε να παράγει ροπή αντίθετη της εξωτερικής. Η επιτάχυνση είναι πάντα προς τη φορά της τριβής. Προσέξτε το εξής «παράδοξο» : η γραμμική επιτάχυνση προκαλείται αποκλειστικά από τη δύναμη της στατικής τριβής η οποία όμως δεν παράγει καθόλου έργο αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της (δεν σέρνει τίποτα). Ο περιορισμός $f_s \le \mu_s N$ μας δίνει τη μέγιστη δυνατή επιτάχυνση του τροχού με κύλιση: $f_{s,\max} = \mu_s mg \Rightarrow ma_{\max} = \mu_s mg \Rightarrow \boxed{a_{\max} = \mu_s g}$ καθώς και τη μέγιστη επιτρεπόμενη ροπή: $\dfrac{\tau/R}{1+\kappa} < \mu_s mg \Rightarrow \boxed{\tau \le \mu_s gm(1+\kappa)R}$ ώστε να διατηρείται η κύλιση. Αυτή είναι και η μέγιστη επιτάχυνση που θα έχει ένα όχημα στο οποίο ανήκει ο τροχός (με την προϋπόθεση ότι ίση ροπή μεταδίδεται σε 4 όμοιους τροχούς και το κέντρο βάρους του οχήματος είναι στο κέντρο του, αλλιώς θα είναι μικρότερη).

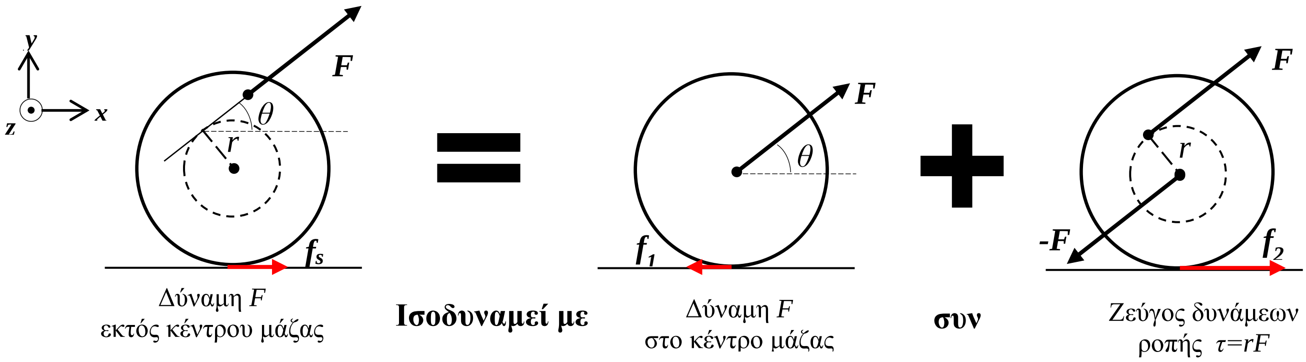
Παρατηρείστε ότι η μέγιστη επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη από τα χαρακτηριστικά του κινητήρα (τ) και εξαρτάται βασικά από το συντελεστή στατικής τριβής μ_s, δηλαδή τη φύση των υλικών του τροχού και του οδοστρώματος. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ελαστικού και στεγνού οδοστρώματος είναι περίπου 1,0 ενώ για υγρό οδόστρωμα πέφτει στο 0,30. Μπορείτε να ελέγξετε ότι όλες οι επιταχύνσεις που δίνουν οι κατασκευαστές αυτοκινήτων για τα διάφορα μοντέλα τους είναι μικρότερες από αυτό το άνω όριο. Π.χ. 0-100 km/h σε 11,3 s ισοδυναμεί με 2,46 m/s^2 ή g/4.
Αν η ροπή που θα μεταδώσει ο κινητήρας στον τροχό είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη ο τροχός θα ολισθαίνει πάνω στο οδόστρωμα (θα σπινιάρει) καθώς η στατική τριβή δεν θα επαρκεί για να πετύχει κύλιση. Αυτό δεν είναι επιθυμητό για διάφορους λόγους. Π.χ. επειδή η τριβή θα είναι τριβή ολίσθησης η μέγιστη επιτάχυνση/επιβράδυνση θα είναι μικρότερη $f_k = \mu_k g < \mu_s g = f_{s,\max}$ (μ_k=0,8 και 0,25 για ελαστικά σε στεγνό και υγρό οδόστρωμα). Η κινητική αυτή τριβή ίσως να μην επαρκεί για να κινήσει ή να σταματήσει έγκαιρα το αυτοκίνητο ενώ η αντίστοιχη στατική να μπορεί. Επίσης όταν το αυτοκίνητο ολισθαίνει δεν μπορούμε να το στρίψουμε. Τα ηλεκτρονικά συστήματα ABS (για όταν επιβραδύνουμε), TCS (για όταν επιταχύνουμε) και ESP (για όταν στρίβουμε), με τα οποία είναι εξοπλισμένα τα σύγχρονα αυτοκίνητα, έχουν αποκλειστικό σκοπό να διατηρούν πάντοτε την κύλιση στους τροχούς εφαρμόζοντας πεδήσεις σε κάθε τροχό ξεχωριστά και επιδρώντας στη ροπή που παράγει ο κινητήρας. Με τον τρόπο αυτό έχουμε πάντα τη μέγιστη διαθέσιμη δύναμη από το οδόστρωμα και έλεγχο της ευστάθειάς του οχήματος κατά τις στροφές.

3. Δύναμη που ΔΕΝ εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας

Η μια μόνη δύναμη θα προκαλέσει και μετακίνηση και περιστροφή του σώματος. Με την περιστροφή εμφανίζεται τριβή προς τα μπροστά ενώ με την μετακίνηση τριβή προς τα πίσω. Το σχήμα και η κατανομή μάζας του σώματος (κ) μαζί με το πόσο μακριά (r) από το κέντρο μάζας και σε τι κατεύθυνση (θ) ασκείται η δύναμη θα καθορίσουν το τι από τα δύο θα τείνει να υπερισχύσει και άρα τη φορά προς την οποία θα τείνει τελικά να ολισθήσει το σώμα στο σημείο επαφής του με το δάπεδο. Ανάλογα θα ρυθμιστεί και η φορά της τριβής που θα εμφανιστεί και η οποία θα αντιτεθεί στον παράγοντα που υπερισχύει.

Άρα σε αυτήν την περίπτωση η φορά της τριβής αλλά και η φορά της επιτάχυνσης δεν είναι προκαθορισμένες ενώ μπορεί και να μηδενιστούν. Το μέτρο της τριβής θα αυτορυθμιστεί ώστε να ισχύει η συνθήκη κύλισης και η τριβή να είναι στατική (εφόσον αυτό είναι δυνατό). Αν η περιστροφική ενέργεια υπερισχύει ($K_R > \kappa K_T$) τότε η τριβή θα μετατρέψει περιστροφική σε μεταφορική κινητική ενέργεια επιταχύνοντας το σώμα γραμμικά, αλλιώς θα κάνει το αντίστροφο. Η τριβή πάλι δεν παράγει έργο απλά μετατρέπει την ενέργεια από τη μια μορφή σε άλλη.

Μια δύναμη εκτός κέντρου μάζας ισοδυναμεί με την ίδια δύναμη στο κέντρο μάζας συν ένα ζεύγος δυνάμεων ροπής $\tau = rF$. Άρα οι εξισώσεις του Νεύτωνα θα είναι το άθροισμα των εξισώσεων των περιπτώσεων 1 και 2 και η λύση για την επιτάχυνση και τη στατική τριβή θα είναι το άθροισμα των λύσεων.



Πρέπει μόνο να αποφασίσουμε για τη φορά της τριβής επειδή έχει αντίθετη φορά στις περιπτώσεις 1 και 2: $f_s = f_2 - f_1$. Θεωρούμε **αριστερόστροφη** δύναμη που ασκείται σε φορέα που απέχει απόσταση r από το κέντρο μάζας, και σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο δάπεδο όπως στο σχήμα (για δεξιόστροφες δυνάμεις απλά αντικαθιστούμε $F \to -F$) και σχεδιάζουμε την τριβή προς τα δεξιά (σαν να υπερισχύει η τριβή του ζεύγους $f_2 > f_1$) και αν μετά τους υπολογισμούς προκύψει με αρνητικό πρόσημο τότε θα δείχνει στην αντίθετη φορά. Η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 ως 2π.

y-ισορροπία: $N + F\sin\theta - B = 0 \Rightarrow \boxed{N = B - F\sin\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} x\text{-μετακίνηση}: \;\; F\cos\theta + f_s = ma \\ z\text{-περιστροφή}: \;\; -Fr + f_s R = -I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} F\cos\theta + f_s = ma \\ F\left(r/R\right) - f_s = \kappa m a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} f_s = (r/\kappa R - \cos\theta)\dfrac{\kappa}{1+\kappa}F \\ a = (r/R + \cos\theta)\dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{F}{m} \end{array}}$$

Ως συνήθως προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις για να υπολογίσουμε την a και στη συνέχεια αντικαθιστούμε την έκφραση της a σε οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις για να βρούμε την έκφραση της f_s.
Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ουσιαστικά το άθροισμα των δύο προηγούμενων αποτελεσμάτων για δύναμη στο κέντρο μάζας και καθαρή ροπή :

$$\boxed{\begin{aligned} f_s &= \frac{1}{1+\kappa}\left(\frac{\tau}{R}-\kappa F_{\parallel}\right) \\ a &= \frac{1}{(1+\kappa)m}\left(\frac{\tau}{R}+F_{\parallel}\right) \end{aligned}}$$

Καταρχάς θα έχουμε κύλιση εφόσον ικανοποιείται η :

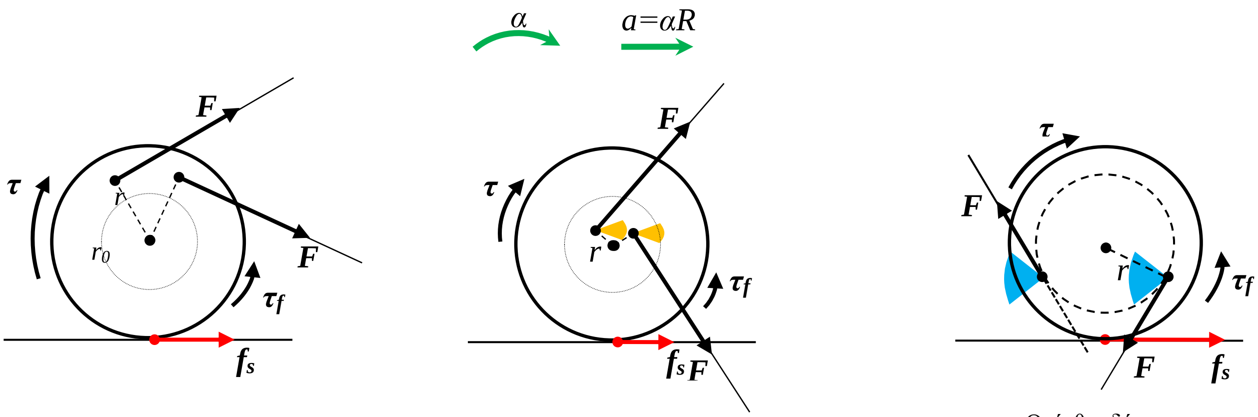
$$\left|f_s\right| \le \mu_s N \Rightarrow \left|\frac{\tau}{R}-\kappa F_{\parallel}\right| \le \mu_s\left(B-F_{\perp}\right)(1+\kappa)$$

Εφόσον αυτός ο περιορισμός ικανοποιείται παρατηρούμε τα εξής. Γενικά η **<u>στατική τριβή</u>** εμφανίζεται προς τα δεξιά , $f_s>0$, με ροπή αντίθετη από αυτή της δύναμης F και η **<u>επιτάχυνση</u>** είναι επίσης προς τα δεξιά $a>0$

εκτός:

1) από ορισμένες **εμπρόσθιες γωνίες** κοντά στο κέντρο μάζας όπου η **τριβή** γίνεται μηδέν και στη συνέχεια έχει ροπή στην ίδια φορά με τη ροπή της δύναμης και

2) από ορισμένες **οπίσθιες γωνίες** όπου η **επιτάχυνση** μηδενίζεται και στη συνέχεια αλλάζει φορά ($a<0$), με τη μετάβαση να συμβαίνει όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο επαφής με το δάπεδο.



Εμπρόσθια δύναμη $r>\kappa R=r_0$ σε οποιαδήποτε γωνία

Εμπρόσθια δύναμη σε $r<\kappa R$ και με θ εκτός τομέα $\pm\theta_\kappa(r)$

Όταν η διεύθυνση της δύναμης είναι μέσα στον κιτρινισμένο τομέα η τριβή αλλάζει φορά $f_s<0$

Οπίσθια δύναμη θ εκτός τομέα $\pi\pm\theta_0(r)$

Όταν η διεύθυνση της δύναμης είναι μέσα στο γαλάζιο τομέα η επιτάχυνση αλλάζει φορά $a<0$
Το νήμα θα τυλίγεται

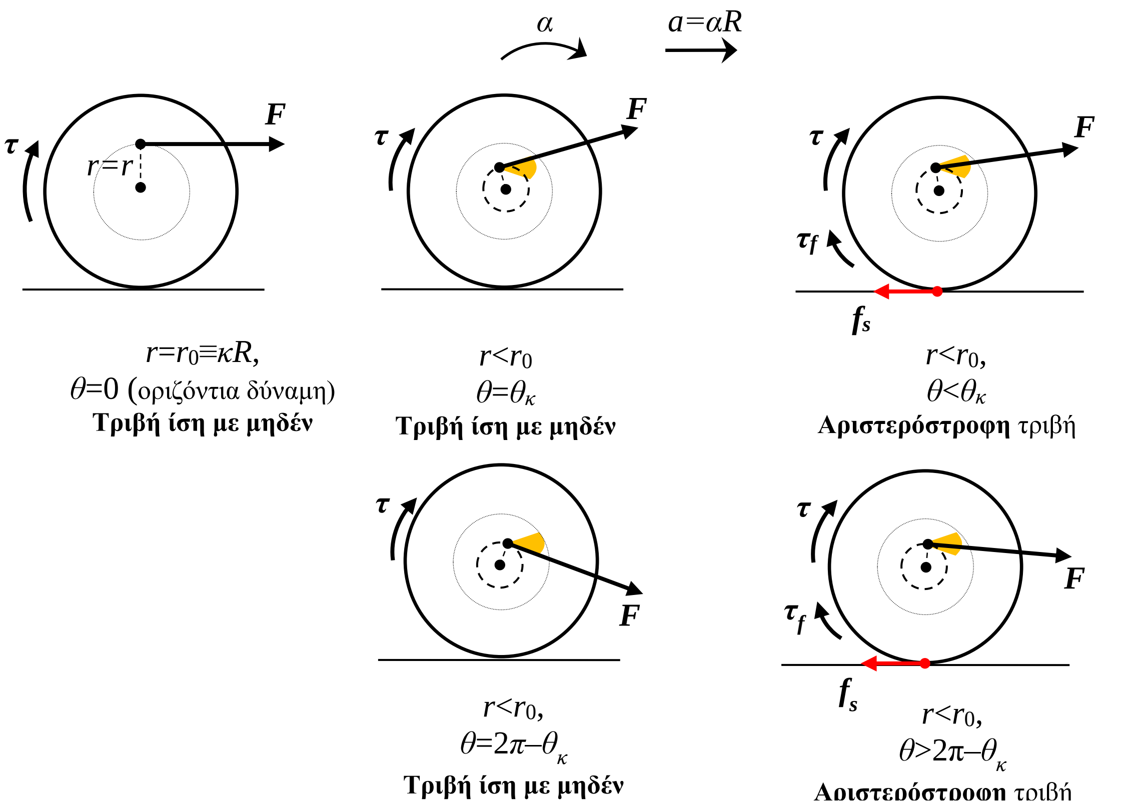
Τριβή δεξιόστροφη $f_s>0$ και **επιτάχυνση προς τα δεξιά** $a>0$

Πότε η τριβή γίνεται μηδέν.

Η τριβή θα μηδενιστεί όταν: $r/\kappa R-\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\theta_\kappa=\arccos\left(\dfrac{r}{\kappa R}\right)$. Για να συμβεί αυτό πρέπει καταρχάς $\dfrac{r}{\kappa R}\le 1 \Rightarrow r\le \kappa R$, δηλαδή η δύναμη να εφαρμόζεται κοντά στο κέντρο μάζας. Για τις γωνίες θ_κ και $2\pi-\theta_\kappa$, η δύναμη F από μόνη της επαρκεί για να ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης χωρίς να εμφανιστεί τριβή και άρα η τριβή μηδενίζεται. Για μικρότερες εμπρόσθιες γωνίες από την οριζόντιο δηλ. $\theta<\theta_\kappa$ ή $\theta>2\pi-\theta_\kappa$ **η τριβή αλλάζει πρόσημο** και δείχνει προς τα αριστερά. Έχει δηλαδή ροπή ίδιας φοράς με την F. Σε αυτές τις γωνίες η τριβή χρειάζεται να ενισχύσει την περιστροφική και ταυτόχρονα να μειώσει τη γραμμική επιτάχυνση που προκαλεί η F, ώστε να ισχύει η συνθήκη κύλισης. Αυτό είναι αναγκαίο όταν η δύναμη εφαρμόζεται κοντά στο κέντρο μάζας $r<\kappa R\equiv r_0$ (δηλαδή όταν η ροπή της είναι μικρή και άρα προκαλεί μικρή γωνιακή επιτάχυνση) και σε μικρή γωνία από την οριζόντιο προς τα μπροστά όπου η παράλληλη συνιστώσα της είναι μεγάλη (και άρα προκαλεί μεγάλη γραμμική επιτάχυνση). Η επιτάχυνση παραμένει προς τα δεξιά αφού cosθ>0.

Εφαρμογή εμπρόσθιας F κοντά στο κέντρο μάζας $r \leq \kappa R$

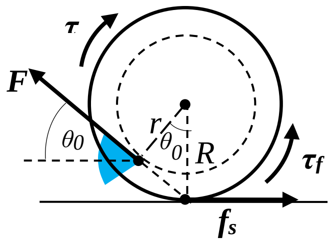
Μέσα στον τομέα $2\theta_{\kappa} = 2\arccos\left(r/\kappa R\right)$ η τριβή γίνεται αριστερόστροφη



Όταν $r=\kappa R\equiv r_0$ τότε η τριβή είναι προς τα δεξιά για κάθε γωνία εκτός για θ=0 (οριζόντια δύναμη) όπου μηδενίζεται. Όσο το r μικραίνει ($r \to 0$) ο τομέας $2\theta_\kappa$ μεγαλώνει και γίνεται ίσος με π για r =0. Δηλαδή όταν η δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας η τριβή είναι πάντα αντίθετη στην $F_\parallel$ όπως βρήκαμε και πριν.

Πότε η επιτάχυνση γίνεται μηδέν.

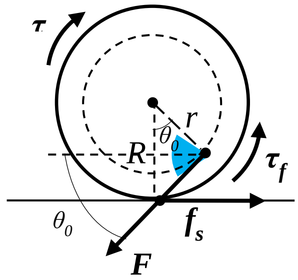
Η επιτάχυνση θα μηδενιστεί όταν $r/R+\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\pi\pm\theta_0$ με $\theta_0=\arccos\left(\frac{r}{R}\right)$. Στις γωνίες αυτές δηλ. όταν $\cos\theta=-r/R$ βλέπουμε ότι το άθροισμα και των δυνάμεων και των ροπών μηδενίζονται επειδή $f_s=-F_\parallel=\frac{r}{R}F>0$ και ακολούθως μηδενίζεται και η επιτάχυνση: $a=0$. **Βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο επαφής με το δάπεδο.**



για $\cos\theta_0 = r/R$

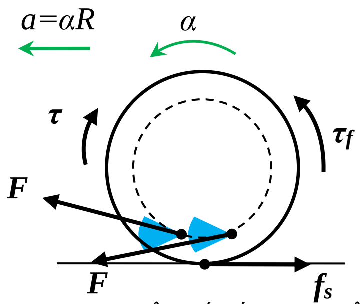
$f_s=-F_\parallel$ και $\tau_{f_s}=-\tau$

a=0 **ακινησία**



Για όσο ισχύει $f_s = \left|F_{\|}\right| \le \mu_s N$, το σώμα δεν θα κινηθεί, ενώ αν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης *F* ώστε $\left|F_{\|}\right| > \mu_s N$ (κρατώντας όμως τη γωνία θ_0 σταθερή) τότε το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει προς τα αριστερά (πάλι δεν θα επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση).

Για γωνίες μεγαλύτερες της θ_0 η επιτάχυνση παραμένει θετική προς τα δεξιά. Όταν η γωνία είναι μικρότερη από θ_0, δηλαδή βρίσκεται στον γαλάζιο τομέα, η παράλληλη συνιστώσα της εφαρμοζόμενης δύναμης υπερνικά την τριβή $f_s < \left|F_{\|}\right|$ όμως η ροπή της τριβής είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της εφαρμοζόμενης δύναμης $f_s R > Fr$. Η συνθήκη κύλισης μπορεί να ικανοποιηθεί κυλώντας το σώμα προς τα αριστερά. Πράγματι για $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \Rightarrow \left|\cos\theta\right| > r/R$ **η επιτάχυνση είναι αρνητική** και δείχνει προς τα αριστερά. Δηλαδή το σώμα θα κυλίσει προς τα πίσω και το νήμα μέσω του οποίου ασκούμε την *F* θα τυλίγεται στον κύλινδρο (γιό-γιό).



Αριστερόστροφη δύναμη με προσανατολισμό μέσα στο γαλάζιο τομέα (προς τα αριστερά).
Κίνηση προς τα **αριστερά** (αντίθετα με την τριβή)
Το νήμα δεν θα ξετυλιχτεί αλλά θα τυλιχτεί γύρω από το σώμα

Πως μαντεύουμε τη φορά της επιτάχυνσης χωρίς να καταφύγουμε στις εξισώσεις

Αμφιβολία ως προς τη φορά της επιτάχυνσης μπορεί να γεννηθεί μόνο όταν η στατική τριβή *f* και η ροπή τ_f που προκαλεί είναι και οι δύο αντίθετες στη δύναμη *F* και τη ροπή της τ_F αντίστοιχα. Άρα πρέπει να γνωρίζουμε τη φορά της *f*. Όπως είδαμε όμως η φορά της τριβής είναι πάντα προς τέτοια κατεύθυνση ώστε η ροπή της να είναι αντίθετη από τη ροπή της *F*, εκτός της περίπτωσης που η *F* ασκείται στο κέντρο μάζας ή κοντά στο κέντρο μάζας σε μικρή γωνία με την οριζόντιο. Σε αυτή την περίπτωση όμως γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση έχει τη φορά της *F*.

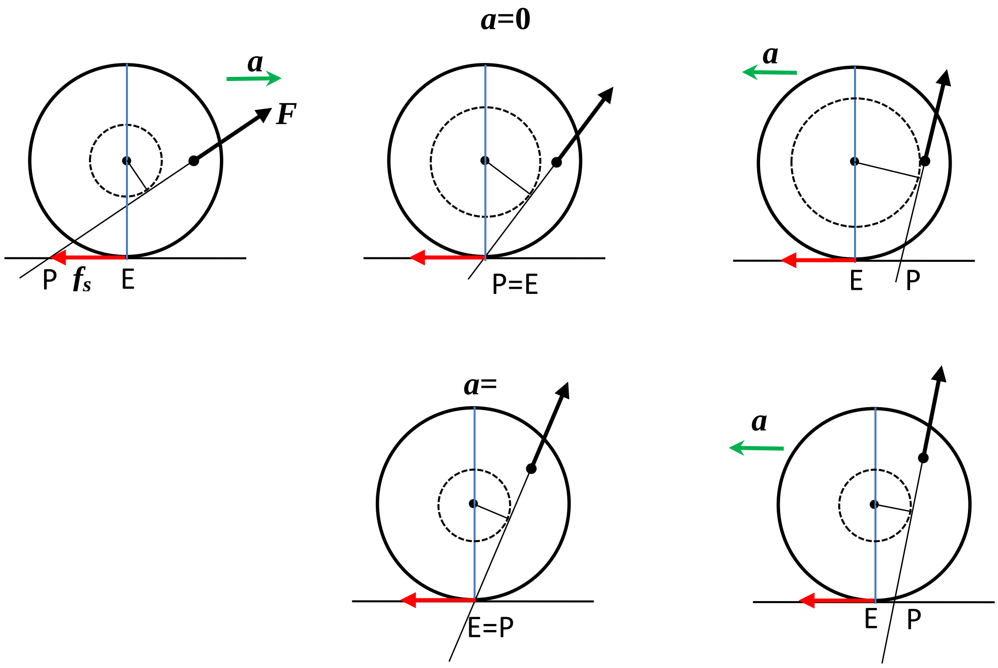
Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η φορά της επιτάχυνσης προσδιορίζεται εύκολα από τον παρακάτω γραφικό κανόνα, όπου *P* είναι το σημείο τομής του φορέα της δύναμης *F* με το δάπεδο και *E* είναι το σημείο επαφής με το δάπεδο :

Η επιτάχυνση είναι αντίθετη από το $\overrightarrow{EP}$ ***:*** $\vec{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EP}$

Όταν τα σημεία E και P συμπίπτουν, το σώμα ισορροπεί και η επιτάχυνση είναι μηδέν

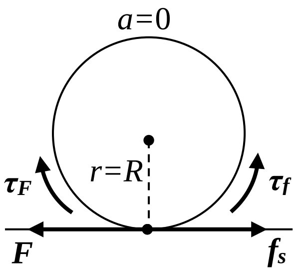
Δηλαδή η επιτάχυνση έχει τη φορά εκείνης της δύναμης, που βρίσκεται αντίπλευρα από το σημείο τομής P, σε σχέση με το σημείο επαφής E :
Όταν το σημείο P είναι στην πλευρά της τριβής *f* τότε η επιτάχυνση έχει τη φορά της δύναμης *F*.
Όταν το σημείο P είναι στην πλευρά της δύναμης *F* τότε η επιτάχυνση έχει τη φορά της τριβής *f*.

Η παραπάνω «συνταγή» παρουσιάζεται στα παρακάτω σχήματα

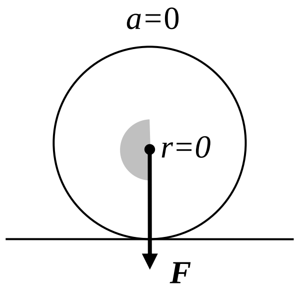


Μπορείτε να κάνετε πειράματα με ένα γιο-γιό για να επιβεβαιώσετε τα παραπάνω.

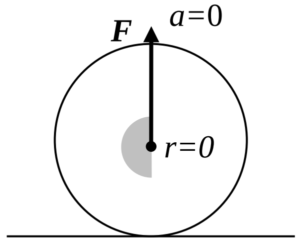
Όσο το r μεγαλώνει: $r \to R$, δηλ. η εξωτερική δύναμη ασκείται κοντύτερα στην περίμετρο, ο τομέας $2\theta_0$ μικραίνει. Για $r=R$, δηλαδή δύναμη (αριστερόστροφη) στην περιφέρεια, ο τομέας μηδενίζεται και η επιτάχυνση μηδενίζεται μόνο στη γωνία $\theta = \pi$. Για $r=0$ δηλαδή δύναμη στο κέντρο μάζας ο τομέας γίνεται μέγιστος και ίσος με π. Η επιτάχυνση μηδενίζεται στις γωνίες $\pi/2$ και $3\pi/2$. Εξετάζοντας αυτές τις οριακές περιπτώσεις παίρνουμε τα παρακάτω προφανή αποτελέσματα



Δύναμη στην περιφέρεια, θ=π
Ακινησία για όσο: $F \le \mu_S N = \mu_S mg$
αλλιώς ολίσθηση προς τα αριστερά



Δύναμη στο κέντρο μάζας, θ=3π/2
Ακινησία εφόσον: $F \le N_{\max} - B$
αλλιώς σπάει το δάπεδο



Δύναμη στο κέντρο μάζας, θ=π/2
Ακινησία εφόσον: $F \le B = mg$
αλλιώς το σώμα ανυψώνεται

Από τους δύο τομείς, τον εμπρόσθιο $2\theta_\kappa$ (όπου $f_s \le 0$) και τον οπίσθιο $2\theta_0$ (όπου $a \le 0$) μεγαλύτερος είναι ο οπίσθιος. Για $r \neq 0$, $\kappa<1$: $\theta_0 > \theta_\kappa$. Για $r=0$: $\theta_0 = \theta_\kappa = \pi/2$. Για $\kappa=1$ (στεφάνη) : $\theta_0 = \theta_\kappa$

Ισορροπία άκαμπτου σώματος

Για να ισορροπεί ένα άκαμπτο σώμα δεν αρκεί το άθροισμα των δυνάμεων που του ασκούνται να είναι μηδέν. Πρέπει και το άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο να είναι μηδέν για να μην έχει γωνιακή επιτάχυνση. Τέλος δεν πρέπει να έχει ούτε καν σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ώστε κάθε ξεχωριστό σημείο του να είναι σε ισορροπία, δηλαδή να μην έχει επιτάχυνση (κεντρομόλο). Έτσι κατάσταση ισορροπίας για ένα άκαμπτο σώμα είναι μόνον η ακινησία ή η μεταφορική ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Συνθήκες ισορροπίας άκαμπτου σώματος :

1) $\vec{F}_{o\lambda} = 0$

2) $\vec{\tau}_{o\lambda} = 0 \ \ \forall$ σημείο O

3) ω=0

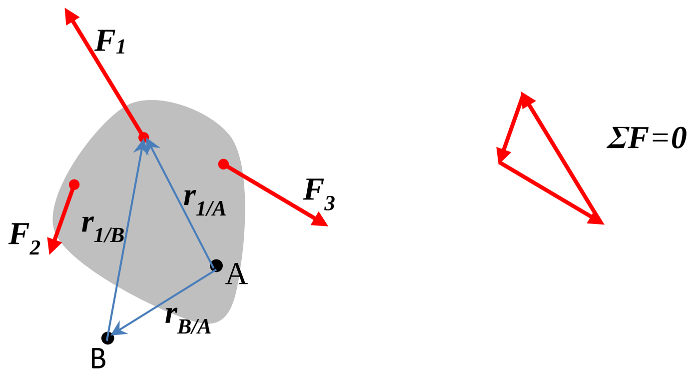
Αν ισχύει η 1) αρκεί να αποδείξουμε ότι η 2) ισχύει για ένα βολικό τυχαίο σημείο. Τότε θα ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο σημείο.
Στη γενικότερη περίπτωση οι παραπάνω σχέσεις ισοδυναμούν με 6 εξισώσεις από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε 6 αγνώστους. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με ομοεπίπεδες δυνάμεις π.χ. στο επίπεδο *x-y* των οποίων οι ροπές θα είναι στον άξονα *z*. Έτσι θα έχουμε 3 σχέσεις :

$$F_{o\lambda,x} = 0\,,\ F_{o\lambda,y} = 0\,,\ \tau_{o\lambda,z} = 0$$

από τις οποίες θα μπορούμε να προσδιορίσουμε 3 αγνώστους.

Αποδεικνύουμε ότι όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν τότε η ολική ροπή έχει την ίδια τιμή γύρω από οποιοδήποτε σημείο αναφοράς και να υπολογιστεί :

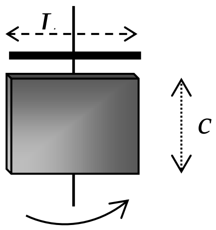
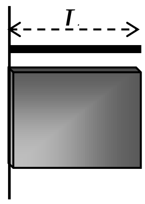
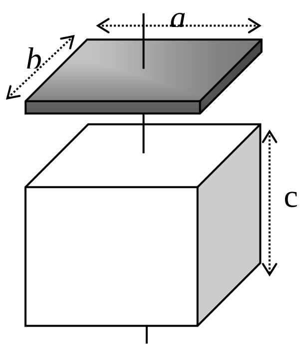
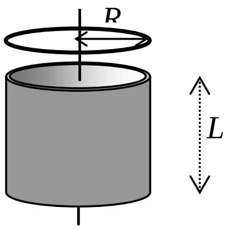
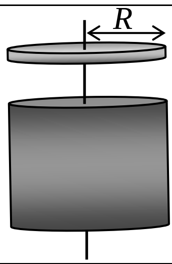
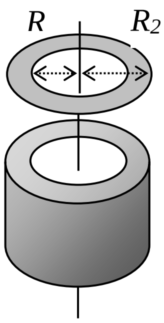
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{r}_{i/O} \times \vec{F}_i = \vec{\tau} = \sigma\tau\alpha\theta. \text{ για κάθε σημείο O}$$

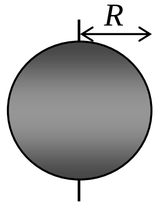
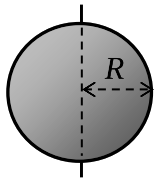
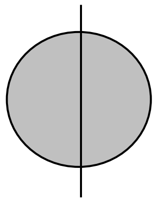
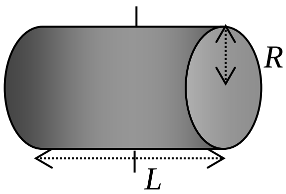
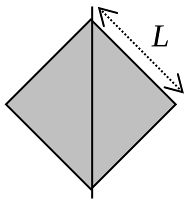


$$\vec{\tau}_A = \sum_i \vec{r}_{i/A} \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_{i/B} + \vec{r}_{B/A}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_{i/B} \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_B + \vec{r}_{B/A} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{\tau}_B + \vec{r}_{B/A} \times 0 = \vec{\tau}_B$$

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Όσες είναι γύρω από το κέντρο μάζας φέρουν το δείκτη C

Περιγραφή	**Σχήμα**	**Ροπή αδρανείας**
Ράβδος από το μέσο της Πλάκα από το μέσο της		$I_C = \frac{1}{12} ML^2$
Ράβδος ή πλάκα από το άκρο της (Steiner παράλληλοι άξονες: $I = I_C + Md^2$)		$I = \frac{1}{3} ML^2$
Πλάκα από το κέντρο της (λεπτές πλάκες $I_z = I_x + I_y$) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από το κέντρο του.		$I_C = \frac{1}{12} M\left(a^2 + b^2\right)$
Στεφάνη Κυλινδρικός φλοιός		$I_C = MR^2$
Κυκλικός δίσκος Κύλινδρος		$I_C = \frac{1}{2} MR^2$
Δακτύλιος Κυλινδρικός φλοιός		$I_C = \frac{1}{2} M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$

Περιγραφή	**Σχήμα**	**Ροπή αδρανείας**
Σφαίρα		$I_C = \frac{2}{5}MR^2$
Σφαιρικός φλοιός		$I_C = \frac{2}{3}MR^2$
Δίσκος γύρω από παράλληλο στο επίπεδό του άξονα που περνάει από το κέντρο του		$I'_C = \frac{I_C}{2} = \frac{1}{4}mR^2$
Κύλινδρος γύρω από κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο του		$I'_C = I'_{C\ (δίσκου\ R)} + I_{C\ (ράβδου\ L)}$ $= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$
Τετράγωνο γύρω από διαγώνιό του		$I'_C = I_C = \frac{1}{12}mL^2$

Δείτε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των παραπάνω τύπων και μην τους απομνημονεύεται καθώς ή θα δίνονται στα θέματα ή μπορεί και να σας ζητηθούν ως ερώτημα:

- Από διαστατική ανάλυση η ροπή αδρανείας θα είναι πάντα της μορφής: $I = \kappa \cdot mx^2$ όπου *m* η μάζα του σώματος, *x* χαρακτηριστική διάστασή του και *κ* αδιάστατη σταθερά
- Για ομογενή σώματα το *κ* εξαρτάται από το σχήμα και μόνο του σώματος και για δεδομένη μέγιστη διάσταση *x* και μάζα *m* δηλώνει πόσο κοντά στο κέντρο μάζας είναι κατανεμημένη η μάζα. Δηλ. πόσο το σχήμα πλησιάζει το υλικό σημείο. Όσο πιο μικρό είναι το *κ* τόσο το άκαμπτο σώμα θα πλησιάζει περισσότερο στο υλικό σημείο και η ροπή αδρανείας του θα ελαττώνεται.