ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 5

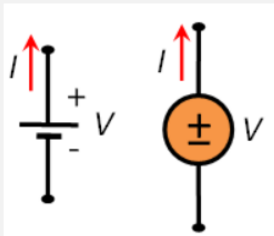
Επαγωγή και χωρητικότητα

- Ο επαγωγός (πηνίο)
- Ο πυκνωτής
- Σειριακοί και παράλληλοι συνδυασμοί επαγωγής και χωρητικότητας
- Αμοιβαία επαγωγή

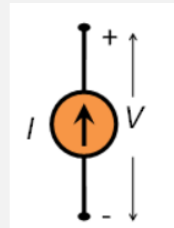
Ο επαγωγός
(inductor)

- Συμβολισμός και αναφορά τάσης και ρεύματος
- Η εξίσωση $v - i$ σε ένα πηνίο
- Η ισχύς σε ένα πηνίο

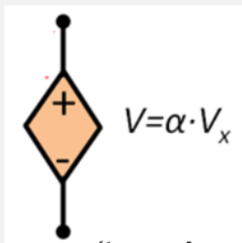
Στοιχεία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων (Κεφ. 2)
Σύμβολα, πόλωση αναφοράς τάσης V και φορά αναφοράς ρεύματος I



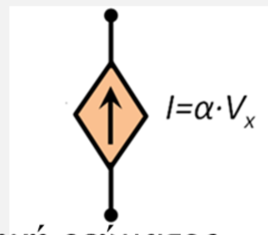
Ανεξάρτητη πηγή τάσης



Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος

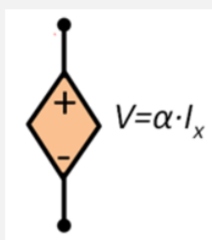


Πηγή τάσης εξαρτώμενη από τάση

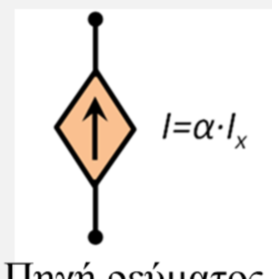


Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από τάση

(Ωμική) αντίσταση



Πηγή τάσης εξαρτώμενη από ρεύμα



Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από ρεύμα

Επαγωγός: Γιατί να τον εισάγουμε σε ένα κύκλωμα (πέραν των πηγών και της αντίστασης); Τι είναι;

- Γιατί; Επειδή σε ένα κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται απότομα η τάση, το ρεύμα δεν μπορεί να πάρει αμέσως την τελική του μορφή που δίνεται από το νόμο του Ohm $I = V/R$ θεωρώντας μόνο την ωμική αντίσταση στο κύκλωμα.

- Αυτήν την 'αδράνεια' του κυκλώματος σε μεταβολές του ρεύματος ονομάζουμε **επαγωγή** (**induction**) ή **αυτεπαγωγή** (**self-indiction**) του κυκλώματος.

- Η επαγωγή οφείλεται σε φαινόμενα που σχετίζονται με τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν τα ρεύματα των κυκλωμάτων. Η μελέτη της επαγωγής είναι αντικείμενο του Ηλεκτρομαγνητισμού.

- Για τις ανάγκες της ανάλυσης κυκλωμάτων, μας αρκεί να τη συμβολίσουμε σαν ένα στοιχείο (όπως την αντίσταση R).

- Το στοιχείο αυτό ονομάζουμε **επαγωγό** (**inductor**), η τιμή του L είναι η επαγωγή του κυκλώματος και το σύμβολό του είναι το πηνίο (διότι, από όλες τις μορφές αγωγών, τα πηνία παρουσιάζουν εντονότερα το φαινόμενο της επαγωγής)

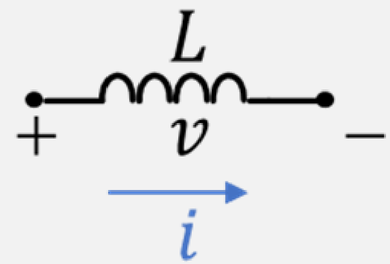
Η εξίσωση $v - i$ στον επαγωγό

Εικ. (α), γραφικό σύμβολο επαγωγού

- L είναι η επαγωγή του κυκλώματος
- Μονάδα: henry (H)

(α)

Εικ. (β), αναφορά πολικότητας της τάσης και της φοράς του ρεύματος σε έναν επαγωγό



(β)

Η εξίσωση $v - i$ στον επαγωγό

$$v = L\frac{di}{dt}$$

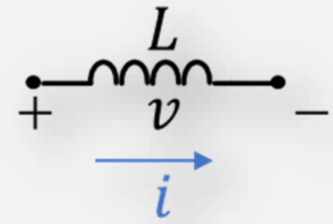
- v σε volt
- i σε ampere
- t σε second
- L σε henry: $1\mathrm{H} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}}$

Συνέπειες της εξίσωσης $v - i$ επαγωγής

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Η τάση που αναπτύσσεται στα άκρα ενός επαγωγού είναι ανάλογη **της μεταβολής του ρεύματος** σε αυτόν.

Σημαντικές παρατηρήσεις



1. Σε έναν επαγωγό, το ρεύμα δεν μπορεί να αλλάξει στιγμιαία. Δηλαδή, δεν μπορώ να έχω πεπερασμένη μεταβολή του ρεύματος ($di \neq 0$) σε μηδενικό χρόνο ($dt = 0$).

   Μια τέτοια στιγμιαία μεταβολή θα απαιτούσε άπειρη τάση ($v \propto \frac{di}{dt} \rightarrow \infty$);;;

2. Όταν το ρεύμα είναι σταθερό (σε dc κυκλώματα) η τάση από επαγωγή είναι μηδενική.

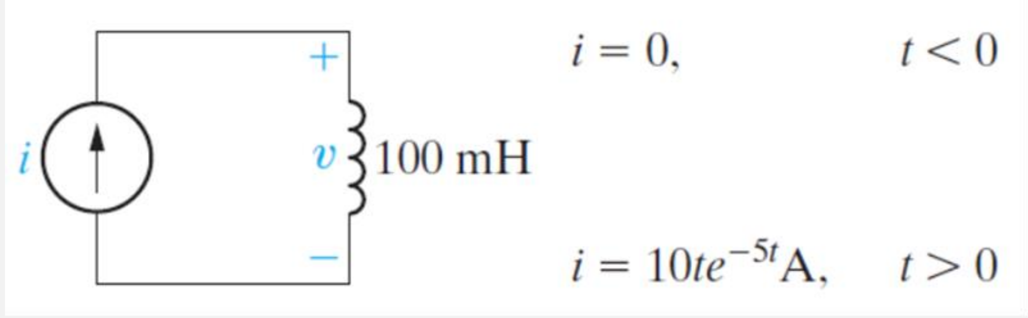
   Δηλαδή, ο επαγωγός στο dc ρεύμα συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα.

Παράδειγμα 5.1 Δίνεται το ρεύμα σε έναν επαγωγό, βρείτε την τάση στα άκρα του

Η ανεξάρτητη πηγή ρεύματος στο κύκλωμα της εικ. (α) παράγει μηδενικό ρεύμα για $t < 0$ και έναν παλμό $10te^{-5t}$ A, για $t > 0$

(α) Σχεδιάστε την κυματομορφή του ρεύματος.

(β) Ποια χρονική στιγμή το ρεύμα μεγιστοποιείται;



(α)

Λύση

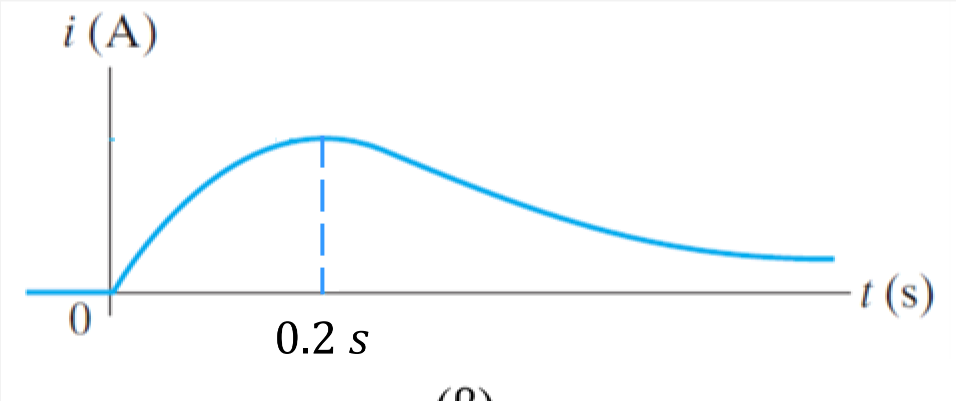
(α) Κυματομορφή ρεύματος $i(t)$, *εικ. (β)*

(β) Όταν $i = I_{max}$, $di/dt = 0$

$$\frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = 0$$

$$10e^{-5t}(1 - 5t) = 0$$

$$t = 0.2\ s$$

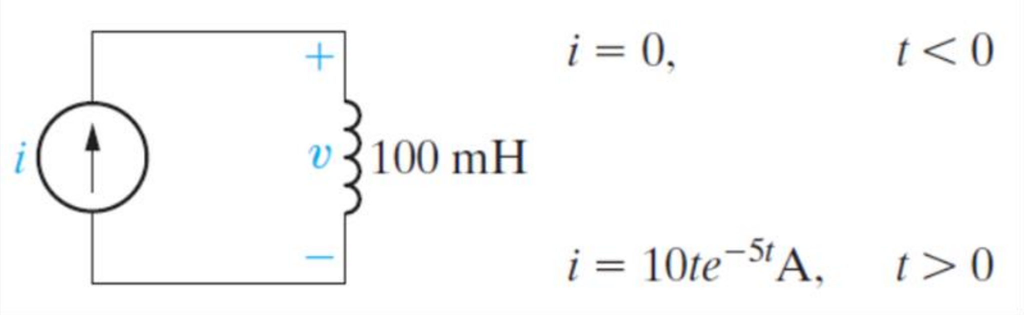


(β)

(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 5.1 (… *συνέχεια*)

(γ) Εκφράστε την τάση v στα άκρα του επαγωγού 100 mH σαν συνάρτηση του χρόνου.



(α)

Λύση

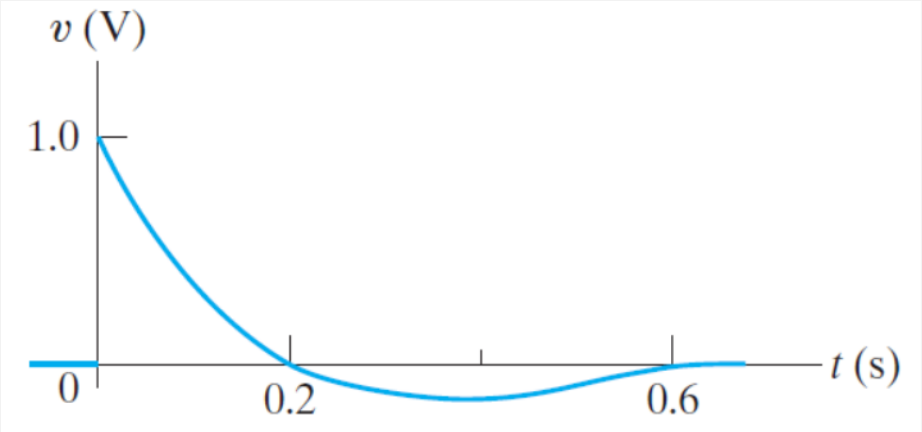
$$v = L\frac{di}{dt}$$

– Για $t < 0, \quad v = 0$

– για $t > 0, \quad v = (0.1)\frac{d}{dt}(10te^{-5t})$

$$v = e^{-5t}(1 - 5t) \text{ V}$$

(δ) Σχεδιάστε την κυματομορφή της τάσης.



(γ)

Λύση

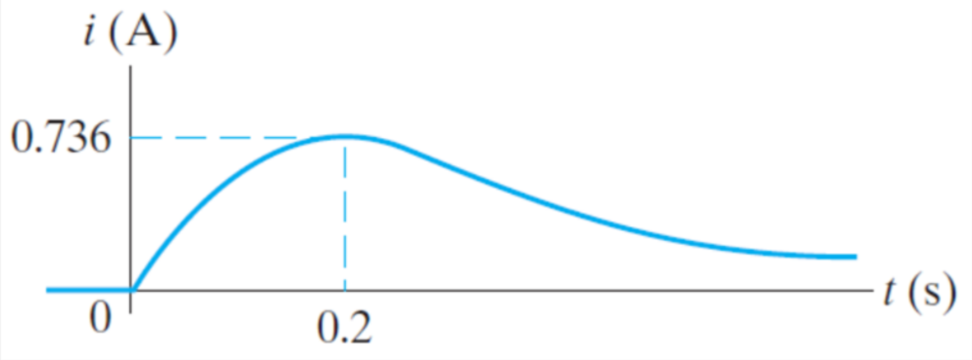
Η κυματομορφή τάσης $v(t)$, *εικ. (γ)*

(*συνεχίζεται …*)

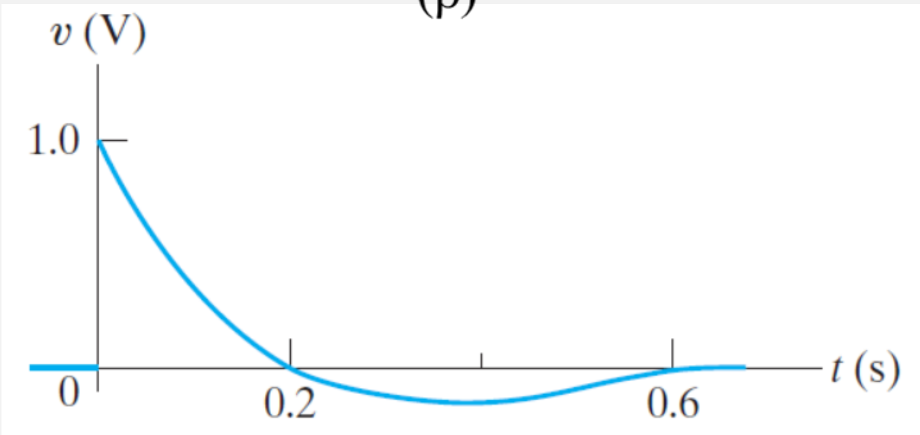
Παράδειγμα 5.1 (… *συνέχεια*)

(ε) Μεγιστοποιούνται ρεύμα και τάση την ίδια χρονική στιγμή;

(στ) Ποια χρονική στιγμή αλλάζει πολικότητα η τάση;



(β)



(γ)

Λύση

(ε) Όχι, η τάση v είναι ανάλογη του $\frac{di}{dt}$, όχι του i

(στ) *Εικ. (β), (γ)*: η τάση είναι ανάλογη της παραγώγου του ρεύματος,

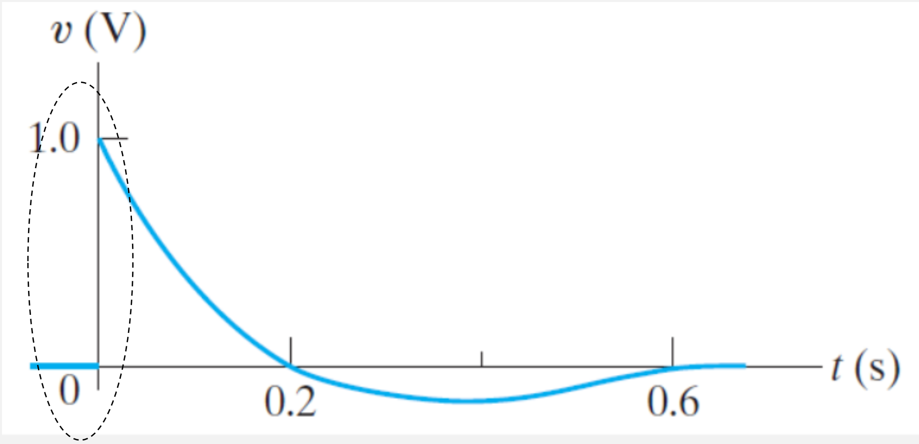
συνεπώς, μηδενίζεται και αλλάζει πολικότητα όταν το ρεύμα μεγιστοποιείται

για $t = 0.2\ s$

(*συνεχίζεται …*)

Παράδειγμα 5.1 (… *συνέχεια*)

(ζ) Παρατηρείται καμία στιγμιαία μεταβολή της τάσης στα άκρα του επαγωγού; Αν ναι, πότε;



(γ)

Λύση

(ζ) Ναι, για $t = 0$, *εικ. (γ)*

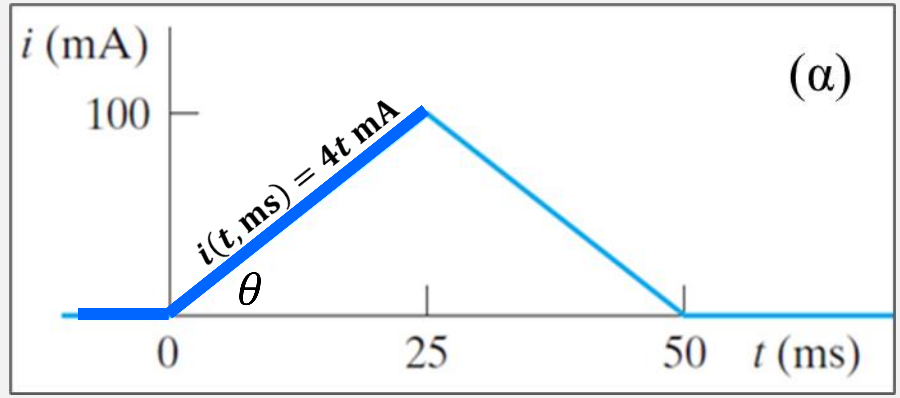
$$dv = (1.0 - 0)\ \mathrm{V} \neq 0, \text{ σε } \quad dt = 0$$

Σημείωση

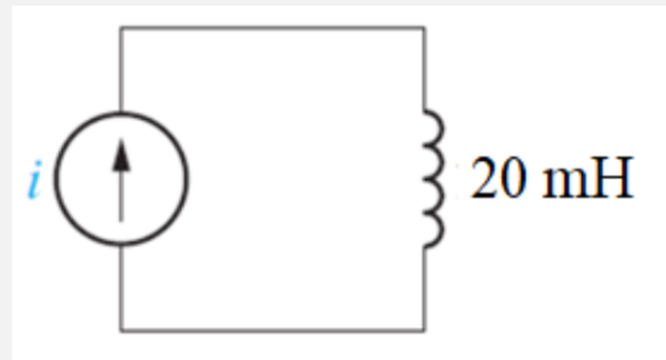
Σε ένα κύκλωμα επαγωγού η τάση μπορεί να αλλάξει στιγμιαία, το ρεύμα όχι.

Παράδειγμα 5.2

Στο πηνίο επαγωγής 20 mH της εικόνας εφαρμόζεται ο τριγωνικός παλμός ρεύματος της εικ. (α).



(α) Γράψτε τις εκφράσεις για το ρεύμα $i(t)$ στα τέσσερα χρονικά διαστήματα $t < 0$, $0 \leq t \leq 25$ ms, $25 \text{ ms} \leq t \leq 50$ ms και $t > 50$ ms.



Λύση

(α) Για $t < 0$, $\boldsymbol{i = 0}$

Για $0 \leq t \leq 25$ ms, $i(t) = \alpha \cdot t + \beta$,

όπου $\alpha = tan\theta = \dfrac{100 \text{ mA}}{25 \text{ ms}} = 4 \text{ A/s}$ (η κλίση της ευθείας)

και $\beta = 0$ (σημείο τομής με άξονα i)

Επομένως, για $0 \leq t \leq 25$ ms, $\boldsymbol{i(t, \text{ms}) = 4t \text{ mA}}$.

(συνεχίζεται …)

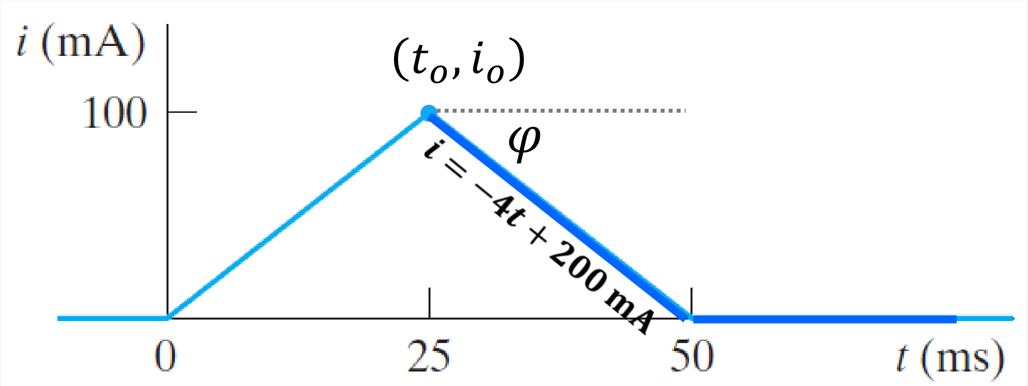
Λύση (… συνέχεια)

Για 25 ms $\leq t \leq$ 50 ms,

$$i - i_o = \alpha \cdot (t - t_o)$$

όπου, α η κλίση

και (t_o, i_o) οι συντεταγμένες της αρχής του ευθύγραμμου τμήματος



$$\alpha = tan\varphi = \frac{-100\ \text{mA}}{25\ \text{ms}} = -4\ \text{A/s}$$

και $(t_o, i_o) = (25\ \text{ms}, 100\ \text{mA})$.

Επομένως, για 25 ms $\leq t \leq$ 50 ms, $i - 100 = -4(t - 25)$

$$\boldsymbol{i = -4t + 200\ \text{mA}}$$

Για $t > 50$ ms, $\boldsymbol{i = 0}$

(συνεχίζεται …)

(β) Βρείτε την έκφραση για την τάση στα άκρα του πηνίου.

Λύση

Η τάση στα άκρα του πηνίου, *εικ. (β)*, είναι

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Για $t < 0$, $\frac{di}{dt} = 0 \implies v = 0$

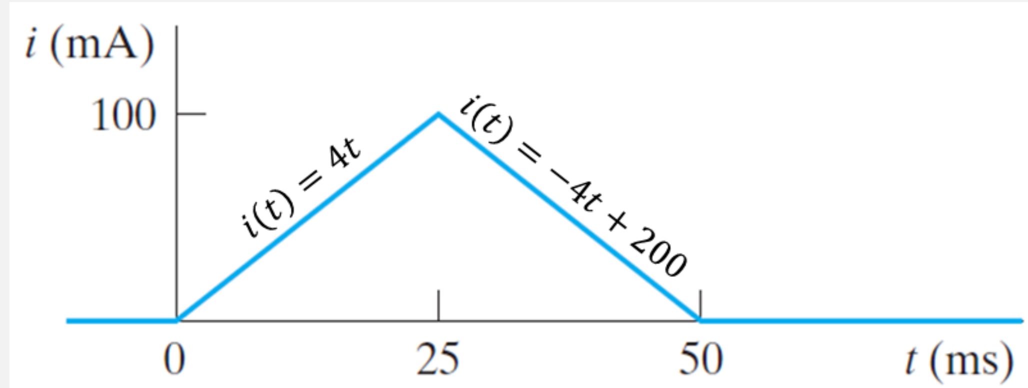
Για $0 \leq t \leq 25$ ms,

$$v = (0.02)\frac{d}{dt}(4t) = 0.08 \text{ V}$$

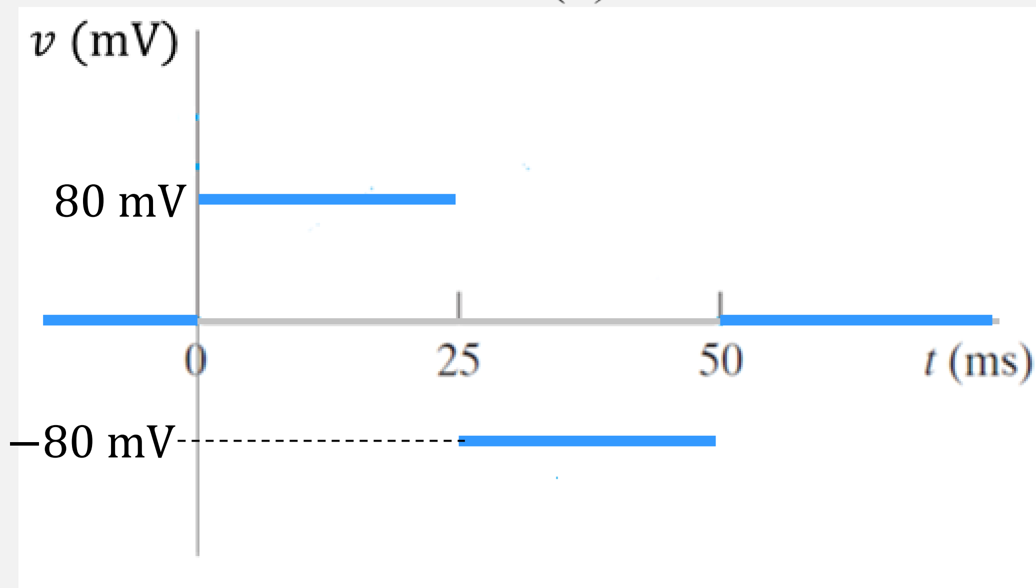
Για $25 \text{ ms} \leq t \leq 50$ ms,

$$v = (0.02)\frac{d}{dt}(-4t + 200)$$
$$v = -0.08 \text{ V}$$

Τέλος, για $t > 50$ ms, $v = 0$

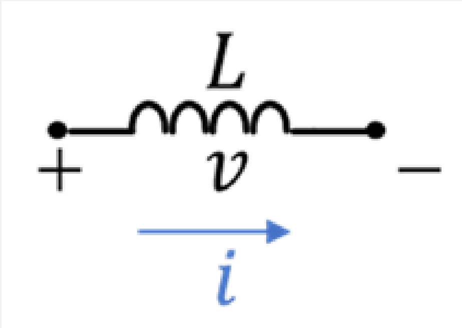


(α)



(β)

Η εξίσωση $i - v$ στον επαγωγό



$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$vdt = Ldi$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_o και t που το ρεύμα έχει τιμές i_o και i, αντίστοιχα, έχουμε

$$L\int_{i_o}^{i} di = \int_{t_o}^{t} vdt$$

$$i - i_o = \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} vdt$$

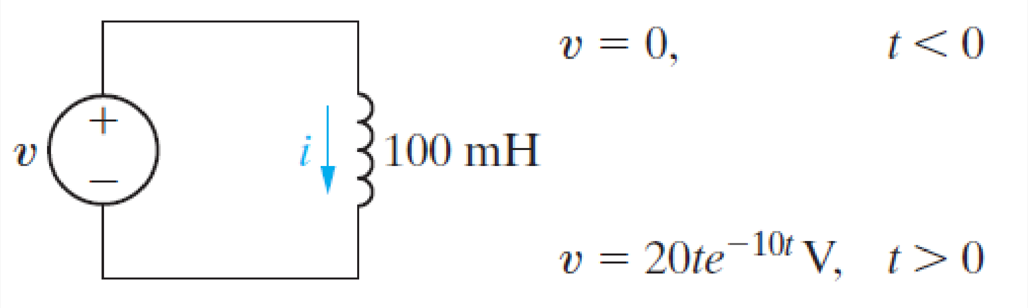
$$\boldsymbol{i = i_o + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} vdt}$$

Παράδειγμα 5.3 Δίνεται η τάση στα άκρα του επαγωγού, βρείτε το ρεύμα

Ο παλμός τάσης που εφαρμόζεται στον επαγωγό 100 mH του κυκλώματος της *εικ. (α)* είναι 0 για $t < 0$ και δίνεται από την έκφραση

$$v(t) = 20te^{-10t} \text{ V}$$

για $t > 0$. Υποθέστε $i = 0$ για $t \leq 0$.



(α)

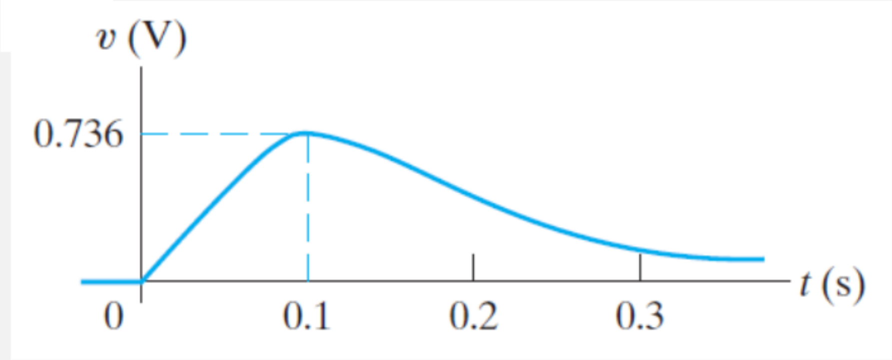
(α) Σχεδιάστε την τάση σαν συνάρτηση του χρόνου.

(β) Βρείτε και σχεδιάστε το ρεύμα στον επαγωγό σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

(α) Κυματομορφή της τάσης $v(t)$, *εικ. (β)*

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow 20e^{-10t}(1 - 10t) = 0$$
$$\Rightarrow t_{max} = 0.1\ s$$



(β)

(συνεχίζεται …)

Λύση (*… συνέχεια*)

(β) Το ρεύμα είναι

$$i = i_o + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v dt$$

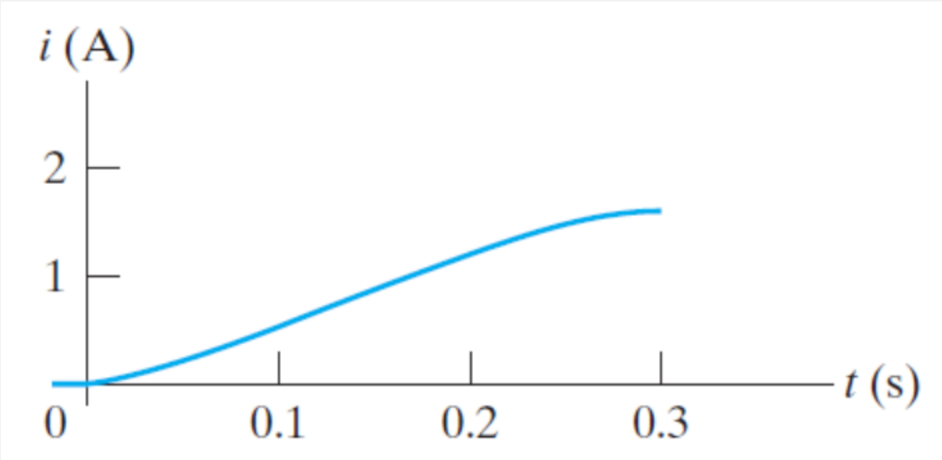
Επειδή για $t = 0,\ i = 0$, παίρνουμε

$$i = 0 + \frac{1}{0.1}\int_{0}^{t} 20te^{-10t} dt$$

$$i = 200\left[\frac{-e^{-10t}}{100}(10t+1)\right]\Bigg|_0^t \ *$$

$$i = 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t})\ \text{A}$$

για $t > 0$



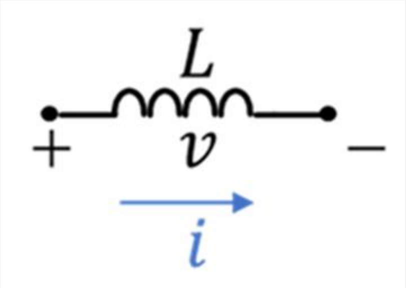
(γ)

Η κυματομορφή ρεύματος $i(t)$

$* \int te^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2}(\alpha t - 1)$

Η ισχύς και η ενέργεια στον επαγωγό

Η στιγμιαία ισχύς στον επαγωγό



$$\left.\begin{aligned} p &= vi \\ v &= L\frac{di}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \;\; \boldsymbol{p = Li\frac{di}{dt}}$$

Επίσης

$$\left.\begin{aligned} p &= vi \\ i &= i_o + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v dt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \;\; \boldsymbol{p = v\left[i_o + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v dt\right]}$$

Η ισχύς και η ενέργεια στον επαγωγό (συνέχεια)

Γενικά, η ισχύς που παράγεται ή καταναλώνεται από ένα σύστημα είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη σε αυτό κάθε χρονική στιγμή

$$p = \frac{dw}{dt}$$

Ειδικότερα, για έναν επαγωγό αυτεπάγωγης L

$$p = Li\frac{di}{dt}$$

Εξισώνοντας έχουμε

$$dw = Lidi$$

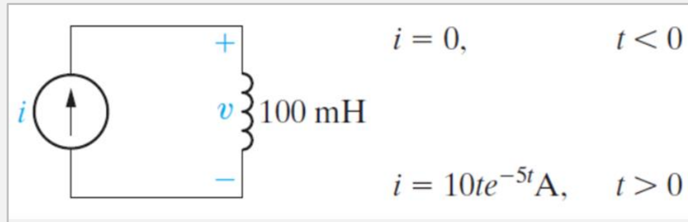
Ολοκληρώνοντας μεταξύ μιας μηδενικής αρχικής τιμής του ρεύματος στον επαγωγό ($i_o = 0$) και μιας τελικής τιμής i και αποδεχόμενοι το λογικό επιχείρημα ότι σε μηδενικό ρεύμα στον επαγωγό αντιστοιχεί μηδενική ενέργεια (σε μορφή μαγνητικού πεδίου) αποθηκευμένη σε αυτόν, παίρνουμε

$$\int_0^w dw = \int_0^i Lidi$$

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{2}Li^2}$$

Παράδειγμα 5.4

(α) Για το κύκλωμα του Παραδείγματος 5.1, *εικ. (α)*, σχεδιάστε τις κυματομορφές i, v, p και w ως προς το χρόνο. Ευθυγραμμίστε κατακόρυφα τις εικόνες ώστε να φαίνεται άμεσα η συμπεριφορά κάθε μεγέθους.



(α)

Λύση

(α) Οι κυματομορφές $i(t)$

$$i(t) = 10te^{-5t}\ \mathrm{A}$$

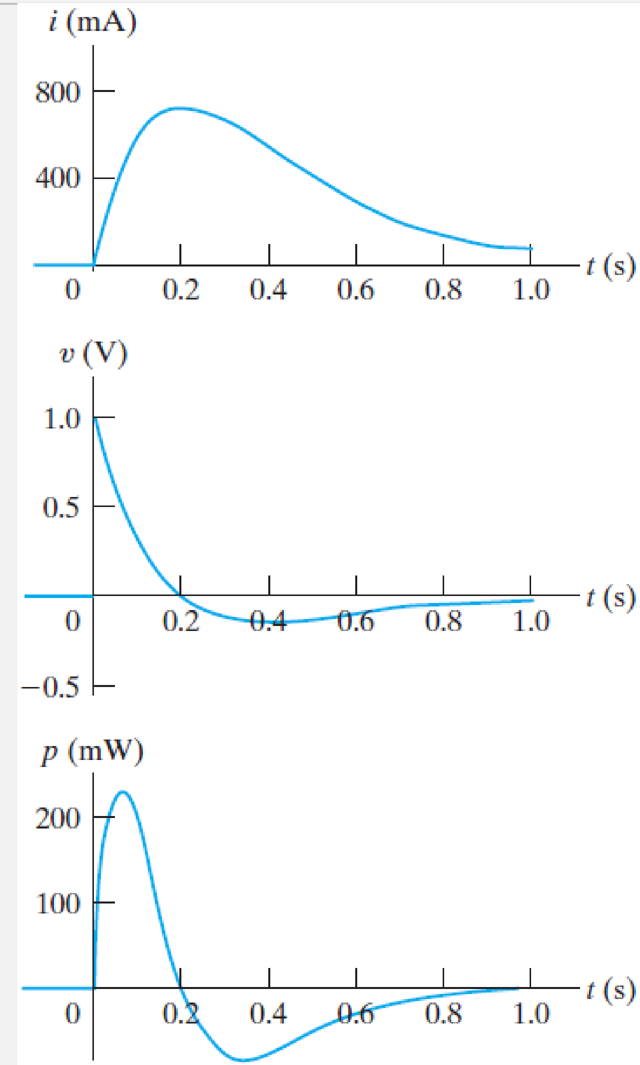
και $v(t)$

$$v(t) = e^{-5t}(1 - 5t)\ \mathrm{V}$$

όπως βρέθηκαν στη λύση του Παραδείγματος 5.1

Η ισχύς $p = vi = (10te^{-5t})[e^{-5t}(1 - 5t)]$

$$p = 10t(1 - 5t)e^{-10t}\ \mathrm{W}$$



(συνεχίζεται …)

Λύση *(…συνέχεια)*

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη (σε μορφή μαγνητικού πεδίου – μαγνητική ενέργεια) στον επαγωγό

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L(10te^{-5t})^2$$

$$w = 50Lt^2e^{-10t}\ \mathrm{J}$$

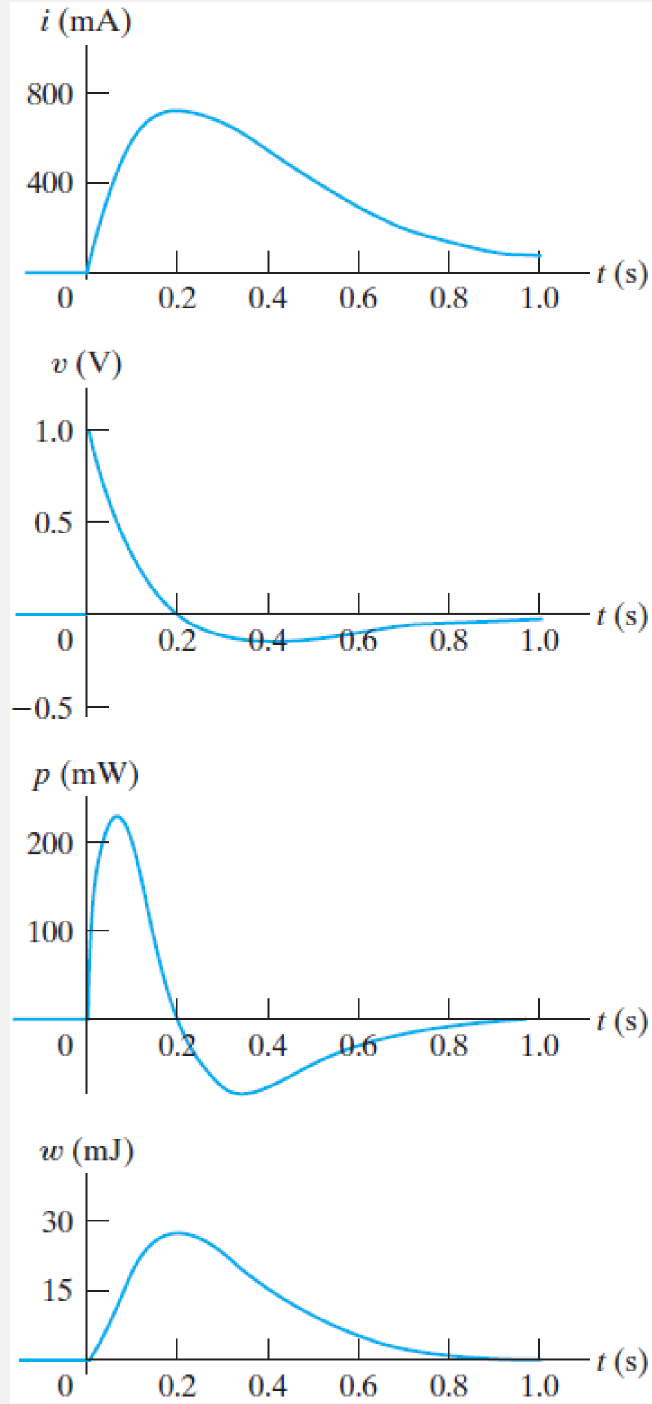
(β) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποθηκεύεται ενέργεια στον επαγωγό;

Ενέργεια αποθηκεύεται στον επαγωγό, όταν η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι αύξουσα.

Αυτό συμβαίνει στο διάστημα 0 ως 0.2 s.

Σημείωση, αυτό αντιστοιχεί στο διάστημα που η ισχύς είναι θετική, $p > 0$.

(συνεχίζεται …)



Λύση *(…συνέχεια)*

(γ) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποβάλλεται ενέργεια από τον επαγωγό (δηλαδή, λειτουργεί σαν πηγή);

Ενέργεια αποβάλλεται από τον επαγωγό, όταν η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι φθίνουσα.

Αυτό συμβαίνει για $t > 0.2$ s

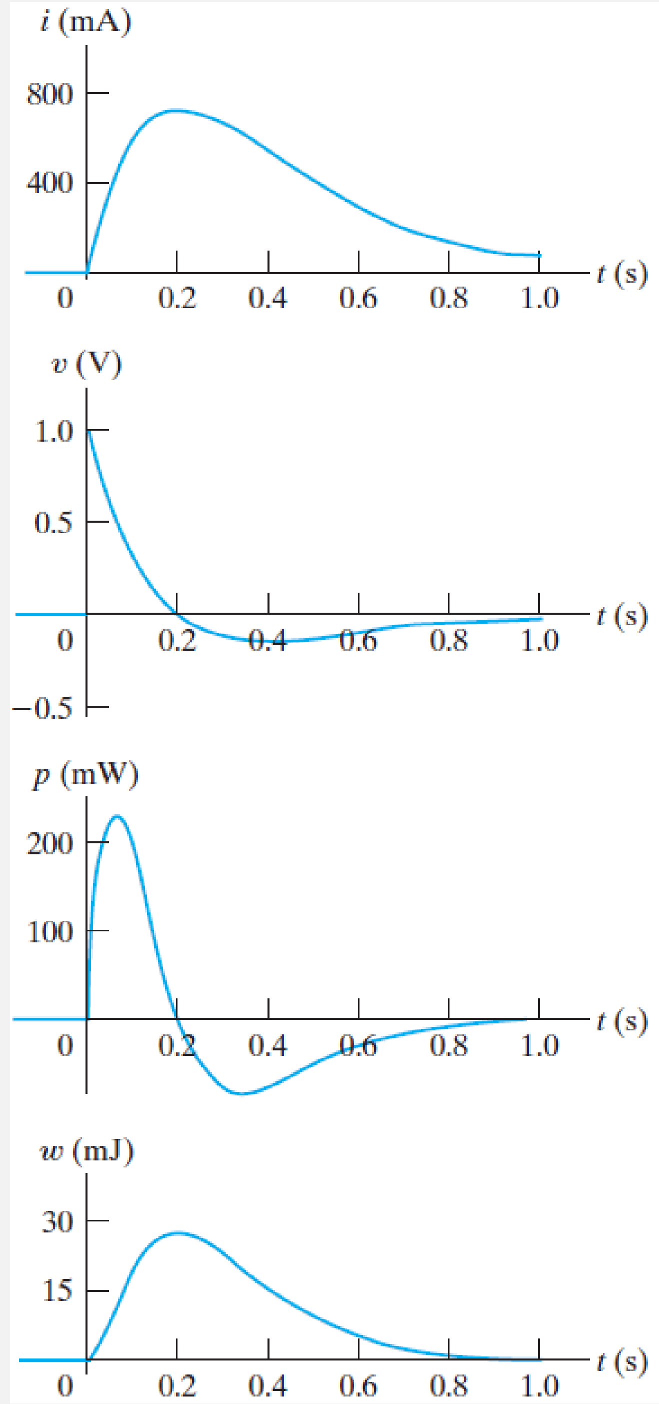
Σημειώστε, σε αυτό το διάστημα η ισχύς είναι αρνητική, $p < 0$.

(δ) Πόση είναι η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στον επαγωγό;

$$w = \frac{1}{2}Li^2$$

Η ενέργεια είναι μέγιστη όταν το ρεύμα είναι μέγιστο (συγκρίνετε καμπύλες i - w)

Επειδή $i_{\max} = 0.736$ A, προκύπτει $w_{\max} =$ 27.07 mJ



(συνεχίζεται …)

Λύση (…*συνέχεια*)

(ε) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_0^{0.2} pdt$ και $\int_{0.2}^{\infty} pdt$

$$p = vi = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}\ \text{W}$$

$$\int_0^{0.2} pdt = \int_0^{0.2} (10te^{-10t} - 5t^2e^{-10t})dt = 10\int_0^{0.2} te^{-10t}dt - 50\int_0^{0.2} t^2e^{-10t}dt$$

$$= 0.2e^{-0.2} = \mathbf{27.07\ mJ}$$

$$\int_{0.2}^{\infty} pdt = 10\int_{0.2}^{\infty} te^{-10t}dt - 50\int_{0.2}^{\infty} t^2e^{-10t}dt = -0.2e^{-0.2} = \mathbf{-27.07\ mJ}$$

Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της p ως προς t αντιπροσωπεύει την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί ή αποβληθεί από το σύστημα (τον επαγωγό)

Μεταξύ 0 και 0.2 s ενέργεια αποθηκεύεται στον επαγωγό που αποβάλλεται στη συνέχεια για $t > 0.2\ s$ κατά την απόσβεση του ρεύματός του

$$\boxed{\int te^{\alpha t}dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2}(\alpha t - 1)}$$

$$\boxed{\int t^2e^{\alpha t}dt = e^{\alpha t}\left(\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)}$$

Παράδειγμα 5.5

Υπολογίστε και σχεδιάστε την τάση, την ισχύ και την ενέργεια σε ένα πηνίο 132 μH στο οποίο εφαρμόζεται ένα αυξανόμενο εκθετικά σήμα ρεύματος με χρονική σταθερά τ = 15 ms και διάρκεια T = 25.0 ms. Η μέγιστη του σήματος είναι ίση με 1 A.

Λύση

Η χρονική εξάρτηση του ρεύματος είναι

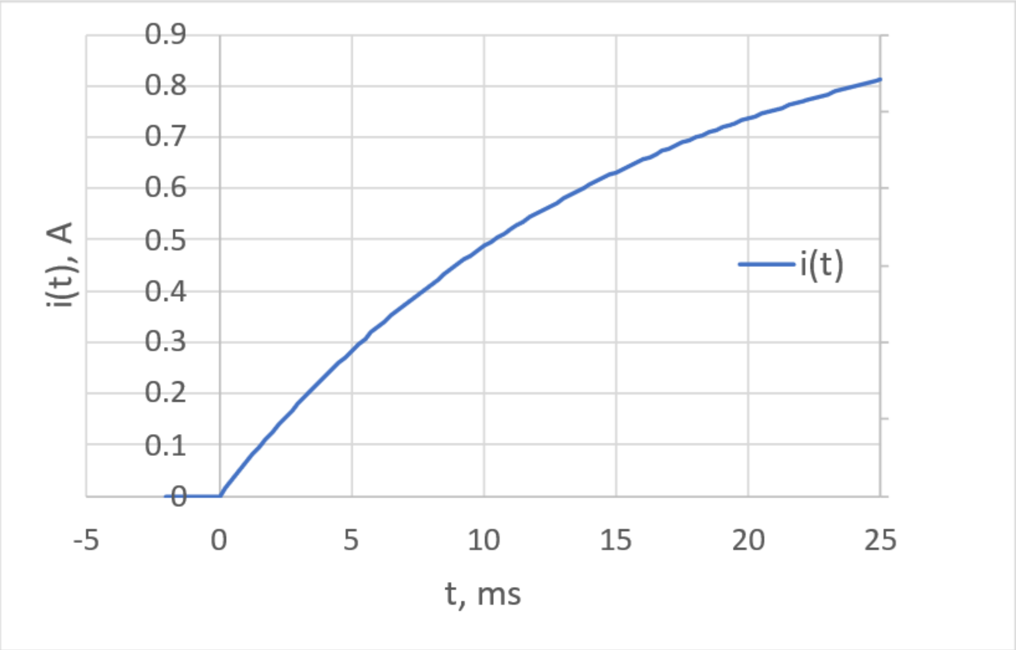
$$i(t) = I_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$i(t) = (1)\left(1 - e^{-t/(0.015)}\right)$$

ή,

$$i(t, \text{ms}) = 1 - e^{-t/15} \ \text{A}$$

για $0 < \text{t} \leq 25 \text{ ms}$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (συνέχεια)

$$i(t) = 1 - e^{-t/0.015} \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

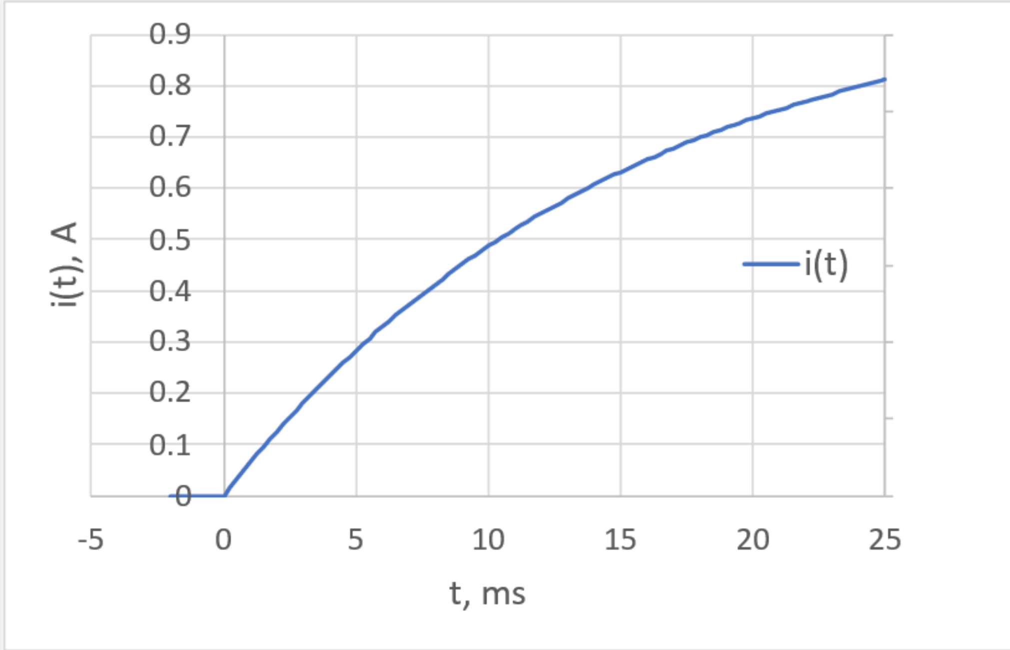
$$v(t) = L\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/0.015}\right)$$

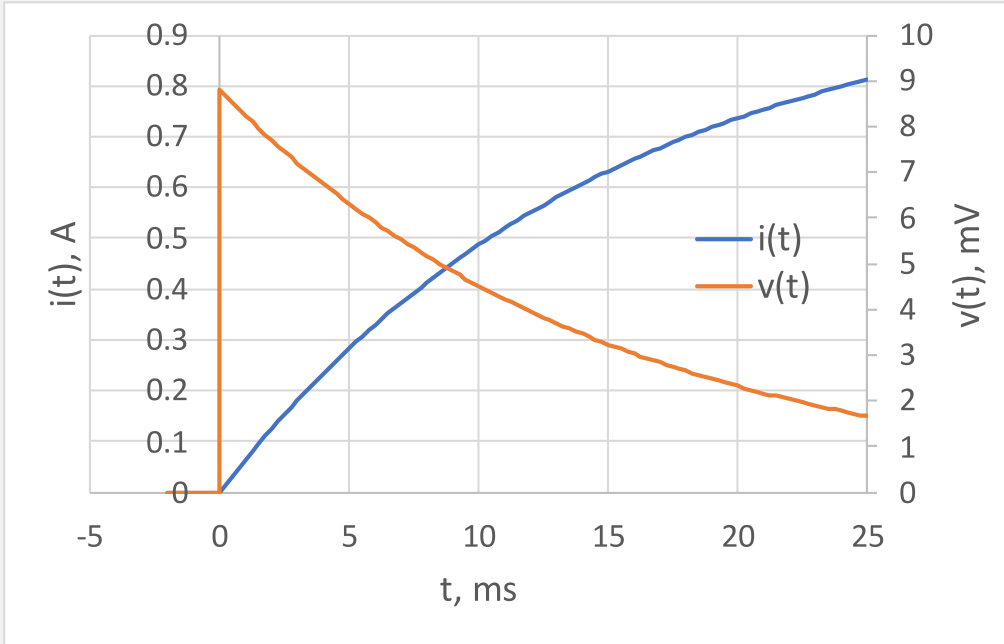
$$v(t) = (132 \times 10^{-6})\left(\frac{e^{-t/0.015}}{0.015}\right)$$

$$v(t) = (8.8 \times 10^{-3})e^{-t/0.015} \text{ V}$$

ή

$$v(t, \text{ms}) = 8.8e^{-t/15} \text{ mV}$$





(συνεχίζεται ...)

Λύση (συνέχεια)

$$i(t) = 1 - e^{-t/0.015} \text{ A}$$

$$v(t) = (8.8 \times 10^{-3}) e^{-t/0.015} \text{ V}$$

Η ισχύς που προσφέρεται στο πηνίο είναι

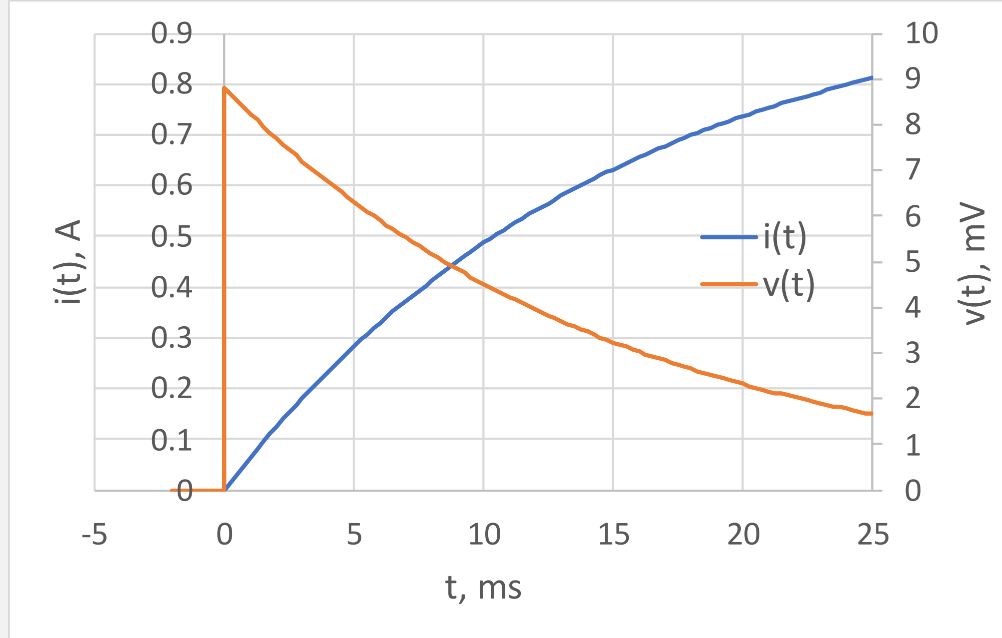
$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

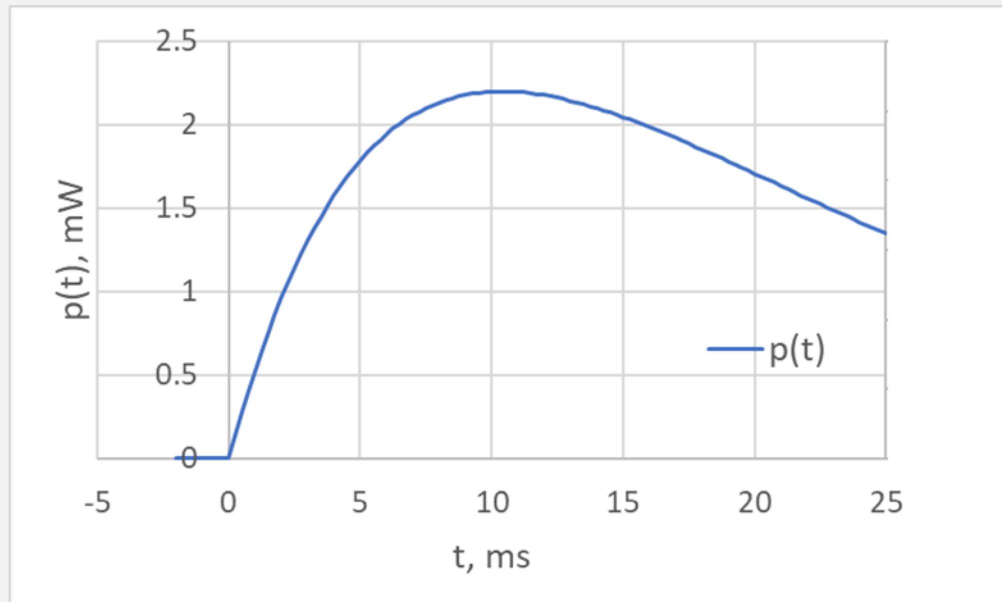
$$= (8.8 \times 10^{-3}) e^{-t/0.015} \left(1 - e^{-t/0.015}\right)$$

$$= (8.8 \times 10^{-3}) \left(e^{-t/0.015} - e^{-2t/0.015}\right)$$

ή

$$p(t, \text{ms}) = 8.8\left(e^{-t/15} - e^{-2t/15}\right) \text{ mW}$$





(συνεχίζεται ...)

Λύση (συνέχεια)

Η ενέργεια που βρίσκεται αποθηκευμένη στο πηνίο είναι

$$w(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

όπου, $i(t) = 1 - e^{-t/0.015}$ A

$$w(t) = \frac{1}{2}(132 \times 10^{-6})\left(1 - e^{-t/0.015}\right)^2$$

$$w(t) = (66 \times 10^{-6})\left(1 - e^{-t/0.015}\right)^2$$

ή

$$p(t, \mathrm{ms}) = 66\left(1 - e^{-t/15}\right)^2 \ \mu\mathrm{J}$$