Συστήματα εξισώσεων

- Τα συστήματα εξισώσεων αποτελούνται από μια ομάδα N εξισώσεων οι οποίες περιλαμβάνουν N αγνώστους.
  - N είναι ένας αριθμός με τιμή 2 ή μεγαλύτερη

Η στάνταρ μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 2ης τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 2ης τάξης γραμμένο σε στάνταρ μορφή είναι:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

όπου:

- x_1 και x_2 είναι οι άγνωστες ποσότητες (π.χ.: τα ρεύματα I_1 και I_2)
- τα ‘a’ είναι οι **συντελεστές** των αγνώστων (αντιπροσωπεύουν τις τιμές αντιστάσεων του κυκλώματος) και
- τα ‘b’ είναι οι **σταθερές** (αντιπροσωπεύουν τις τιμές των πηγών τάσης στο κύκλωμα)

Παράδειγμα ενός συστήματος εξισώσεων 2ης τάξης

Υποθέστε ότι οι παρακάτω δύο εξισώσεις

$$2I_1 = 8 - 5I_2$$

$$4I_2 - 5I_1 + 6 = 0$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με δύο άγνωστα ρεύματα I_1 και I_2.

Οι συντελεστές των I_1 και I_2 είναι τιμές αντιστάσεων και οι σταθερές είναι τάσεις στο κύκλωμα).

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή ως εξής:

$$2I_1 + 5I_2 = 8$$

$$-5I_1 + 4I_2 = -6$$

Η στάνταρ μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 3ης τάξης γραμμένο σε στάνταρ μορφή είναι:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Παράδειγμα ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης

Υποθέστε ότι οι παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$4I_3 + 2I_2 + 7I_1 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 - 7 = 0$$

$$8 = I_1 + 2I_2 + 5I_3$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με τρία άγνωστα ρεύματα I_1, I_2 και I_3.

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή ως εξής:

$$7I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 = 7$$

$$I_1 + 2I_2 + 5I_3 = 8$$

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2ης τάξης με ορίζουσες

Ας λύσουμε το προηγούμενο σύστημα εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

με χρήση οριζουσών (determinants)

Βήμα 1: Φτιάχνουμε τη χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών των άγνωστων x_1, x_2

$$\begin{array}{|cc|l}
\multicolumn{1}{c}{\text{1η στήλη}} & \multicolumn{1}{c}{\text{2η στήλη}} & \\
2 & 6 & \leftarrow \text{1η γραμμή} \\
3 & 6 & \leftarrow \text{2η γραμμή}
\end{array}$$

και υπολογίζουμε την τιμή της πολλαπλασιάζοντας ‘χιαστί’ τους αριθμούς και αφαιρώντας τα δύο γινόμενα

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +(2)(6) - (3)(6) = -6$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2ης τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 2: Φτιάχνουμε την ορίζουσα του πρώτου αγνώστου x_1, αντικαθιστώντας στην ορίζουσα των συντελεστών $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ την 1η στήλη με τους σταθερούς αριθμούς στο δεξιό μέλος των εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

Η ορίζουσα του x_1 είναι

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

και η τιμή της υπολογίζεται όπως πριν

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = +(8)(6) - (2)(6) = 36$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2ης τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 3: Λύνουμε για τον άγνωστο x_1 διαιρώντας την ορίζουσά του δια της ορίζουσας των συντελεστών:

$$x_1 = \frac{36}{-6} = \mathbf{-6}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και την τιμή του δεύτερου αγνώστου του συστήματος

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

Δηλαδή,

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{+(2)(2) - (3)(8)}{-6} = \frac{-20}{-6} = \frac{10}{3}$$

Παράδειγμα 4-1 Λύστε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τα άγνωστα ρεύματα I_1 και I_2:

$$2I_1 - 5I_2 = 10$$
$$6I_1 + 10I_2 = 20$$

Λύση

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = (2)(10) - (6)(-5) = 50$$

Λύνουμε για το ρεύμα I_1:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(10)(10) - (20)(-5)}{50} = \frac{100 + 100}{50} = \boldsymbol{4\ A}$$

Ομοίως, λύνουμε για το ρεύμα I_2:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(2)(20) - (6)(10)}{50} = \frac{40 - 60}{50} = \boldsymbol{-0.4\ A}$$

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες

Ας βρούμε τα άγνωστα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 στο παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων

$$I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 7$$

$$4I_2 + I_3 = 8$$

$$-5I_1 + I_2 + 6I_3 = 9$$

Βήμα 1: Φτιάχνουμε τη χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών των άγνωστων I_1, I_2 και I_3

$$\begin{array}{ccc} \text{Συντελεστές του } I_1 & \text{Συντελεστές του } I_2 & \text{Συντελεστές του } I_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 2: Ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες στα δεξιά της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

Βήμα 3: Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς κάθε διαγώνιου προς τα κάτω

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

και προσθέτουμε τα τρία γινόμενο, $(1)(4)(6) + (3)(1)(-5) + (-2)(0)(1) = 9$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες (*… συνέχεια*)

Βήμα 3: Ομοίως, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς κάθε διαγώνιου προς τα πάνω

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

και προσθέτουμε τα τρία γινόμενο, (-5)(4)(-2) + (1)(1)(1) + (6)(0)(3) = 41

Αφαιρούμε τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, 9 – 41= - 32.

Αυτή είναι η τιμή της ορίζουσας των συντελεστών, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες (*… συνέχεια*)

Βήμα 4: Κατασκευάζουμε την ορίζουσα για το ρεύμα I_1 (όπως στα συστήματα 2ης τάξης)

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

και την υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \\ 9 & 1 \end{matrix} = (7)(4)(6) + (3)(1)(9) + (-2)(8)(1) - (9)(4)(-2) - (1)(1)(7) - (6)(8)(3) =$$

$$=100$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες *(… συνέχεια)*

Βήμα 5: Η τιμή του ρεύματος I_1 είναι το πηλίκο της τιμής της ορίζουσας του I_1 δια της ορίζουσας των συντελεστών:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{100}{-32} = \mathbf{-3.125\ \boldsymbol{A}}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε τα υπόλοιπα ρεύματα, I_2 και I_3.

Παράδειγμα 4-2 Βρείτε την τιμή του ρεύματος I_2 από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$2I_1 + 0.5I_2 + I_3 = 0$$
$$0.75I_1 + 2I_3 = 1.5$$
$$3I_1 + 0.2I_2 = -1$$

Λύση

Η χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ρευμάτων I_1, I_2 και I_3 είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}$$

Το ζητούμενο ρεύμα I_2 δίνεται από το κλάσμα:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}}$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}}$$

Η ορίζουσα του αριθμητή υπολογίζεται

$$\left|\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0.75 & 1.5 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2)(1.5)(0)+(0)(2)(3)+(1)(0.75)(-1)$$

$$-(3)(1.5)(1)-(1)(2)(2)-(0)(0.75)(0)$$

$$= 0 + 0 - 0.75 - 4.5 - 4 - 0 = -9.25$$

Η ορίζουσα του παρονομαστή είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0)(0) + (0.5)(2)(3) + (1)(0.75)(0.2)$$

$$-(3)(0)(1) - (0.2)(2)(2) - (0)(0.75)(0.5) = 2.35$$

Επομένως, $I_2 = \frac{-9.25}{2.35} = \boldsymbol{-3.94\ A}$