ΟΡΙΣΜΟΙ ΟΡΜΗΣ, ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ, ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΡΟΠΗΣ

Ορμή και Στροφορμή

Ως ορμή ορίζεται η ποσότητα κίνησης ενός σώματος και είναι ίση με το γινόμενο της ταχύτητάς του επί τη μάζα του και επί τον παράγοντα γ που είναι μια συνάρτηση του μέτρου της ταχύτητας :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{\upsilon}$$

Η μάζα m σε αυτόν τον τύπο ονομάζεται αδρανειακή μάζα. Ο παράγοντας γ : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

είναι ίσος με τη μονάδα για ταχύτητες της καθημερινότητας καθώς αυτές είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός

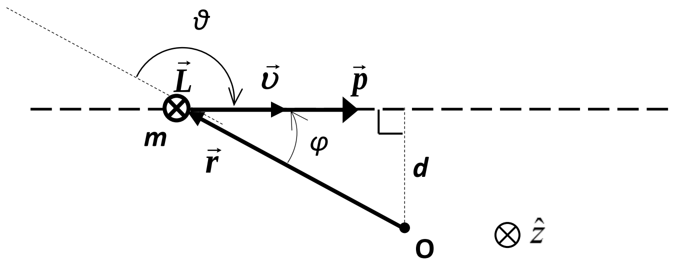
Άρα στο εξής : $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

Η στροφορμή είναι η ποσότητα της περιστροφικής κίνησης γύρω από ένα σημείο Ο και ορίζεται ως :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}$$

$$L = mr\upsilon \sin\theta = mr\upsilon \sin\varphi \Rightarrow L = m\upsilon d$$

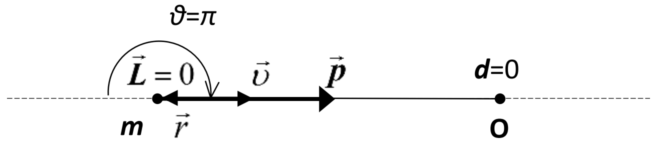
Η στροφορμή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ και με φορά που ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η κάθετη απόσταση d μεταξύ της διεύθυνσης της ταχύτητας και του σημείου Ο ονομάζεται μοχλοβραχίονας.



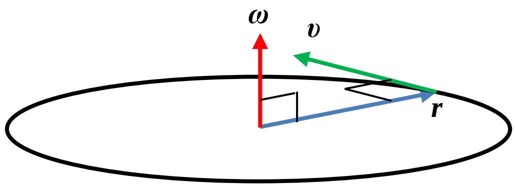
Η στροφορμή εξαρτάται από το σημείο Ο και αλλάζει αν την υπολογίσουμε ως προς ένα άλλο σημείο Ο΄. Ένα σώμα διαθέτει στροφορμή ως προς ένα σημείο μόνο αν κινείται με ταχύτητα που ΔΕΝ δείχνει κατευθείαν προς ή από αυτό σημείο ($d\neq0$). Άρα στη στροφορμή συνεισφέρει μόνο η αζιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας όπως βγαίνει και από τον ορισμό της :

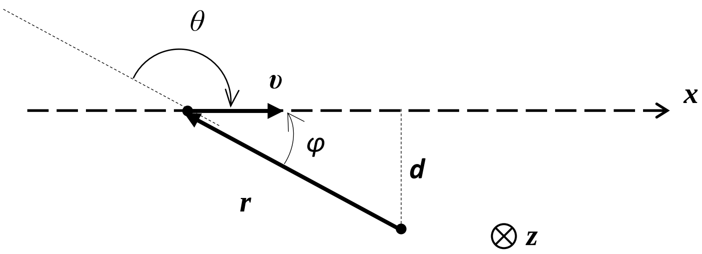
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \left(\vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\theta\right) = \cancel{mr\upsilon_r\hat{r}\times\hat{r}} + mr\upsilon_\theta\hat{r}\times\hat{\theta} \Rightarrow \qquad \vec{L} = mr^2\omega\hat{z}$$

$$L = m\omega r^2$$



Στοιχειώδη Παραδείγματα





Στροφορμή σωματιδίου που κινείται σε κύκλο

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - m(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = mr^2\vec{\omega} = m\upsilon r\hat{z}$

Στροφορμή σωματιδίου που κινείται σε ευθεία γραμμή

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} = m\upsilon\vec{r} \times \hat{x} = m\upsilon r \sin\theta\hat{z} = m\upsilon r \sin\varphi\hat{z} = m\upsilon d\hat{z}$

Για ένα σύστημα σωματιδίων η ορμή του θα είναι το άθροισμα των ορμών όλων των σωματιδίων του και αντίστοιχα η στροφορμή του θα είναι το άθροισμα των στροφορμών όλων των σωματιδίων του :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$$

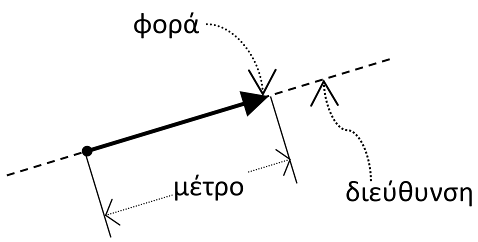
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_\iota = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_\iota)$$

ΔΥΝΑΜΗ – ορισμός

Με την έννοια της δύναμης εκφράζουμε και ποσοτικοποιούμε την αλληλεπίδραση ενός σώματος με το περιβάλλον του, δηλαδή με τα άλλα σώματα που το περιβάλλουν.

Μια δύναμη σε ένα σώμα είναι ουσιαστικά ένα τράβηγμα (έλξη) ή ένα σπρώξιμο (ώθηση) και προέρχεται πάντα από ένα άλλο σώμα.

Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά:

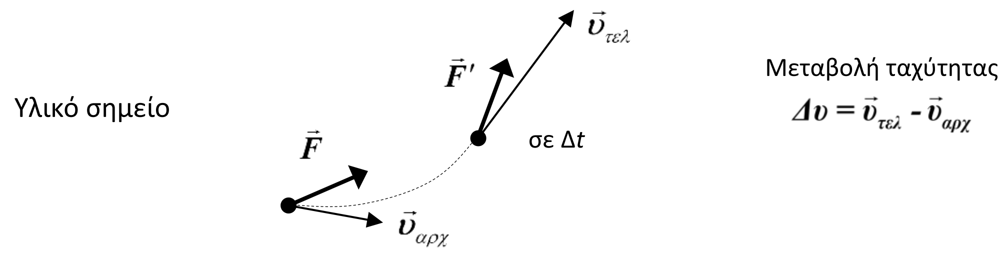


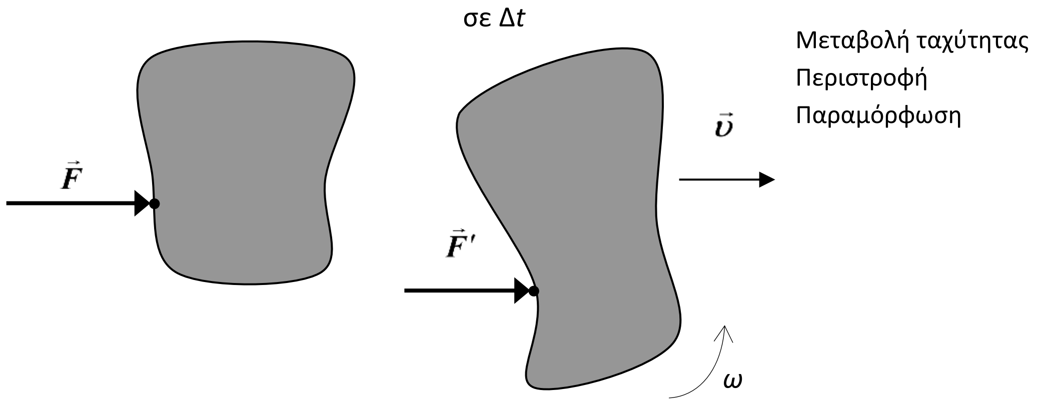
Συμβολίζεται γενικά ως: $\vec{F}$ (από την αγγλική λέξη force)

Τα αποτελέσματα μιας δύναμης εξαρτώνται από το μέγεθος και την κατεύθυνση εφαρμογής της και είναι :

1. **είτε η αλλαγή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος**

2. **είτε η παραμόρφωσή του.**





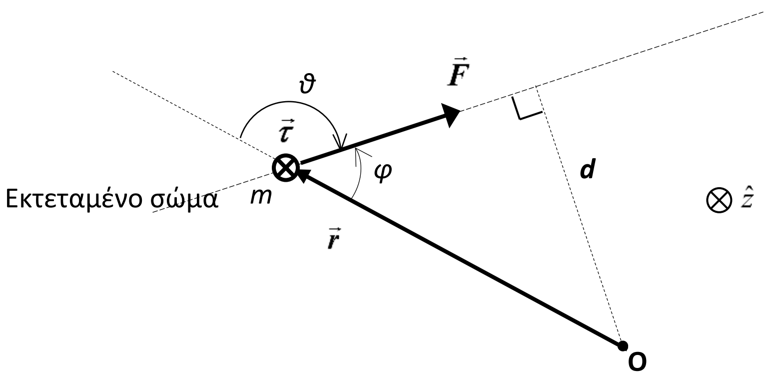
Οι δυνάμεις μετριούνται σε N (νιούτον) με τα δυναμόμετρα. Το N δεν είναι θεμελιώδης μονάδα του SI και θα δούμε παρακάτω το πως συνδέεται με τις θεμελιώδεις μονάδες m, s, kg.
Τα δυναμόμετρα είναι ελατήρια για τα οποία ισχύει ό νόμος των ελαστικών παραμορφώσεων του Hooke: «*Το μέτρο της ελαστικής παραμόρφωσης είναι ανάλογο της δύναμης που την προκαλεί* $\Delta\ell \propto F$». Με μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως $F = -k \cdot \Delta\ell$ όπου k η σταθερά αναλογίας σε N/m που δείχνει πόσο σκληρό είναι το ελατήριο. Οπότε μετρώντας το $\Delta\ell$ με ένα πρότυπο ελατήριο μετράμε την F . Πρότυπο ελατήριο είναι αυτό που διαλέγουμε εμείς και στο οποίο ορίζουμε ότι χρειάζεται 1 N για να ανοίξει 1 m δηλ. έχει k=1 N/m
Θα σχεδιάζουμε τις δυνάμεις μόνο ως τραβήγματα.

Ροπή δύναμης

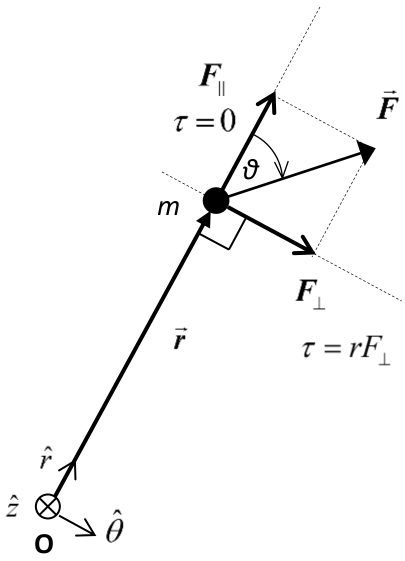
Η ***ροπή μιας δύναμης*** ως προς ένα σημείο O ορίζεται ανάλογα με την ορμή-στροφορμή ως:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = rF \sin\theta \hat{z}$$
$$\tau = rF \sin\varphi = Fd$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης ως προς το σημείο O, θ η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης του $\vec{r}$ και της $\vec{F}$, δηλ.: $\theta = \sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{F}\right)$ και d η απόσταση του σημείου O από το φορέα της δύναμης (μοχλοβραχίονας).



Η ροπή μιας δύναμης εξαρτάται από το σημείο Ο και αλλάζει αν την υπολογίσουμε ως προς ένα άλλο σημείο Ο΄. Μια δύναμη διαθέτει ροπή αν έχει την ικανότητα να περιστρέψει ένα σώμα γύρω από ένα σημείο Ο δηλ. αν δεν δείχνει κατευθείαν προς ή από αυτό σημείο ($d \neq 0$). Ο παραπάνω ορισμός βασίζεται στο ότι είναι πιο εύκολο να κλείσουμε μια πόρτα αν την σπρώξουμε όσο πιο μακριά γίνεται από τους μεντεσέδες και κάθετα προς την πόρτα. Άρα στη ροπή συνεισφέρει μόνο η κάθετη στο $\vec{r}$ συνιστώσα της δύναμης όπως βγαίνει και από τον ορισμό της : $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(F_\perp \hat{\theta} + F_\parallel \hat{r} \right) = rF_\perp \hat{r} \times \hat{\theta} \Rightarrow$ $\vec{\tau} = rF_\perp \hat{z} = dF\hat{z}$ $\tau = rF_\perp$



Ώθηση δύναμης (impulse)

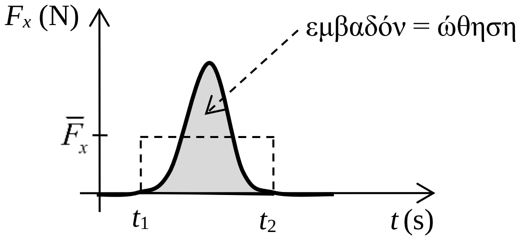
Για μια σταθερή δύναμη, ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος της ώθησης $\vec{I}$ (συμβολίζεται και με $\vec{J}$) ως το γινόμενο της δύναμης επί το χρονικό διάστημα που αυτή δρα σε ένα σώμα:

Σταθερή δύναμη : $\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \vec{F}(t_2 - t_1)$

Για μη σταθερή δύναμη, η ώθηση ορίζεται ως το ολοκλήρωμα : $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

το οποίο είναι ουσιαστικά ένα «άθροισμα» διανυσμάτων

Η κάθε συνιστώσα της ώθησης είναι ίση με το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $F_i(t)$, που δίνει την τιμή της αντίστοιχης συνιστώσας της δύναμης σαν συνάρτηση με το χρόνο, μεταξύ δύο χρονικών στιγμών



Η μέση δύναμη για κάποιο χρονικό διάστημα ορίζεται από : $\bar{\vec{F}} = \dfrac{\vec{I}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{I} = \bar{\vec{F}}\Delta t$ και είναι το ύψος του ορθογωνίου με βάση Δt που έχει εμβαδόν ίσο με της καμπύλης.(η σταθερή δύναμη που παρέχει την ίδια ώθηση στο ίδιο χρονικό διάστημα με την μεταβλητή δύναμη)

Οι τύποι των δυνάμεων της φύσης

Η επιτυχία της έννοιας της δύναμης έγκειται στη δυνατότητα μας να διατυπώσουμε απλούς νόμους (τύπους) δυνάμεων οι οποίοι οδηγούν στη σωστή πρόβλεψη της κίνησης που το σώμα θα ακολουθήσει μέσω των νόμων του Νεύτωνα (αυτοί θα παρουσιαστούν παρακάτω).

Οι διάφορες δυνάμεις εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά των δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν π.χ. μάζες, ηλεκτρικά φορτία, σχετική απόσταση, σχήμα, μέγεθος, σχετική ταχύτητα, κλπ.. Αυτή η εξάρτηση είναι διαφορετική για κάθε είδος δύναμης και δίνεται από μια εξίσωση που ονομάζεται τύπος της δύναμης (force law). **Οι τύποι των διαφόρων δυνάμεων ανακαλύπτονται με παρατήρηση και πείραμα.**
Οι διάφορες δυνάμεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες : τις **δυνάμεις από απόσταση** και τις **δυνάμεις επαφής**:

Από απόσταση ασκούνται όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης.

Με επαφή ασκούνται όλες οι υπόλοιπες δυνάμεις της καθημερινότητας.

Οι δυνάμεις επαφής είναι ηλεκτρομαγνητικής προέλευσης και ασκούνται μεταξύ των μορίων που αποτελούν τα διάφορα υλικά (διαμοριακές δυνάμεις) όταν βρίσκονται σε πολύ μικρή απόσταση (επαφή). Ουσιαστικά προέρχονται από τις ηλεκτρικές έλξεις και απώσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων και των πυρήνων των ατόμων των μορίων.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟ ΑΠΟΣΤΑΣΗ	**ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΦΗ**
Βαρυτική (Βάρος, W ή B ή F_G)	Κάθετη αντίδραση (N normal)
Ηλεκτροστατική (F_E)	Τριβή (f friction)
Μαγνητική (F_B)	Τάση νήματος (T)
Ισχυρή πυρηνική	Δύναμη ελατηρίου ($F_{ελ}$)
Ασθενής πυρηνική	Άνωση (A)
	Αντίσταση αέρα ή οπισθέλκουσα (F_D drag)
	Άντωση ή δυναμική άνωση (F_L lift)
	Προώθηση (F_T thrust)
	κλπ.

Μερικοί τύποι, των πιο κοινών, δυνάμεων που θα συναντήσουμε, δίνονται συνοπτικά παρακάτω.

Οι θεμελιώδεις δυνάμεις ή δυνάμεις από απόσταση ή δυνάμεις πεδίου

Οι ***<u>βαρυτικές</u>***, ***<u>ηλεκτροστατικές</u>*** και ***<u>μαγνητικές</u>*** δυνάμεις, δηλαδή οι θεμελιώδης δυνάμεις της φύσης δρουν από απόσταση χωρίς επαφή μεταξύ δύο σωμάτων και ονομάζονται δυνάμεις πεδίου. Οι δυνάμεις αυτές θα εξεταστούν λεπτομερώς σε αντίστοιχα κεφάλαια. Από απόσταση δρουν και οι πυρηνικές (ασθενείς και ισχυρές) δυνάμεις οι οποίες όμως δεν εμφανίζονται στην καθημερινότητα του μακρόκοσμου, καθώς έχουν πολύ μικρή εμβέλεια, της τάξης του 10^{-15} m και δεν θα τις εξετάσουμε καθόλου.

Η έννοια του πεδίου κατασκευάστηκε για να αναγάγει τις δυνάμεις από απόσταση σε δυνάμεις επαφής (Faraday) καθώς στην καθημερινή μας εμπειρία όλες οι δυνάμεις ασκούνται μέσω επαφής με κάποιο άλλο σώμα. Έτσι για τις δυνάμεις από απόσταση θεωρούμε ότι το ένα σώμα δημιουργεί στο χώρο γύρω του ένα πεδίο το οποίο με τη σειρά του «ακουμπά», έρχεται σε επαφή με το δεύτερο σώμα και το σπρώχνει ή το τραβά. Άρα πεδίο είναι ο χώρος όπου το κατάλληλο υπόθεμα (π.χ. βαρυτική μάζα, ηλεκτρικό φορτίο) δέχεται δυνάμεις.

Ο τύπος αυτών των δυνάμεων θα είναι πάντα της μορφής :

$$\text{Δύναμη} \propto \text{φορτίο} \times \text{ένταση πεδίου}$$

Η βαρυτική δύναμη δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

Είναι κεντρική και ελκτική δύναμη μεταξύ σωμάτων που έχουν «βαρυτικά φορτία» m και M (υπάρχει μόνο ένα είδος βαρυτικού φορτίου, είναι πάντα θετικό και μετριέται σε kg). Όπου η ένταση του πεδίου $\vec{g}$ δημιουργείται από τη μάζα M και προκύπτει ότι έχει μονάδες επιτάχυνσης N/kg=m/s^2. Αναλύεται παρακάτω ότι το βαρυτικό φορτίο ή βαρυτική μάζα είναι τελικά ίση με την αδρανειακή μάζα του σώματος που

εμφανίζεται στον ορισμό της ορμής, της στροφορμής και στο 2ο νόμο του Νεύτωνα (παρακάτω) και άρα στο εξής και οι δύο θα αναφέρονται από κοινού απλώς ως μάζα.
Για την ηλεκτροστατική δύναμη ο τύπος είναι

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

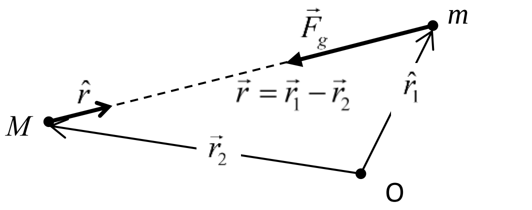
και για την μαγνητική

$$\vec{F}_B = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}\,, \quad F_B = q\upsilon B\sin\theta$$

όπου q το ηλεκτρικό φορτίο του σώματος (μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό), $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητά του και $\vec{E}$, $\vec{B}$ οι εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίο αντίστοιχα. Το ηλεκτροστατικό πεδίο δημιουργείται από ένα άλλο ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ το μαγνητικό πεδίο από ένα άλλο κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο Q με ταχύτητα $\vec{v}$. Η ηλεκτροστατική δύναμη είναι επίσης κεντρική δύναμη, μπορεί να είναι ελκτική ή απωθητική και εμφανίζεται μεταξύ σωμάτων που έχουν την ιδιότητα που ονομάζουμε ηλεκτρικό φορτίο. Η μαγνητική δύναμη εμφανίζεται μόνο μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων. Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου, το θετικό και το αρνητικό. Το ηλεκτρικό φορτίο μετριέται σε C, κουλόμπ και είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του e = 1,602 x 10^{-19} C.
Οι τύποι των πεδίων που δημιουργούν σημειακές μάζες και σημειακά ηλεκτρικά φορτία είναι :

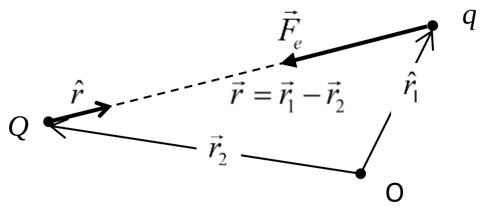
$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}\,, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\,, \qquad \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\vec{\upsilon}\times\vec{E}$$

και προκύπτουν από τους θεμελιώδεις τύπους της βαρυτικής δύναμης (Newton), της ηλεκτροστατικής δύναμης (Coulomb) και το νόμο των Biot-Savart για τη δημιουργία του μαγνητικού πεδίου από ένα ηλεκτρικό ρεύμα.



Νόμος παγκόσμιας βαρύτητας του Newton

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$



Νόμος Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$$

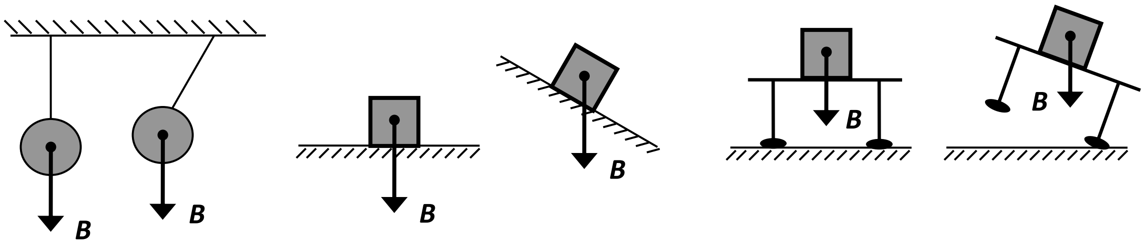
Η σταθερά αναλογίας *G*, ονομάζεται παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και είναι ίση με G=6,67x10^{-11}Nm^2/kg^2≈20/3 x10^{-11} m^3·s^{-2}·kg^{-1} . Η *G* δίνει το μέτρο της δύναμης μεταξύ δύο σωματιδίων βαρυτικού φορτίου (μάζας) 1 kg το καθένα, που βρίσκονται σε απόσταση 1 m μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι η βαρυτική είναι μια πολύ ασθενής δύναμη που αποκτά σημασία μόνο όταν ασκείται μεταξύ σωμάτων με πολύ μεγάλη μάζα.
Για τη σταθερά αναλογίας k_c του νόμου Coulomb έχουμε : $k_c = 1/4\pi\varepsilon_0$ =8,988 x 10^9 N·m^2/C^2 ≈ 9,0 x 10^9 N·m^2/C^2, άρα ε_0=8,854x10^{-12} C^2/N·m που ονομάζεται ηλεκτρική σταθερά. Επίσης αξίζει να θυμόσαστε ότι η μαγνητική σταθερά είναι ίση με $\mu_0=4\pi$ x 10^{-7} N·s^2/C^2 ακριβώς, ώστε $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ όπου *c* η ταχύτητα του φωτός να είναι ίση με *c* = 299.792.458 m/s ακριβώς. Από το μέγεθος της σταθεράς k_c βλέπουμε ότι η ηλεκτροστατική είναι μια πολύ ισχυρή δύναμη και ο μόνος λόγος που δεν επικρατεί στην καθημερινή ζωή είναι επειδή τα σώματα είναι ουσιαστικά ηλεκτρικώς ουδέτερα.
Το αξιοσημείωτο των παραπάνω δύο τύπων δύναμης είναι ότι και οι δύο ακολουθούν το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου $F \propto 1/r^2$ και σαν συνέπεια αυτού του γεγονότος ισχύουν τόσο για υλικά σημεία όσο και για ομογενείς σφαιρικές κατανομές μάζας και ηλεκτρικού φορτίου. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την βαρυτική δύναμη μεταξύ του Ήλιου και ενός πλανήτη.

Βάρος

Στην επιφάνεια της Γης, όπως και σε κάθε ουράνιο σώμα, η βαρυτική της έλξη είναι η γνωστή δύναμη του βάρους με μέτρο που δίνεται από τον τύπο

$$B = mg$$

με τη σταθερά g της έντασης του πεδίου βαρύτητας ή της επιτάχυνση της βαρύτητας, να έχει μια μέση τιμή στην επιφάνεια της Γης ίση με g=9,8 N/kg≈10 N/kg. Το μέτρο της g μεταβάλλεται ελαφρώς από τόπο σε τόπο πάνω σε ένα ουράνιο σώμα και δραματικά από ουράνιο σώμα σε ουράνιο σώμα, π.χ. στη Σελήνη είναι περίπου το ένα έκτο από όσο είναι στη Γη. Το g εξαρτάται από τη μάζα και το μέγεθος του ουράνιου σώματος. Έτσι δεν έχει νόημα να μιλάμε για το βάρος ενός πλανήτη αλλά μόνο για το βάρος των σωμάτων πάνω του.
Το βάρος πάντα τραβάει ένα σώμα προς το κέντρο του ουράνιου σώματος, δηλαδή κατακόρυφα προς τα κάτω. Παραδείγματα :



Σφαίρα που αιωρείται

Σώμα σε οριζόντιο δάπεδο και σε κατηφόρα (κεκλιμένο επίπεδο)

Σώμα σε τραπέζι και σε γερμένο τραπέζι

Το γεγονός ότι όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση (g), ανεξάρτητα από τη μάζα που έχουν, ανακαλύφθηκε από το Γαλιλαίο. Ο Νεύτωνας αργότερα συνέδεσε το βάρος με τη μάζα και επίσης από το σχήμα των τροχιών των πλανητών ανακάλυψε τον παγκόσμιο νόμο της βαρυτικής δύναμης. Λέγεται παγκόσμιος γιατί ισχύει για όλα τα σώματα πάνω στη Γη αλλά και για δύο οποιαδήποτε άλλα σώματα στο σύμπαν που έχουν μάζα. Ο νόμος αυτός ήταν ο πρώτος που συνέδεσε την ουράνια μηχανική που έως τότε θεωρούνταν μυστηριώδης ή και θεϊκή (γινόταν σε κύκλους που είναι η τέλεια καμπύλη οι οποίοι έμεναν αιωνίως αναλοίωτοι) με τα απλά φαινόμενα της καθημερινότητας στην επιφάνεια της Γης. Γι΄ αυτό και λέγεται η «μεγάλη σύνθεση» και αποτελεί ένα τεράστιο άλμα στην προσπάθεια της ανθρωπότητας να κατανοήσει το σύμπαν. Αν μετρήσουμε τη σταθερά G, όπως έγινε δυνατό από τα πειράματα του Cavendish to 1798, μπορούμε μετά να υπολογίζουμε την βαρυτική δύναμη μεταξύ οποιονδήποτε δύο μαζών σε οποιαδήποτε απόσταση.

Ένα σώμα πάνω στην επιφάνεια της Γης βρίσκεται πρακτικά σε απόσταση από το κέντρο της Γης όση είναι η ακτίνα της Γης r=$R_Γ$. Έτσι, στην επιφάνεια της Γης ο νόμος του Νεύτωνα, που πρέπει να μας δίνει το γνωστό βάρος ενός σώματος, γράφεται

$$B = F_G \Rightarrow mg = G\frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}^2}$$

και άρα

$$g = G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}$$

Το g μπορούσε να μετρηθεί από τα πειράματα του Γαλιλαίου και η ακτίνα της Γης είχε υπολογιστεί ήδη στην αρχαιότητα από τον Ερατοσθένη. Έτσι όταν από τα πειράματα του Cavendish προσδιορίστηκε το G μπορέσαμε να «ζυγίσουμε τη Γη» καθώς μας δόθηκε η δυνατότητα να υπολογίσουμε για πρώτη φορά τη μάζα της:

$$M_{\Gamma} = \frac{gR_{\Gamma}^2}{G} = \frac{9{,}807 \cdot \left(6{,}371\times 10^{6}\right)^2}{6{,}674\times 10^{-11}} = 5{,}96\times 10^{24}\ \text{kg}$$

Κεντρικές δυνάμεις

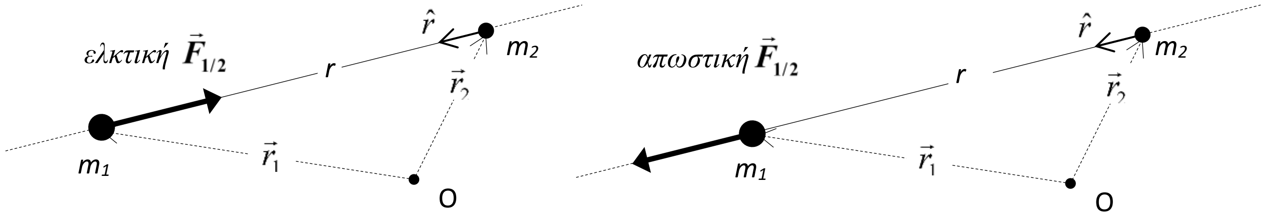
Δυνάμεις, μεταξύ δύο σωματιδίων, για τις οποίες

1. η διεύθυνση τους βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια δηλ. $\vec{F}_{1/2} \propto \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r\hat{r}$ και
2. το μέτρο τους εξαρτάται μόνο από την σχετική απόσταση $r = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|$ μεταξύ των δύο σωματιδίων $F_{1/2} = f(r)$

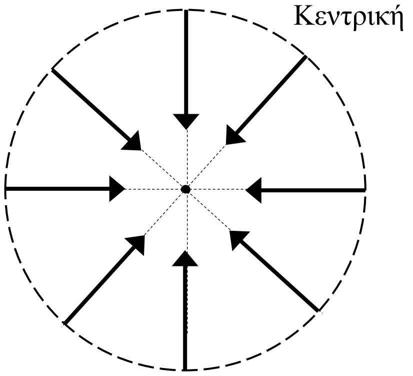
θα ονομάζονται κεντρικές.
Δηλαδή όταν ισχύει :

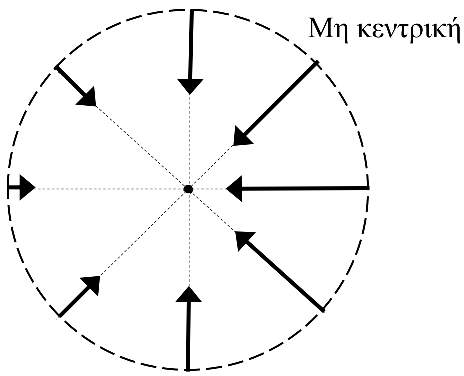
$$\vec{F}_{1/2} = f(r)\hat{r}\,.$$

όπου $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση που ενώνει τα δύο σωματίδια και με κατεύθυνση προς το 1. $\vec{F}_{1/2}$ δηλώνει τη δύναμη που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2.



Οι δυνάμεις με αυτή την μορφή διατηρούν την ενέργεια και τη στροφορμή.
Κεντρικές δυνάμεις είναι η βαρυτική και η ηλεκτροστατική δύναμη.
Οι κεντρικές δυνάμεις έχουν σταθερό μέτρο στην επιφάνεια μιας σφαίρας γύρω από το κέντρο

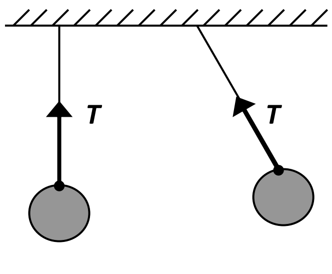




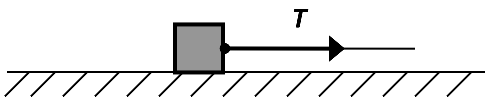
Οι δυνάμεις με επαφή

Τάση νήματος (*T*). Τα νήματα τραβάνε μόνο και δεν μπορούν να σπρώξουν. Θα τα θεωρούμε μη εκτατά (δεν επιμηκύνονται όταν τα τραβάμε) και αβαρή, δηλ. με μάζα μηδέν. Για την τάση νήματος δεν υπάρχει τύπος και άρα στα προβλήματα θα είναι ένα από τα ζητούμενα. Απλά ξέρουμε ότι αυτή έχει ένα μέγιστο όριο αντοχής $T \leq T_{\theta\rho\alpha\upsilon\sigma\eta\varsigma}$, που εξαρτάται από το υλικό του νήματος, πέραν του οποίου τα νήματα κόβονται:

Παραδείγματα:

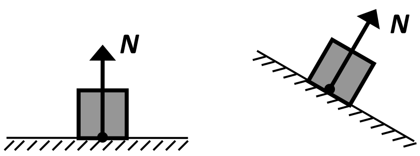


Σφαίρα που αιωρείται με νήμα από την οροφή

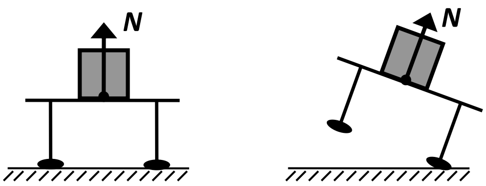


Σώμα σε οριζόντιο δάπεδο που το τραβάμε με νήμα

Κάθετη αντίδραση (*N*). Η κάθετη αντίδραση είναι δύναμη που εμφανίζεται πάντα στην επιφάνεια επαφής δύο στερεών σωμάτων και είναι κάθετη σε αυτήν. Η καθετή αντίδραση υπάρχει είτε τα σώματα είναι λεία είτε όχι (όταν δεν είναι λεία εμφανίζεται και τριβή). Η κάθετη αντίδραση είναι σπρώξιμο που απωθεί το ένα σώμα μακριά από το άλλο. Επίσης, όπως και για την τάση δεν υπάρχει τύπος για αυτήν και άρα στα προβλήματα θα είναι ένα από τα ζητούμενα. Συμβολίζεται με *N* από την αγγλική λέξη normal που σημαίνει και κάθετος. Είναι η δύναμη στήριξης που ασκούν τα τραπέζια και τα πατώματα στα αντικείμενα που βρίσκονται πάνω τους. Παραδείγματα:



Σώμα σε οριζόντιο δάπεδο και σε κατηφόρα (κεκλιμένο επίπεδο)



Σώμα σε τραπέζι και σε γερμένο τραπέζι

Τριβή (*f*). Η τριβή είναι μια πρόσθετη δύναμη που εμφανίζεται στην επιφάνεια επαφής δύο στερεών σωμάτων ***όταν αυτά δεν είναι λεία και όταν τείνουν να κινηθούν ή κινούνται*** το ένα σε σχέση με το άλλο. Η τριβή είναι παράλληλη με την επιφάνεια επαφής και με φορά αντίθετή της κίνησης ή της επικείμενης κίνησης. Υπάρχουν τρεις εμπειρικοί νόμοι για την τριβή. Οι δύο πρώτοι είχαν ανακαλυφθεί από το Leonardo da Vinci (1452-1519) αλλά ποτέ δεν είχαν δημοσιευτεί οπότε ανακαλύφθηκαν ξανά από τον Guillame Amonton (1699) και εμπλουτίστηκαν από τους Coulomb, Euler κ.α. (Αυτή είναι και μια βασική διαφορά μεταξύ τέχνης και επιστήμης. Αν κάποιος επιστήμονας δεν δημοσιοποιήσει μια ανακάλυψή του αργά η γρήγορα κάποιος άλλος επιστήμονας θα κάνει την ίδια ανακάλυψη. Όμως αν κάποιος καλλιτέχνης δεν δημιουργήσει ένα έργο όπως π.χ. ο da Vinci την Τζιοκόντα κανένας άλλος δεν πρόκειται να το δημιουργήσει.)
Σύμφωνα με αυτούς η τριβή μεταξύ δύο σωμάτων :

1. είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής τους (1ος νόμος του Amonton)
2. είναι ανάλογη με την κάθετη αντίδραση μεταξύ των σωμάτων (2ος νόμος του Amonton)
3. είναι ανεξάρτητη από τη σχετική τους ταχύτητα (νόμος Coulomb 1785)

Οπότε η τριβή εξαρτάται βασικά από το είδος του υλικού των δύο σωμάτων και από την κάθετη αντίδραση μεταξύ τους.

Η τριβή είναι τριών ειδών: στατική τριβή (f_s), κινητική τριβή (f_k) και τριβή κύλισης (f_r)

Η ***στατική τριβή*** εμφανίζεται όταν δύο σώματα τείνουν να κινηθούν κατά την επιφάνεια επαφής τους (κάτι τραβάει το ένα π.χ. τάση, βάρος κλπ.) χωρίς όμως να υπάρχει σχετική κίνηση στα σημεία επαφής. Η στατική τριβή έχει φορά **αντίθετη με την επικείμενη κίνηση**. Για τη στατική τριβή δεν υπάρχει τύπος και επίσης θα είναι ένα από τα ζητούμενα στα προβλήματα. Ξέρουμε απλώς ότι αυξάνεται έως μια μέγιστη τιμή, που ονομάζεται οριακή $f_{ορ}$ η οποία όταν ξεπεραστεί τα σώματα αρχίζουν να ολισθαίνουν.

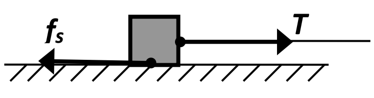
$$0 \leq f_s \leq f_{o\rho}$$

Για την οριακή τιμή της στατικής τριβής υπάρχει τύπος. Αυτή είναι ανάλογη της κάθετης αντίδρασης

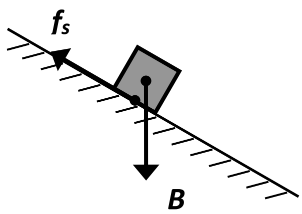
$$f_s \leq f_{o\rho} = \mu_s N$$

Ο συντελεστής μ_s λέγεται συντελεστής στατικής τριβής και είναι ένας απλός αριθμός που εξαρτάται από το υλικό των δύο σωμάτων που είναι σε επαφή (δείτε πίνακα παρακάτω).

υ=0, δεν κινούνται



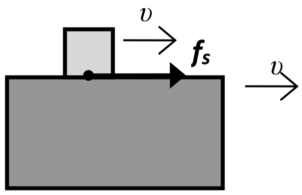
Σώμα πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο που το τραβάμε προς τα δεξιά χωρίς όμως να κινείται



Σώμα που στέκεται σε μη λείο κεκλιμένο δάπεδο

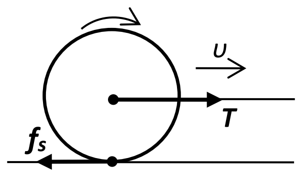
Η στατική τριβή μπορεί να προκαλέσει κίνηση. Αν δεν υπήρχε δεν θα μπορούσαμε να κυλίσουμε πράγματα ούτε να περπατήσουμε. Παράδειγμα:

Τα δύο σώματα
μετακινούνται **μαζί προς τα μπροστά**
αλλά δεν κινούνται μεταξύ τους

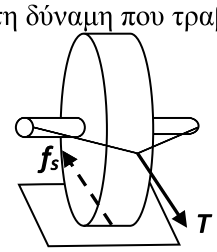


Το κάτω σώμα κινείται προς τα δεξιά. Άρα το πάνω αν γλιστρήσει θα μείνει πίσω και άρα θα κινηθεί προς τα αριστερά σε σχέση με το κάτω. Αν τα σώματα δεν είναι λεία η τριβή θα είναι ανάποδα προς την κίνηση που θα έκανε το πάνω σώμα, άρα προς τα δεξιά. Αυτή θα το «κολλήσει» και θα το παρασύρει να κινηθεί μαζί με το κάτω. Όσο τα σώματα παραμένουν κολλημένα η τριβή είναι στατική και προκαλεί την κίνηση του πάνω σώματος

Στατική επίσης είναι η τριβή για κυλινδρικά σώματα που επιταχύνονται ενώ κυλάνε. Με την κύλιση θα ασχοληθούμε αργότερα. Εδώ σημειώνουμε μόνο τα βασικά. **Κύλιση σημαίνει να γυρίζει το σώμα πάνω στο δάπεδο και ταυτόχρονα να μετακινείται χωρίς όμως να ολισθαίνει στο σημείο επαφής του με αυτό.** Δηλαδή το μοναδικό σημείο επαφής του με το δάπεδο παραμένει στιγμιαία ακίνητο και το υπόλοιπο σώμα γυρίζει γύρω του. Οπότε η τριβή σε εκείνο το σημείο, αν υπάρχει, θα είναι στατική.
Μία περίπτωση είναι να τραβάμε μια ρόδα από τον άξονά της όπως στο σχήμα. Αν δεν υπήρχε τριβή το σώμα απλά θα γλιστρούσε προς τα μπροστά. Έτσι η στατική τριβή που αντιτίθεται στην επικείμενη κίνηση θα είναι προς τα πίσω και θα το κάνει να γυρίζει.
Όταν τραβάμε τον άξονα η τριβή θα είναι πάντα αντίθετη στη δύναμη που τραβάει.

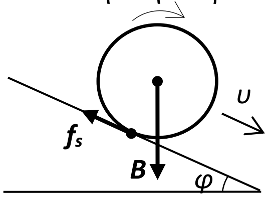


Ρόδα που την τραβάμε με νήμα από τον άξονά της και κυλάει. Η στατική τριβή f_s είναι αντίθετη στην ταχύτητα και προκαλεί την περιστροφή του.

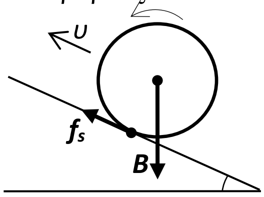


Τρισδιάστατο σχήμα.

Έτσι γυρίζουν οι ρόδες σε μια άμαξα από τα άλογα που την τραβάνε.
Αντί να τραβάμε μια ρόδα μπορούμε να την βάλουμε σε μια κατηφόρα να κυλίσει. Δηλαδή να την τραβήξει το βάρος της. Είτε η ρόδα κυλάει προς τα κάτω είτε επιβραδύνεται προς τα πάνω η τριβή θα είναι πάντα προς τα «πάνω», αντίθετη στην παράλληλη με το επίπεδο συνιστώσα του βάρους.

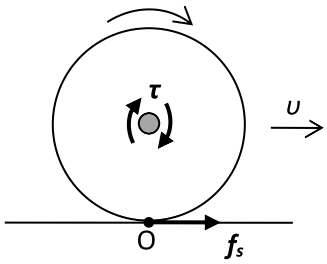


Ρόδα που λόγω του βάρους της κατεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο κυλώντας χωρίς να ολισθαίνει. Το βάρος τραβάει προς τα κάτω, προς τη μεριά της ταχύτητας. Η στατική τριβή είναι προς τα πάνω, αντίθετη στο βάρος και βοηθάει το σώμα να γυρίζει

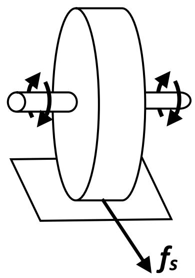


Ρόδα που ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο επιβραδυνόμενη από το βάρος. Το βάρος τραβάει πάλι προς τα κάτω αλλά τώρα είναι αντίθετο με την ταχύτητα. Η στατική τριβή παραμένει προς τα πάνω αντίθετη στο βάρος και τώρα εμποδίζει το σώμα να γυρίζει

Μια άλλη περίπτωση είναι να μην τραβάμε τον άξονα αλλά να τον γυρίζουμε, να τον στρίβουμε δηλαδή. Αυτό λέγεται ασκώ ροπή. Έτσι κάνει ο κινητήρας ενός αυτοκινήτου στις ρόδες με τις οποίες είναι συνδεδεμένος. Γυρίζει τον άξονά τους, τους ασκεί ροπή. Στην περίπτωση αυτή αν δεν υπήρχε τριβή, το σημείο επαφής με το δάπεδο θα γύριζε προς τα πίσω. Άρα αν υπάρχει τριβή θα αντιτεθεί σε αυτή την κίνηση και θα έχει τώρα φορά προς τα μπροστά. Θα προκαλέσει την μετακίνηση της ρόδας προς τα μπροστά. Αν δεν υπήρχε τριβή η ρόδα θα «σπίνιαρε» και θα έμενε στη θέση της.

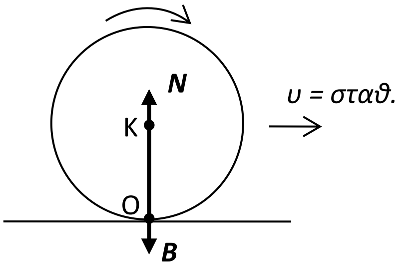


Στρίβουμε τον άξονα αριστερόστροφα με ροπή ***τ*** ώστε η ρόδα να κυλίσει μπροστά. Η τριβή προκαλεί την κίνηση



Τρισδιάστατο σχήμα.

Στην κύλιση, όταν θεωρούμε το σώμα και το δάπεδο ιδανικά στερεά (δηλ. άκαμπτα που δεν παραμορφώνονται) η στατική τριβή εμφανίζεται μόνο όταν το σώμα επιταχύνεται. Αν σταματήσουμε να το τραβάμε ή να ασκούμε ροπή στον άξονά του τότε η στατική τριβή μηδενίζεται και το σώμα θα συνεχίσει να κυλάει για πάντα με σταθερή ταχύτητα.



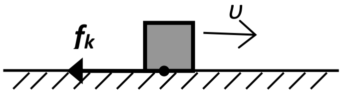
Όταν η ρόδα κυλάει με σταθερή ταχύτητα, ιδανικά, δεν υπάρχει τριβή. Οι μόνες δυνάμεις είναι το βάρος ***B*** στο κέντρο της ρόδας K και η κάθετη αντίδραση ***N*** στο σημείο επαφής O, οι οποίες εξουδετερώνονται.

Η ***κινητική τριβή*** ή ***τριβή ολίσθησης*** εμφανίζεται αν τα δύο σώματα ολισθαίνουν (σύρονται) κατά την επιφάνεια επαφής τους και αντιτίθεται στη σχετική τους κίνηση. Η κινητική τριβή είναι πάντα αντίθετη στην ταχύτητα και επιβραδύνει την κίνηση. Για την κινητική τριβή υπάρχει εμπειρικός τύπος που είναι :

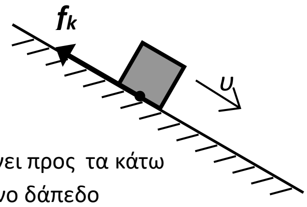
$$f_k = \mu_k N$$

Ο συντελεστής μ_k είναι ένας απλός αριθμός που εξαρτάται από το υλικό των δύο σωμάτων που είναι σε επαφή. Γενικά είναι λίγο μικρότερος από τον αντίστοιχο συντελεστή στατικής τριβής για τα ίδια υλικά (δείτε πίνακα παρακάτω).

υ≠0, κινούνται



Σώμα που ολισθαίνει προς τα δεξιά πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο



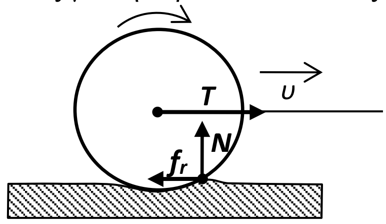
Σώμα που ολισθαίνει προς τα κάτω σε μη λείο κεκλιμένο δάπεδο

Τριβή ολίσθησης ασκείται στις ρόδες ενός αυτοκινήτου από το οδόστρωμα όταν το αυτοκίνητο φρενάρει. Οι ρόδες σταματάνε να γυρίζουν και ολισθαίνουν πάνω στο δρόμο μέχρι να σταματήσει το αυτοκίνητο. Αυτό δεν θέλουμε να συμβαίνει. Θέλουμε οι ρόδες να επιβραδύνονται κυλώντας γιατί τότε η τριβή είναι στατική και άρα η δύναμη επιβράδυνσης μεγαλύτερη γιατί ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή κινητικής τριβής $\mu_s > \mu_k$.

Τέλος αναφέρουμε την ***τριβή κύλισης***. Όταν ένα πραγματικό σώμα κυλάει στο δάπεδο ακόμα και με σταθερή ταχύτητα εμφανίζεται τριβή ενώ όταν επιταχύνεται η τριβή δεν είναι απλώς στατική. Η στατική τριβή είναι μια ιδανική προσέγγιση. Στην πραγματικότητα το δάπεδο και το σώμα παραμορφώνονται ελαφρώς στην επαφή τους η οποία δεν είναι μόνο ένα σημείο αλλά μια μικρή επιφάνεια. Σε αυτή την επιφάνεια υπάρχει μικρή ολίσθηση μεταξύ των δύο επιφανειών. Επίσης τόσο η τριβή όσο και η κάθετη αντίδραση δεν είναι στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα περιστροφής αλλά λίγο πιο μπροστά. Αυτές οι επιδράσεις αργά ή γρήγορα θα σταματήσουν την κύλιση του σώματος. Όλα τα καροτσάκια όσο δυνατά και να τα σπρώξουμε αν τα αφήσουμε κάποια στιγμή θα σταματήσουν. Λέμε ότι εμφανίζεται ***τριβή κύλισης***. Για να κυλάει ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα χρειάζεται μια σταθερή δύναμη να το τραβάει. Η δύναμη αυτή είναι ακριβώς αντίθετη από την τριβή κύλισης ώστε να την εξουδετερώσει. Για την τριβή κύλισης ισχύει επίσης ένας εμπειρικός τύπος παρόμοιος με αυτόν της κινητικής τριβής

$$f_r = \mu_r N$$

Η διαφορά είναι ότι οι συντελεστές τριβής κύλισης μ_r είναι πολύ μικρότεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές κινητικής τριβής (δείτε πίνακα παρακάτω). Οπότε συμφέρει πολύ περισσότερο να τσουλήσουμε ένα σώμα παρά να το σύρουμε. Γι αυτό υπάρχουν τα ρουλεμάν και τα καροτσάκια και γι' αυτό η ανακάλυψη του τροχού ήταν τεράστιας σημασίας για την πρόοδο του είδους μας.



Ρόδα που την τραβάμε και κυλάει με σταθερή ταχύτητα. Η τριβή κύλισης f_r αντιτίθεται στην κίνηση όπως και η κάθετη αντίδραση N

	Συντελεστές τριβής		
Υλικά	μ_s - στατικής	μ_k - κινητικής	μ_r -κύλισης
Ατσάλι-ατσάλι	0,74	0,57	0,002-0,003
Καουτσούκ-στεγνό οδόστρωμα	1,0	0,8	0,01-0,02
Καουτσούκ-υγρό οδόστρωμα	0,30	0,25	

Δύναμη ελατηρίου ($F_{ελ}$).

Ισχύει ο νόμος που ανακαλύφθηκε από τον Hooke:

$F_{ελ} = -k \cdot \Delta\ell$

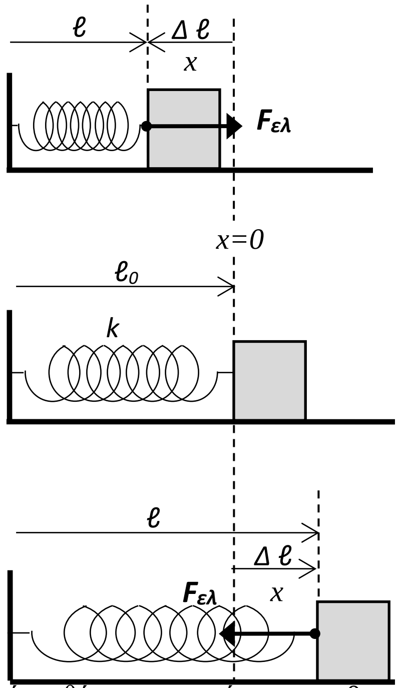
Όπου $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου, από το φυσικό του μήκος, η οποία μπορεί να είναι θετική (επιμήκυνση ή προέκταση) ή αρνητική (συσπείρωση).

Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι το ℓ_0 και το τελικό του μήκος το ℓ. Η σταθερά αναλογίας k εξαρτάται από το σχήμα το μέγεθος και το υλικό του ελατηρίου και εκφράζει τη σκληρότητα του ελατηρίου. Μετριέται σε N/m. Άρα για να ανοίξω ένα ελατήριο σταθεράς k κατά $\Delta\ell$ θα πρέπει να ασκήσω δύναμη F αντίθετη από αυτή του ελατηρίου : $F = k \cdot \Delta\ell$

Τα ελατήρια όπως και τα νήματα θα τα θεωρούμε επίσης αβαρή, δηλαδή με μάζα μηδέν.

Η δύναμη του ελατηρίου είναι πάντα στην αντίθετη κατεύθυνση από την παραμόρφωση και είναι σπρώξιμο όταν το συσπειρώνουμε και τράβηγμα όταν το επιμηκύνουμε (όπως φαίνεται στα σχήματα). Ο νόμος γράφεται και

$$F_{ελ} = -k \cdot x$$



όπου $x = \Delta\ell$ είναι η απομάκρυνση του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας του x=0.

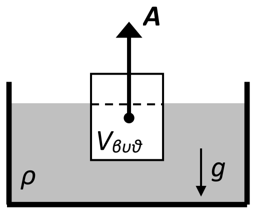
Λάστιχο

$F = -k\Delta\ell$ όταν $\Delta\ell > 0$

$F = 0$ όταν $\Delta\ell < 0$

Άνωση

Η άνωση ανακαλύφθηκε από τον Αρχιμήδη κατά την αρχαιότητα (ο οποίος κατά το μύθο αναφώνησε «εύρηκα» όταν βρήκε τον τύπο της). Είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα από το ρευστό (υγρό ή αέριο) μέσα στο οποίο βρίσκεται. Η κατεύθυνσή της είναι κατακόρυφα προς τα πάνω (αντίθετα με το βάρος) και γι αυτό ονομάζεται και άνωση.



ρ είναι η πυκνότητα του υγρού

Το μέτρο της άνωσης είναι ίσο με το βάρος του υγρού που έχει εκτοπίσει το στερεό.

$$A = B_{εκτ.υγρ.} = m_{εκτ.υγρ.} \cdot g = \rho V_{εκτ.υγρ.} \cdot g$$

Όμως ο όγκος του εκτοπισμένου υγρού είναι ίσος με τον όγκο του σώματος που έχει βυθισθεί και βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του υγρού. Οπότε

$$A = \rho g V_{βυθ}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Δηλαδή τα πιο πυκνά υγρά ασκούν μεγαλύτερη άνωση. Π.χ. το θαλασσινό νερό που είναι πυκνότερο από το νερό μιας πισίνας αφού περιέχει και άλατα ασκεί περισσότερη άνωση και μέσα σε αυτό κολυμπάμε ευκολότερα απ΄ ότι στην πισίνα.

Οπισθέλκουσα (αντίσταση ρευστού, Drag)

Όταν ένα στερεό κινείται μέσα σε ένα ρευστό (υγρό ή αέριο) το ρευστό του ασκεί μια πρόσθετη δύναμη εκτός από την άνωση. Αυτή αντιτίθεται στην κίνησή του και είναι ουσιαστικά τριβή μεταξύ του στερεού και του ρευστού. Λέγεται οπισθέλκουσα ή αντίσταση του ρευστού γιατί έχει κατεύθυνση αντίθετη από την ταχύτητα του στερεού σώματος.

Πειραματικά βρίσκουμε ότι το μέτρο της οπισθέλκουσας εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα του σώματος προς το ρευστό υ, τη μετωπική επιφάνεια A που προβάλει το στερεό στη ροή του ρευστού, το σχήμα του στερεού, την πυκνότητα του ρευστού ρ και το ιξώδες του η .

$$F_D = f(\upsilon, A, \rho, \eta)$$

Το ιξώδες εκφράζει το πόσο δύσκολο είναι να ανακατέψουμε το ρευστό και κατά προέκταση το πόσο παχύρευστο είναι, πόσο εύκολα ρέει ή όχι. Π.χ. το νερό έχει μικρότερο ιξώδες από το μέλι και το μέλι μικρότερο από το ζυμάρι. Η μονάδα μέτρησης του ιξώδους στο SI είναι $[\eta]$=kg/m·s=Pa·s=Pl και ονομάζεται πουαζεβίλ. Το ιξώδες εξαρτάται από τη θερμοκρασία και γι αυτό όταν αναφέρεται κάποια τιμή του συνοδεύεται πάντα και από τη θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί. Για τα υγρά το ιξώδες μειώνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενώ για τα αέρια αυξάνεται.

Ο συνδυασμός των μεταβλητών $\rho A \upsilon^2$ έχει μονάδες δύναμης **(επιβεβαιώστε το)**. Αντιστοιχεί στη δύναμη που δέχεται ένα εμπόδιο εμβαδού A από ένα πίδακα ρευστού ταχύτητας υ τον οποίο σταματάει

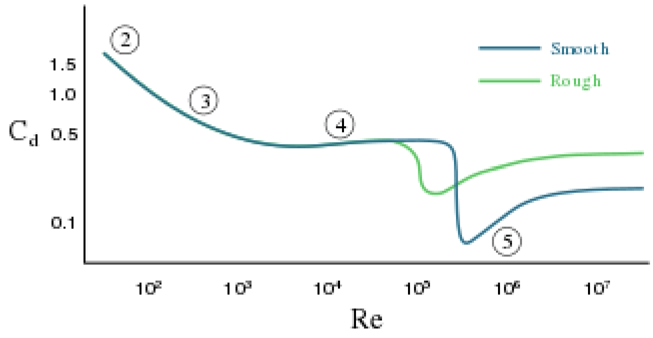
$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\upsilon \Delta m}{\Delta t} = \upsilon \frac{\Delta(\rho V)}{\Delta t} = \upsilon \rho \frac{\Delta(Ax)}{\Delta t} = \upsilon \rho A \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho A \upsilon^2$$

Έτσι ο γενικός τύπος της οπισθέλκουσας δίνεται από την έκφραση

$$F_D = \frac{1}{2} \rho \upsilon^2 C_d A$$

Ο αδιάστατος συντελεστής οπισθέλκουσας C_d προσδιορίζεται πειραματικά από μετρήσεις σε αεροσήραγγες. Επειδή δεν έχει διαστάσεις θα εξαρτάται από όλες τις άλλες μεταβλητές μέσω του αδιάστατου συνδυασμού $\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon \sqrt{A}}{\eta}$ που ονομάζεται αριθμός Reynolds. Δηλαδή $C_d = f(\mathrm{Re})$.

Πειραματικά βρίσκουμε ότι για σφαίρες ο συντελεστής οπισθέλκουσας μεταβάλλεται με τον αριθμό Reynolds όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Αρχικά, για μικρούς αριθμούς Reynolds, $\mathrm{Re} < 1.000$ ο συντελεστής οπισθέλκουσας είναι αντιστρόφως ανάλογος από τον αριθμό Reynolds :

$$C_d \propto \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

Οπότε: $F_D = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 C_d A \propto \rho\upsilon^2 \frac{\eta}{\rho\upsilon\sqrt{A}} A \Rightarrow F_D \propto \eta\upsilon L$ οπισθέλκουσα Stokes

(για την ακρίβεια, για σφαίρες ισχύει $F_D = 6\pi r\eta\upsilon$, όπου r η ακτίνα της σφαίρας).

Η οπισθέλκουσα **για μικρές ταχύτητες είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας** και ανάλογη με την ταχύτητα, τη γραμμική διάσταση του σώματος και το ιξώδες του υγρού.

Για αριθμούς Reynolds στο διάστημα $1.000 < \mathrm{Re} < 40.000$ ο συντελεστής οπισθέλκουσας είναι σταθερός και ίσος περίπου με 1/2 (για σφαίρες)

$$C_d \approx \frac{1}{2}$$

Οπότε: $F_D = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 C_d A = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{4}\rho\upsilon^2 A$ οπισθέλκουσα Newton .

Η οπισθέλκουσα **για μεγάλες ταχύτητες** είναι ανάλογη με την πυκνότητα του υγρού, το τετράγωνο της ταχύτητας και **ανεξάρτητη από το ιξώδες** του υγρού.

Οπότε :

1) Όταν η σχετική ταχύτητα του στερεού ως προς το ρευστό είναι σχετικά μικρή η ροή του ρευστού γύρω από το στερεό είναι στρωτή. Για μικρές ταχύτητες η οπισθέλκουσα είναι ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από τον τύπο :

$$F_D = -b\upsilon \qquad \text{(οπισθέλκουσα Stokes)}$$

όπου η σταθερά b ονομάζεται συντελεστής απόσβεσης και εξαρτάται από τις ιδιότητες του ρευστού το μέγεθος και το σχήμα του στερεού. Οι μονάδες μέτρησης του b είναι [b]=kg/s. Ο παραπάνω τύπος εφαρμόζεται κυρίως για στερεά μέσα σε υγρά καθώς τα υγρά εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη αντίσταση από τα αέρια και δεν επιτρέπουν μεγάλες ταχύτητες. Ειδικά για μια σφαίρα που κινείται σε ένα υγρό (π.χ. ενώ βουλιάζει) ο Stokes υπολόγισε το συντελεστή απόσβεσης και η οπισθέλκουσα είναι :

$$F_S = 6\pi\eta r\upsilon \qquad \text{(οπισθέλκουσα Stokes σε σφαίρα)}$$

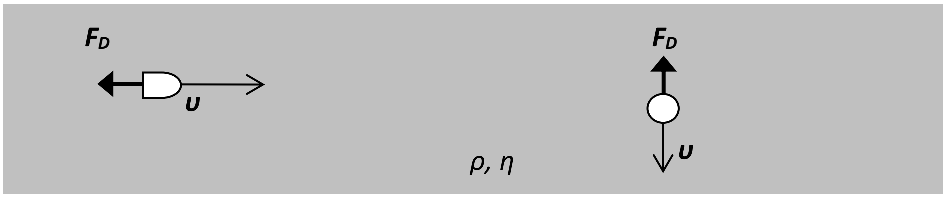
όπου r είναι η ακτίνα της σφαίρας και η είναι το ιξώδες του ρευστού.

Για σχετικά μεγάλες ταχύτητες, που συμβαίνουν όταν στερεά κινούνται στον αέρα, (π.χ. μπάλες τένις, ποδοσφαίρου και μπέιζμπολ, αεροπλάνα, αυτοκίνητα, σώματα που πέφτουν από μεγάλο ύψος, κλπ.) το μέτρο της οπισθέλκουσας είναι ανάλογο με το τετράγωνο της ταχύτητας. Όταν η σχετική ταχύτητα του στερεού ως προς το υγρό είναι σχετικά μεγάλη τότε η ροή του ρευστού γύρω από το στερεό δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης.

$$F_D = -c\upsilon^2 \qquad \text{(οπισθέλκουσα Newton)}$$

Π.χ. αυτό σημαίνει ότι αν διπλασιάσετε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σας από 80 km/h σε 160 km/h, θα συναντήσετε τετραπλάσια αντίσταση από τον αέρα.
Η σταθερά c εξαρτάται από τη μετωπική επιφάνεια που προβάλει το σώμα στον αέρα A, το σχήμα του μέσω του αδιάστατου συντελεστή C_d που προσδιορίζεται πειραματικά και την πυκνότητα ρ του ρευστού. Μετριέται σε μονάδες [c]=kg/m.

$$c = \frac{1}{2} C_d A \rho$$

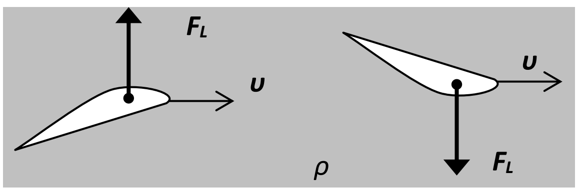


Βολίδα που έχει εκτοξευθεί οριζόντια Σφαιρικό στερεό που καταβυθίζεται

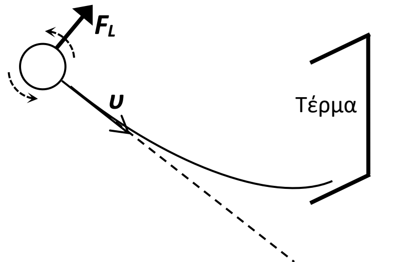
Δυναμική άνωση ή Άντωση (Lift)
Εκτός από την άνωση και την οπισθέλκουσα υπάρχει και άλλη μια δύναμη που εμφανίζεται μεταξύ ενός στερεού και ενός ρευστού όταν το στερεό κινείται μέσα στο ρευστό. Αυτή η δύναμη που ονομάζεται δυναμική άνωση ή ανύψωση ή άντωση εμφανίζεται όταν η ροή του ρευστού δεν είναι συμμετρική μεταξύ των δύο πλευρών του στερεού σώματος. Δηλαδή η σχετική ταχύτητα με την οποία περνάει το ρευστό δίπλα από την επιφάνεια του στερεού είναι διαφορετική στην πάνω από την κάτω πλευρά του στερεού (ή στην αριστερή πλευρά από την δεξιά). Αυτό συμβαίνει όταν το στερεό δεν έχει συμμετρικό σχήμα (π.χ. το φτερό ενός αεροπλάνου που καμπυλώνει) ή ακόμα και όταν έχει συμμετρικό σχήμα, αν το στερεό περιστρέφεται καθώς κινείται (π.χ μια μπάλα με φάλτσο). Η δυναμική άνωση είναι η δύναμη που κάνει τα αεροπλάνα να πετάνε και τις μπάλες να στρίβουν στον αέρα. Η φορά της είναι από την πλευρά του στερεού με τη μικρότερη σχετική ταχύτητα ως προς το ρευστό (αργή ροή) προς την πλευρά με τη μεγαλύτερη σχετική ταχύτητα (γρήγορη ροή). Το μέτρο της είναι ανάλογο με το τετράγωνο της ταχύτητας του στερεού και δίνεται από τον τύπο

$$F_L = \frac{1}{2} A C_L \rho \cdot \upsilon^2$$

όπου A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού σώματος, ρ η πυκνότητα του ρευστού και C_L ένας αδιάστατος συντελεστής που εξαρτάται από το σχήμα του στερεού.



Φτερό αεροπλάνου Αεροτομή σε αυτοκίνητο Φόρμουλα 1



Αρχική τροχιά μπάλας (αν δεν περιστρεφόταν)

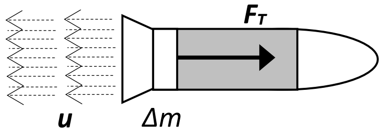
[YouTube : 1) What Is The Magnus Force? 2) Backspin Basketball Flies Off Dam, 3) The Science of Curveballs]

Τη δυναμική άνωση τη χρησιμοποιούμε για να σηκώνουμε τα αεροπλάνα στον αέρα καθώς αν η ταχύτητά τους είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με τον αέρα τότε η δυναμική άνωση είναι αρκετά ισχυρή ώστε να υπερνικήσει το βάρος τους και να τα ανυψώσει. Γι' αυτό τα αεροπλάνα απογειώνονται και προσγειώνονται πάντα αντίθετα με τον άνεμο ώστε να έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή σχετική ταχύτητα με τον αέρα και άρα μεγαλύτερη δυναμική άνωση. Όμως την χρησιμοποιούμε και για να κρατάμε τα πολύ γρήγορα αυτοκίνητα στο έδαφος ώστε να μην ¨πετάξουν¨. Γι αυτό στο πίσω μέρος των σκαφών F1 βάζουμε αεροτομή, δηλαδή ένα ανάποδο φτερό. Επίσης στα αθλήματα όπου οι μπάλες μπορούν να αποκτήσουν αρκετά μεγάλες ταχύτητες (τένις, μπέιζμπολ, ποδόσφαιρο, γκολφ) χρησιμοποιούμε τη δυναμική άνωση δίνοντας τους περιστροφή ώστε να στρίψουν στον αέρα και να μην μπορέσει ο αντίπαλος να προβλέψει την τροχιά τους.

Προώθηση (Thrust)

Τέλος θα αναφέρουμε τη δύναμη της προώθησης ή πρόωσης. Αυτή είναι η δύναμη που διατηρεί στα αεροπλάνα την ικανή οριζόντια ταχύτητα ώστε να λειτουργεί η δυναμική άνωση και να τα σηκώνει. Τη δύναμη αυτή την εξασφαλίζει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή η αρχή διατήρησης της ορμής για τα οποία δεν έχουμε μιλήσει ακόμα. Ουσιαστικά είτε με τις έλικές τους είτε με τις τουρμπίνες τους τα αεροπλάνα γραπώνουν τον αέρα μπροστά τους και τον πετάνε πίσω και πρακτικά τραβιούνται μπροστά όπως τραβάει ένα άτομο ένα σχοινί. Οι πύραυλοι καίνε καύσιμα που τα εκτοξεύουν προς τα κάτω ώστε αυτοί να φύγουν προς τα πάνω. Ο παραδοσιακός τύπος για την προώθηση είναι :

$$F_T = u\frac{dm}{dt}$$



Η δύναμη της προώθησης (thrust) είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας u με την οποία φεύγουν προς τα πίσω ο αέρας ή τα καυσαέρια (ως προς το σκάφος) και ανάλογος της μάζας ανά μονάδα χρόνου που εκτοξεύεται προς τα πίσω.

Άλλες δυνάμεις

Στην επιφάνεια ενός υγρού : **επιφανειακή τάση ή δύναμη συνοχής,** προκαλεί το σχηματισμό των σταγόνων ενός υγρού, επιτρέπει στα κουνούπια να περπατάνε στην επιφάνεια ενός υγρού και σε συνδετήρες να «επιπλέουν» στην επιφάνεια ενός υγρού χωρίς να βρέχονται ή να βουλιάζουν.

Στην επιφάνεια επαφής ενός υγρού με ένα στερεό : **δυνάμεις συνάφειας**, κάνει τα υγρά να κολλάνε πάνω στα στερεά, είναι υπεύθυνες για την καμπύλωση της επιφάνειας του υγρού στα τοιχώματα του δοχείου, για το νερό που κολλάει στα χέρια μας και πρέπει να το σκουπίσουμε, ή να το τινάξουμε, για την ανύψωση της στάθμης του υγρού σε ένα λεπτό σωληνάκι (τριχοειδές), επιτρέπουν στα φυτά να αντλούν νερό από το έδαφος.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ – ΝΟΜΟΙ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Από τη δυναμική στην κινηματική

Γνωρίζοντας όλες τις δυνάμεις που δρουν σε ένα σώμα μπορούμε να προβλέψουμε την κίνησή του χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα. Η σειρά των βημάτων είναι :

1. Σχεδιάγραμμα όλων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα
2. Υπολογισμός της ολικής ή συνισταμένης δύναμης που δρα στο σώμα
3. Υπολογισμός της επιτάχυνσης από το 2ο νόμο του Νεύτωνα

Γνωρίζοντας την επιτάχυνση είναι θέμα μαθηματικών να βρούμε την μεταβολή της ταχύτητας με μια πρώτη ολοκλήρωση $\Delta\upsilon$ = εμβαδό κάτω από την καμπύλη <u>a vs. t</u> και τη μετατόπιση με μια δεύτερη ολοκλήρωση Δx = εμβαδόν κάτω από την καμπύλη <u>*υ* vs. *t*</u>.

Έτσι γνωρίζοντας επιπρόσθετα την αρχική θέση x_0 και την αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος την στιγμή που αρχίζουμε να το παρατηρούμε (αρχική στιγμή t=0) μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση και την ταχύτητά του μια οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή t:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \Delta\upsilon \qquad\qquad x = x_0 + \Delta x$$

Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα

<u>1ος : Νόμος αδράνειας</u>

Ένα σώμα στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις ή αν ασκούνται η ολική δύναμη (συνισταμένη) είναι ίση με μηδέν, παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα δηλ. ευθύγραμμα και ομαλά (αρχή αδράνειας Γαλιλαίου) :

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \vec{\upsilon} = 0 \text{ ή σταθερή}$$

Η ολική δύναμη ή η συνισταμένη δύναμη είναι η δύναμη ή οποία από μόνη της έχει το ίδιο αποτέλεσμα που έχουν όλες μαζί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα. Έτσι όλες τις δυνάμεις σε ένα σώμα τις αντικαθιστούμε με μία, την ολική ή συνισταμένη. Αυτή βρίσκεται ως το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα

$$\vec{F}_{o\lambda} \equiv \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{ή πιο σύντομα} \quad \vec{F}_{o\lambda} \equiv \sum \vec{F}$$

Το τριπλό ίσον σημαίνει «ίσα εξ ορισμού» και το σύμβολο Σ σημαίνει άθροισμα (από το ελληνικό αντίστοιχο γράμμα του αρχικού της αγγλικής λέξης sum=άθροισμα). Θα δούμε πως υπολογίζεται ένα άθροισμα διανυσμάτων παρακάτω.

Ο πρώτος νόμος ουσιαστικά αποτελεί υποπερίπτωση του 2^{ου} αλλά διατυπώθηκε ξεχωριστά για φιλοσοφικούς λόγους. Αποτελεί δήλωση του Νεύτωνα ότι συμφωνεί με το Γαλιλαίο και όχι με τον Αριστοτέλη που έλεγε ότι για να διατηρείται η κίνηση χρειάζεται δύναμη. Μπορούμε να έχουμε κίνηση χωρίς να υπάρχει δύναμη αν η κίνηση είναι με σταθερή ταχύτητα. Αν ένα σώμα αποκτήσει μια ταχύτητα και στη συνέχεια δεν ασκείται πάνω του ολική δύναμη τότε αυτό θα συνεχίσει να κινείται για πάντα και ευθύγραμμα με αυτή την ταχύτητα.

Με τον πρώτο νόμο διατυπώνεται ότι η ακινησία και η ομαλή ευθύγραμμη κίνηση είναι ισοδύναμες καταστάσεις που δεν μπορούν να διακριθούν. Για το γεγονός αυτό έχουμε όλοι εμπειρία από την καθημερινή μας ζωή. Πολλές φορές σε ένα φανάρι κυκλοφορίας ή μέσα σε ένα βαγόνι τρένου μπερδευόμαστε και νομίζουμε ότι εμείς κινούμαστε ενώ κινείται το όχημα δίπλα μας και εμείς είμαστε ακίνητοι. Ένα σώμα το οποίο εμείς βλέπουμε να απομακρύνεται σχετικά με εμάς προς τα μπροστά μπορεί να μην κινείται αλλά εμείς να μετακινούμαστε προς τα πίσω και αυτό να είναι ακίνητο. Στο γεγονός ότι η ακινησία είναι ισοδύναμη με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση βασίζεται η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Άινσταϊν.

Όταν ένα σώμα είναι ακίνητο ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά λέμε ότι ισορροπεί.

$$\boldsymbol{Ισορροπία \Rightarrow Ακινησία(\vec{\upsilon} = 0)} \text{ ή } \boldsymbol{Ευθυγρ.\ Ομαλή\ Κίνηση\ (\vec{\upsilon} = σταθ.) \Rightarrow \vec{F}_{o\lambda} = 0}$$

Όταν έχουμε **ακινησία** η ισορροπία λέγεται **στατική**.

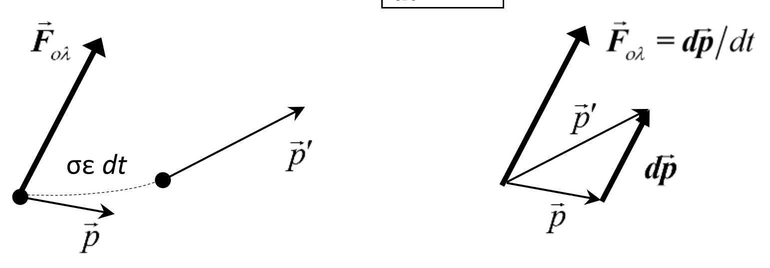
<u>2^{ος} : Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής</u>

Όπως τον διατύπωσε ο Νεύτωνας (στα λατινικά) : «Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός σώματος είναι ίση με την ώθηση της δύναμης»

Με μαθηματικά αυτό γράφεται $d\vec{p} = \vec{I} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt$ και οδηγεί στη σύγχρονη διατύπωση

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με την ολική δύναμη που του ασκείται:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{o\lambda}}$$



Σε διαφορετική διατύπωση: **η επιτάχυνσή ενός σώματος είναι ανάλογη με την ολική δύναμη που του ασκείται και αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα του**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_{o\lambda}}{m}} \Rightarrow \vec{F}_{o\lambda} = m\vec{a}$$

Η πρώτη διατύπωση είναι αυτή του Νεύτωνα ενώ η δεύτερη ισχύει για υλικά σημεία ή σώματα με σταθερή μάζα. Η πρώτη διατύπωση ισχύει και για σχετικιστικές ταχύτητες ενώ η δεύτερη όχι. Η μάζα που εμφανίζεται στο 2ο νόμο και ουσιαστικά ορίζεται από αυτόν είναι η αδρανειακή μάζα, δηλ. η ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται στις μεταβολές της κινητικής της κατάστασης.

Ο δεύτερος νόμος εννοιολογικά μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής : $\text{αποτέλεσμα} = \dfrac{\text{αιτία}}{\text{αντίσταση}}$

Όπου αιτία είναι η δύναμη, αποτέλεσμα είναι η επιτάχυνση και αντίσταση είναι η αδράνεια του σώματος, η μάζα του.
Δηλαδή, η δύναμη (αιτία) προκαλεί επιτάχυνση (αποτέλεσμα). Η επιτάχυνση σαν διάνυσμα έχει την ίδια κατεύθυνση με την ολική δύναμη. Το μέτρο της επιτάχυνσης για την ίδια δύναμη θα είναι μεγάλο αν το σώμα έχει μικρή μάζα (αντίσταση, αδράνεια) ενώ θα είναι μικρό αν το σώμα έχει μεγάλη μάζα: $a = \frac{F_{ολ}}{m}$
Οπότε η μάζα που εμφανίζεται στο 2ο νόμο μετράει την αντίσταση του κινητού στη αλλαγή της ταχύτητάς του δηλαδή την αδράνειά του, την ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται στις μεταβολές της κινητικής της κατάστασης. Γι αυτό ονομάζεται αδρανειακή μάζα.
Εφόσον έχουμε ήδη ορίσει τη δύναμη (από τους διάφορους τύπους) και την επιτάχυνση, ουσιαστικά ο 2ος νόμος ορίζει τη μάζα αδρανείας m :

$$m \equiv \frac{F_{ολ}}{a}$$

Δηλαδή για να μετρήσουμε την αδρανειακή μάζα ενός σώματος, το επιταχύνουμε με γνωστή δύναμη, μετράμε την επιτάχυνση που αποκτά και διαιρούμε την δύναμη με την επιτάχυνση. Αντίθετα για να μετρήσουμε τη βαρυτική μάζα ενός σώματος μετράμε το βάρος του και διαιρούμε δια g. Μπορεί να έχουμε χρησιμοποιήσει το ίδιο σύμβολο αλλά αξίζει να αναφερθεί ότι η αδρανειακή μάζα m δεν είναι υποχρεωτικό να ισούται με τη βαρυτική μάζα m που μπαίνει στον νόμο της δύναμης του βάρους. Είναι όμως πειραματικό γεγονός που έχει επιβεβαιωθεί και άρα χαρακτηριστικό του σύμπαντος μας ότι αυτές οι δύο μάζες ταυτίζονται. Η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα ενός σώματος είναι ίσες.

Με το 2ο νόμο συνδέεται η μονάδα μέτρησης της δύναμης, το νιούτον Ν, με τις θεμελιώδεις μονάδες του SI: m, s, kg (μέτρο, δευτερόλεπτο και κιλό). Θυμίζουμε ότι όταν γράφουμε ένα φυσικό μέγεθος σε αγκύλες, εννοούμε τις μονάδες μέτρησής του, π.χ. $[m]$=kg, $[x]$=m, $[t]$=s, $[F]$=N κλπ. Τα φυσικά μεγέθη γράφονται με πλάγια γραφή ενώ οι μονάδες μέτρησης όχι π.χ. *m σημαίνει μάζα* όμως m σημαίνει μέτρο. Έτσι από το δεύτερο νόμο έχουμε :

$$F_{ολ} = ma \Rightarrow [F_{ολ}] = [m][a] \Rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$$

Ισοδυναμία βαρυτικό φορτίου και αδρανειακής μάζας

Το **βαρυτικό φορτίο** αποδεικνύεται πειραματικά ότι είναι ίσο με την **αδρανειακή μάζα** που εμφανίζεται στο 2ο νόμο του Νεύτωνα. Αυτό διατυπώνεται ως η **αρχή της ισοδυναμίας** του Einstein. Η απόδειξη της ισότητας έγκειται στο γεγονός ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας σε έναν τόπο είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος δηλ. είναι ίδια για όλα τα σώματα βαριά ή ελαφριά. Γι αυτό αυτά, όταν αφεθούν από το ίδιο ύψος, πέφτουν στο έδαφος στον ίδιο χρόνο ανεξάρτητα από τη μάζα τους (Γαλιλαίος). Αυτό δείχνεται εύκολα από το 2ο νόμο του Νεύτωνα όταν η μόνη δύναμη που δρα είναι το βάρος:

$$\vec{F}_{ολ} = m_{αδρ}\vec{a} \Rightarrow \vec{B} = m_{αδρ}\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{B}}{m_{αδρ}} = \frac{m_{βαρ}\vec{g}}{m_{αδρ}} \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{m_{βαρ}}{m_{αδρ}}\right)\vec{g}$$

Εφόσον η επιτάχυνση a σε έναν τόπο είναι ίδια για όλα τα σώματα ο λόγος των μαζών θα πρέπει να είναι μια σταθερά ίδια για όλα τα σώματα την οποία κατά σύμβαση παίρνουμε ίση με τη μονάδα :

$$\frac{m_{βαρ}}{m_{αδρ}} = 1$$

Η μόνη επίπτωση μιας διαφορετικής επιλογής θα ήταν να αλλάξει η αριθμητική τιμή της παγκόσμιας σταθεράς G. Έτσι στο εξής, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο m και τη μια λέξη ***μάζα*** αδιακρίτως και για τις δύο μάζες αδρανειακή ή βαρυτική.
Στο γεγονός αυτό βασίζεται η γενική θεωρία της σχετικότητας του Άινσταϊν (αρχή ισοδυναμίας) : **η επιτάχυνση δεν διακρίνεται από τη βαρύτητα**. Εκεί κατέληξε με ένα νοητικό πείραμα (gedanken experiment) : εάν είσαι σε ένα κλειστό θάλαμο δεν είναι δυνατόν να διακρίνεις αν η ένδειξη N της ζυγαριάς

που πατάς δείχνει το βάρος σου επειδή βρίσκεσαι πάνω σε ένα ουράνιο σώμα που σου ασκεί βαρύτητα και ισορροπείς $N = B \Rightarrow N = mg$, ή αν βρίσκεσαι στο κενό διάστημα και απλά ο θάλαμος επιταχύνεται με επιτάχυνση a=g προς τα πάνω οπότε η ζυγαριά σε σπρώχνει προς τα πάνω με δύναμη $N = ma \Rightarrow N = mg$.

Αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο 1ος νόμος ονομάζονται αδρανειακά συστήματα. Δηλαδή αν υπολογίσουμε το άθροισμα όλων των πραγματικών δυνάμεων επαφής και πεδίου και βρούμε μηδέν αλλά η παρατηρούμενη ταχύτητα του σώματος δεν παραμένει σταθερή τότε το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο υπολογίζουμε την ταχύτητα δεν είναι αδρανειακό (π.χ. περιστρέφεται ή επιταχύνεται). Ισοδύναμα αν ένα σώμα είναι ακίνητο αλλά όλες οι δυνάμεις που βλέπουμε πάνω του δεν αθροίζουν μηδέν τότε πάλι το σύστημα αναφοράς δεν είναι αδρανειακό.

Ο $2^{ος}$ νόμος (από τον οποίο εξάγεται ο $1^{ος}$) ορίζει επίσης τα αδρανειακά συστήματα. Σε μη αδρανειακά συστήματα χάνει την παραπάνω απλή μορφή του καθώς για να βρούμε την παρατηρούμενη επιτάχυνση ενός σώματος θα πρέπει στο πρώτο μέλος του νόμου, πέρα από τις πραγματικές δυνάμεις, να εισάγουμε και ψευδοδυνάμεις :

$$\vec{F}_{ολ} + \vec{F}_{ψευδ} = m\vec{a}$$

Με τον όρο ψευδοδύναμη εννοούμε δύναμη που δεν μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε σε κάποιου είδους αλληλεπίδραση με κάποιο σώμα ή πεδίο του περιβάλλοντος. Π.χ. σε ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{A}$, η απαραίτητη ψευδοδύναμη που πρέπει να ληφθεί υπόψη για ένα σώμα μάζας m είναι: $\vec{F}_{ψευδ} = -m\vec{A}$ και ο $2^{ος}$ νόμος γράφεται $\vec{F}_{ολ} - m\vec{A} = m\vec{a}$. Οι **ψευδοδυνάμεις** (π.χ. επιτάχυνσης του συστήματος, φυγόκεντρες, Coriolis κλπ.) **είναι πάντα ανάλογες της αδρανειακής μάζας του σώματος**.

Συστήματα μεταβλητής μάζας

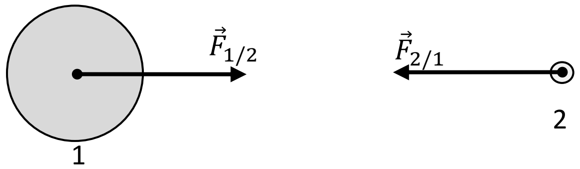
Όταν έχουμε συστήματα μεταβλητής μάζας π.χ. βαγονάκι που κινείται οριζόντια και γεμίζει νερό από τη βροχή που πέφτει ή πύραυλο που προωθείται από καυσαέρια που εκτοξεύει προς τα πίσω χρησιμοποιούμε την αρχική διατύπωση του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα δηλαδή το θεώρημα ώθησης - ορμής.

$3^{ος}$: Νόμος Δράσης – Αντίδρασης

Δεν υπάρχουν σώματα τα οποία μόνο ασκούν δυνάμεις και άλλα που μόνο δέχονται δυνάμεις. Κάθε σώμα (2) το οποίο δέχεται μια δύναμη (δράση) από ένα άλλο σώμα (1) ασκεί και αυτό στο πρώτο την αντίθετη δύναμη (αντίδραση):

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

όπου: $\vec{F}_{2/1}$ είναι η δύναμη στο σώμα 2 που προέρχεται από το σώμα 1 και
$\vec{F}_{1/2}$ είναι η δύναμη στο σώμα 1 που προέρχεται από το σώμα 2



Η Γη (1) ασκεί μια μεγάλη βαρυτική δύναμη σε ένα δορυφόρο (2). Ο δορυφόρος παρόλο που είναι πολύ μικρότερος, ασκεί στη Γη την ίδια ακριβώς δύναμη αλλά αντίθετα. Βέβαια, επειδή η Γη έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα θα επιταχυνθεί πολύ πολύ λιγότερο απ΄ ότι ο δορυφόρος

Οι δυνάμεις του $3^{ου}$ νόμου είναι δυνάμεις που ασκούνται σε διαφορετικά σώματα. Δεν μπαίνουν μαζί στον υπολογισμό της συνισταμένης όταν εξετάζουμε την κίνηση του κάθε σώματος ξεχωριστά. Για απλότητα ο νόμος γράφεται και ως :

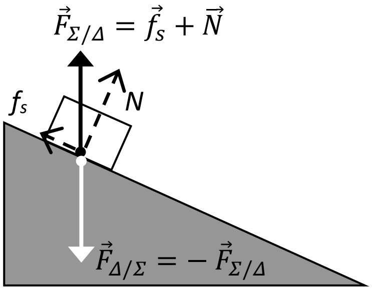
$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

όπου $\vec{F}\,'$ είναι η αντίδραση του ενός σώματος στη δράση $\vec{F}$ που του ασκείται από το άλλο.
Οι δυνάμεις δράσης–αντίδρασης $\vec{F}_{2/1}$ και $\vec{F}_{1/2}$ θεωρούμε ότι ***ασκούνται ταυτόχρονα, την ίδια χρονική στιγμή.***
Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα οδηγεί σε μια από τις βασικότερες αρχές της φυσικής : τη διατήρηση της ορμής.

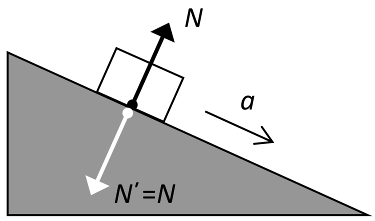
Ο 3^{ος} νόμος δεν ισχύει για τη μαγνητική δύναμη μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικώς φορτισμένων σωματιδίων αλλά η ορμή διατηρείται όταν λάβουμε υπόψη μας και την ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που μεταφέρει τη δύναμη.

Απορία: Αν όταν σπρώχνουμε ένα θρανίο μας σπρώχνει και αυτό αντίθετα με δύναμη ίσου μέτρου γιατί το θρανίο κινείται και εμείς όχι.
Απάντηση : Δεν είμαστε μόνοι μας με το θρανίο. Υπάρχει και το δάπεδο. Το σώμα που θα κινηθεί θα είναι αυτό που έχει μικρότερη τριβή με το πάτωμα. Δοκιμάστε να σπρώξετε το θρανίο φορώντας πατίνια για να δείτε τη διαφορά. Αν ήσασταν στο διάστημα μόνοι σας εσείς και το θρανίο, και το σπρώχνατε τότε το θρανίο θα έφευγε από τη μία μεριά και εσείς από την άλλη. Και οι δύο θα μετακινούσασταν.

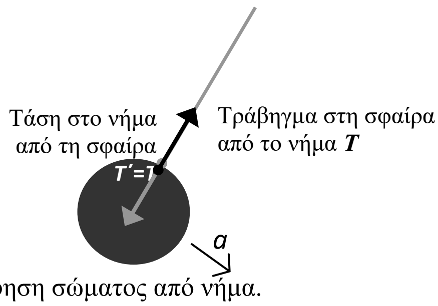
Παραδείγματα του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα



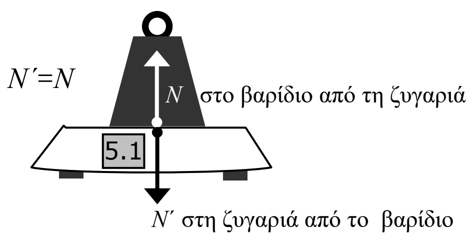
Ακινησία σε κεκλιμένο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται μια συνολική δύναμη επαφής από το δάπεδο $\boldsymbol{F_{Σ/Δ}}$. Το σώμα ασκεί στο δάπεδο αντίθετη δύναμη.



Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβή.
Το σώμα επιταχύνεται λόγω άλλης δύναμης, του βάρους του *B* που προέρχεται από τη Γη και η Ν δεν μπορεί να εξουδετερώσει

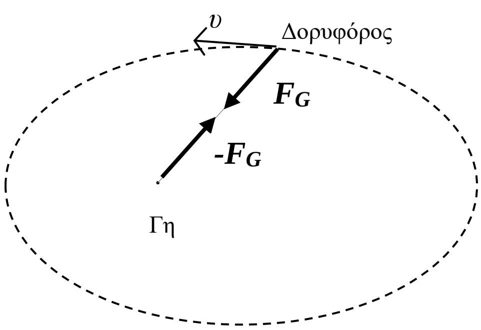


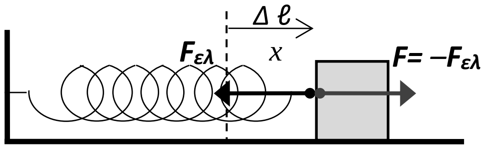
Αιώρηση σώματος από νήμα.
Η επιτάχυνση προέρχεται από άλλη δύναμη, το βάρος *B*, το οποίο η τάση δεν εξουδετερώνει πλήρως.



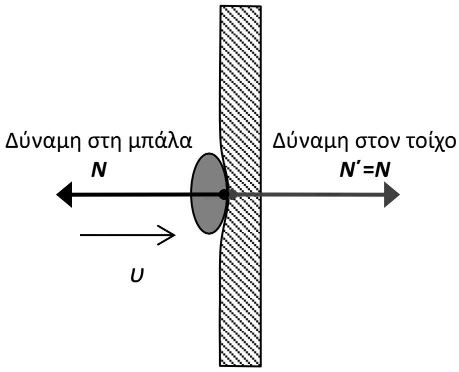
Η ζυγαριά μπάνιου δείχνει την *N′*

Βαρυτική έλξη μεταξύ Γης και δορυφόρου. Όση δύναμη ασκεί η Γη στο δορυφόρο τόση δέχεται και αυτή από το δορυφόρο. Η μάζα της όμως είναι πολύ μεγαλύτερη και γι αυτό η κίνησή της είναι πολύ μικρότερη και δεν φαίνεται στο σχήμα. Όμως η κίνηση αυτή υπάρχει και παρατηρείται. Μάλιστα είναι μια από τις μεθόδους ανακάλυψης εξωπλανητών. Με έρευνα για αστέρια που τρεμοπαίζουν.





Σώμα προσδεμένο σε ελατήριο.
Όταν το ελατήριο είναι τεντωμένο τραβάει το σώμα με δύναμη $F_{ελ}$=-*kx.* Το σώμα ασκεί αντίθετη δύναμη *F*=*kx* για να το τεντώσει.



Μπάλα που χτυπάει σε τοίχο ή σε ρακέτα

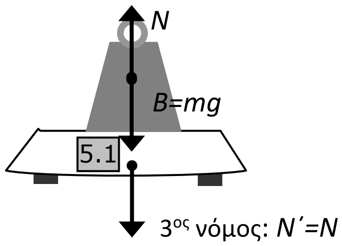
Ισορροπία υλικού σημείου

Ένα υλικό σημείο λέμε ότι ισορροπεί όταν είτε παραμένει ακίνητο είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή όταν δεν επιταχύνεται (*a*=0). Από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα η συνθήκη για την ισορροπία ενός υλικού σημείου είναι η ολική δύναμη στο σώμα να είναι μηδέν :

$$\vec{F}_{ολ} = 0$$

Αυτή ισοδυναμεί στη γενικότερη περίπτωση με 3 εξισώσεις από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε 3 αγνώστους.

Παράδειγμα. Τι μετράν οι ζυγαριές.



Όταν το σώμα και η ζυγαριά ισορροπούν *a*=0 : $N - B = 0 \Rightarrow N = B$

$$N' = N = B$$

η ζυγαριά δείχνει το βάρος του σώματος

Όταν το σώμα και η ζυγαριά επιταχύνονται *a*≠0 : $N - B = ma \Rightarrow N = B + ma$

$$N' = N = B + ma$$

η ζυγαριά δεν δείχνει το βάρος του σώματος

Όταν το σώμα και η ζυγαριά πέφτουν *a*=–g : $N - B = mg \Rightarrow N = B - mg = 0$

$$N' = N = 0$$

η ζυγαριά δείχνει μηδέν

Η ζυγαριά μετράει πάντα την κάθετη αντίδραση που δέχεται από το σώμα πάνω της.

Σχεδιαγράμματα δυνάμεων

Αρχικά πρέπει να αναγνωρίσουμε και να σχεδιάσουμε όλες τις δυνάμεις που δρουν σε ένα σώμα.

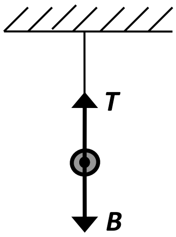
Όλες τις δυνάμεις θα τις σχεδιάζουμε ως τραβήγματα από το κέντρο του σώματος.
Όλες οι δυνάμεις προέρχονται από κάποιο άλλο σώμα.

Ακολουθούμε τα παρακάτω δύο βήματα:

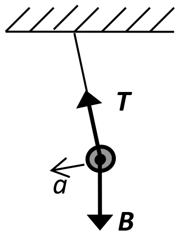
1) Σχεδιάζουμε πρώτα όλες τις δυνάμεις από απόσταση (δηλ. το βάρος)

2) Σχεδιάζουμε δυνάμεις για κάθε επαφή του σώματος με άλλα σώματα (δηλ. τριβή, κάθετη αντίδραση, δύναμη ελατηρίου, άνωση, οπισθέλκουσα, κλπ.)

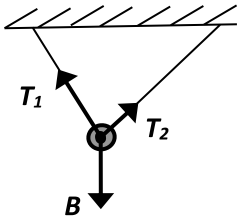
Παραδείγματα



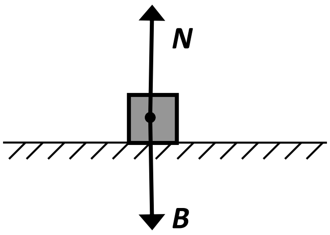
Μικρή σφαίρα που αιωρείται από νήμα κατακόρυφα.***B***: βάρος, ***T***: τάση Η σφαίρα μπορεί να ισορροπεί στατικά (αν αντέχει το νήμα): ***T= B***



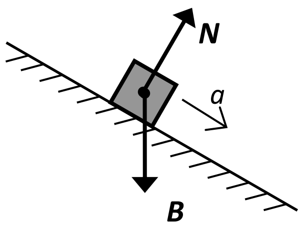
Μικρή σφαίρα που αιωρείται από νήμα υπό γωνία. Το σώμα δεν μπορεί να ισορροπεί γιατί οι δύο δυνάμεις δεν είναι συγγραμμικές και άρα δεν μπορεί να είναι ίσες: $\vec{T} \neq \vec{B}$



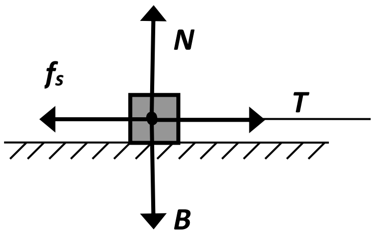
Μικρή σφαίρα που αιωρείται από δύο νήματα. Μπορεί να ισορροπεί στατικά αν : $\vec{B} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$



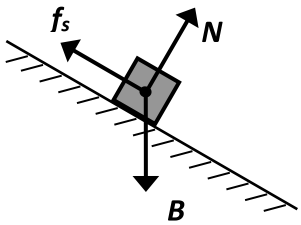
Σώμα σε οριζόντιο δάπεδο. ***N***: κάθετη αντίδραση. Μπορεί να ισορροπεί στατικά αν ***N = B***



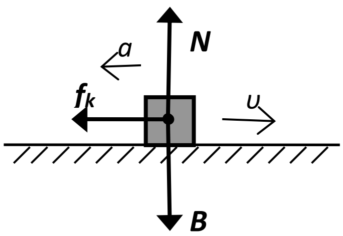
Σώμα σε λείο κεκλιμένο δάπεδο. Το σώμα δεν μπορεί να ισορροπεί επειδή $\vec{B} \neq \vec{N}$ ως μη συγγραμμικές



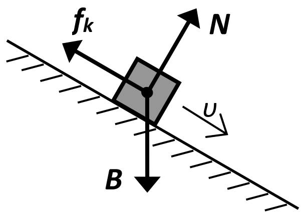
Σώμα πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο που το τραβάμε προς τα δεξιά χωρίς όμως να κινείται . f_s : στατική τριβή. Το σώμα ισορροπεί στατικά άρα: $f_s = T$ και ***N=B***



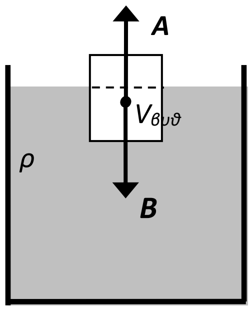
Σώμα που στέκεται σε μη λείο κεκλιμένο δάπεδο. Ισορροπεί άρα : $\vec{B} + \vec{f}_s + \vec{N} = 0$



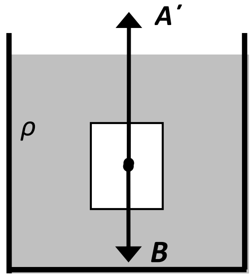
Σώμα που ολισθαίνει προς τα δεξιά πάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο. f_k : τριβή ολίσθησης. Το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα αλλά δεν μπορεί να ισορροπεί οριζόντια γιατί δεν υπάρχει δύναμη να εξουδετερώνει την τριβή. Άρα ***N=B*** και $a = f_k / m$



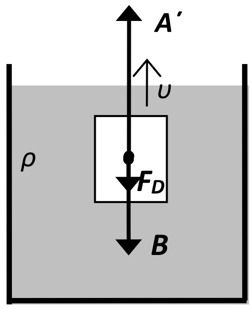
Σώμα που ολισθαίνει προς τα κάτω σε μη λείο κεκλιμένο δάπεδο μπορεί να ισορροπεί (υ=σταθ.) αν $\vec{B} + \vec{f}_k + \vec{N} = 0$



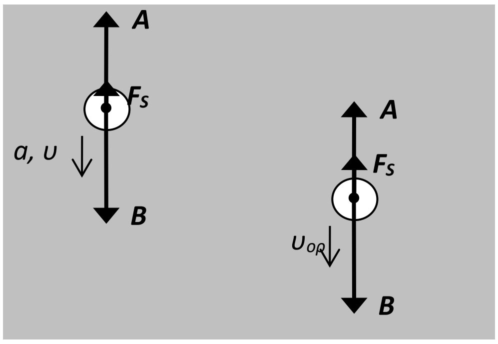
Σώμα που επιπλέει.
A: άνωση



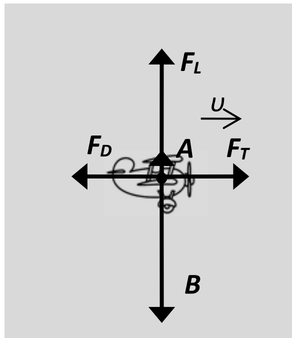
Το ίδιο σώμα, βυθισμένο ολόκληρο μέσα στο νερό, τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο *t=0*. Η άνωση τώρα, είναι πιο μεγάλη από πριν *A΄>A* (αφού μεγαλύτερος όγκος είναι βυθισμένος) και θα επιταχύνει το σώμα προς τα πάνω καθώς το βάρος παραμένει ίδιο.



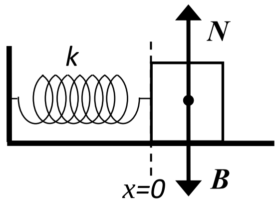
Το ίδιο σώμα, λίγο αργότερα *t>0* , όταν έχει αποκτήσει ταχύτητα προς τα πάνω. Τώρα που κινείται μέσα στο υγρό δέχεται και αντίσταση F_D από το υγρό, προς τα κάτω.



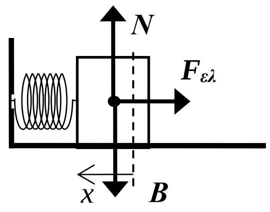
Σφαίρα που βυθίζεται σε υγρό. $\boldsymbol{F_S}$: αντίσταση υγρού στη σφαίρα (Stokes). Το βάρος επιταχύνει τη σφαίρα προς το βυθό. Αυξάνει την ταχύτητά του και άρα την αντίσταση του υγρού. Όταν η αντίσταση μεγαλώσει τόσο ώστε μαζί με την άνωση να εξουδετερώνουν το βάρος το σώμα ισορροπεί (*α*=0) και βυθίζεται πλέον με σταθερή ταχύτητα που λέγεται ορική ή τερματική υ_{op}



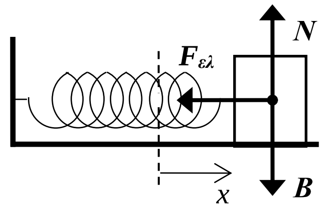
Αεροπλάνο που πετάει με σταθερή ταχύτητα *υ*. ***B***: βάρος, $\boldsymbol{F_L}$: δυναμική άνωση, ***A***: άνωση (πολύ μικρή), $\boldsymbol{F_D}$: οπισθέλκουσα, $\boldsymbol{F_T}$: προώθηση



Σώμα σε λείο δάπεδο και σε επαφή με ελατήριο στο φυσικό του μήκος (ΦΜ). Το ελατήριο δεν ασκεί δύναμη. Το σώμα μπορεί να ισορροπεί

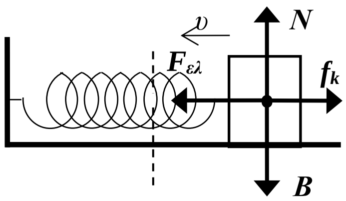


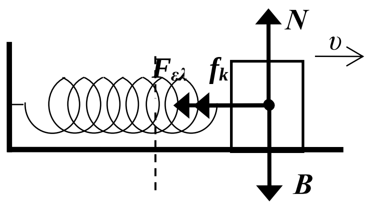
Σώμα σε λείο δάπεδο σε επαφή με συμπιεσμένο ελατήριο. Το ελατήριο σπρώχνει.



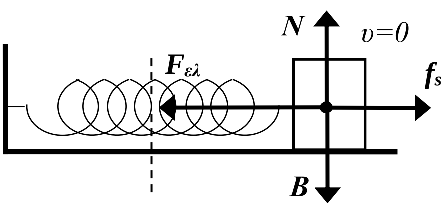
Σώμα σε λείο δάπεδο και σε επαφή με τεντωμένο ελατήριο. Το ελατήριο τραβάει.

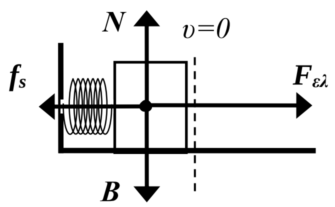
Το σχεδιάγραμμα των δυνάμεων παραμένει ίδιο είτε τα παραπάνω σώματα κινούνται είτε όχι καθώς στο λείο δάπεδο δεν υπάρχει τριβή.





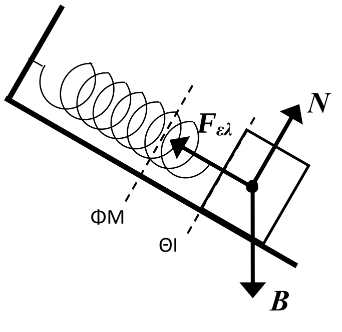
Σώμα σε δάπεδο με τριβή και σε επαφή με τεντωμένο ελατήριο. Η τριβή δεν εξαρτάται από τη θέση του σώματος. Αλλάζει φορά ώστε να είναι αντίθετη στην ταχύτητα και στις δύο περιπτώσεις.



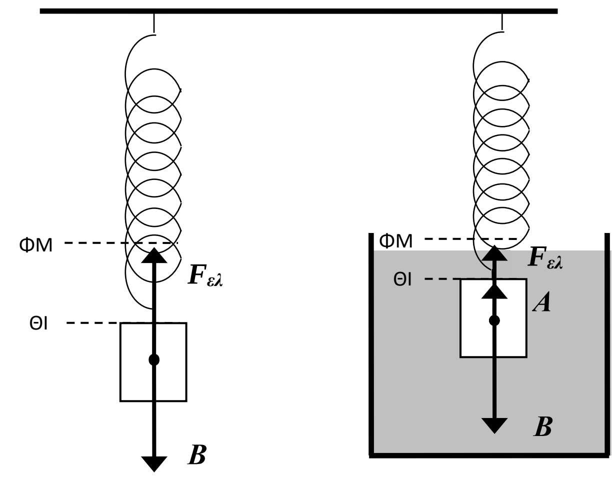


Η στιγμή που το σώμα σταματάει επειδή το επιβράδυναν η δύναμη του ελατηρίου και η τριβή ολίσθησης. Τότε η τριβή γίνεται στατική. Είτε το ελατήριο είναι τεντωμένο είτε συμπιεσμένο η στατική τριβή θα είναι αντίθετη στη δύναμη του ελατηρίου που τείνει να κινήσει το σώμα κατά τη φορά της

Στα παρακάτω ελατήρια που δεν είναι οριζόντια το σώμα δεν ισορροπεί στατικά στο φυσικό μήκος του ελατηρίου (ΦΜ) αλλά εκεί που η δύναμη του ελατηρίου εξουδετερώνει τις άλλες δυνάμεις (ΘΙ)



Σώμα σε λείο κεκλιμένο επίπεδο προσδεμένο σε ελατήριο. Το σώμα ισορροπεί.



Η δύναμη του ελατηρίου ισορροπεί το βάρος. Από την επιμήκυνση του ελατηρίου μπορούμε να μετρήσουμε το βάρος του σώματος.

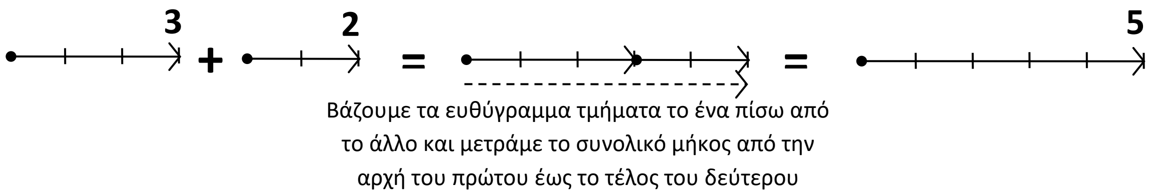
Η άνωση βοηθάει το ελατήριο να εξουδετερώσει το βάρος. Το σώμα μοιάζει «ελαφρύτερο» επειδή το ελατήριο επιμηκύνεται λιγότερο

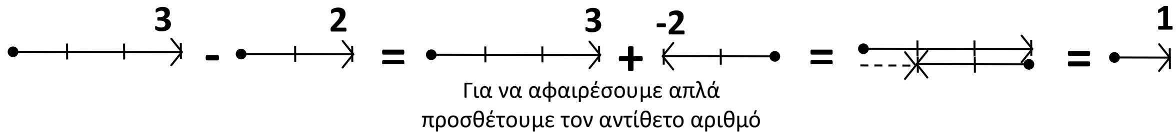
Σύνθεση δυνάμεων (συνισταμένη)

Όπως είπαμε η συνισταμένη δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων είναι η δύναμη που αντικαθιστά όλες τις άλλες δυνάμεις επιφέροντας όμως το ίδιο αποτέλεσμα με αυτές. Ουσιαστικά είναι το άθροισμα των δυνάμεων. Οι δυνάμεις επειδή είναι διανύσματα προστίθενται διανυσματικά. Το ίδιο ισχύει επίσης για τις μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις και γενικά για όλα τα διανύσματα

Το διανυσματικό άθροισμα δεν διαφέρει πολύ από το αλγεβρικό άθροισμα των ακέραιων αριθμών αν φανταστούμε τους ακέραιους αριθμούς ως ευθύγραμμα τμήματα με κατεύθυνση προς τα δεξιά αν είναι θετικοί και αριστερά αν είναι αρνητικοί.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ / ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ





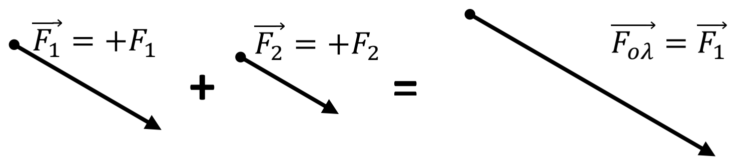
Συγγραμμικά διανύσματα (μονοδιάστατα προβλήματα .

Συγγραμμικά διανύσματα είναι αυτά που έχουν την ίδια διεύθυνση, δηλαδή βρίσκονται στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες. Σημειώνουμε ότι η θέση του διανύσματος στο επίπεδο δεν έχει σημασία. Δύο διανύσματα με το ίδιο μέτρο, φορά και διεύθυνση είναι ισοδύναμα. Οπότε τα συγγραμμικά διανύσματα είναι ισοδύναμα με ακέραιους αριθμούς πάνω στη διεύθυνση που βρίσκονται. ***Ο διανυσματικός τους χαρακτήρας είναι απλώς το πρόσημο της φοράς τους***.

Το ποιά φορά είναι η θετική ή η αρνητική το επιλέγουμε κάθε φορά εμείς.
Π.χ. διάνυσμα προς τα δεξιά (ή προς τα πάνω): $\vec{A} = +A$
διάνυσμα προς τα αριστερά(ή προς τα κάτω): $\vec{B} = -B$
όπου *A* και *B* είναι τα μέτρα (μήκη) των διανυσμάτων.

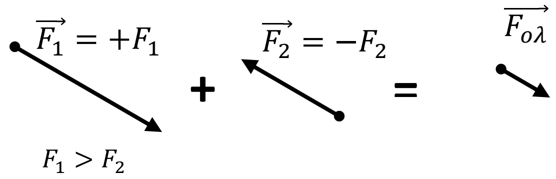
Άρα για τα συγγραμμικά διανύσματα η πρόσθεση είναι ακριβώς όπως και για τους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή ανάλογα με τη φορά τους, πρ οσθέτουμε ή αφαιρούμε τα μέτρα τους

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



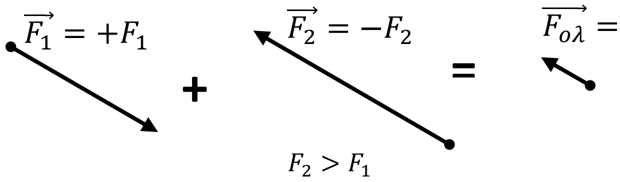
$\overrightarrow{F_{o\lambda}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = F_1 + F_2 > 0 \Rightarrow F_{o\lambda} = F_1 + F_2$

$F_{o\lambda} > 0$ άρα δείχνει προς τα δεξιά



$\overrightarrow{F_{ολ}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = F_1 - F_2 > 0 \Rightarrow F_{ολ} = F_1 - F_2$

$F_{ολ} > 0$ άρα δείχνει προς τα δεξιά



$\overrightarrow{F_{ολ}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = F_1 - F_2 < 0 \Rightarrow F_{ολ} = -(F_2 - F_1)$

$F_{ολ} < 0$ άρα δείχνει προς τα αριστερά

Μη συγγραμμικά διανύσματα (δυσδιάστατα προβλήματα).

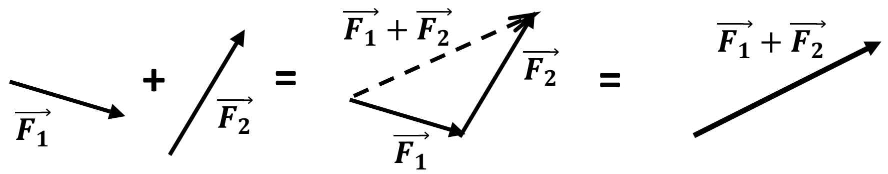
Μη συγγραμμικά είναι δύο διανύσματα που δεν βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες δηλαδή όταν η γωνία θ μεταξύ τους δεν είναι 0^o ή 180^o. Όταν τα διανύσματα **δεν είναι συγγραμμικά** το μέτρο της συνισταμένης δεν είναι ίσο με το άθροισμα ή τη διαφορά των μέτρων των διανυσμάτων

$$F_{ολ} \neq F_1 \pm F_2.$$

Για να βρούμε το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της συνισταμένης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από γεωμετρία και τριγωνομετρία.

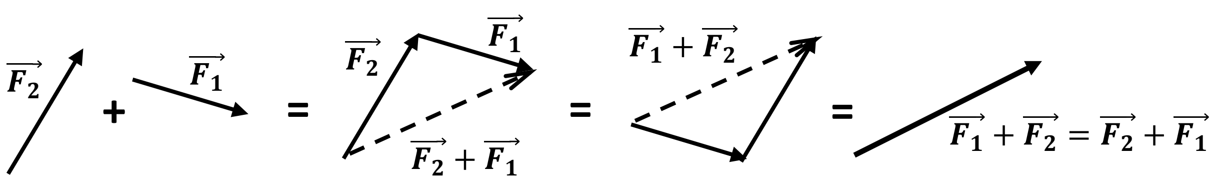
Όμως η διαδικασία της πρόσθεσής τους είναι η ίδια: **μεταφέρουμε παράλληλα και βάζουμε το ένα πίσω από το άλλο τα δύο διανύσματα και το άθροισμα είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του τελευταίου (δείτε σχήμα)**.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



Δηλαδή ξεκινάτε από την αρχή του ενός διανύσματος (π.χ. F_1) και διατρέχετε όλο το μήκος του προς την κατεύθυνση που δείχνει. Όταν φτάσετε στο τέλος του στρίβετε προς την κατεύθυνση που δείχνει το άλλο διάνυσμα (π.χ. F_2). Διατρέχετε επίσης όλο το μήκος και αυτού μέχρι που φτάνετε στο τέλος του. Ενώνετε με ένα βελάκι το πρώτο με το τελευταίο σημείο αυτής της διαδρομής (δηλ. αρχή του F_1 με τέλος του F_2) και έχετε το άθροισμα.

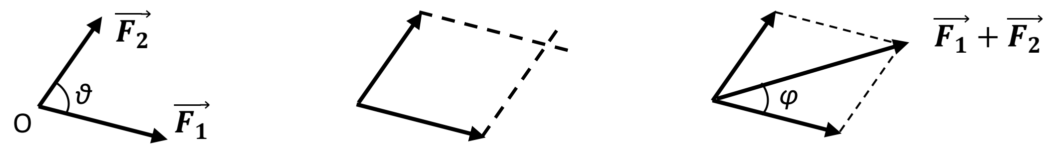
Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούμε διαδοχικά τα διανύσματα, δηλαδή ποιο θα βάλουμε πρώτο και ποιο δεύτερο (όπως και στους αριθμούς). Από δύο διαφορετικές διαδρομές καταλήγουμε στον ίδιο προορισμό. Επίσης όπως ξαναείπαμε η θέση του διανύσματος δεν έχει σημασία καθώς δύο διανύσματα που είναι παράλληλα, έχουν ίσα μέτρα και την ίδια φορά είναι ισοδύναμα.



Τα παραπάνω συνοψίζονται στον κανόνα του παραλληλογράμμου.

1) Βάζουμε τις αρχές των διανυσμάτων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ σε κοινό σημείο Ο. Τώρα έχουμε δύο πλευρές και τις τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμου.

2) Για να βρούμε την τέταρτη κορυφή χαράζουμε άλλες δύο πλευρές από τα τέλος των διανυσμάτων σε γραμμές παράλληλες με αυτές που έχουμε και η κορυφή είναι το σημείο που αυτές συναντούνται. Έτσι δημιουργούμε ένα παραλληλόγραμμο.
3) Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου από το Ο είναι το άθροισμα $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}$ (δείτε σχήμα).



Με λίγη τριγωνομετρία μπορούμε να βρούμε ότι το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης $\overrightarrow{F_{o\lambda}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ δίνονται από τους τύπους:

$$F_{o\lambda} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\theta} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_2\eta\mu\theta}{F_1 + F_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

όπου φ είναι η γωνία της συνισταμένης με τη μεγαλύτερη από τις δύο δυνάμεις, την F_1, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι για συγγραμμικές δυνάμεις, είτε παράλληλες $\theta=0^o$ *είτε* αντιπαράλληλες $\theta=180^o$ παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα με πριν

Παράλληλες: συν(0^0)=1, ημ(0^o)=0

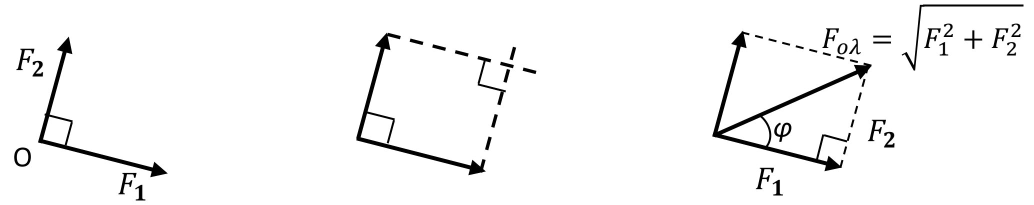
$$F_{o\lambda} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2\,, \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_2 \cdot 0}{F_1 + F_2 \cdot 1} = 0 \Rightarrow \varphi = 0 = \theta$$

Αντιπαράλληλλες: συν(180^0)= –1, ημ(180^o)=0

$$F_{o\lambda} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2\,, \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_2 \cdot 0}{F_1 + F_2 \cdot (-1)} = 0 \Rightarrow \varphi = 0 = \theta$$

Για την περίπτωση που οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή $\theta=90^o$ με συν(90^0)=0, ημ(90^o)=1, ***τότε καταλήγουμε στο γνωστό μας Πυθαγόρειο θεώρημα***.

Κάθετες : $F_{o\lambda} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ $\qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_2}{F_1}$



Ανάλυση δυνάμεων (συνιστώσες)

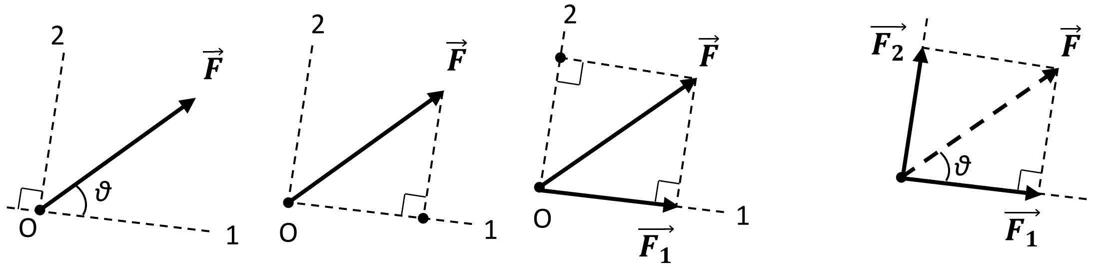
Επειδή προτιμάμε να μην κάνουμε γεωμετρία αλλά άλγεβρα με αριθμούς, χρησιμοποιούμε κάθετες συνιστώσες για να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα (βελάκια) με αριθμούς όπως και στην περίπτωση των συγραμμικών διανυσμάτων.

Οι δύο κάθετες δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ που προσθέσαμε για να βρούμε τη συνισταμένη $\overrightarrow{F_{o\lambda}}$ ονομάζονται **κάθετες συνιστώσες** της $\overrightarrow{F_{o\lambda}}$.

Κάθε δύναμη $\vec{F}$ στο επίπεδο μπορούμε πάντα να την αναλύουμε σε δύο κάθετες συνιστώσες οι οποίες να βρίσκονται πάνω σε άξονες που μας βολεύουν.

Για να αναλύουμε μια δύναμη σε δύο κάθετες συνιστώσες **χρησιμοποιούμε πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου αλλά αντίστροφα**.
1) Επιλέγουμε δύο κάθετους άξονες 1 και 2 από την αρχή του διανύσματος και σε ότι γωνία θ μας βολεύει. Τώρα έχουμε τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου, δηλαδή τις δύο κορυφές του και δύο ευθείες πάνω στις οποίες θα βρίσκονται δύο πλευρές του.
2) για να βρούμε την 3η κορυφή του παραλληλογράμμου τραβάμε κάθετη από το τέλος της $\vec{F}$ στον άξονα 1. Το σημείο που η κάθετη κόβει τον άξονα 1 (ίχνος) είναι το τέλος του $\overrightarrow{F_1}$
3) για να βρούμε την 4η κορυφή του παραλληλογράμμου τραβάμε κάθετη από το τέλος της $\vec{F}$ στον άξονα 2. Το σημείο που η κάθετη κόβει τον άξονα 2 (ίχνος) είναι το τέλος του $\overrightarrow{F_2}$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ



Στο τέλος πρέπει να έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δηλ. με τις απέναντι πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ορθές.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο φαίνεται ότι τα μέτρα των συνιστωσών είναι :

$$F_1 = F\text{συν}\theta \qquad \text{και} \qquad F_2 = F\text{ημ}\theta \qquad \text{ενώ} \qquad \text{εφ}\theta = \frac{F_2}{F_1}$$

Πράγματι βλέπουμε ότι : $F_1^2 + F_2^2 = F^2\text{συν}^2\theta + F^2\text{ημ}^2\theta = F^2(\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta) = F^2$
Η γωνία θ είναι αυτή που επιλέξαμε εμείς για να βάλουμε τον ένα άξονα. Η γωνία που επιλέγουμε καθορίζει την αναλογία των δύο συνιστωσών.

Ποιο είναι το πλεονέκτημα; Επειδή τα δύο διανύσματα $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν προσπαθήσουμε να τα αναλύσουμε σε κάθετες συνιστώσες το διάνυσμα $\overrightarrow{F_1}$ δεν θα έχει συνιστώσα στη διεύθυνση του $\overrightarrow{F_2}$ και ούτε το $\overrightarrow{F_2}$ θα έχει συνιστώσα στη διεύθυνση του $\overrightarrow{F_1}$.

Αυτό σημαίνει ότι το $\overrightarrow{F_1}$ πάνω στην ευθεία που βρίσκεται αντιστοιχεί στον αριθμό F_1 (στο μήκος του με το ανάλογο πρόσημο) ενώ στην άλλη ευθεία αυτή του $\overrightarrow{F_2}$ αντιστοιχεί στον αριθμό *0* (αφού δεν έχει μήκος σε αυτή την διεύθυνση).
Έτσι τα διανύσματα (βελάκια) σε ένα επίπεδο τα αντιστοιχούμε, όχι σε έναν αριθμό όπως πριν αλλά σε ένα ζεύγος αριθμών :

$$\overrightarrow{F_1} = (F_1, 0)$$
$$\overrightarrow{F_2} = (0, F_2)$$

Ο κάθε αριθμός στην παρένθεση αντιστοιχεί στο «μήκος» του διανύσματος στην αντίστοιχη από τις δύο ανεξάρτητες διευθύνσεις. Δηλαδή έχει σημασία ποιος αριθμός είναι πρώτος και ποιος δεύτερος.

Έτσι το άθροισμα διανυσμάτων γίνεται πάλι άλγεβρα. Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα απλά προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες τους. Π.χ. το άθροισμα των $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ είναι :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_1, 0) + (0, F_2) = (F_1 + 0, 0 + F_2) = (F_1, F_2)$$

Αυτό είναι ένα διάνυσμα που έχει μήκος F_1 στη διεύθυνση 1 και F_2 στην κάθετη της διεύθυνση 2, άρα έχει μήκος $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ και γωνία $\text{εφ}\theta = \frac{F_2}{F_1}$ με τη διεύθυνση 1. Δηλαδή είναι το διάνυσμα $\vec{F}$ του προηγούμενου σχήματος που το κατασκευάσαμε γεωμετρικά. Άρα ο τρόπος αυτός δουλεύει.

Έτσι δύο τυχαία διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ θα τα προσθέτουμε πλέον προσθέτοντας απλώς τις αντίστοιχες συνιστώσες τους:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1, A_2) + (B_1, B_2) = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

Ένα διάνυσμα το πολλαπλασιάζουμε με έναν αριθμό λ πολλαπλασιάζοντας κάθε συνιστώσα του με το λ :

$$\lambda\vec{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2)$$

Άρα το αντίθετο ενός διανύσματος είναι το διάνυσμα με τις αντίθετες συνιστώσες :

$$-\vec{A} = (-A_1, -A_2)$$

Το διάνυσμα μηδέν είναι το σημείο στην αρχή των αξόνων

$$\vec{0} = (0,0)$$

και θα το γράφουμε όμως απλά 0 στις διανυσματικές εξισώσεις.

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν είναι ίσες οι αντίστοιχες συνιστώσες τους:

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow (A_1, A_2) = (B_1, B_2) \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \end{matrix}$$

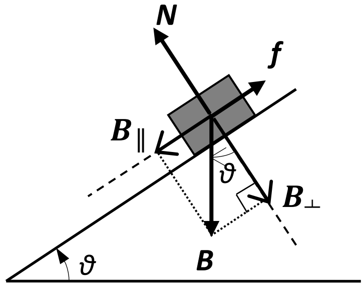
Έτσι μια διανυσματική εξίσωση στο επίπεδο αντιστοιχεί σε δύο αλγεβρικές εξισώσεις τις οποίες εύκολα μεταχειριζόμαστε. Π.χ. ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα αντιστοιχεί στο επίπεδο σε δύο εξισώσεις :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \left(F_x, F_y\right) = m(a_x, a_y) \Rightarrow \begin{matrix} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{matrix}$$

όπου τώρα τις δύο ανεξάρτητες διευθύνσεις τις συμβολίσαμε x και y αντί 1 και 2.

Την κατασκευή αυτή την εμπνεύστηκε πρώτος ένας φιλόσοφος ο Καρτέσιος (1596-1650). Ο μύθος λέει ότι ενώ ήταν ξαπλωμένος στο κρεβάτι του και φιλοσοφούσε παρατηρώντας μια μύγα να πετάει, συνειδητοποίησε ότι μπορούσε να προσδιορίσει τη θέση της μύγας μέσα στο δωμάτιο με τρεις αριθμούς, τις αποστάσεις της μύγας από τους δύο κάθετους τοίχους και το δάπεδο. Έτσι σε κάθε γεωμετρικό σημείο αποδόθηκαν τρεις αριθμοί, η γεωμετρία ενώθηκε με την άλγεβρα σε ένα κλάδο που λέγεται αναλυτική γεωμετρία και οι ευθείες και καμπύλες της γεωμετρίας αντιστοιχίστηκαν σε αλγεβρικές εξισώσεις.

Παράδειγμα: Ανάλυση βάρους σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο



Αν υπάρχει κίνηση θα είναι παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο που είναι η επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων. Επίσης η κάθετη αντίδραση και η τριβή βρίσκονται σε άξονες κάθετα και παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο αντίστοιχα. Άρα συμφέρει να αναλύσουμε το βάρος σε αυτούς τους άξονες. Τον παράλληλο με την επιφάνεια επαφής θα τον συμβολίσουμε $\|$ (δύο παράλληλες γραμμές) και τον κάθετο με $\perp$ (δύο κάθετες γραμμές).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο, η γωνία μεταξύ B και $B_\perp$ είναι θ όση και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου (αυτό προκύπτει από τη γεωμετρία επειδή οι δύο γωνίες έχουν κάθετες πλευρές). Οπότε :

$$B_\perp = B\sigma\upsilon\nu\theta \qquad B_\| = B\eta\mu\theta$$

και αν πάρουμε ως θετικές τις φορές προς τα κάτω

$$\vec{B} = (B\eta\mu\theta\ , B\sigma\upsilon\nu\theta)$$

ΑΠΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Σε όλα τα προβλήματα g=10 m/s^2

Στα σχήματα: είτε με βελάκι $\vec{F}$ είτε με έντονη γραφή $\boldsymbol{F}$ εννοούμε το διάνυσμα, ενώ με πλάγια γραφή F το μέτρο του

Τακτική επίλυσης προβλημάτων

1) Κάνουμε προσεκτικά το σχεδιάγραμμα δυνάμεων για το σώμα που μελετάμε
1α) Σχεδιάζουμε πρώτα τις δυνάμεις από απόσταση (βάρος, ηλεκτροστατική, μαγνητική)
1β) Σχεδιάζουμε μετά τις δυνάμεις επαφής.
Μια δύναμη για κάθε επαφή του σώματος με νήματα (τάση), ελατήρια ($F_{ελ}$) , λεία δάπεδα ή άλλα λεία στερεά (κάθετη αντίδραση).
Δύο δυνάμεις για επαφή με μη λεία δάπεδα (κάθετη αντίδραση και τριβή).
Έως τρεις δυνάμεις για επαφές με ρευστά (άνωση, οπισθέλκουσα, δυναμική άνωση ανάλογα με το αν κινείται το σώμα μέσα στο ρευστό και τι σχήμα έχει ή αν περιστρέφεται).
1γ) **Κάθε δύναμη που σχεδιάζουμε θα πρέπει να ξέρουμε από ποιο σώμα ασκείται στο σώμα που μελετάμε**

2) Αντικαθιστούμε τις δυνάμεις με αριθμούς
2α) Αν όλες οι δυνάμεις είναι συγραμμικές καθορίζουμε τη θετική φορά του άξονα και τις αντικαθιστούμε με θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς
2β) Αν οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες επιλέγουμε κατάλληλους κάθετους άξονες και τις αναλύουμε σε κάθετες συνιστώσες πάνω στους άξονες, δηλαδή τις αντικαθιστούμε με ένα ζευγάρι αριθμών

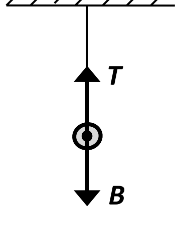
3) Εφαρμόζουμε τον 1^ο ή το 2^ο νόμο του Νεύτωνα σε κάθε διεύθυνση ανάλογα με το αν έχουμε ισορροπία ή όχι.
3α) Για συγγραμμικές δυνάμεις παίρνουμε μια εξίσωση και άρα μπορούμε να λύσουμε για έναν άγνωστο.
3β) Για ομοεπίπεδες δυνάμεις παίρνουμε δύο εξισώσεις και άρα μπορούμε να λύσουμε για δύο αγνώστους.
3γ) Οι άγνωστοι μπορεί να είναι είτε η επιτάχυνση, είτε το μέτρο κάποιας δύναμης είτε η παράμετρος κάποιας δύναμης (π.χ. συντελεστής τριβής) είτε κάποια γωνία.

4) Αν έχουμε παραπάνω από ένα σώμα στο πρόβλημά μας τότε ανάλογα με το τι ζητάμε μπορούμε :
4α) να εφαρμόσουμε τα παραπάνω σε κάθε σώμα και να πάρουμε έως και δύο εξισώσεις για κάθε σώμα
4β) να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο σύστημα σωμάτων για να βρούμε την κοινή επιτάχυνση που έχουν τα σώματα, αν έχουν.

Προβλήματα με ένα σώμα

Μονοδιάστατα προβλήματα

1. Σφαίρα που αιωρείται από νήμα και ισορροπεί.
Σφαίρα μάζας m=0,5 kg κρέμεται από νήμα στο ταβάνι της τάξης. Η σφαίρα ισορροπεί. Πόση είναι η τάση του νήματος;

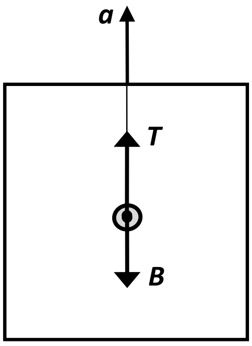


Λύση:
Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο. Έχουμε στατική ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$\vec{F}_{ολ} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{T} + \vec{B} = 0 \;\Rightarrow T - B = 0 \;\Rightarrow\; T = B = mg = 0{,}5 \cdot 10 = 5\text{ N}$$

2. Σφαίρα που αιωρείται από νήμα και επιταχύνεται κατακόρυφα.

Την ίδια σφαίρα από την $1^η$ άσκηση (m=0,5 kg) την κρεμάμε από την οροφή ενός ανελκυστήρα. Επειδή ο ανελκυστήρας έχει να ανέβει 150 ορόφους, στην αρχή της διαδρομής πρέπει να επιταχύνει αρκετά έντονα για να πετύχει μεγάλη ταχύτητα και να φτάσει κάποια στιγμή στον τελευταίο όροφο. Έτσι επιταχύνει με επιτάχυνση a=2 m/s^2. Πόση είναι η τάση του νήματος τώρα;



Λύση:

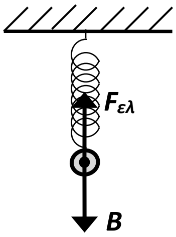
Το πρόβλημα είναι ακόμα μονοδιάστατο. Το σώμα επιταχύνεται (δεν ισορροπεί) άρα εφαρμόζουμε το $2^ο$ νόμο του Νεύτωνα

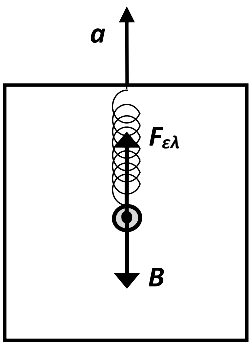
$$\vec{F}_{ολ} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{T} + \vec{B} = m\vec{a} \;\Rightarrow T - B = ma \;\Rightarrow\; T = B + ma = mg + ma \Rightarrow$$
$$T = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 2 = 5 + 1 = 6\text{ N}$$

Η τάση είναι πιο μεγάλη από πριν γιατί εκτός του να ισορροπήσει το βάρος πρέπει να επιταχύνει και τη σφαίρα προς τα πάνω

3. Σώμα ανηρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο (επιταχυνσιόμετρο).

Επαναλάβετε τις παραπάνω δύο ασκήσεις αντικαθιστώντας το νήμα με ένα ελατήριο σταθεράς k= 1 N/cm. Πόσο επιμηκύνεται το ελατήριο (x=?) την πρώτη φορά και πόσο τη δεύτερη;

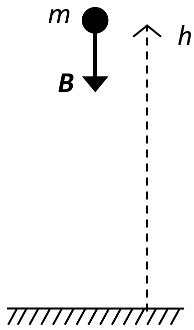




4. Ελεύθερη πτώση

Ελεύθερη πτώση εκτελεί ένα σώμα όταν η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος. Ένα σώμα που το αφήνουμε να πέσει ή το πετάμε με μια αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια της Γης, εφόσον αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Οι φυσικοί και οι τεχνητοί δορυφόροι επίσης εκτελούν ελεύθερη πτώση. Οι διαφορετικές τροχιές τους είναι αποτέλεσμα της αρχικής ταχύτητας που είχαν.

Αφήνουμε σώμα μάζας m=2 kg να πέσει στη Γη από ύψος h=125 m. Πόση είναι η επιτάχυνσή του; Πότε φτάνει στη Γη και με τι ταχύτητα. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης κοντά στην επιφάνειά της είναι σταθερή και προσεγγιστικά ίση με g=10 N/kg



Λύση :
Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο. Μοναδική δύναμη είναι το βάρος. Διαλέγουμε την θετική φορά προς τα πάνω και το σημείο αναφοράς y=0 στο έδαφος. Εφαρμόζουμε το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{ολ} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{B} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; -B = ma \;\Rightarrow\; -mg = ma \Rightarrow a = -g$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του σώματος. Όλα τα σώματα ελαφριά ή βαριά θα πέσουν με την ίδια επιτάχυνση. Η επιτάχυνση a έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο σταθερό και ίσο με την ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης g. Γι αυτό το g ονομάζεται και επιτάχυνση της βαρύτητας. Οι μονάδες του είναι πράγματι μονάδες επιτάχυνσης :

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

Άρα το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω με επιτάχυνση

$$a = -g = -10\ \mathrm{m/s^2}$$

Η αρχική του ταχύτητα είναι μηδέν υ_0=0 και η αρχική του θέση είναι y_0=h=125 m. Άρα από την κινηματική, η κίνησή του θα διέπεται από τις εξισώσεις :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \Rightarrow \upsilon = -gt \Rightarrow \upsilon = -10t$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 125 - 5t^2$$

Από δω και πέρα ή άσκηση είναι άσκηση κινηματικής. Το σώμα θα φτάσει στο έδαφος όταν η θέση του (ύψος) γίνει μηδέν $y=0$ Το ρολόι τότε θα δείχνει t=$t_{πτώσης}$. Άρα

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gt^2_{πτώσης} \Rightarrow t_{πτώσης} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{πτώσης} = \sqrt{\frac{2\cdot 125}{10}} = 5s$$

Η ταχύτητά του για t=$t_{πτώσης}$ είναι

$$\upsilon = -gt \Rightarrow \upsilon_{πτώσης} = -gt_{πτώσης} \Rightarrow \upsilon_{πτώσης} = -10\cdot 5 = -50\ \mathrm{m/s}$$

Παρατήρηση: Αν επιλέγαμε ως θετική φορά τη φορά προς τα κάτω δεν θα άλλαζε τίποτα πέρα τα πρόσημα των a, υ και y.

$$\vec{F}_{ολ} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{B} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; B = ma \;\Rightarrow\; mg = ma \Rightarrow a = g = +10\ \mathrm{m/s^2}$$

$$y_0 = -h = -125\ \mathrm{m} \quad , \qquad \upsilon_0 = 0$$

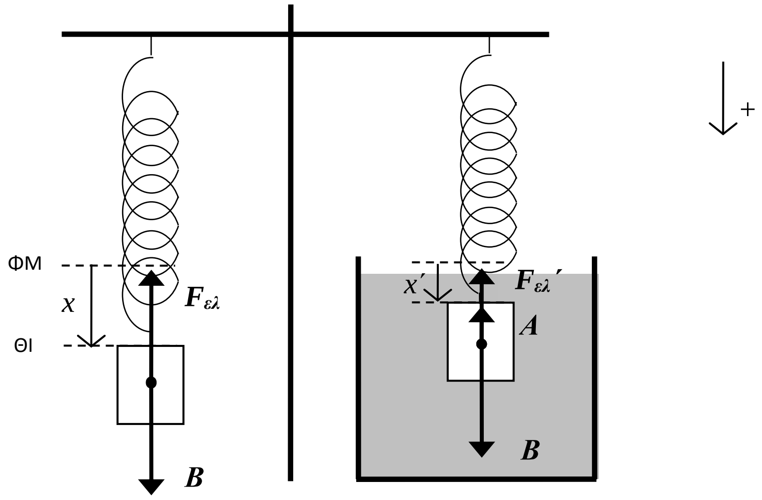
$$\upsilon = \upsilon_0 + at \Rightarrow \upsilon = gt \Rightarrow \upsilon = 10t$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y = -h + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = -125 + 5t^2$$

$$0 = -h + \tfrac{1}{2}gt^2_{πτώσης} \Rightarrow t_{πτώσης} = \sqrt{\tfrac{2h}{g}} = \sqrt{\tfrac{2\cdot 125}{10}} = 5s$$

$$\upsilon_{πτώσης} = gt_{πτώσης} \Rightarrow \upsilon_{πτώσης} = 10\cdot 5 = 50\ \mathrm{m/s}$$

5. Σώμα αναρτημένο από ελατήριο μέσα σε υγρό
Όταν αναρτούμε το σώμα από το ελατήριο έξω από το νερό αυτό επιμηκύνεται κατά x=15 cm. Στη συνέχεια τοποθετούμε από κάτω του μια δεξαμενή με νερό. Το σώμα βυθίζεται ολόκληρο μέσα στο νερό και το ελατήριο τώρα επιμηκύνεται κατά x'=13,1 cm. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ=1000 kg/m^2. Δεν γνωρίζεται ούτε τη σταθερά του ελατηρίου k ούτε την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Από τι υλικό είναι φτιαγμένο το σώμα; (Παραλλαγή του κλασσικού προβλήματος του Αρχιμήδη).



Για να βρούμε από τι υλικό είναι φτιαγμένο ένα σώμα πρέπει να βρούμε μια ιδιότητά του που εξαρτάται από το υλικό. Αφού έχουμε να κάνουμε με άνωση θα προσπαθήσουμε να βρούμε την πυκνότητά του:

$$\rho_\Sigma = \frac{m}{V}$$

Άρα χρειαζόμαστε τη μάζα και τον όγκο του.
Γράφουμε τις εξισώσεις που έχουμε διαθέσιμες και ελπίζουμε να είναι αρκετές για να τα προσδιορίσουμε.
Ισορροπία έξω από το νερό:

$$\vec{F}_{ολ} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ελ} + \vec{B} = 0 \;\Rightarrow -|F_{ελ}| + B = 0 \Rightarrow -kx + mg = 0 \Rightarrow m = \frac{kx}{g} \quad (1)$$

Ισορροπία μέσα στο νερό:

$$\vec{F}_{ολ} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ελ}{}' + \vec{A} + \vec{B} = 0 \;\Rightarrow -|F_{ελ}{}'| - A + B = 0 \Rightarrow -kx' - \rho g V + mg = 0$$

Αντικαθιστούμε το mg από την (1): $mg = kx$ και παίρνουμε

$$-kx' - \rho g V + kx = 0 \;\Rightarrow V = \frac{k(x - x')}{\rho g} \qquad (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την πυκνότητα του σώματος

$$\rho_\Sigma = \frac{m}{V} = \frac{kx/g}{k(x-x')/\rho g} = \rho \frac{x}{x - x'}$$

Ευτυχώς, το k και το g απαλείφθηκαν. Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές βρίσκουμε

$$\rho_\Sigma = 1000 \frac{15}{15 - 13{,}1} = 1000 \frac{15}{1{,}9} = 7.900 \text{ kg/m}^3$$

Με την ακρίβεια των μετρήσεων που είχαμε αποφαινόμαστε ότι είναι καθαρός σίδηρος (βρείτε την πυκνότητα του Fe στο Google).

6. Πτώση με αντίσταση αέρα – ορική ταχύτητα αλεξιπτωτιστή (sky diver).

Το βάρος, κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος, το επιταχύνει και αυξάνει την ταχύτητά του. Όσο όμως αυξάνεται η ταχύτητά του αυξάνεται και η αντίσταση του αέρα ή οπισθέλκουσα. Η δύναμη αυτή δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος. Όταν το σώμα αποκτήσει μεγάλη ταχύτητα η αντίσταση του αέρα δεν μπορεί πλέον να αγνοηθεί. Καθώς αυξάνει η αντίσταση του αέρα θα γίνει κάποια στιγμή ίση με το βάρος. Οπότε από το σημείο εκείνο και μετά το σώμα θα ισορροπεί και θα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{ορ}$ η οποία ονομάζεται ορική ή τερματική ταχύτητα. Αυτήν μπορούμε να την υπολογίσουμε εύκολα χωρίς να λύσουμε όλο το δυναμικό πρόβλημα όπως στις διαλέξεις της 1ης εβδομάδας.
Επειδή ο αέρας είναι σχετικά αραιός με πυκνότητα περίπου ίση με ρ= 1 kg/m^3 (π.χ. το νερό έχει ρ=1000 kg/m^3) θα αγνοήσουμε την δύναμη της άνωσης θεωρώντας σώματα με μικρό όγκο.

Να υπολογίσετε την ορική ταχύτητα δύο ανθρώπων με μάζα m_1 =62,5 kg και m_2 =90 kg κατά την πτώση τους στον αέρα. Θεωρείστε τη διαφορά στο μέγεθος και στο σχήμα τους αμελητέα. Η αντίσταση του αέρα είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας και το μέτρο της δίνεται από τον τύπο:

$$F_d = cv^2$$

Για έναν άνθρωπο που πέφτει σε οριζόντια στάση κατά μέτωπο στον αέρα με τα χέρια και τα πόδια ανοιχτά (spread eagle) η σταθερά c είναι περίπου ίση με c=0,25 kg/m.

Λύση :
Όταν το σώμα αποκτήσει ορική ταχύτητα θα πάψει να επιταχύνεται και άρα η ολική δύναμη θα είναι ίση με μηδέν. Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω. Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Νεύτωνα:

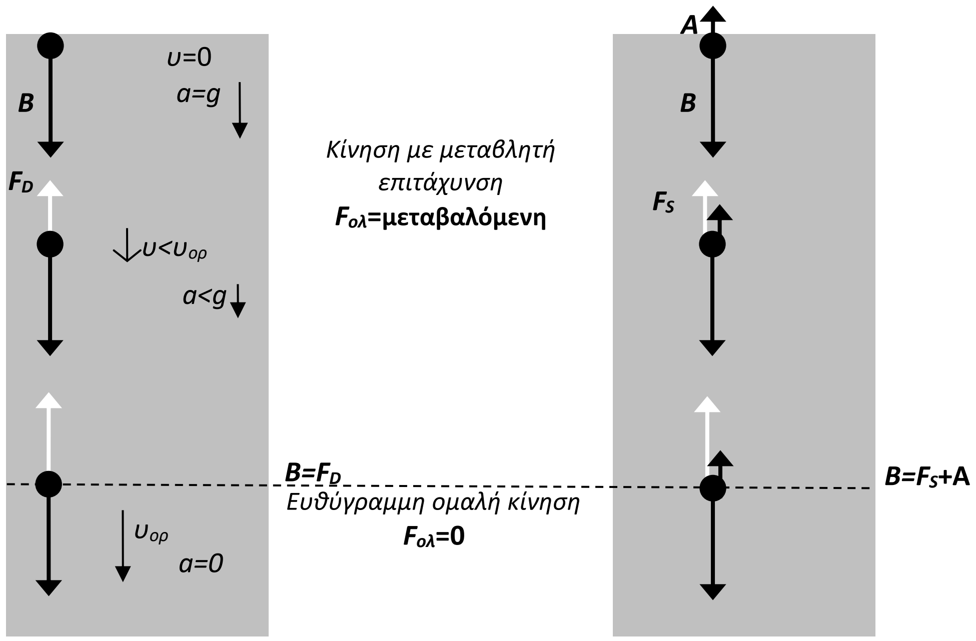
$$\vec{F}_{ολ} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_D + \vec{B} = 0 \Rightarrow -F_D + B = 0 \;\Rightarrow\; -Dυ_{ορ}^2 + mg = 0 \;\Rightarrow\; υ_{ορ} = \sqrt{\frac{mg}{\mathrm{c}}}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέα, από δύο σώματα που έχουν το ίδιο c (σχήμα, μέγεθος) αυτό με την πιο μεγάλη μάζα θα πέσει πράγματι πιο γρήγορα (όπως έλεγε ο Αριστοτέλης).
Για τον πρώτο άνθρωπο (m_1 =62,5 kg) έχουμε :

$$υ_{ορ} = \sqrt{\frac{62{,}5 \cdot 10}{0{,}25}} = \sqrt{\frac{625}{1/4}} = \sqrt{625 \cdot 4} = \sqrt{2500} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

και για τον δεύτερο (m_2 =90 kg) : $υ_{ορ} = \sqrt{\frac{90 \cdot 10}{0{,}25}} = \sqrt{3600} = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 216\ \mathrm{km/h}$

Με αυτήν την ταχύτητα θα συγκρουστούν με το έδαφος αν δεν ανοίξει το αλεξίπτωτό τους. Το αλεξίπτωτο θα προκαλέσει μεγαλύτερη αντίσταση από τον αέρα και θα επιβραδύνει τα σώματα. Η ορική τους ταχύτητα θα μειωθεί σε πολύ μικρότερη τιμή ώστε η σύγκρουση με το έδαφος να γίνει με μικρή ταχύτητα, τέτοια που να μπορεί να αντέξει το ανθρώπινο σώμα.



Μικρό σώμα στον αέρα *Σφαίρα σε υγρό*

7. Σφαίρα που βυθίζεται σε υγρό – μέτρηση ιξώδους υγρού
Από την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι αν μετρήσουμε την ορική ταχύτητα ενός σώματος μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το συντελεστή c που καθορίζει την αντίσταση του ρευστού (οπισθέλκουσα). Αυτό ακριβώς κάνουμε για να μετρήσουμε το συντελεστή απόσβεσης b στα υγρά όπου οι ταχύτητες καταβύθισης είναι μικρές και μπορούμε εύκολα να τις μετρήσουμε στο εργαστήριο με απλό εξοπλισμό (χάρακα και χρονόμετρο). Η αντίσταση του υγρού (οπισθέλκουσα) δίνεται από τον τύπο :

$$\vec{F}_d = -b\vec{υ}$$

Αν το σώμα που βυθίζεται είναι σφαίρα ακτίνας r τότε ο συντελεστής απόσβεσης είναι:

$$b = 6\pi\eta r$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους του υγρού.

Υπολογίστε το συντελεστή ιξώδους ενός υγρού αν μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας r=0,001 m όταν αφεθεί ελεύθερη στην επιφάνειά του καταλήγει να βυθίζεται με σταθερή ταχύτητα $υ_{ορ}$= 0,18 m/s. Η πυκνότητα του υγρού είναι ρ= 920 kg/m^3 και η πυκνότητα του σιδήρου ρ_{Fe} = 7874 kg/m^3. Ο όγκος μιας σφαίρας δίνεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Λύση :
Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος *B* προς τα κάτω, η άνωση *A* προς τα πάνω και η αντίσταση του υγρού F_d επίσης προς τα πάνω (αφού η ταχύτητα είναι προς τα κάτω). Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω.
Όταν η σφαίρα κινείται με σταθερή ταχύτητα έχει πετύχει την ορική ταχύτητα μέσα στο υγρό. Η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν και στη συνέχεια θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μέχρι να χτυπήσει στον πυθμένα.
Ολόκληρος ο όγκος της σφαίρας είναι βυθισμένος, οπότε η άνωση είναι :

$$\vec{A} = -A = -\rho g V_{\beta\upsilon\theta} = -\frac{4}{3}\rho g \pi r^3$$

Η μάζα του σώματος δεν μας δίνεται. Μπορούμε όμως να την υπολογίσουμε από την πυκνότητα και τον όγκο του : $m = \rho_{Fe} V = \frac{4}{3}\rho_{Fe}\pi r^3$. Οπότε το βάρος της σφαίρας είναι :

$$\vec{B} = B = mg = \frac{4}{3}\rho_{Fe} g \pi r^3$$

Η οπισθέλκουσα είναι: $\vec{F_d} = -b\vec{v} = -bv_{o\rho} = -6\pi\eta r \cdot v_{o\rho}$

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} + \vec{F}_D + \vec{B} = 0 \Rightarrow -A - F_D + B = 0 \quad\Rightarrow -A - 6\pi\eta r \cdot v_{o\rho} + B = 0 \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{B - A}{6\pi r v_{o\rho}}$$

Αντικαθιστούμε τις αναλυτικές εκφράσεις για την άνωση και το βάρος και βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο $\frac{4}{3} g\pi r^3$

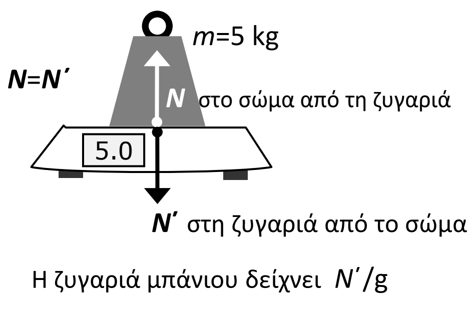
$$\eta = \frac{\frac{4}{3} g\pi r^3(\rho_{Fe} - \rho)}{6\pi r v_{o\rho}} \Rightarrow \eta = \frac{2}{9}\frac{gr^2}{v_{o\rho}}(\rho_{Fe} - \rho)$$

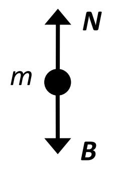
Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές παίρνουμε :

$$\eta = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}001^2}{9 \cdot 0{,}18}(7874 - 920) \Rightarrow \eta = 0{,}084\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}}$$

Ιξώδες 0,084 και πυκνότητα 920 έχει στους 20 ºC το ελαιόλαδο.

8. Σώμα πάνω σε ζυγαριά μπάνιου
Τοποθετούμε μια μάζα *m*=5 kg σε μια ζυγαριά μπάνιου στο εργαστήριο. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς ;





Λύση :
Οι ζυγαριές είναι δυναμόμετρα, «αισθάνονται» δυνάμεις. Η ζυγαριά δέχεται από το σώμα πάνω της, δύναμη N΄. Όμως επειδή θέλουμε οι ζυγαριές να δείχνουν μάζα σε kg έχουν ενσωματωμένη την επιτάχυνση της βαρύτητας *g* ώστε να "διαιρούν" τη δύναμη *N΄* με το *g* και να μας δίνουν ενδείξεις σε kg. Έτσι μας δείχνουν το N'/*g*.

Εφόσον η ζυγαριά δέχεται δύναμη *N΄* από τη μάζα που τοποθετήσαμε πάνω της τότε σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα θα αντιδράσει και θα ασκήσει στη μάζα αντίθετη δύναμη. Αυτή είναι η κάθετη αντίδραση *N* που δέχεται η μάζα. Άρα, αρκεί να υπολογίσουμε την *N* αφού έχει ίσο μέτρο με την *N΄:* $N' = N$ (δράση-αντίδραση)

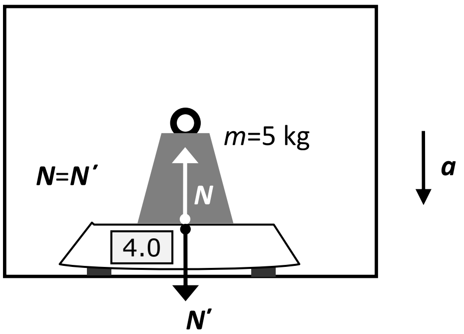
Στη μάζα πάνω στη ζυγαριά εκτός από την κάθετη αντίδραση N από τη ζυγαριά ασκείται και το βάρος B από τη Γη. Η μάζα ισορροπεί άρα:

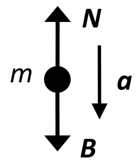
$$\vec{F}_{ολ} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{N} + \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; N - B = 0 \;\Rightarrow\; N = B \Rightarrow N = mg = 5 \cdot 10 = 50\ \mathrm{N}$$

Άρα η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι : *N΄/g=N/g*=50/10=5 kg.

9. Σώμα πάνω σε ζυγαριά μπάνιου σε ανελκυστήρα που επιταχύνεται

Βάζουμε την ίδια μάζα m=5 kg πάνω στην ίδια ζυγαριά μέσα στον προηγούμενο ανελκυστήρα που τώρα επιταχύνει *προς τα κάτω* με επιτάχυνση a=2 m/s^2 (για να φτάσει κάποια στιγμή στο ισόγειο από τον 150ο όροφο). Ποια είναι τώρα η ένδειξη της ζυγαριάς ;





Λύση :

Εξακολουθεί να ισχύει *N΄ = N* αφού είναι δράση αντίδραση, όμως η τιμή τους έχει τώρα αλλάξει λόγω της επιτάχυνσης.

Η μάζα πάνω στη ζυγαριά δεν ισορροπεί, επιταχύνεται. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα :

$$\vec{F}_{ολ} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{N} + \vec{B} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; N - B = -ma \;\Rightarrow\; N = B - ma \Rightarrow$$
$$N = m(g - \alpha)$$
$$\Rightarrow N = 5 \cdot (10 - 2) = 5 \cdot 8 = 40\ \mathrm{N}$$

Τα διανύσματα του βάρους και της επιτάχυνσης δείχνουν προς τα κάτω οπότε αντικαθίστανται με αρνητικούς αριθμούς.

Άρα η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι : *N΄/g=N/g*=40/10=4 kg.

Η μάζα «ελάφρυνε» κατά 1 kg.

Η ακραία συνθήκη της παραπάνω περίπτωσης είναι να κοπεί το συρματόσκοινο που συγκρατεί το θάλαμο του ανελκυστήρα. Τότε όλα τα σώματα μαζί, ο θάλαμος, η ζυγαριά και η μάζα επιταχύνονται προς τα κάτω με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας *a*=g λόγω του βάρους τους (κάνουν ελεύθερη πτώση). Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή για την επιτάχυνση στον παραπάνω τύπο για την κάθετη αντίδραση *N* παίρνουμε :

$$N = m(g - a) = m(g - g) = 0$$

Η κάθετη αντίδραση μηδενίζεται. ***Δηλαδή η ζυγαριά θα δείξει 0 kg***. Φυσικά το βάρος δεν μηδενίζεται αφού αυτό επιταχύνει όλα τα σώματα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται «φαινόμενη έλλειψη βαρύτητας» και είναι αυτό που ζουν οι αστροναύτες στους διαστημικούς σταθμούς οι οποίοι είναι σε τροχιά γύρω από τη Γη. Οι διαστημικοί σταθμοί είναι δορυφόροι της Γης και κινούνται γύρω από τη Γη μόνο με την επίδραση του βάρους τους. Δηλαδή όπως και ο ανελκυστήρας είναι σε ελεύθερη πτώση. Άρα συμβαίνει σε αυτούς ότι και στον ανελκυστήρα. Αυτό που σώζει τους δορυφόρους είναι το γεγονός ότι έχουν αρχική ταχύτητα κάθετη στο βάρος και ότι η Γη είναι σφαιρική και έτσι καταλήγουν να γυρίζουν γύρω της.

Αντίθετα αν ο ανελκυστήρας επιταχυνόταν **προς τα πάνω** με την ίδια επιτάχυνση a=2 m/s^2 τότε η μάζα θα **«βάραινε»** κατά 1 kg. ***Δείξτε το***.

Για να πειστείτε ανεβείτε σε μια ζυγαριά και πηδήξτε προς τα πάνω. Τη στιγμή που επιταχύνεστε θα δείτε την ένδειξη της ζυγαριάς να αυξάνει.

Δυσδιάστατα προβλήματα

10. Σώμα σε οριζόντιο επίπεδο

Σώμα μάζας m=4 kg κείται σε οριζόντιο μη λείο δάπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής του σώματος με το δάπεδο είναι μ_s=0,8 και ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_k=0,6.

1) Τραβάμε προς τα δεξιά με νήμα με τάση T=30 N. Θα κινηθεί το σώμα; Ποια είναι η ελάχιστη τάση $T_{\min}$ που πρέπει να εφαρμόσουμε για να αρχίσει να μετακινείται το σώμα;

2) Εφόσον κινηθεί πόση είναι η ελάχιστη τάση $T'_{\min}$ που πρέπει να εφαρμόζουμε για να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα;

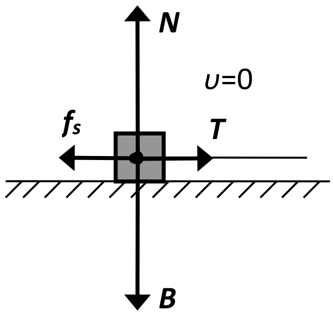
3) Αφού το κινήσουμε εφαρμόζουμε δύναμη T''=30 N. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος.

Λύση:

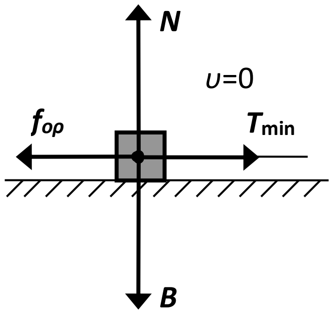
Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις. Όταν παρόλο που το τραβάμε, το σώμα δεν μετακινείται, η τριβή είναι στατική. Όταν μετακινείται η τριβή είναι κινητική. Οι δυνάμεις είναι όλες σε κάθετους άξονες μεταξύ τους. Άρα δεν χρειάζεται να τις αναλύσουμε.

Στην κάθετη διεύθυνση υπάρχει στατική ισορροπία και θα είναι πάντα $N = B \Rightarrow N = mg = 4 \cdot 10 = 40$ N.

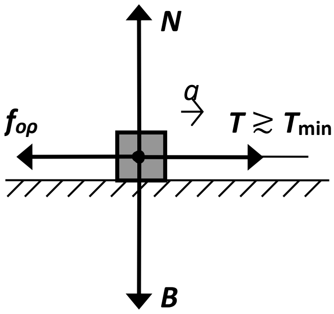
Οριζόντια, το αν θα έχουμε ισορροπία ή όχι εξαρτάται από το αν η τάση του νήματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από την εκάστοτε τριβή.



Στατική ισορροπία



Οριακή στατική ισορροπία

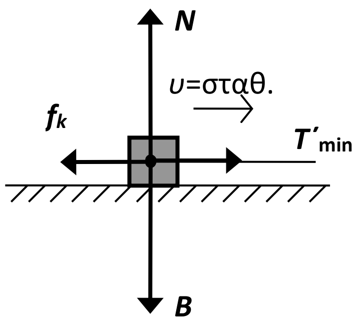


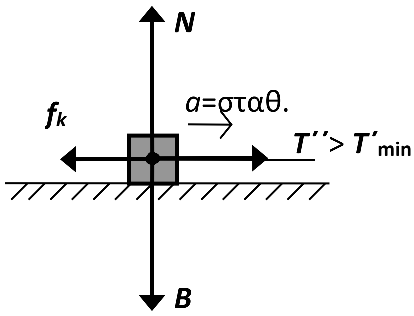
Εκκίνηση

1) Η στατική τριβή μπορεί να αυξάνεται από 0 έως τη μέγιστη τιμή $f_{o\rho} = \mu_s N = 0.8 \cdot 40 = 32$ N και να εξουδετερώνει την τάση T. Η απαιτούμενη δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε με το νήμα για να μετακινηθεί το σώμα πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερη από $f_{o\rho}$=32 N, άρα T_{min} =32 N.

Άρα για τάση T=30 N το σώμα δεν θα μετακινηθεί και θα έχουμε στατική ισορροπία :

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} F_{x,o\lambda} = 0 \\ F_{y,o\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_s = T \\ N = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_s = 30 \text{ N} \\ N = 40 \text{ N} \end{matrix}$$





2) Μόλις αρχίσει το σώμα να κινείται η τριβή γίνεται κινητική. Το μέτρο της κινητικής τριβής παραμένει σταθερό όσο το σώμα κινείται και είναι:

$$f_k = \mu_k N = 0{,}6 \cdot 40 = 24 \text{ N}$$

Αυτό είναι μικρότερο της μέγιστης στατικής $f_{o\rho}$=32 N. Άρα για να κινείται το σώμα με σταθερή ταχύτητα θα χρειάζεται λιγότερη τάση από το νήμα.

Το σώμα ισορροπεί υ=σταθ. => $a=0$ οπότε εφαρμόζουμε πάλι τον 1ο νόμο :

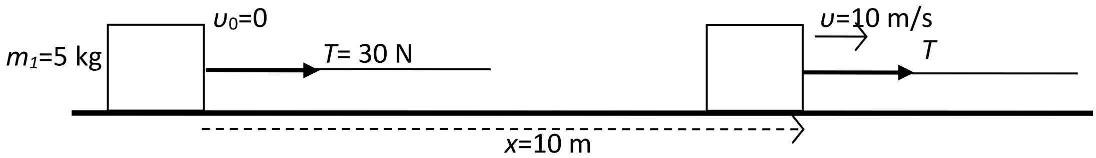
$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} F_{x,o\lambda} = 0 \\ F_{y,o\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T'_{\min} = f_k \\ N = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_k = 24 \text{ N} \\ N = 40 \text{ N} \end{matrix}$$

Δηλαδή αφού ασκήσουμε τάση T> $f_{o\rho}$=32 N ώστε να επιταχύνουμε το σώμα και να αρχίσει κινείται μετά μπορούμε να τη μειώσουμε ως την τιμή T'= 24 N και αυτό θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

3) Αν μειώσουμε την τάση σε μεγαλύτερη τιμή από 24 N, T''=30 N το σώμα θα συνεχίσει να επιταχύνεται γιατί η κινητική τριβή που παραμένει σταθερή και ίση f_k=24 N είναι μικρότερη από την T''. Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για να βρούμε την επιτάχυνση:

$$\vec{F}_{o\lambda} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{matrix} F_{x,o\lambda} = ma \\ F_{y,o\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T'' - f_k = ma \\ N = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \dfrac{T'' - f_k}{m} = \dfrac{30 - 24}{4} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5 \text{ m/s}^2 \\ N = 40 \text{ N} \end{matrix}$$

11. Σε σώμα μάζας m=5 kg που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκούμε σταθερή δύναμη T=30 N. Μετά από x=10 m έχει αποκτήσει ταχύτητα υ=10 m/s. Πόση είναι η επιτάχυνσή του; Είναι το δάπεδο λείο; Πόση είναι η τριβή; Πόσος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής;



Λύση:

Το σώμα αυξάνει την ταχύτητά του άρα επιταχύνεται. Η μια δύναμη που ξέρουμε ότι του ασκείται, η T, είναι σταθερή. Ακόμα και αν υπάρχει τριβή από το δάπεδο, επειδή και η τριβή είναι μια σταθερή δύναμη πάλι η συνισταμένη δύναμη θα είναι σταθερή. Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα. Οι εξισώσεις είναι :

$$\upsilon = at \qquad (1)$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

Αν λύσουμε την πρώτη ως προς το χρόνο και την αντικαταστήσουμε στη δεύτερη θα πάρουμε μια σχέση που συνδέει τη θέση με την ταχύτητα χωρίς αναφορά στο χρόνο.

$$t = \frac{\upsilon}{a}$$

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{\upsilon}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{\upsilon^2}{a^2} \Rightarrow x = \frac{\upsilon^2}{2a} \Rightarrow \qquad \upsilon^2 = 2ax \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (3) βρίσκουμε την επιτάχυνση

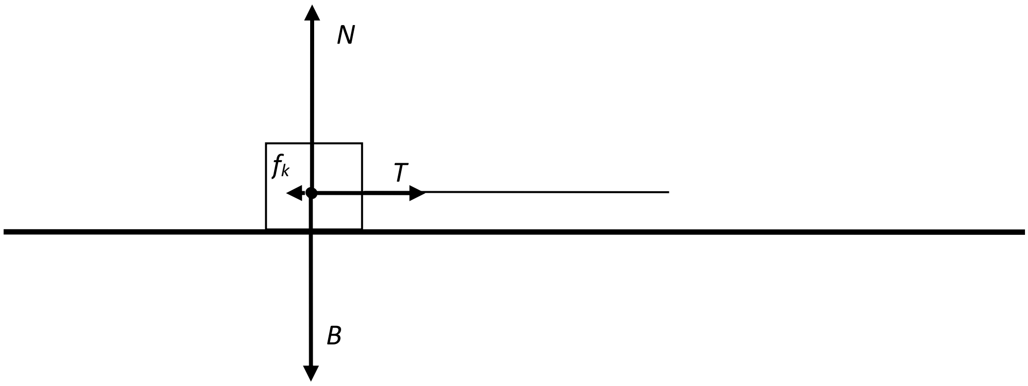
$$a = \frac{\upsilon^2}{2x} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5 \text{ m/s}^2$$

Οπότε η ολική δύναμη είναι

$$F_{o\lambda} = ma = 5 \cdot 5 = 25 \text{ N}$$

Άρα η δύναμη T=30 N δεν είναι η ολική δύναμη στο σώμα. Αφού η ολική είναι μικρότερη από την T υπάρχει και τριβή f_k στην αντίθετη κατεύθυνση :

$$F_{o\lambda} = T - f_k \Rightarrow f_k = T - F_{o\lambda} = 30 - 25 \Rightarrow \quad f_k = 5 \text{ N}$$



Επειδή η τριβή ολίσθησης δίνεται από τον τύπο

$$f_k = \mu_k N$$

και αφού το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα :

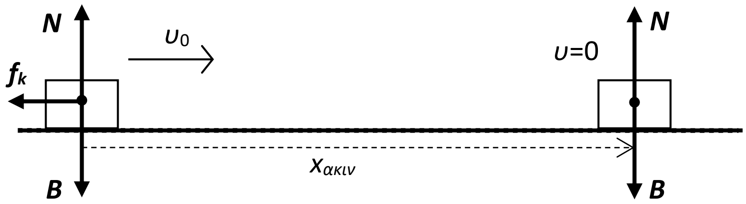
$$N = B \Rightarrow N = mg = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$$

ο συντελεστής τριβής είναι :

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{5}{50} \Rightarrow \mu_k = 0{,}1$$

12. Ακινητοποίηση με τριβή – Φρενάρισμα

Σώμα μάζας m=900kg με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_0=30 m/s συναντά μη λείο οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή κινητικής τριβής μ_k=0,8. Με τι επιτάχυνση θα επιβραδυνθεί; Πόσο διάστημα θα καλύψει πριν σταματήσει; Πόσο χρονικό διάστημα θα χρειαστεί για να σταματήσει;



Λύση:

Εφαρμόζεται για οχήματα που φρενάρουν. Παίρνουμε ως θετική την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε τις δυνάμεις του βάρους B και της κάθετης αντίδρασης N, οι οποίες θα πρέπει να είναι αντίθετες αφού το σώμα ισορροπεί σε αυτή την διεύθυνση.

Στην οριζόντια διεύθυνση η μόνη δύναμη είναι η τριβή ολίσθησης f_k. Αυτή είναι σε αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική ταχύτητα και θα επιβραδύνει το σώμα. Έτσι από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε αναλυτικά:

$$\vec{F}_{ο\lambda} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{matrix} F_{x,ο\lambda} = ma \\ F_{y,ο\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -f_k = ma \\ N - B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\dfrac{\mu_k N}{m} \\ N = mg \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\dfrac{\mu_k mg}{m} \\ N = mg \end{matrix} \Rightarrow$$

$$a = -\mu_k g \Rightarrow a = -0{,}8 \cdot 10 = -8\ \mathrm{m/s^2}$$

Πράγματι η επιτάχυνση προέκυψε αρνητική. Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα και αρνητική επιτάχυνση.

Από δω και πέρα το πρόβλημα είναι σκέτη κινηματική. Θεωρώντας ως σημείο αναφοράς x=0 τη θέση του σώματος όταν άρχισε να ενεργεί η τριβή τη στιγμή t=0, οι εξισώσεις είναι :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \ \Rightarrow\ \upsilon = \upsilon_0 - |a| \cdot t \Rightarrow\ \upsilon = \upsilon_0 - \mu_k g t \qquad (1)$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \ \Rightarrow\ x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}|a|t^2 \Rightarrow x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2 \quad (2)$$

Το x είναι και η θέση του και το διάστημα και η μετατόπιση από το σημείο αναφοράς.

Το σώμα θα σταματήσει όταν η ταχύτητά του γίνει μηδέν. Το ρολόι τότε θα δείχνει $t_{ακιν}$:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \mu_k g t \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - \mu_k g \cdot t_{ακιν} \Rightarrow t_{ακιν} = \frac{\upsilon_0}{\mu_k g}$$

και θα έχει καλύψει διάστημα

$$x_{ακιν} = \upsilon_0 t_{ακιν} - \frac{1}{2}\mu_k g \cdot t_{ακιν}^2 = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{\mu_k g} - \frac{1}{2}\mu_k g \frac{\upsilon_0^2}{(\mu_k g)^2} \Rightarrow x_{ακιν} = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu_k g}$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ακινητοποίησης είναι ανάλογος της αρχικής ταχύτητας και ότι το διάστημα ακινητοποίησης είναι ανάλογο με το τετράγωνο της αρχικής ταχύτητας. Με διπλάσια ταχύτητα θα χρειαστούμε τετραπλάσιο διάστημα για να ακινητοποιήσουμε φρενάροντας ένα όχημα.

Αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές παίρνουμε :

$$t_{ακιν} = \frac{30}{0{,}8 \cdot 10} = 3{,}75\ \mathrm{s}$$

$$x_{ακιν} = \frac{30^2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 10} = 56{,}25\ \mathrm{m}$$

Το διάστημα ακινητοποίησης θα μπορούσαμε να το βρούμε και κατευθείαν από την αρχική ταχύτητα αν είχαμε την ανάλογη με τη σχέση (3) της προηγούμενης άσκησης που συνδέει την ταχύτητα με τη θέση. Μπορούμε εύκολα να τη βρούμε με λίγη άλγεβρα. Λύνουμε την (1) ως προς το χρόνο και την αντικαθιστούμε στη (2):

$$t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{a}$$

$$x = \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon - \upsilon_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{\upsilon - \upsilon_0}{a}\right)^2 = \frac{\upsilon_0 \upsilon - \upsilon_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{\upsilon^2 + \upsilon_0^2 - 2\upsilon_0\upsilon}{a^2} == \frac{2\upsilon_0\upsilon - 2\upsilon_0^2 + \upsilon^2 + \upsilon_0^2 - 2\upsilon_0\upsilon}{2a}$$
$$= \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a} \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2ax \qquad (3)$$

Αυτή για υ_0=0 οδηγεί στην (3) της προηγούμενης άσκησης όπου δεν είχαμε αρχική ταχύτητα.

Για την περίπτωσή μας έχουμε

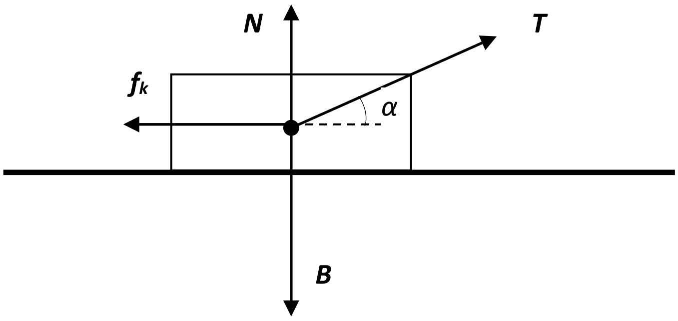
$$0-\upsilon_0^2=-2|a|x_{\alpha\kappa\iota\nu} \Rightarrow x_{\alpha\kappa\iota\nu}=\frac{\upsilon_0^2}{2|a|}$$

που είναι η ίδια σχέση με παραπάνω.

13. Σύρσιμο κιβωτίου.

Κάποιος μετακινεί ένα κιβώτιο με άχρηστα αντικείμενα για πέταμα. Το τραβάει με ένα σκοινί πάνω από τον ώμο του σε γωνία α=36,87° με την οριζόντιο όπως στο σχήμα και αυτό σύρεται πάνω στο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα. Το κιβώτιο μαζί με το περιεχόμενό του έχει μάζα 60 kg. Ο συντελεστής κινητικής τριβής με το δάπεδο είναι μ_k=0,9. Πόση δύναμη ασκεί ο άνθρωπος και πόση είναι η κάθετη αντίδραση;

Δίνονται τα συν(36,87°)=0,8 και ημ(36,87°)=0,6



Λύση:

Ξέρουμε ότι το κιβώτιο ισορροπεί. Άρα

$$\vec{F}_{o\lambda}=0 \Rightarrow \begin{matrix} F_{x,o\lambda}=0 \\ F_{y,o\lambda}=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T_x-f_k=0 \\ N+T_y-B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T\eta\mu\alpha-\mu_\kappa N=0 \\ T\sigma\upsilon\nu\alpha+N=mg \end{matrix}$$

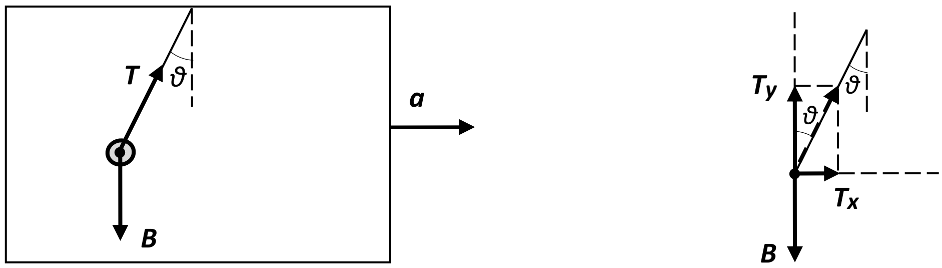
Αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές παίρνουμε ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{matrix} 0{,}6\cdot T-0{,}9\cdot N=0 \\ 0{,}8\cdot T+N=600 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T=1{,}5\cdot N \\ 0{,}8\cdot 1{,}5\cdot N+N=600 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T=1{,}5\cdot 272{,}73=409{,}10\ \mathrm{N} \\ N=\dfrac{600}{2{,}2}=272{,}\overline{72}=272{,}73\ \mathrm{N} \end{matrix}$$

14. Σφαίρα που αιωρείται από νήμα και επιταχύνεται οριζόντια (επιταχυνσιόμετρο).

Την ίδια σφαίρα με τις παραπάνω ασκήσεις (m=0,5 kg) την κρεμάμε στον εσωτερικό καθρέπτη του αυτοκινήτου μας σα μπρελόκ και γκαζώνουμε το αυτοκίνητο με επιτάχυνση a=2 m/s^2.

Πόση είναι τώρα η τάση του νήματος και σε τι γωνία κρέμεται η σφαίρα;



Λύση:

Όταν το αυτοκίνητο επιταχύνεται το νήμα θα σχηματίζει γωνία με την οροφή όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτό συμβαίνει γιατί η σφαίρα ακολουθεί την επιτάχυνση του αυτοκινήτου προς τα μπροστά και άρα χρειάζεται μια δύναμη με οριζόντια συνιστώσα για να την τραβά μπροστά. Το βάρος όμως είναι πάντα κατακόρυφο και άρα δεν μπορεί να επιταχύνει τη σφαίρα. Οπότε αναγκαστικά η τάση του νήματος πρέπει να έχει οριζόντια συνιστώσα και για να τραβάει τη σφαίρα που αρχικά μένει λίγο πίσω λόγω αδράνειας αποκλίνει προς τα πίσω σε γωνία θ από την οροφή.

Το πρόβλημα είναι δυσδιάστατο. Αναλύουμε την τάση του νήματος σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα:

$T_x=T\eta\mu\theta$

$$T_y=T\sigma\upsilon\nu\theta$$

Το σώμα δεν ισορροπεί, επιταχύνεται. Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Νεύτωνα οριζόντια και κατακόρυφα:

$$\vec{F}_{o\lambda} = m\vec{a} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{o\lambda,x} = ma_x \\ F_{o\lambda,y} = ma_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T\eta\mu\theta = ma \\ T\sigma\upsilon\nu\theta - B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{ll} T\eta\mu\theta = ma & (1) \\ T\sigma\upsilon\nu\theta = mg & (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{a}{g} \\ T = \dfrac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} \end{array}$$

Τη λύση για την γωνία θ την πήραμε διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (1)/(2) και λαμβάνοντας υπόψη από την τριγωνομετρία ότι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ ενώ τη λύση για την τάση T λύνοντας την (2).

Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2}{5} = 0{,}4 \;\Rightarrow\; \theta = \varepsilon\varphi^{-1}(0{,}4) = \mathrm{ATAN}(0{,}4) \Rightarrow$ $\theta = 21{,}8^o$

(χτυπάμε στην αριθμομηχανή τη συνάρτηση ATAN ή TAN^{-1}, η αριθμομηχανή να είναι γυρισμένη σε μοίρες και όχι σε ακτίνια για να βρούμε την απάντηση σε μοίρες). *Προσοχή στα αποτελέσματα των αριθμομηχανών για την εφαπτομένη. Δίνουν αποτελέσματα για τη γωνία μόνο στο διάστημα 0^o ως 90^o όταν είναι η εφαπτομένη θετική και μόνο στο διάστημα 0^o ως -90^o όταν η εφαπτομένη είναι αρνητική. Όμως την ίδια εφαπτομένη την έχουν δύο γωνίες η θ και η $\theta+180^o$. Πρέπει να ξέρετε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία σας για να ερμηνεύσετε σωστά το αποτέλεσμα της αριθμομηχανής και να βρείτε τη σωστή απάντηση.*

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\sigma\upsilon\nu(21{,}8^o) = \mathrm{COS}(21{,}8) = 0{,}93$ (χτυπάμε στην αριθμομηχανή τη συνάρτηση COS) για να βρούμε την τάση:

$$T = \frac{0{,}5 \cdot 10}{0{,}93} = 5{,}4\ \mathrm{N}$$

Βλέπουμε ότι η τάση του νήματος, αυξήθηκε πάλι σχετικά με την 1η άσκηση αλλά λιγότερο από τη 2η. Πάλι το νήμα κάνει δύο δουλειές. Πρέπει να ισορροπήσει το βάρος και πρέπει ταυτόχρονα να επιταχύνει τη σφαίρα μπροστά.

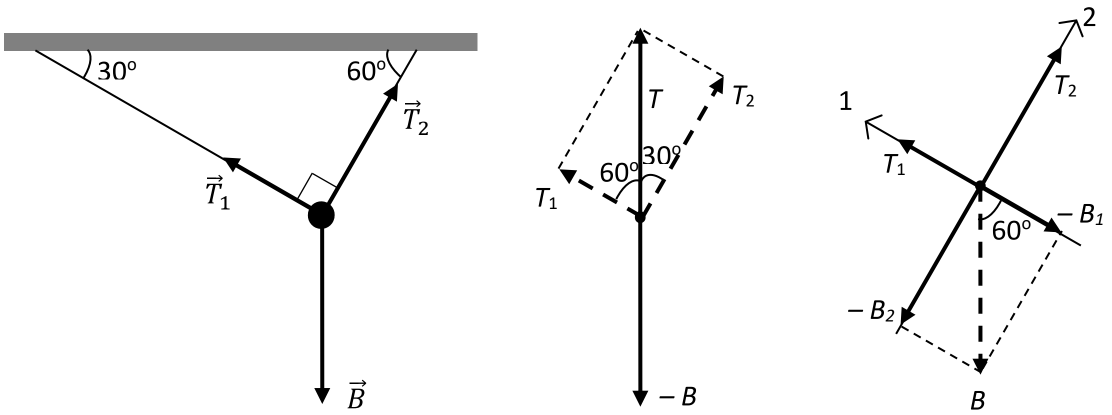
Επίσης παρατηρούμε ότι μετρώντας τη θ μπορεί να προσδιοριστεί η επιτάχυνση $a = g \cdot \varepsilon\varphi\theta$. Έτσι αυτή η διάταξη με το νήμα μπορεί να λειτουργήσει ως επιταχυνσιόμετρο .

15. Σώμα αναρτημένο σε δύο νήματα κάθετα μεταξύ τους.

Η μάζα του σώματος είναι m=5 kg. Τα νήματα είναι κάθετα μεταξύ τους και οι γωνίες που σχηματίζουν με την οροφή είναι θ_1=30° και θ_2= 60° όπως στο σχήμα. Πόση είναι η τάση του κάθε νήματος ;

Λύση :

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα δυνάμεων. Δείτε τα σχήματα και καταλάβετε τις γωνίες.



Λύση 1: Επειδή το σώμα ισορροπεί στατικά το άθροισμα των τριών δυνάμεων θα είναι ίσο με μηδέν. Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων θα είναι αντίθετη της τρίτης δύναμης. Έστω $\vec{T}$ η συνισταμένη των τάσεων. Θα πρέπει να είναι κατακόρυφη και αντίθετη στο βάρος $\vec{B}$. Οι αντίθετες δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα. Άρα το μέτρο της T θα είναι ίσο με το βάρος B που το ξέρουμε.

Συνισταμένη τάσεων : $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

Ισορροπία:

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \vec{B} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{B} + \vec{T} = 0 \Rightarrow -B + T = 0 \Rightarrow T = B = mg = 5 \cdot 10 = 50\ \mathrm{N}$$

Τώρα βρίσκουμε εύκολα τις επιμέρους τάσεις από τα ορθογώνια τρίγωνα:

$$T_1 = T\sigma\upsilon\nu 60^o = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ N}$$
$$T_2 = T\sigma\upsilon\nu 30^o = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 \cdot 1{,}732 = 43{,}3 \text{ N}$$

Λύση 2: Ένας επίσης σύντομος δρόμος για την ισορροπία τριών δυνάμεων είναι να αναλύουμε την μία δύναμη σε συνιστώσες που είναι πάνω στους άξονες των δύο άλλων δυνάμεων (αυτό ισχύει ακόμα και όταν οι άλλες δύο δυνάμεις δεν είναι κάθετες μεταξύ τους).

Αναλύουμε το βάρος σε δύο κάθετες συνιστώσες στις διευθύνσεις των $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ αντίστοιχα:

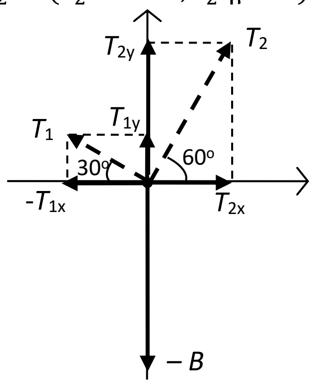
$$\vec{T}_1 = (T_1, 0) \quad , \quad \vec{T}_2 = (0, T_2) \quad ,$$
$$\vec{B} = (-B_1 - B_2) = (-B\sigma\upsilon\nu 60^0, -B\eta\mu 60^0) = \left(-50 \cdot \frac{1}{2}, -50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-25, -43{,}3)$$

Οπότε :

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \vec{B} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow (T_1, 0) + (0, T_2) + (-25, -43{,}3) = (0{,}0) \Rightarrow$$
$$(T_1 - 25, T_2 - 43{,}3) = (0{,}0) \Rightarrow \begin{matrix} T_1 = 25 \text{ N} \\ T_2 = 43{,}3 \text{ N} \end{matrix}$$

Λύση 3: Αναλύουμε τις τάσεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ σε κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες (αυτό δουλεύει και όταν δεν είναι κάθετες μεταξύ τους)

$$\vec{B} = (0, -B) = (0, -mg)$$
$$\vec{T}_1 = (-T_1\sigma\upsilon\nu 30^o, T_1\eta\mu 30^0)$$
$$\vec{T}_2 = (T_2\sigma\upsilon\nu 60^o, T_2\eta\mu 60^0)$$



Από τον 1° νόμο του Νεύτωνα θα πάρουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα μέτρα T_1 και T_2 των τάσεων:

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \vec{B} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$
$$\Rightarrow (0, -mg) + (-T_{1x}, T_{1y}) + (T_{2x}, T_{2y}) = (0{,}0)$$
$$\begin{matrix} 0 - T_{1x} + T_{2y} = 0 \\ -mg + T_{1y} + T_{2y} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -T_1\sigma\upsilon\nu 30^o + T_2\sigma\upsilon\nu 60^o = 0 \\ T_1\eta\mu 30^0 + T_2\eta\mu 60^0 = mg \end{matrix}$$

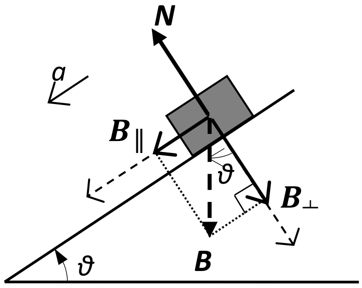
Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές και λύνουμε το σύστημα.

$$\Rightarrow \begin{matrix} -T_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + T_2\dfrac{1}{2} = 0 \\ T_1\dfrac{1}{2} + T_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T_2 = T_1\sqrt{3} \\ T_1 + T_1\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 100 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T_2 = 25\sqrt{3} = 43{,}3 \text{ N} \\ T_1 = 25 \text{ N} \end{matrix}$$

όπου λύσαμε την πρώτη εξίσωση ως προς την T_2 και την αντικαταστήσαμε στη δεύτερη.

16. Επιτάχυνση σε λείο κεκλιμένο επίπεδο

Το κεκλιμένο επίπεδο το χρησιμοποίησε ο Γαλιλαίος για να μειώσει την επιτάχυνση της βαρύτητας ώστε να προλαβαίνει να παίρνει μετρήσεις. Σώμα μάζας m=2 kg αφήνεται να ολισθήσει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ=30° με την οριζόντιο . Πόση είναι η επιτάχυνσή του ;



Επειδή το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο δεν εμφανίζεται τριβή. Υπάρχουν μόνο δύο δυνάμεις. Το βάρος ***B*** και η κάθετη αντίδραση ***N***. Τις αναλύουμε σε συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο, παίρνοντας ως θετικές τις φορές προς τα κάτω:

$$\vec{B} = \left(B_\parallel , B_\perp\right) = (B\eta\mu\theta \, , B\sigma\upsilon\nu\theta) = (mg\eta\mu\theta \, , mg\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\vec{N} = (0, -N)$$

Η συνιστώσα του βάρους που είναι παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο $B_\parallel$ δεν εξουδετερώνεται και θα προκαλέσει επιτάχυνση a. Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{o\lambda} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{N} + \vec{B} = m\vec{a} \;\Rightarrow (0, -N) + (mg\eta\mu\theta \, , mg\sigma\upsilon\nu\theta) = (ma, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 0 + mg\eta\mu\theta = ma \\ -N + mg\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} a = g\eta\mu\theta \\ N = mg\sigma\upsilon\nu\theta \end{matrix}$$

Πράγματι η επιτάχυνση είναι μικρότερη από το g κατά ένα παράγοντα ίσο με το ημίτονο της γωνίας θ. Επίσης η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος που ολισθαίνει.

$$a = g\eta\mu\theta \Rightarrow a = 10 \cdot \eta\mu 30^o = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

Η κάθετη αντίδραση επίσης είναι μικρότερη από το βάρος :

$$B = mg = 2 \cdot 10 = 20 \text{ N}$$

$$N = mg\sigma\upsilon\nu\theta = 2 \cdot 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^o = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot 1{,}732 = 17{,}32 \text{ N}$$

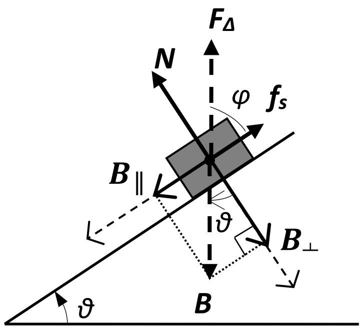
17. Στατική ισορροπία σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα m=2 kg ισορροπεί σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ=36,87^o (συν(36,87^o)=0,8 και ημ(36,87^o)=0,6)

1) Πόσο είναι το μέτρο της κάθετης αντίδρασης και πόσο το μέτρο της στατικής τριβής

2) Πόσο είναι το μέτρο και η διεύθυνση της συνολικής δύναμης που δέχεται το σώμα από το δάπεδο του κεκλιμένου επιπέδου και σε τι γωνία;

3) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s=0,9 ποια είναι η μέγιστη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου στην οποία το σώμα θα συνεχίσει να ισορροπεί;



Λύση:

Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις. Για να ισορροπεί το σώμα και να μην ολισθήσει προς τα κάτω, όπως στην προηγούμενη άσκηση, η στατική τριβή πρέπει να είναι προς τα πάνω. Η δύναμη F_Δ είναι η συνισταμένη της στατικής τριβής και της κάθετης αντίδρασης και είναι η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα από το δάπεδο. Αναλύουμε όπως πριν το βάρος σε συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο, παίρνοντας ως θετικές τις φορές προς τα κάτω:

$$B_\perp = B\sigma\upsilon\nu\theta \qquad , \qquad B_\parallel = B\eta\mu\theta$$

1) Αφού έχουμε ισορροπία

$$\vec{F}_{o\lambda}=0 \;\Rightarrow \begin{matrix} F_{\parallel o\lambda}=0 \\ F_{\perp o\lambda}=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_s=B_{\parallel} \\ N=B_{\perp} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_s=mg\eta\mu\theta=2\cdot 10\cdot 0{,}6 \\ N=mg\sigma\upsilon\nu\theta=2\cdot 10\cdot 0{,}8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_s=12\text{ N} \\ N=16\text{ N} \end{matrix}$$

2) Η συνολική δύναμη από το δάπεδο είναι απλά η αντίθετη του βάρους (αφού το σώμα ισορροπεί). Άρα το μέτρο της είναι

$$F_{\Delta}=B=mg=2\cdot 10=20\text{ N}$$

ενώ η γωνία φ που σχηματίζει με το δάπεδο θα είναι η συμπληρωματική της θ:

$$\varphi=90^{o}-\theta=90^{o}-36{,}87^{o}=53{,}13^{o}$$

Αν δεν το σκεφτείτε αυτό τότε απλά την υπολογίζεται από τον τύπο της συνισταμένης κάθετων δυνάμεων. Αυτό είναι και επαλήθευση του 1ου μέρους της άσκησης.

$$F_{\Delta}=\sqrt{N^2+f_s^2}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20\text{ N}\quad (=B)$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{N}{f_s}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}\Rightarrow \varphi=\varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=\text{ATAN}(1{,}3333)=53{,}13^{o}\quad (=90^{o}-\theta)$$

3) Στη μέγιστη δυνατή κλίση $\theta_{\max}$ του επιπέδου θα έχουμε ακόμη ισορροπία οριακά. Η στατική τριβή θα έχει τη μέγιστη τιμής της και θα δίνεται από τον τύπο

$$f_s=f_{o\rho}=\mu_s N$$

Αφού έχουμε ακόμη ισορροπία :

$$\vec{F}_{o\lambda}=0 \;\Rightarrow \begin{matrix} F_{\parallel o\lambda}=0 \\ F_{\perp o\lambda}=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_{o\rho}=B_{\parallel} \\ N=B_{\perp} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu_s N=mg\eta\mu\theta_{\max} \\ N=mg\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} \end{matrix}$$

Οπότε διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{\mu_s N}{N}=\frac{mg\eta\mu\theta_{\max}}{mg\sigma\upsilon\nu\theta_{\max}}\Rightarrow \mu_s=\frac{\eta\mu\theta_{\max}}{\sigma\upsilon\nu\theta_{\max}}\Rightarrow$$

$$\mu_s=\varepsilon\varphi\theta_{\max}\Rightarrow$$

$$\theta_{\max}=\varepsilon\varphi^{-1}(\mu_s)\Rightarrow$$

$$\theta_{\max}=\varepsilon\varphi^{-1}(0{,}9)=42^{o}$$

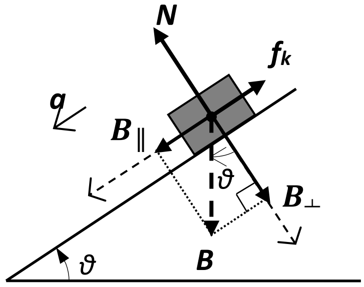
Για γωνία μεγαλύτερη των 42^{o} το σώμα θα γλιστρήσει προς τα κάτω.

Ο τρόπος αυτός είναι μια μέθοδος να μετρήσουμε το συντελεστή στατικής τριβής. Αυξάνουμε αργά αργά την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τη μέγιστη γωνία $\theta_{\max}$ όπου το σώμα μόλις και ξεκολλάει και αρχίζει να κινείται. Μετράμε τη γωνία με ένα μοιρογνωμόνιο και την καταγράφουμε. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι : $\mu_s=\varepsilon\varphi(\theta_{\max})$.

18. Επιτάχυνση σε κεκλιμένο επίπεδο

Αυξάνουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου σε $\theta=53{,}13^{o}$ (συν(53,13°)=0,6 ημ(53,13°)=0,8) και αφήνουμε το σώμα ελεύθερο τη χρονική στιγμή *t=0*. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ δαπέδου και σώματος είναι μ_k=0,75

1) Από ποιο τύπο δίνεται η επιτάχυνση του σώματος;
2) Ποια είναι η τιμή της επιτάχυνσης
3) Αν το κεκλιμένο επίπεδο έχει 1,75 m μήκος ποια χρονική στιγμή θα φτάσει το σώμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;
4) Με τι ταχύτητα θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;



Λύση :

Κάνουμε το σχεδιάγραμμα των δυνάμεων και τις αναλύουμε όπως και πριν. Το σώμα αφήνεται ελεύθερο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, οπότε η επιτάχυνση και η ταχύτητά του θα είναι προς τα κάτω και η κινητική τριβή προς τα πάνω.

1) Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{F}_{ο\lambda} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{matrix} F_{\parallel ο\lambda} = ma \\ F_{\perp ο\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B_{\parallel} - f_k = ma \\ N - B_{\perp} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \dfrac{mg\eta\mu\theta - \mu_\kappa N}{m} \\ N = mg\sigma\upsilon\nu\theta \end{matrix}$$

Άρα

$$a = \frac{mg\eta\mu\theta - \mu_\kappa mg\sigma\upsilon\nu\theta}{m} \Rightarrow a = g(\eta\mu\theta - \mu_\kappa\sigma\upsilon\nu\theta)$$

2) $a = g(\eta\mu\theta - \mu_\kappa\sigma\upsilon\nu\theta) = 10 \cdot (0{,}8 - 0{,}75 \cdot 0{,}6) \Rightarrow a = 3{,}5\ \mathrm{m/s^2}$

3-4) Από δω και πέρα η άσκηση είναι κινηματική. Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Οι εξισώσεις είναι :

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{και} \quad \upsilon = at$$

Από την πρώτη θέτοντας x=1,75 m βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που φτάνει στη βάση:

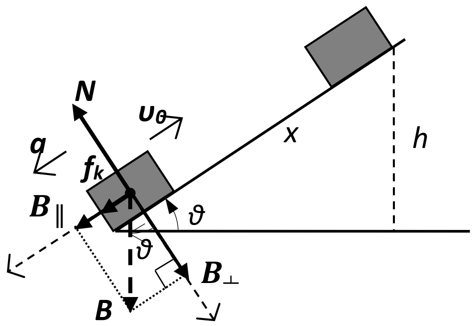
$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}75}{3{,}5}} = 1\ \mathrm{s}$$

Η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή θα είναι

$$\upsilon = at = 3{,}5 \cdot 1 = 3{,}5\ \mathrm{m/s}$$

19. Εκτόξευση προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο

Από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ=36,87° (συν(36,87°)=0,8 και ημ(36,87°)=0,6) εκτοξεύουμε προς τα πάνω σώμα με αρχική ταχύτητα υ_0=10 m/s. Ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μ_k=0,2. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος ; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που θα ανέβει; Πότε θα φτάσει εκεί ;



Λύση :

Η κινητική τριβή είναι τώρα προς τα κάτω μαζί με το βάρος. Παίρνουμε ως θετική την κατεύθυνση προς τα πάνω. Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{F}_{ο\lambda} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{matrix} F_{\parallel ο\lambda} = ma \\ F_{\perp ο\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -B_{\parallel} - f_k = ma \\ N - B_{\perp} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\dfrac{mg\eta\mu\theta + \mu_\kappa N}{m} \\ N = mg\sigma\upsilon\nu\theta \end{matrix}$$

$$a = -\frac{mg\eta\mu\theta + \mu_\kappa mg\sigma\upsilon\nu\theta}{m} = -g(\eta\mu\theta + \mu_\kappa\sigma\upsilon\nu\theta) = -10 \cdot (0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}8) = -7{,}6\ \mathrm{m/s^2}$$

Η επιτάχυνση είναι αντίθετη στην αρχική ταχύτητα και θα επιβραδύνει το σώμα. Επίσης είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος.

Εξισώσεις κίνησης : $\upsilon = \upsilon_0 + at \Rightarrow \upsilon = 10 - 7{,}6 \cdot t$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x = 10 \cdot t - 3{,}8 \cdot t^2$$

Το σώμα θα φτάσει στο μέγιστο ύψος όταν η ταχύτητά του γίνει μηδέν

$$\upsilon = 0 \Rightarrow 10 - 7{,}6 \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{7{,}6} = 1{,}32\ \mathrm{s}$$

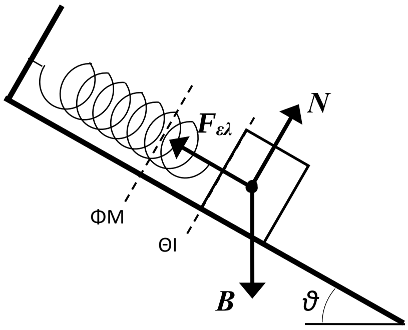
Εκείνη τη στιγμή το σώμα θα έχει καλύψει διάστημα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ίσο με :

$$x = 10 \cdot 1{,}32 \ - 3{,}8 \cdot 1{,}32^{\ 2} = 6{,}58 \text{ m}$$

και θα έχει ανέλθει σε ύψος $h = x \cdot \text{ημ}\theta = 6{,}58 \cdot 0{,}6 = 3{,}95$ m

20. Ισορροπία με ελατήριο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο

Το σώμα του σχήματος ισορροπεί. Η μάζα του είναι m=1 kg και η σταθερά του ελατηρίου k=800 N/m. Αν στη θέση ισορροπίας (ΘΙ) το ελατήριο έχει ανοίξει x=1 cm από το φυσικό του μήκος (ΦΜ) ποιά είναι η γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου ;



Λύση:

$$\vec{F}_{ο\lambda} = 0 \ \Rightarrow \begin{matrix} F_{\parallel ο\lambda} = 0 \\ F_{\perp ο\lambda} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B_{\parallel} - |F_{\varepsilon\lambda}| = 0 \\ N - B_{\perp} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} mg\text{ημ}\theta = kx \ \ (1) \\ mg\text{συν}\theta = N \ \ (2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ημ}\theta = \dfrac{kx}{mg} \\ N = mg\text{συν}\theta \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\text{ημ}\theta = \frac{800 \cdot 0{,}01}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \Rightarrow \theta = \text{ημ}^{-1}(0{,}8) = \text{ACOS}(0{,}8) = 53{,}13^{\text{O}}$$

$$N = 10\text{συν}(53{,}13^{\text{o}}) = 10 \cdot 0{,}6 = 6 \text{ N}$$

Άλλες σκέψεις:

Η $F_{\varepsilon\lambda}$ και η N είναι κάθετες μεταξύ τους και η συνισταμένη τους πρέπει να είναι αντίθετη στο βάρος B, άρα:

$m^2g^2 = k^2x^2{+}N^2 \Rightarrow N^2 = m^2g^2 - k^2x^2 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow N = 6$ N

Διαιρώντας την (1) με τη (2) βρίσκουμε : $\text{εφ}\theta = \frac{kx}{N} = \frac{8}{6} \Rightarrow \theta = 53{,}13^{\text{O}}$

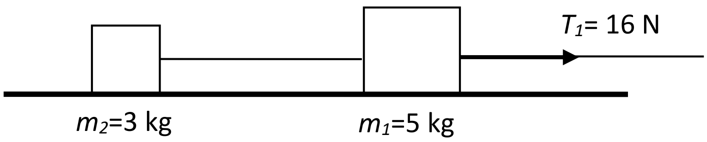
Υψώνουμε τις δύο εξισώσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$m^2g^2(\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta) = k^2x^2 + N^2 \ \ \Rightarrow N^2 = m^2g^2 - k^2x^2$$

Προβλήματα με δύο σώματα

1. Τρενάκι με δύο βαγόνια σε λείο επίπεδο δάπεδο

Δύο σώματα μάζας m_1=5 kg και m_2=3 kg είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα και βρίσκονται πάνω σε λείο επίπεδο δάπεδο, όπως στο σχήμα. Τραβάμε με ένα άλλο νήμα το σώμα 1 προς τα δεξιά με τάση T_1=16 N. Με τι επιτάχυνση θα κινηθούν τα σώματα; Ποια θα είναι η τιμή της τάσης του νήματος που τα ενώνει ;



Λύση 1:

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.

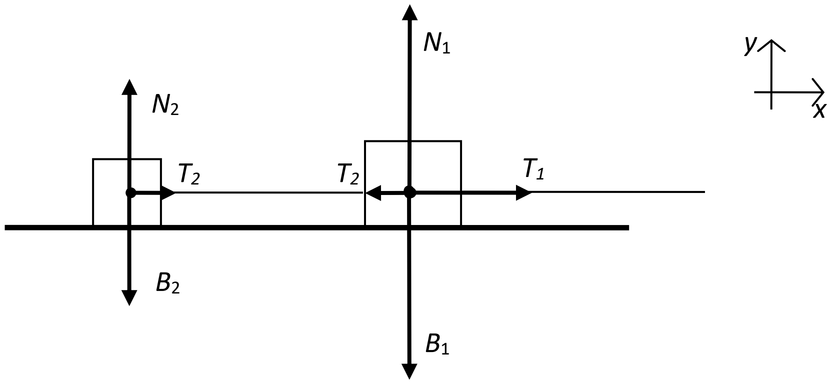
Στο πρώτο έχουμε το βάρος του B_1, την κάθετη αντίδραση N_1 και τις τάσεις των δύο νημάτων που το τραβάνε το ένα προς τα δεξιά T_1 και το άλλο προς τα αριστερά $T_{1/2}$.

Στο δεύτερο έχουμε το βάρος B_2, την κάθετη αντίδραση N_2 και μια τάση $T_{2/1}$ από το ένα νήμα που το τραβάει προς τα δεξιά. Το δεύτερο σώμα δεν «βλέπει» την εξωτερική τάση T_1 που τραβάει το πρώτο. «Αισθάνεται» μόνο την $T_{2/1}$.

Επειδή το κοινό νήμα που ενώνει τα δύο σώματα είναι αβαρές δεν χρειάζεται δύναμη για να επιταχυνθεί. Έτσι οι τάσεις στα άκρα του είναι αντίθετες και είναι ίσες με τη δράση – αντίδραση μεταξύ των δύο σωμάτων. Μέσω του νήματος, το πρώτο σώμα τραβά το δεύτερο προς τα δεξιά με δύναμη μέτρου $T_{2/1}$ (δράση) και το δεύτερο αντιδρά και τραβά το πρώτο προς τα αριστερά με δύναμη ίσου μέτρου $T_{1/2}= T_{2/1}$. Επειδή η $T_{2/1}$ είναι η τάση που τραβά το σώμα 2 προς τα δεξιά την ονομάζουμε απλά T_2 :

$$\vec{T}_{1/2} = -\vec{T}_{2/1} \Rightarrow T_{1/2} = T_{2/1} \equiv T_2$$

Η κίνηση θα είναι μόνο οριζόντια αφού τα βάρη των σωμάτων εξισορροπούνται από τις κάθετες αντιδράσεις του δαπέδου στο κάθε σώμα. Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά μονοδιάστατο.
Η επιτάχυνση των σωμάτων θα είναι κοινή αφού είναι συνδεδεμένα με μη εκτατό νήμα και άρα το δεύτερο θα ακολουθήσει ακριβώς την κίνηση του πρώτου.
Αναζητούμε δύο αγνώστους άρα χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Αυτές είναι ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για το κάθε σώμα στην οριζόντια διεύθυνση.
Προσδιορίζουμε τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων δείχνοντας τις φορές των αξόνων πάνω δεξιά.



$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1}} = m_1\vec{a}_1 \Rightarrow \begin{matrix}\Sigma F_{\mathbf{1}x} = m_1 a \\ \Sigma F_{\mathbf{1}y} = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}T_1 - T_2 = m_1 a \\ N_1 - B_1 = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}T_2 = T_1 - m_1 a & (1x) \\ N_1 = m_1 g & (1y)\end{matrix}$$

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{2}} = m_2\vec{a}_2 \Rightarrow \begin{matrix}\Sigma F_{\mathbf{2}x} = m_2 a \\ \Sigma F_{\mathbf{2}y} = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}T_2 = m_2 a \\ N_2 - B_2 = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}T_2 = m_2 a & (2x) \\ N_2 = m_2 g & (2y)\end{matrix}$$

Χρειαζόμαστε τις εξισώσεις ($1x$) ($2x$).

$$\begin{matrix}T_2 = T_1 - m_1 a & (1x) \\ T_2 = m_2 a & (2x)\end{matrix}$$

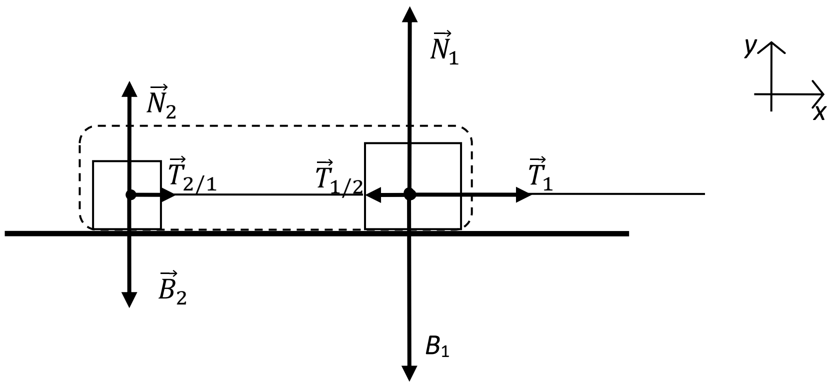
Αντικαθιστούμε την T_2 από την ($2x$) στην ($1x$) και βρίσκουμε την επιτάχυνση a και μετά την τάση T_2 από την ($2x$):

$$\begin{matrix}m_2 a = T_1 - m_1 a \\ T_2 = m_2 a\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}a = \dfrac{T_1}{m_1 + m_2} \\ T_2 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} T_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}a = \dfrac{16}{5 + 3} = 2\ \mathrm{m/s^2} \\ T_2 = \dfrac{3}{5 + 3} 16 = 6\ \mathrm{N}\end{matrix}$$

***Λύση 2:* Η έννοια του συστήματος σωμάτων**

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα δύο σώματα ως ένα σώμα, που το ονομάζουμε σύστημα σωμάτων 1+2 και το ξεχωρίζουμε από το περιβάλλον του με μια διακεκομμένη γραμμή. Η ολική μάζα του συστήματος θα είναι

$$M = m_1 + m_2 = 5 + 3 = 8\ \mathrm{kg}$$



Η ολική δύναμη πάνω στο σύστημα είναι η ολική δύναμη πάνω στο σώμα 1 συν την ολική δύναμη πάνω στο σώμα 2.

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1+2}} = \Sigma\vec{F}_{\mathbf{1}} + \Sigma\vec{F}_{\mathbf{2}} = \left(\vec{T}_1 + \vec{T}_{1/2} + \vec{N}_1 + \vec{B}_1\right) + \left(\vec{T}_{2/1} + \vec{N}_2 + \vec{B}_2\right)$$

Στην πρώτη παρένθεση είναι οι δυνάμεις στο σώμα 1 και στη δεύτερη οι δυνάμεις στο σώμα 2.
Η τάση T_1, τα βάρη και οι κάθετες αντιδράσεις είναι ***εξωτερικές δυνάμεις***. Προέρχονται δηλαδή από σώματα έξω από το σύστημα, από το περιβάλλον του. Συγκεκριμένα από το εξωτερικό νήμα, από τη Γη και από το δάπεδο. Οι τάσεις $T_{1/2}$ και $T_{2/1}$ είναι ***εσωτερικές δυνάμεις***. Ασκούνται από το ένα σώμα του συστήματος στο άλλο. Μπορούμε να χωρίσουμε την ολική δύναμη σε εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις:

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1+2}} = \Sigma\vec{F}_{\boldsymbol{\varepsilon\xi\omega\tau}} + \Sigma\vec{F}_{\boldsymbol{\varepsilon\sigma\omega\tau}} = \left(\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{B}_1 + \vec{N}_2 + \vec{B}_2\right) + \left(\vec{T}_{1/2} + \vec{T}_{2/1}\right)$$

Το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων επειδή είναι ζεύγη δράσης –αντίδρασης θα είναι πάντα ίσο με μηδέν.

$$\Sigma\vec{F}_{\boldsymbol{\varepsilon\sigma\omega\tau}} = \vec{T}_{1/2} + \vec{T}_{2/1} = 0$$

Η ολική δύναμη σε ένα σύστημα θα είναι πάντα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μόνο.

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1+2}} = \Sigma\vec{F}_{\boldsymbol{\varepsilon\xi\omega\tau}} = \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{B}_1 + \vec{N}_2 + \vec{B}_2$$

Επειδή στην περίπτωσή μας το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα, τα βάρη και οι κάθετες αντιδράσεις αλληλοαναιρούνται. Έτσι μοναδική δύναμη σε όλο το σύστημα είναι η εξωτερική τάση T_1 στην οριζόντια διεύθυνση.

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1+2}} = \Sigma\vec{F}_{\boldsymbol{\varepsilon\xi\omega\tau}} = \vec{T}_1$$

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα μπορούμε να βρούμε την κοινή επιτάχυνση a του συστήματος:

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{1+2}} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{T}_1}{M}$$

Επειδή τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και οριζόντια η εξίσωση είναι αλγεβρική

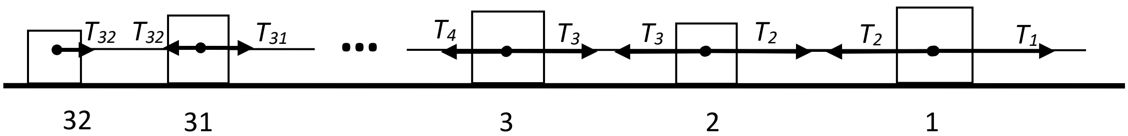
$$a = \frac{T_1}{M} = \frac{16}{8} = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

Αφού βρήκαμε την κοινή επιτάχυνση των δύο σωμάτων μπορούμε τώρα να επικεντρώσουμε στο δεύτερο σώμα, το οποίο η μόνη δύναμη που το κινεί είναι η τάση $T_{2/1} \equiv T_2$ και να εφαρμόσουμε μόνο σε αυτό το 2ο νόμο του Νεύτωνα για να τη βρούμε. Αυτό το στάδιο είναι το ίδιο με πριν:

$$\Sigma\vec{F}_{\mathbf{2}} = m_2\vec{a} \Rightarrow T_2 = m_2 a = 3 \cdot 2 = 6\ \mathrm{N}$$

2. Τρενάκι με τριάντα δύο βαγόνια σε λείο επίπεδο δάπεδο

Νήμα με τάση T_1 =100 N εφαρμόζεται στο πρώτο από 32 βαγόνια συνδεδεμένα με νήματα. Όλα τα βαγόνια μαζί έχουν μάζα $M_{ολ}$ =40 kg. Το τελευταίο βαγόνι έχει μάζα m_{32}= 0,5 kg. Πόση είναι η τάση T_{32} στο νήμα που συνδέει το τελευταίο βαγόνι με τα υπόλοιπα;



Λύση:

Σχεδιάζουμε όλες τις οριζόντιες δυνάμεις. Δεν σχεδιάζουμε τις κατακόρυφες γιατί αλληλοαναιρούνται σε κάθε βαγόνι : $N_i = B_i$.
Αν ακολουθήσουμε τη *Λύση 1* της προηγούμενης άσκησης θα πρέπει να γράψουμε και να λύσουμε 32 εξισώσεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα τη μια μετά την άλλη για να βρούμε τελικά την επιτάχυνση.
Ακολουθούμε τη *Λύση 2* και αντιμετωπίζουμε το τρενάκι σαν σύστημα.
Όλες οι τάσεις μεταξύ των νημάτων που συνδέουν τα βαγόνια είναι εσωτερικές δυνάμεις δηλαδή ζεύγη δράσης – αντίδρασης και το άθροισμά τους είναι μηδέν. Η μόνη οριζόντια δύναμη που απομένει στο τέλος είναι η τάση T_1:

$$F_{ολ} = T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - \cdots - T_{32} + T_{32} = T_1$$

Οπότε η επιτάχυνση του συστήματος είναι

$$a = \frac{F_{ολ}}{M_{ολ}} \Rightarrow a = \frac{T_1}{M_{ολ}} = \frac{100}{40} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

Με αυτή την επιτάχυνση κινείται και το τελευταίο βαγόνι το οποίο το κινεί μόνο η τάση T_{32}. Οπότε :

$$T_{32} = m_{32} a = 0{,}5 \cdot 2{,}5 = 1{,}25\ \mathrm{N}$$

Παρατήρηση: Από την εξωτερική τάση των 100 N που ασκείται στο πρώτο βαγόνι το τελευταίο «ασθάνεται» μόνο 1,25 N.

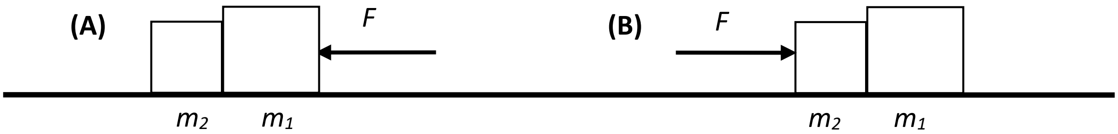
Τις υπόλοιπες τάσεις θα μπορούσαμε να τις βρούμε μια προς μία αν γνωρίζαμε τη μάζα του κάθε βαγονιού. Π.χ. αν το σώμα 31 έχει μάζα m_{31}= 1 kg τότε η τάση T_{31} θα υπολογιστεί από το 2ο νόμο του Νεύτωνα μόνο για το βαγόνι 31 :

$$T_{31} - T_{32} = m_{31}a \Rightarrow T_{31} = T_{32} + m_{31}a = 1{,}25 + 1 \cdot 2{,}5 = 3{,}75\ \text{N}$$

Κάθε προηγούμενη τάση θα είναι μεγαλύτερη από την επόμενη γιατί πρέπει να επιταχύνει με την ίδια επιτάχυνση περισσότερη μάζα. Η T_{31} είναι μεγαλύτερη από την T_{32} αφού πρέπει να επιταχύνει και το βαγόνι 31 και το βαγόνι 32.

3. Σπρώξιμο σε δύο σώματα

Δύο σώματα σε επαφή μεταξύ τους βρίσκονται πάνω σε λείο επίπεδο δάπεδο. Οι μάζες τους είναι m_1=4 kg και m_2=2 kg. Σπρώχνουμε τα σώματα. Τη μία φορά ασκούμε δύναμη μέτρου F=12 N στο σώμα 1 από δεξιά όπως στο σχήμα (A). Την άλλη (B), ασκούμε δύναμη ίσου μέτρου στο σώμα 2 από αριστερά. Πότε το μέτρο της δύναμης μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μεγαλύτερο;



Λύση :

Η άσκηση είναι ισοδύναμη με το τρενάκι των δύο βαγονιών. Απλά αντί για τραβήγματα εδώ έχουμε σπρωξίματα. Δηλαδή αντί για τάσεις οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων είναι κάθετες αντιδράσεις.

Όσο κι αν σας φανεί απρόσμενο η δύναμη μεταξύ των δυο σωμάτων έχει μεγαλύτερο μέτρο όταν σπρώχνουμε από το ελαφρύτερο 2 (B): $|N'| > |N|$.

Σε κάθε περίπτωση το σώμα που δεν ακουμπάμε δεν «ασθανέται» τη δύναμη που ασκούμε. «Αισθάνεται» τη δύναμη που του ασκεί το άλλο σώμα στην επιφάνεια επαφής τους. Αυτή είναι που το επιταχύνει με την κοινή επιτάχυνση των δύο σωμάτων. Σε αυτή τη δύναμη αντιδρά με δύναμη ίσου μέτρου την κάθετη αντίδραση. Επειδή η επιτάχυνση των σωμάτων είναι ίδια, όταν η κάθετη αντίδραση σπρώχνει το βαρύτερο πρέπει είναι μεγαλύτερη.

Κοινή επιτάχυνση συστήματος :

(A):

$$a = \frac{F_{ολ}}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{N - N - F}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{-12}{4 + 2} = -2\ \text{m/s}^2$$

(B):

$$a = \frac{F_{ολ}}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{N' - N' + F}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{12}{4 + 2} = 2\ \text{m/s}^2$$

Ολική δύναμη στο σώμα που δεν ακουμπάμε (κάθετη αντίδραση) :

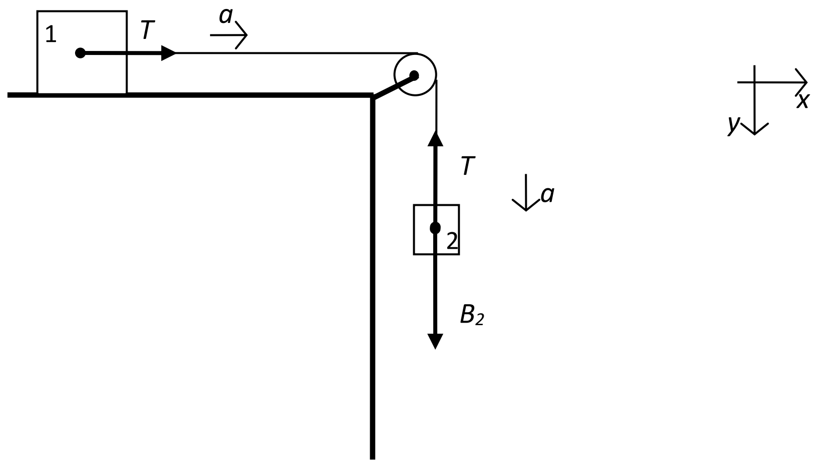
(A) $N = m_2 a \Rightarrow N = 2 \cdot (-2) = -4\ \text{N}$

(B) $N' = m_1 a \Rightarrow N' = 4 \cdot 2 = 8\ N$

Πράγματι 8>4 δηλαδή : $|N'| > |N|$

4. Τράβηγμα από το βάρος

Αντί να τραβάμε το ένα από τα δύο σώματα όπως στην άσκηση 1, βάζουμε το βάρος του ενός σώματος να τραβάει. Αυτό το επιτυγχάνουμε με μια τροχαλία όπως στο σχήμα.



Η τροχαλία είναι αβαρής και γυρίζει χωρίς τριβές. Μόνος της ρόλος είναι να αλλάξει τη διεύθυνση της τάσης του νήματος όπως στο σχήμα και να την κάνει κατακόρυφη. Το δάπεδο είναι λείο. Αν οι μάζες των σωμάτων είναι m_1=6,4 kg και m_2=1,6 kg πόση είναι η επιτάχυνση των σωμάτων a και πόση η τάση του νήματος T που τα ενώνει.

Λύση :

Σώμα 1 : $T = m_1 a$

Σώμα 2 : $B_2 - T = m_2 a$

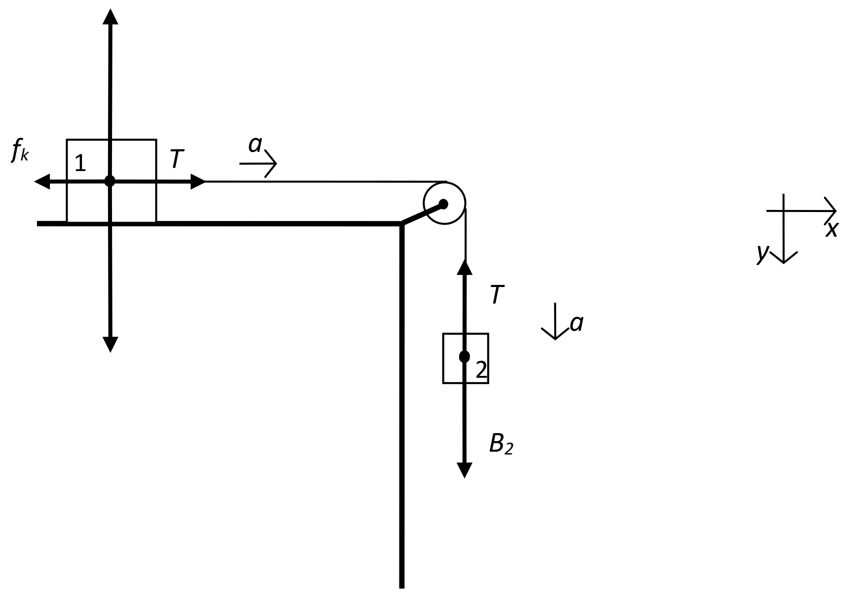
$$\Rightarrow \begin{matrix} T = m_1 a \\ B_2 - m_1 a = m_2 a \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T = m_1 a \\ a = \dfrac{B_2}{m_1 + m_2} \end{matrix}$$

Οπότε :

$$\Rightarrow \begin{matrix} T = 6{,}4 \cdot 2 = 12{,}8 \text{ N} \\ a = \dfrac{1{,}6 \cdot 10}{6{,}4 + 1{,}6} = 2 \text{ m/s}^2 \end{matrix}$$

5. Η άσκηση 4 με τριβή

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος 1 και του οριζόντιου δαπέδου είναι μ_k=0,15. Βρείτε πάλι την επιτάχυνση και την τάση του νήματος.



Λύση:

Για το σώμα 1 έχουμε :

$$\begin{matrix} T - f_k = m_1 a \\ N - B_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T = \mu_k N + m_1 a \\ N = m_1 g \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T = \mu_k m_1 g + m_1 a & (1x) \\ N = m_1 g & (1y) \end{matrix}$$

Για το σώμα 2 έχουμε την ίδια εξίσωση με πριν :

$$B_2 - T = m_2 a \Rightarrow m_2 g - T = m_2 a \qquad (2)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας την (1y) για να αντικαταστήσουμε την N στην (1x) και μετά προσθέτοντας τις (1x) και (2) απαλείφεται η T και βρίσκουμε την επιτάχυνση a :

(1x)+(2):

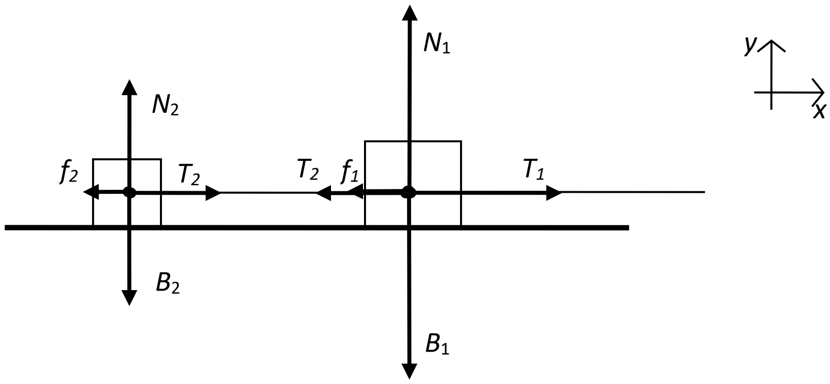
$$m_2 g = \mu_k m_1 g + m_1 a + m_2 a \quad \Rightarrow a = \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow$$
$$a = \frac{1{,}6 - 0{,}15 \cdot 6{,}4}{8} \cdot 10 = \frac{1{,}6 - 0{,}96}{8} \cdot 10 = \frac{0{,}64}{8} \cdot 10 = 0{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Παρατήρηση: Η επιτάχυνση θα μπορούσε να ήταν και μηδέν. Αν ο συντελεστής κινητικής τριβής ήταν λίγο μεγαλύτερος ή η μάζα του 1 ήταν μεγαλύτερη ή και τα δύο, ώστε η τριβή στο σώμα 1 να αυξάνονταν και να γινόταν μεγαλύτερη ή ίση με την τάση.

Από την (1x) βρίσκουμε την τάση αντικαθιστώντας την τιμή της επιτάχυνσης:
$$T = \mu_k m_1 g + m_1 a \Rightarrow T = (\mu_k g + a) \cdot m_1 \Rightarrow T = (0{,}15 \cdot 10 + 0{,}8) \cdot 6{,}4 = 2{,}3 \cdot 6{,}4 = 13{,}72\ \mathrm{N}$$
Για επαλήθευση την υπολογίζουμε και από την (2)
$$T = m_2(g - a) \Rightarrow T = 1{,}6 \cdot (10 - 0{,}8) = 16 - 0{,}8 - 0{,}48 = 13{,}72\ \mathrm{N}$$
Παρατηρούμε ότι η τάση στο νήμα αυξήθηκε.

6. Η άσκηση 1 με τριβή

Μεταξύ του δαπέδου και των σωμάτων υπάρχει τριβή ολίσθησης με συντελεστή μ_k=0,15. Όλα τα άλλα δεδομένα είναι ίδια με την άσκηση 1: m_1=5 kg, m_2=3 kg και T_1=16 N. Βρείτε πάλι την επιτάχυνση a και την τάση T_2.

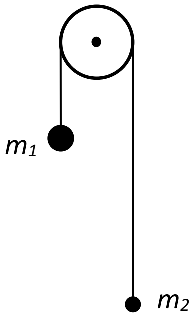


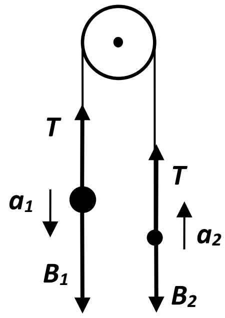
Λύση:

Επειδή έχουμε ισορροπία κατακόρυφα, τα βάρη θα είναι ίσα με τις κάθετες αντιδράσεις
$$N_1 = B_1 \Rightarrow N_1 = m_1 g = 5 \cdot 10 = 50\ \mathrm{N}$$
$$N_2 = B_2 \Rightarrow N_2 = m_2 g = 3 \cdot 10 = 30\ \mathrm{N}$$
Οπότε, οι τριβές σε κάθε σώμα θα είναι ίσες με :
$$f_1 = \mu_k N_1 = 0{,}15 \cdot 50 = 7{,}5\ \mathrm{N}$$
$$f_2 = \mu_k N_2 = 0{,}15 \cdot 30 = 4{,}5\ \mathrm{N}$$
Στην συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σύστημα περιλαμβάνονται τώρα και οι δύο τριβές.
Η επιτάχυνση του συστήματος οριζόντια σύμφωνα με το 2$^{\text{ο}}$ νόμο είναι :
$$a = \frac{F_{o\lambda}}{M_{o\lambda}} \Rightarrow a = \frac{T_1 - f_1 - f_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{16 - 7{,}5 - 4{,}5}{5 + 3} = \frac{3}{8} \Rightarrow a = 0{,}375\ \mathrm{m/s^2}$$
Εφαρμόζοντας το 2$^{\text{ο}}$ νόμο στο σώμα 2 βρίσκουμε την τάση T_2 :
$$T_2 - f_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = f_2 + m_2 a \Rightarrow T_2 = 4{,}5 + 3 \cdot 0{,}375 = 5{,}625\ \mathrm{N}$$
Η επιτάχυνση μειώθηκε δραματικά. Η τάση όμως όχι τόσο γιατί πρέπει να υπερνικήσει και την τριβή εκτός του να επιταχύνει το σώμα.

7. Μηχανή Atwood (και τα δύο σώματα να κρέμονται)

Η μηχανή Atwood χρησιμοποιείται για τη μελέτη της επιταχυνόμενης κίνησης καθώς με κατάλληλη εκλογή των δύο μαζών m_1 και m_2 μπορούμε να πετύχουμε μικρές επιταχύνσεις που να μπορούν να μελετηθούν στο σχολικό εργαστήριο με απλά χρονόμετρα και κανόνες. Το νήμα και η τροχαλία θεωρούνται αμελητέας μάζας, το νήμα είναι μη εκτατό και η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές. Η τάση στο νήμα θα είναι ίδια και στα δύο άκρα του καθώς έχει μηδενική μάζα και άρα η ολική δύναμη πάνω του πρέπει να είναι μηδέν.
Πόση είναι η επιτάχυνση των σωμάτων a και η τάση του νήματος T αν οι μάζες τους είναι m_1=3 kg και m_2= 2 kg





Λύση :
Στο κάθε σώμα δρα το βάρος του και η τάση του νήματος (και τα δύο σε κατακόρυφη διεύθυνση). Τα δύο σώματα κινούνται με επιταχύνσεις που έχουν ίσο μέτρο a_1=a=a_2 αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση. Θεωρούμε ότι θα κινηθούν όπως στο σχήμα. Το ελαφρύ προς τα πάνω και το βαρύ προς τα κάτω. Επιλέγουμε ως θετική την κατεύθυνση προς τα πάνω, οπότε θέτουμε $\vec{a}_1 = -a$ και $\vec{a}_2 = a$. Γράφουμε το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για τα δύο σώματα ξεχωριστά και βρίσκουμε την επιτάχυνση και την τάση του νήματος :

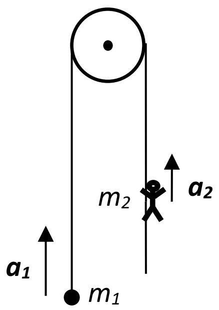
$$\begin{matrix} \vec{F}_{o\lambda,\mathbf{1}} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{o\lambda,\mathbf{2}} = m_2\vec{a}_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T - B_1 = -m_1 a \\ T - B_2 = m_2 a \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m_1 g - T = m_1 a & (1) \\ T - m_2 g = m_2 a & (2) \end{matrix}$$

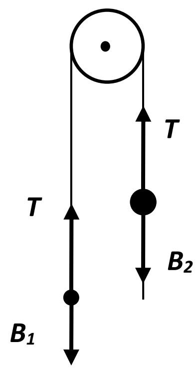
Προσθέτουμε τις εξισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε το a. Στη συνέχεια το αντικαθιστούμε σε μια από τις δύο και βρίσκουμε το T:

$$\begin{matrix} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \dfrac{3-2}{3+2} \cdot 10 = 2\ \mathrm{m/s^2} \\ T = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3+2} \cdot 10 = 24\ \mathrm{N} \end{matrix}$$

Παρατήρηση: Αν είχε προκύψει αρνητική τιμή για την επιτάχυνση τότε θα συμπεράναμε ότι τα σώματα θα κινηθούν σε αντίθετη φορά από αυτή που θεωρήσαμε στο σχήμα. Όμως αυτό δεν συμβαίνει.

8. Παραλλαγή της Atwood (τα δύο σώματα να μην έχουν κοινή επιτάχυνση)
Υπεραθλητής μάζας m_2= 70,0 kg ανεβαίνει με επιτάχυνση a_2=0,200 m/s^2 , τραβώντας τη δεξιά πλευρά του σκοινιού.
Με τι επιτάχυνση a_1 ανέρχεται η μάζα m_1 = 65,0 kg που είναι ανηρτημένη από την αριστερή πλευρά του σκοινιού; Πόση είναι η τάση του σκοινιού ;





Λύση: Ο αθλητής κινείται σε σχέση με το σκοινί άρα δεν θα έχει την ίδια επιτάχυνση με τη μάζα που είναι σταθερά δεμένη στην άλλη άκρη του σκοινιού. Παίρνουμε πάλι ως θετική τη φορά προς τα πάνω. Για καθένα από τα δύο σώματα ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται :

$$\begin{matrix} \vec{F}_{o\lambda,\mathbf{1}} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{o\lambda,\mathbf{2}} = m_2\vec{a}_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T - B_1 = m_1 a_1 \\ T - B_2 = m_2 a_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T - m_1 g = m_1 a_1 & (1) \\ T - m_2 g = m_2 a_2 & (2) \end{matrix}$$

Η τάση βρίσκεται αμέσως από την εξίσωση (2). Την αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε την επιτάχυνση a_1.

$$T = m_2\,(g + a_2)$$

$$m_1 a_1 = m_2\,(g + a_2) - m_1 g \Rightarrow a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + m_2 a_2}{m_1}$$

Οπότε :

$$a_1 = \frac{(70 - 65) \cdot 10 + 70 \cdot 0{,}2}{65} = \frac{64}{56} = 0{,}985\ \mathrm{m/s^2}$$

και $$T = 70 \cdot (10 + 0{,}2) = 714\ \mathrm{N}$$

Και τα δύο σώματα τώρα θα κινηθούν προς τα πάνω.